Über die Induction in rotirenden Kugeln

Hertz, Heinrich

1880

§ 4. Vollständige Lösung für Kugeln und Hohlkugeln von endlicher Dicke

urn:nbn:de:bsz:31-279842

1. ohne Berücksichtigung der Selbstinduction:

$$\varphi = \omega \varrho \int_0^\infty \frac{\partial \chi}{\partial \varrho}\, dz.$$

Diesem φ ist eventuell eine Constante von der Grösse hinzuzufügen, dass in der Unendlichkeit $\varphi = 0$ wird. Die Formel, zu welcher wir gelangt sind, ist schon von Herrn Jochmann angegeben für den Fall, dass χ symmetrisch zur z Achse ist, es zeigt sich, dass dieselbe ganz allgemein gilt. Potential der freien Elektricität.

2. mit Berücksichtigung der Selbstinduction haben wir:

$$\overline{\varphi} = \omega \varrho \int_0^\infty \frac{\partial(\chi + \Omega)}{\partial \varrho}\, dz\,.$$

Für ∞ werdende ω erhalten wir, wenn χ symmetrisch zur x Achse ist:

$$\varphi = \omega \varrho \int_0^\infty \frac{\partial \chi_0}{\partial \varrho}\, dz + \frac{k}{2\pi} \int_0^\omega \frac{\partial \chi_1}{\partial \varrho}\, d\omega.$$

Das erste Glied wächst mit ω ins Unendliche.

Wir haben bei der Behandlung ebener Platten immer angenommen, dass nur auf einer Seite der bewegten Platte sich inducirende Magnete befinden; diese Voraussetzung ist unwesentlich. Ist sie nicht erfüllt, so zerlegen wir das gesammte Potential nach seinem Ursprung in zwei Theile, und behandeln jeden so, wie dies oben an einem von ihnen gezeigt ist.

§ 4.

Vollständige Lösung für Kugeln und Hohlkugeln von endlicher Dicke.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der Induction in einer Hohlkugel von endlicher Dicke. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, mögen zunächst nur im äussern Raum inducirende Magnete vorausgesetzt werden.

Es seien U, V, W die Componenten eines Vectorpotentiales, welches von geschlossenen Strömen herrührt, die ganz oder theilweise im Innern der Kugel liegen. Wir suchen die von U, V, W inducirten Ströme u', v', w'. Für dieselben bestehen die Gleichungen:

Die Differentialgleichungen.

$$\varkappa u' = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega x \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$\varkappa v' = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega y \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$\varkappa w' = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \omega x \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \omega y \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)$$

ferner im Innern:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

und an der Oberfläche:

$$ux + vy + wz = 0.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$O = x\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + y\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Unter Beachtung des Umstandes, dass

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

ist, erhalten wir nun für φ die Bedingungen:

In der Masse der Hohlkugel:

$$\Delta \varphi = 2\omega \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \omega\,(x \Delta V - y \Delta U),$$

und an der Grenze

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{\omega}{\varrho}\left\{\varrho^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) - zO\right\}.$$

Satz, welcher die Grundlage des Folgenden bildet.

Wir beweisen zunächst den folgenden Satz:

Haben $U\ V\ W$ die Form:

$$U = \varrho^m \left(y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right)$$

$$V = \varrho^m \left(z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right)$$

$$W = \varrho^m \left(x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right),$$

welche Form der Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

genügt, so sind die Lösungen der vorstehenden Differentialgleichungen:

$$\varphi = -\omega \varrho^m \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n z \chi_n \right)$$

$$= \omega \varrho^{m+1} \sin \theta \frac{\partial \chi_n}{\partial \theta}$$

$$u' = -\frac{\omega}{\varkappa} \varrho^m \left(y \frac{\partial \chi'_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi'_n}{\partial y} \right)$$

$$v' = -\frac{\omega}{\varkappa} \varrho^m \left(z \frac{\partial \chi'_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi'_n}{\partial z} \right)$$

$$w' = -\frac{\omega}{\varkappa} \varrho^m \left(x \frac{\partial \chi'_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi'_n}{\partial x} \right).$$

Um den Beweis der Richtigkeit zu führen, drücken wir zunächst die Bedingungen für φ in χ_n aus. Es ist (§ 1,4)

$$\varDelta U = m(m + 2n + 1) \varrho^{m-2} \left(y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right)$$

$$\varDelta V = m(m + 2n + 1) \varrho^{m-2} \left(z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right)$$

Beweis desselben.

$$\varDelta W = m(m + 2n + 1) \varrho^{m-2} \left(x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right)$$

$$y \varDelta U - x \varDelta V = m(m + 2n + 1) \varrho^{m-2} \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n z \chi_n \right)$$

$$z \varDelta V - y \varDelta W = m(m + 2n + 1) \varrho^{m-2} \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - n x \chi_n \right)$$

$$x \varDelta W - z \varDelta U = m(m + 2n + 1) \varrho^{m-2} \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - n y \chi_n \right)$$

ferner:

$$\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}=-m\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial\chi_n}{\partial z}-nz\chi_n\right)-\varrho^m(n+1)\frac{\partial\chi_n}{\partial z}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}=-m\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial\chi_n}{\partial x}-nx\chi_n\right)-\varrho^m(n+1)\frac{\partial\chi_n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}=-m\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial\chi_n}{\partial y}-ny\chi_n\right)-\varrho^m(n+1)\frac{\partial\chi_n}{\partial y}.$$

Daraus folgt:

$$O=-n(n+1)\varrho^m\chi_n.$$

Also werden die Bedingungen für φ:

$$\Delta\varphi=-\omega m(m+2n+3)\left(\varrho^2\frac{\partial\chi_n}{\partial z}-nz\chi_n\right)\varrho^{m-2}$$
$$-2\omega(n+1)\varrho^m\frac{\partial\chi_n}{\partial z};$$

an der Grenze:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}=-(m+n+1)\frac{\omega}{\varrho}\varrho^m\left(\varrho^2\frac{\partial\chi_n}{\partial z}-nz\chi_n\right).$$

Diesen Bedingungen aber genügt φ, denn es ist erstens:

$$\Delta\varphi=-\omega\left[\Delta\left(\varrho^{m+2}\frac{\partial\chi_n}{\partial z}\right)-2n\frac{\partial}{\partial z}(\varrho^m\chi^n)-nz\,\Delta(\varrho^m\chi^n)\right]$$

$$=-\omega\left\{\varrho^n\frac{\partial\chi_n}{\partial z}[(m+2)(m+2n+1)-2n]\right.$$
$$\left.-nz\varrho^{m-2}\chi_n[m(m+2n+1)+2m]\right\}$$

$$=-\omega\left\{m(m+2n+3)\varrho^{m-2}\left(\varrho^2\frac{\partial\chi_n}{\partial z}-nz\chi_n\right)\right.$$
$$\left.+2(n+1)\varrho^n\frac{\partial\chi_n}{\partial z}\right\},$$

wonach die erste Bedingung erfüllt ist;

zweitens ist φ das Produkt aus einer Funktion der Winkel und ϱ^{m+n+1}, also

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}=\frac{m+n+1}{\varrho}\varphi,$$

wonach auch die zweite Bedingung erfüllt ist. Aus dem so als richtig nachgewiesenen φ folgen aber die $u'\ v'\ w'$ durch die ursprünglichen Differentialgleichungen, zunächst allerdings in einer etwas complicirteren Form. Ganz dieselbe Form ist aber schon Seite 11 aufgetreten, und es hat sich schon dort gezeigt, dass sie mit der hier gegebenen identisch ist.

An diesen Satz knüpfen sich die folgenden Bemerkungen. Folgerungen.

1. Wir können in demselben ϱ^m durch eine Reihe von Potenzen, deren jede mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt ist, also durch eine willkürliche Funktion von ϱ ersetzen. Wir können zweitens χ_n durch eine Reihe von Kugelfunktionen verschiedenen Grades mit beliebigen Coeffizienten ersetzen, da die Ordnungszahl n im Endresultat keine Rolle spielt. Hieraus ergiebt sich folgende Verallgemeinerung des Satzes:

Ist χ eine ganz beliebige Funktion und

$$U = \frac{\partial \chi}{\partial \omega_x}$$

$$V = \frac{\partial \chi}{\partial \omega_y}$$

$$W = \frac{\partial \chi}{\partial \omega_z},$$

so sind die von U, V, W inducirten $u'\ v'\ w'$:

$$u' = -\frac{\omega}{\varkappa}\frac{\partial \chi'}{\partial \omega_x}$$

$$v' = -\frac{\omega}{\varkappa}\frac{\partial \chi'}{\partial \omega_y}$$

$$w' = -\frac{\omega}{\varkappa}\frac{\partial \chi'}{\partial \omega_z}.$$

Es ist nicht schwer, diesen Satz mit den in früheren Paragraphen erhaltenen Resultaten in Verbindung zu setzen.

2. Die durch obige Formen gegebenen $U\ V\ W$ rühren

von Strömungen her, die in concentrischen Kugelschaalen erfolgen. Denn es ist

$$x \Delta U + y \Delta V + z \Delta W = 0.$$

Umgekehrt lassen sich die U, V, W solcher Strömungen immer in obiger Form darstellen. Denn ist $\chi_n f(\varrho)$ das Glied in der Entwicklung der Strömungsfunktion, welches die $n$te Kugelfunktion enthält, so haben die zu diesem Gliede gehörigen U, V, W ohne Weiteres die obige Form.

Andererseits geschehen auch die inducirten Strömungen in concentrischen Kugelschaalen. Denn es ist

$$ux + vy + wz = 0.$$

Wir folgern daraus:

Die Strömung geschieht immer in concentrischen Kugelschaalen.

Eine Strömung, welche in concentrischen Kugelschaalen erfolgt, inducirt eine Strömung, welche dieselbe Eigenschaft hat. Und weiter: Die Strömungen, welche in einer rotirenden Hohlkugel durch ruhende Magnete inducirt werden, erfolgen immer in concentrischen Kugelschaalen um den Nullpunkt.

3. Es ist

$$\varphi = \omega (x V - y U),$$

sobald U, V, W die obige Form, also die inducirenden Ströme die besprochene Eigenthümlichkeit haben. Wir werden dies in § 8 benutzen müssen.

Berechnung der successiven Inductionen.

Es ist nun nicht mehr schwer, die successiven Inductionen zu berechnen, welche ein gegebenes äusseres Potential hervorruft. Sei χ_n das $n$te Glied in der Entwickelung desselben. Wir fanden die Ströme erster Induction:

$$u_1 = \frac{1}{n+1} \frac{\omega}{\varkappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_x}$$

$$v_1 = \frac{1}{n+1} \frac{\omega}{\varkappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_y}$$

$$w_1 = \frac{1}{n+1} \frac{\omega}{\varkappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_z}.$$

Die zugehörigen U_1 V_1 W_1 sind:

$$U_1 = \frac{2\pi}{n+1} \frac{\omega}{\varkappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_x} \left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2\, r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}} \right)$$

$$V_1 = \frac{2\pi}{n+1} \frac{\omega}{\varkappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_y} \left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2\, r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}} \right)$$

$$W_1 = \frac{2\pi}{n+1} \frac{\omega}{\varkappa} \frac{\partial \chi'}{\partial \omega_z} \left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2\, r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}} \right).$$

Man findet diese Werthe durch eine einfache Integration, indem man beachtet, dass u_1 v_1 w_1 Produkte von ϱ^n und Kugelflächenfunktionen sind. Das Potential jeder unendlich dünnen Kugelschicht im Innern und Aeussern derselben ist bekannt und eine Integration nach ϱ giebt die angeführten Werthe. Es folgen aus denselben die Strömungen zweiter Induction:

$$u_2 = -\frac{2\pi}{n+1} \left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2 \frac{\partial \chi''}{\partial \omega_x} \left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2\, r^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)\varrho^{2n+1}} \right)$$

$$v_2 = -\frac{2\pi}{n+1} \left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2 \frac{\partial \chi''}{\partial \omega_y} \left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2\, r^{2n+3}}{(2n+1)\, 2n+3)\varrho^{2n+1}} \right)$$

$$w_2 = -\frac{2\pi}{n+1} \left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2 \frac{\partial \chi''}{\partial \omega_z} \left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{2\, r^{2n+3}}{(2n+1)\, 2n+3)\varrho^{2n+1}} \right).$$

In derselben Weise kann die Rechnung beliebig fortgesetzt werden, die Resultate derselben werden jedoch immer complicirter und wir wenden uns daher zur exacten Lösung des Problems.

Wir sahen, dass die Strömungen immer senkrecht zum Radius sind, wir können also wieder von der Strömungsfunktion Gebrauch machen.

Sei $f(\varrho) = f$ eine beliebige Funktion von ϱ, sei

$$\psi = \varrho \cdot f \cdot \chi_n$$

die Strömungsfunktion eines in der Kugel bestehenden Stromsystems.

Die Stromdichten sind:

Allgemeine Lösung.

$$u = f\,\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_x}$$

$$v = f\,\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_y}$$

$$w = f\,\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_z}.$$

Sei nun $F(\varrho) = F$ eine zweite Funktion von ϱ, welche mit f durch die Gleichung verbunden ist:

$$F(\varrho) = \frac{4\pi}{2n+1}\,\frac{1}{\varrho^{2n+1}}\left\{\int\limits_r^\varrho a^{2n+2} f(a)\,da + \int\limits_\varrho^R \varrho^{2n+1}\,a f(a)\,da\right\}$$

aus welcher durch Differentiation folgt:

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^{-2n}\,\frac{d}{d\varrho}\,(\varrho^{2n+1}\,F)\right) = -\,4\pi\varrho\,f(\varrho).$$

Es sind dann die zu u, v, w gehörigen U, V, W:

$$U = F\,\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_x}$$

$$V = F\,\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_y}$$

$$W = F\,\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_z}.$$

Daraus folgen die von dem System ψ inducirten Ströme:

$$u' = -\,\frac{\omega}{\varkappa}\,F\,\frac{\partial \chi_n'}{\partial \omega_x}$$

$$v' = -\,\frac{\omega}{\varkappa}\,F\,\frac{\partial \chi_n'}{\partial \omega_y}$$

$$w' = -\,\frac{\omega}{\varkappa}\,F\,\frac{\partial \chi_n'}{\partial \omega_z}.$$

Die zu diesem System gehörige Strömungsfunktion ist:

$$\psi' = -\,\frac{\omega}{\varkappa}\,\varrho\,F\,\chi_n'.$$

Es inducirt also die Funktion

$$\psi = \varrho \cdot f \cdot \chi_n$$

die andere

$$\psi' = -\frac{\omega}{\varkappa}\,\varrho\, F\,\chi_n'.$$

Es bedeute nun ψ die in der Kugel unter dem Einfluss der äussern Potentialfunktion χ_n thatsächlich bestehende Strömung, ψ_0 sei die von den äussern Magnetismen direct inducirte Strömung, dann ist offenbar die Bedingung des stationären Zustandes:

$$\psi = \psi_0 + \psi'.$$

Um diese Gleichung weiter zu entwickeln, zerlegen wir χ_n und betrachten jedes Glied für sich; sei das vorgelegte:

$$\chi_{ni} = A\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos i\omega\, P_{ni}.$$

Wir haben dann (Seite 13):

$$\psi_0 = -\frac{\omega}{\varkappa}\, A\,\varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{i}{n+1} \sin i\omega\, P_{ni}.$$

Setzt man nun

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa}\, A\varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{i}{n+1}\,(f_1(\varrho)\sin i\omega + f_2(\varrho)\cos i\omega)\,P_{ni}$$

so wird

$$\psi' = \left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2 A\varrho\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{i^2}{n+1}\,(F_1\varrho\cos i\omega - F_2\varrho\sin i\omega)\,P_{ni}.$$

Die Gleichung $\psi = \psi_0 + \psi'$ ist nun erfüllt, wenn f_1 und f_2 den Gleichungen genügen:

$$f_1(\varrho) = 1 + \frac{i\omega}{\varkappa}\, F_2(\varrho)$$

$$f_2(\varrho) = \; - \frac{i\omega}{\varkappa}\, F_1(\varrho)$$

durch welche f_1 und f_2 vollständig bestimmt sind.

Denken wir uns f_1 und f_2 gefunden, so lässt sich das Resultat der Untersuchung in folgender Form aussprechen:

Die Selbstinduction lässt die Form der Strömungslinien (für jedes einzelne Glied der Entwickelung) ungeändert, ihre Wirkung besteht darin:

erstens, die Erscheinung um den $i$ten Theil eines gewissen Winkels δ im Sinne der Rotation zu drehen, eines Winkels, der für die verschiedenen Schichten von verschiedener Grösse ist, und für welchen die Gleichung $\operatorname{tg}\delta = \frac{f_2}{f_1}$ gilt,

zweitens, die Intensität der Strömung in den verschiedenen Schichten in verschiedener Weise abzuändern. Das Verhältniss der wirklich stattfindenden Intensität zu der ohne Berücksichtigung der Selbstinduction erhaltenen ist

$$= \sqrt{f_1^2 + f_2^2} : 1.$$

Mit der Bestimmung der Funktionen f_1 und f_2 werden wir uns einige Zeit zu beschäftigen haben.

Behandlung der Gleichungen für die f.

Wir führen die folgenden Abkürzungen ein: Es sei

$$\frac{4\pi i\omega}{\varkappa} = \mu^2$$

$$\mu r = s, \quad \mu R = S$$

$$f_1(\varrho) = \varphi_1(\mu\varrho) = \varphi_1\,\sigma$$

$$f_2(\varrho) = \varphi_2(\mu\varrho) = \varphi_2\,\sigma.$$

Wir denken uns in die Gleichungen, welche f_1 und f_2 bestimmen für F_1 und F_2 ihre Werthe gesetzt, wir transformiren sodann die Gleichungen auf φ und σ, und erhalten:

$$\varphi_1\sigma = 1 + \frac{1}{(2n+1)\,\sigma^{2n+1}}\left\{\int_s^\sigma a^{2n+2}\varphi_2\,a\,d\,a + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1} a\varphi_2\,a\,d\,a\right\}$$

$$\varphi_2\sigma = -\frac{1}{(2n+1)\,\sigma^{2n+1}}\left\{\int_s^\sigma a^{2n+2}\varphi_1\,a\,d\,a + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1} a\varphi_1\,a\,d\,a\right\}.$$

Durch Differentiation geben dieselben:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{-2n}\,\frac{d}{d\sigma}\,(\sigma^{2n+1}\varphi_1)\right) = -\,\sigma\varphi_2$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{-2n}\,\frac{d}{d\sigma}\,(\sigma^{2n+1}\varphi_2)\right) = \quad\sigma\varphi_1.$$

Die Form der Funktionen φ_1 und φ_2 hängt also nur ab von n, in den Integrationsconstanten kommen dann allerdings noch μ, s und S vor.

Obige Gleichungen können geschrieben werden:

$$\varphi_1'' + \frac{2n+2}{\sigma}\varphi_1' = -\varphi_2$$

$$\varphi_2'' + \frac{2n+2}{\sigma}\varphi_1' = \quad \varphi_1.$$

Als Differentialgleichungen können dieselben vollständig ersetzt werden durch die folgenden:

$$\varphi_2 = \pm\,\varphi_1 \sqrt{-1}$$

$$\varphi_1'' + \frac{2n+2}{\sigma}\varphi_1' \pm \varphi_1 \sqrt{-1} = 0.$$

Denn alle Lösungen der letzteren befriedigen erstere, und die allgemeine Lösung der letzteren enthält 2×2 willkürliche Constanten, ist also auch die allgemeine Lösung der ersteren.

Setzen wir $\lambda^4 = -1$, und verstehen insbesondere unter λ diejenigen Wurzeln dieser Gleichung, deren reeller Theil positiv ist, also

$$\lambda_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1 + \sqrt{-1})$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1 - \sqrt{-1}),$$

so werden unsere Gleichungen:

$$\varphi_2 = -\lambda^2 \varphi_1$$

$$\varphi_1'' + \frac{2n+2}{\sigma}\varphi_1' - \lambda^2 \varphi_1 = 0.$$

Die beiden particulären Integrale derselben sind:

$$\int_{-1}^{+1} (1-v^2)^n\, e^{\sigma\lambda v}\, dv, \quad \int_{1}^{\infty} (1-v^2)^n\, e^{-\sigma\lambda v}\, dv,$$

gültig für reelle positive σ.

Dass diese Integrale die Gleichungen befriedigen, wird etwas weiter unten gezeigt werden. Da in unserm Falle n eine ganze Zahl ist, so lassen sich die Integrale ausführen und also das Resultat der Auflösung in endlicher geschlossener

Form aufstellen, der Einfachheit halber möge die Integralform beibehalten werden. Setzt man

Defination der p und q.

$$p_n \sigma = \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n e^{\sigma v} dv$$

$$q_n \sigma = \int_{1}^{\infty} (1 - v^2)^n e^{-\sigma v} dv,$$

so sind offenbar die Lösungen der Differentialgleichungen:

$$\varphi_1 = A p_n(\lambda_1 \sigma) + B p_n(\lambda_2 \sigma) + C q_n(\lambda_1 \sigma) + D q_n(\lambda_2 \sigma)$$

$$-\varphi_2 = \lambda_1^2 A p_n(\lambda_1 \sigma) + \lambda_2^2 B p_n(\lambda_2 \sigma) + \lambda_1^2 C q_n(\lambda_1 \sigma) + \lambda_2^2 D q_n(\lambda_2 \sigma).$$

Diese Lösungen sind in die Integralgleichungen einzusetzen und daraus die Constanten zu bestimmen. Zur Ausmittlung der dabei auftretenden Integrale dienen die folgenden Rechnungen:

Man hat:

$$p_n(\lambda\sigma) = \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n e^{\lambda\sigma v} dv,$$

$$\sigma^{-2n} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{2n+1} p_n) = \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n (\sigma v \lambda + 2n + 1) e^{v\lambda\sigma} dv$$
$$= 2n\, p_{n-1}(\lambda\sigma)\ ^{*})$$

$$\frac{d}{d\sigma} [\sigma^{-2n} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{2n+1} p_n)] = \lambda \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^n (v^2 \lambda\sigma + 2(n+1)v) e^{v\sigma\lambda} dv$$
$$= \lambda^2 \sigma\, p_n(\lambda\sigma)\ ^{*}).$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass p_n eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung ist.

---

*) Die letzten Glieder der Gleichungen werden durch Umformung der voranstehenden Integrale, vorzüglich durch partielle Integration erhalten.

Durch rückwärtsschreitende Integration findet man nun aus den vorigen Formeln:

$$\int \sigma p_n(\lambda\sigma)\, d\sigma = \frac{2n}{\lambda^2} p_{n-1}(\lambda\sigma)$$

und

$$\int \sigma^{2n} p_{n-1}(\lambda\sigma)\, d\sigma = \frac{1}{2n} \sigma^{2n+1} p_n(\lambda\sigma),$$

aus welchen durch Differentiation die Recursionsformeln folgen:

Integral- und Recursionsformeln der p_n und q_n.

$$p_n(\lambda\sigma) = \frac{2n}{\lambda} \frac{p'_{n-1}}{\sigma}$$

$$p_{n-1}(\lambda\sigma) = \frac{2n+1}{2n} p_n(\lambda\sigma) + \frac{\lambda\sigma}{2n} p'_n(\lambda\sigma)$$

aus welchen folgt:

$$p_{n-1} = \frac{2n+1}{2n} p_n + \frac{\lambda^2\sigma^2}{4n(n+1)} p_{n+1}$$

$$p_n = \frac{2}{\lambda^2\sigma^2} \left\{ 2n(n-1) p_{n-2} - n(2n-1) p_{n-1} \right\}.$$

Ganz ähnliche Rechnungen lassen sich nun auch für die q_n durchführen, die Resultate gehen aus den eben gewonnenen einfach durch Vertauschung von p mit q hervor, man hat also auch

$$\int \sigma q_n(\lambda\sigma)\, d\sigma = \frac{2n}{\lambda^2} q_{n-1}(\lambda\sigma)$$

$$\int \sigma^{2n} q_{n-1}(\lambda\sigma)\, d\sigma = \frac{1}{2n} \sigma^{2n+1} q_n(\lambda\sigma) \text{ etc.}$$

Mit Zuhülfenahme dieser Formeln hat die Ausführung der nothwendigen Integrationen keine Schwierigkeit, beispielsweise hat man, unter Zuhülfenahme einer partiellen Integration:

$$\int_s^\sigma a^{2i+2} p_n\, a\, da + \sigma^{2n+1} \int_\sigma^S a p_n(a)\, da$$

$$= \frac{2n}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_{n-1}(S) - \frac{2n s^{2n+1} p_{n-1}(s)}{\lambda^2} + \frac{(2n+1) s^{2n+1} p_n(s)}{\lambda^2}$$

$$- \frac{2n+1}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_n(\sigma)$$

$$= \frac{2n}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_{n-1}(S) - \frac{s^{2n+3}}{2(n+1)} p_{n+1}(s) - \frac{2n+1}{\lambda^2} \sigma^{2n+1} p_n(\sigma).$$

Setzt man diese und die ähnlich zu bildenden Ausdrücke für q in die Gleichungen ein, beachtet, dass $\varphi_2 = -\varphi_1 \lambda^2$, und $\lambda^4 = -1$, so heben sich die p und q, wie es sein muss, heraus und es bleiben Gleichungen zurück von der Form

$$0 = \text{const}_1 + \frac{\text{const}_2}{\varrho^{2n+1}},$$

welches die Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{-2n} \frac{d}{d\sigma} (\sigma^{2n+1} \varphi)\right) = 0$$

sind.

Die hier auftretenden Constanten müssen einzeln verschwinden, und es werden so die folgenden 4 Gleichungen für $A\ B\ C\ D$ erhalten, unter Beachtung des Umstandes, dass

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = -\frac{1}{\lambda_2^2}$$

ist:

$$\frac{2n+1}{2n} = A p_{n-1}(\lambda_1 S) + B p_{n-1}(\lambda_2 S) + C q_{n-1}(\lambda_1 S) + D q_{n-1}(\lambda_2 S)$$

$$0 = A p_{n-1}(\lambda_1 S) - B p_{n-1}(\lambda_2 S) + C q_{n-1}(\lambda_1 S) - D q_{n-1}(\lambda_2 S)$$

$$0 = A p_{n+1}(\lambda_1 s) + B p_{n+1}(\lambda_2 s) + C q_{n+1}(\lambda_1 s) + D q_{n+1}(\lambda_2 s)$$

$$0 = A p_{n+1}(\lambda_1 s) - B p_{n+1}(\lambda_2 s) + C q_{n+1}(\lambda_1 s) - D q_{n+1}(\lambda_2 s).$$

Dieselben lassen sich leicht auflösen und ergeben:

$$A = \frac{2n+1}{4n} \cdot \frac{q_{n+1}(\lambda_1 s)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)\, q_{n+1}(\lambda_1 s) - p_{n+1}(\lambda_1 s)\, q_{n-1}(\lambda_1 S)}$$

$$C = -\frac{2n+1}{4n} \cdot \frac{p_{n+1}(\lambda_1 s)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)\, q_{n+1}(\lambda_1 s) - p_{n+1}(\lambda_1 s)\, q_{n-1}(\lambda_1 S)}$$

$$B = \frac{2n+1}{4n} \cdot \frac{q_{n+1}(\lambda_2 s)}{p_{n-1}(\lambda_2 S)\, q_{n+1}(\lambda_2 s) - p_{n+1}(\lambda_2 s)\, q_{n-1}(\lambda_2 S)}$$

$$D = -\frac{2n+1}{4n} \cdot \frac{p_{n+1}(\lambda_2 s)}{p_{n-1}(\lambda_2 S)\, q_{n+1}(\lambda_2 s) - p_{n+1}(\lambda_2 s)\, q_{n-1}(\lambda_2 S)}.$$

Indem man diese Ausdrücke in φ_1 und φ_2 einsetzt, erhält man die vollständige Lösung. Dieselbe lässt sich einfacher darstellen in folgender Weise: Da λ_1 und λ_2 conjugirt sind, so sind auch $p(\lambda_1 \sigma)$ und $p(\lambda_2 \sigma)$ conjugirt, ebenso sind, wie man leicht sieht, A und B conjugirt, und es ist daher

$$A\, p_n(\lambda_1 \sigma) + B\, p_n(\lambda_2 \sigma)$$

gleich dem doppelten Werthe des reellen Theiles jedes dieser Ausdrücke. Ebenso ist

$$A\, p_n(\lambda_1 \varrho) - B\, p_n(\lambda_2 \varrho),$$

welcher Ausdruck in φ_2 vorkommt, gleich dem Doppelten des imaginären Theiles des ersten Gliedes. Indem man dies beachtet, und die Werthe von A und C, erkennt man leicht die Richtigkeit der Gleichung:

Lösung der Gleichungen für f_1 und f_2 mittelst der p und q.

$$\frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{p_n(\lambda_1 \sigma)\, q_{n+1}(\lambda_1 s) - q_n(\lambda_1 \sigma)\, p_{n+1}(\lambda_1 s)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)\, q_{n+1}(\lambda_1 s) - q_{n-1}(\lambda_1 S)\, p_{n+1}(\lambda_1 s)}$$
$$= \varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} = f_1 + f_2 \sqrt{-1}.$$

Besonders einfach wird die Gleichung, wenn $s = 0$ ist, es sich also um eine Vollkugel handelt. Dann ist $q_{n+1}(s)$ unendlich, unsere Gleichung wird also:

$$\frac{2n+1}{2n} \; \frac{p_n(\lambda_1 \sigma)}{p_{n-1}(\lambda_1 S)} = \varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1}.$$

Die Grössen, auf deren Kenntniss es uns besonders ankommt, nämlich der Winkel $\delta = \operatorname{arc\,tg} \frac{f_2}{f_1}$ und die Verstärkung der Stromstärke $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$, haben eine sehr einfache analytische Bedeutung, sie sind Amplitude und Modul der links stehenden complexen Grössen.

Die Rechnungen lassen sich weiter führen mit Zuhülfenahme der folgenden Bemerkungen:

Weitere Eigenschaften der p und q.

Die Integrale, durch welche p und q definirt sind, lassen sich für ganzzahlige n unbestimmt ausführen, und die p und q also in geschlossener Form erhalten. Wir können und wollen unter den p und q diese so ausgerechneten Funktionen verstehen. Dann sind auch q mit negativem Argument zulässig, und es gilt die Gleichung

$$-p_n(\varrho) = q_n(\varrho) + q_n(-\varrho),$$

aus welcher folgt, dass

$$p_n(\varrho) = p_n(-\varrho).$$

Denn sei, unbestimmt ausgeführt

$$\int (1-v^2)^n e^{-\sigma v} dv = V(\sigma, v),$$

dann ist

$$\begin{aligned} q_n(\sigma) &= V(\sigma,\infty) - V(\sigma,1) \\ p_n(\sigma) &= \int_0^1 (1-v^2)^n e^{-\sigma v} dv + \int_0^1 (1-v^2) e^{\sigma v} dv \\ &= V(-\sigma,1) - V(-\sigma,0) \\ &\quad + V(\sigma,1) - V(\sigma,0). \end{aligned}$$

Aber es ist für ganze

$$V(\sigma,\infty) = 0, \quad V(-\sigma,0) = -V(\sigma,0),$$

und so folgt die Behauptung.

Die einfachsten Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung sind also:

$$q_n(\sigma) \text{ und } q_n(-\sigma).$$

Folgendes sind die Werthe der ersten q, von welchen der erste direct, die übrigen durch Recursion bestimmt sind:

Die ersten q.

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{e^{-\sigma}}{\sigma} \\ q_1 &= -\frac{2e^{-\sigma}}{\sigma^2}\left(1+\frac{1}{\sigma}\right) \\ q_2 &= \frac{2.2!.e^{-\sigma}}{\sigma^3}\left(1+\frac{3}{\sigma}+\frac{3}{\sigma^2}\right) \\ q_3 &= -\frac{23!.e^{-\sigma}}{\sigma^4}\left(1+\frac{6}{\sigma}+\frac{15}{\sigma^2}+\frac{15}{\sigma^3}\right) \end{aligned}$$

etc.,

woraus also folgt:

$$p_0 = \frac{e^\sigma - e^{-\sigma}}{\sigma}$$

$$p_1 = \frac{2}{\sigma^2}\left(e^\sigma + e^{-\sigma} - \frac{e^\sigma - e^{-\sigma}}{\sigma}\right) \text{ etc.}$$

Die p und q für grosse und kleine Werthe des Arguments.

Für grosse Werthe von σ nähern sich die p und q den Ausdrücken:

$$q_n = (-2)^n\, n! \cdot \frac{e^{-\sigma}}{\sigma^{n+1}}$$

$$p_n(\sigma) = -\, q_n(-\sigma).$$

Für sehr kleine Werthe von σ wird:

$$q_n(\sigma) = \frac{(-2)^n\, n!\, 1.3\ldots 2n-1}{\sigma^{2n+1}}\; e^{-\sigma}.$$

Die Gleichung $-p(\sigma) = q(\sigma) + q(-\sigma)$ verliert hier ihre Bedeutung, da für $\sigma = 0$, $q = \pm\infty$ wird. Um auch für sehr kleine σ p zu kennen, entwickeln wir es in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von σ. Es geschieht das leicht, indem man in dem Integral, welches p darstellt, für $e^{+\sigma}$ seine Reihe setzt und gliedweise integrirt, man erhält:

$$p_n(\sigma) = \frac{2^{n+1}\, n!}{1.3\ldots 2n-1}\left\{1 + \frac{\sigma^2}{2.2n+3} + \frac{\sigma^4}{2.4.2n+3.2n+5} + \ldots\right\}.$$

Von Wichtigkeit für später ist uns noch die folgende Formel: Es ist:

$$\begin{aligned} & q_n(\sigma)\, q_{n-1}(-\sigma) - q_n(-\sigma)\, q_{n-1}(\sigma) \\ \text{a)}\quad & = -\frac{4n(n-1)}{\sigma^2}\left\{q_{n-1}(\sigma)\, q_{n-2}(-\sigma) - q_{n-1}(-\sigma)\, q_{n-2}(\sigma)\right\} \\ & = \frac{n!\,(n-1)!}{\sigma}\left(-\frac{4}{\sigma^2}\right)^n, \end{aligned}$$

welche Formel sich durch die für q gefundene Recursionsformel leicht beweisen lässt.

In allen besprochenen Eigenschaften der p_n und q_n zeigt sich eine nahe Verwandtschaft derselben zu den Bessel'schen Funktionen, in der That lassen sich die J^m durch die $p_{m+\frac{1}{2}}$ und $q_{m+\frac{1}{2}}$ ausdrücken.

Aus der Formel, welche unser Resultat bildete, können wir nun die Funktion p fortschaffen, und erhalten:

Definitive Form der Lösung.

$$\frac{2n+1}{n} \cdot \frac{q_{n+1}(\lambda s)\, q_n(-\lambda \sigma) - q_{n+1}(-\lambda s)\, q_n(\lambda \sigma)}{q_{n+1}(\lambda s)\, q_{n-1}(-\lambda S) - q_{n+1}(-\lambda s)\, q_{n-1}(\lambda S)} \text{ *)}$$
$$= \varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1}.$$

Anwendungen derselben.

Wir wenden diese Formel, welche die exacte Lösung giebt, auf specielle Fälle an, welche Vereinfachungen zulassen.

Dünne Kugelschaalen.

1. Es sei zunächst die Hohlkugel sehr dünn, sei d ihre Dicke. Es ist dann S sehr wenig verschieden von s, sei

$$S = s + \delta, \text{ wo nun } \delta = \mu d \text{ ist.}$$

Für σ können wir einen beliebigen Werth zwischen s und S setzen, sei $\sigma = S$.

Setzt man diesen Werth in obige Formel ein, wendet im Nenner die Substitution

$$q_{n-1} = \frac{2n+1}{2n} q_n + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{4n(n+1)} q_{n+1}$$

an, und dividirt durch den Zähler, so erhält man

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1}$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2 \mu^2}{2(n+1)(2n+1)} \frac{q_{n+1}(\lambda s) q_{n+1}(-\lambda S) - q_{n+1}(-\lambda s) q_{n+1}(\lambda S)}{q_{n+1}(\lambda s)\, q_n(-\lambda S) - q_{n+1}(-\lambda s)\, q_n \lambda S.}}$$

Setzt man nun entwickelnd:

$$\begin{aligned} q_{n+1}(\lambda S) &= q_{n+1}\{\lambda(s+\delta)\} \\ &= q_{n+1}(\lambda s) + \lambda \delta\, q'_{n+1}(\lambda s) \\ &= q_{n+1}(\lambda s) + \frac{\delta \lambda^2 s}{2(n+2)} q_{n+2}(\lambda s), \end{aligned}$$

$$q_{n+1}(-\lambda S) = q_{n+1}(-\lambda s) - \frac{\delta \lambda^2 s}{2(n+2)} q_{n+2}(-\lambda s)$$

---

*) Es werde fortan für λ_1 einfach λ geschrieben, und ist also $\lambda = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1 + \sqrt{-1})$.

so kann man unter Zuhülfenahme von Formel a) (Seite 47) die q durch Division wegheben und erhält

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} = \frac{1}{1 + \frac{s\delta\lambda^2}{2n+1}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{s\delta}{2n+1} = \frac{4\pi R i \omega}{(2n+1)k} = h,$$

nach unserer früheren Bezeichnungsweise, also wird

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} = \frac{1}{1 + h\sqrt{-1}}$$
$$= \frac{1}{1+h^2} - \frac{h}{1+h^2}\sqrt{-1},$$

welches Resultat mit dem früher erhaltenen zusammenfällt.

Wir haben sonach einerseits unsere Formel an einem schon bekannten Resultat geprüft, andererseits den Beweis geführt, dass die früher gegebenen Formeln für alle h gelten, welcher Beweis noch ausstand.

2. Wir wenden zweitens unsere Formel auf den Fall an, dass wir in den f_1 und f_2 nur die erste Potenz der Drehungsgeschwindigkeit beizubehalten brauchen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf eine Vollkugel. Für eine solche hatten wir

$$f_1 + f_2 \sqrt{-1} = \frac{2n+1}{2n} \frac{p_n(\lambda\sigma)}{p_{n-1}(\lambda S)}.$$ **Kleine Rotationsgeschwindigkeiten.**

Entwickeln wir die p und behalten nur die ersten Potenzen bei, so folgt

$$f_1 + f_2 \sqrt{-1} = \frac{2 + \frac{\sigma^2}{2n+3}\sqrt{-1}}{2 + \frac{S^2}{2n+1}\sqrt{-1}}.$$

Eine nähere Betrachtung dieser Formel zeigt, dass die aus derselben für f_1 und f_2 folgenden Werthe, in ψ eingesetzt, nichts anderes ergeben, als die Inductionen erster und zweiter

Ordnung, welche wir schon auf Seite 37 berechnet haben. Wir betrachten hier nur den Drehungswinkel. Mit ausschliesslicher Berücksichtigung der ersten *P*otenzen hat man:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = \delta = -\frac{2\pi\omega i}{\varkappa}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3}\right),$$

also den Drehungswinkel

$$\frac{\delta}{i} = -\frac{2\pi\omega}{\varkappa}\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3}\right).$$

Es erscheinen also alle Schichten gedreht, die Drehung ist am kleinsten an der Oberfläche der Kugel und nimmt von dort gegen das Innere stetig zu. Denkt man sich durch den Aequator der Kugel einen ebenen Schnitt gelegt, und verbindet correspondirende Punkte der verschiedenen Schichten, so erhält man ein System congruenter Curven, welches sehr geeignet ist, den Zustand der Kugel zu veranschaulichen. Die Gleichung einer dieser Curven ist offenbar:

$$y = x\,\mathrm{tg}\left(\frac{\delta}{i},\ \varrho = \sqrt{x^2+y^2}\right),$$

oder sehr nahezu:

$$y = -\frac{2\pi\omega}{\varkappa}\,x\left(\frac{R^2}{2n+1} - \frac{x^2}{2n+3}\right).$$

In Figur c, Tafel 1 sind diese Curven dargestellt für den Fall, dass die Kugel von Kupfer $R = 50$ mm, $n = 1$ ist, und dass die Kugel 1, 2, 3, 4 Umdrehungen in der Sekunde macht.

Grosse Rotationsgeschwindigkeiten.

3. Es werde drittens angenommen, dass μ so gross sei, dass für die $q(S\lambda)$ und $q(s\lambda)$ ihre angenäherten Werthe gesetzt werden können. Es werde ferner angenommen, dass das Verhältniss $\frac{r}{R}$ weder sehr nahe $= 1$, noch sehr nahe $= 0$ sei. Ersterer Fall ist schon erledigt, letzterer muss besonders betrachtet werden. Durch Einsetzung der Näherungswerthe in die exacte Formel wird erhalten:

$$\varphi_1 + \varphi_2\sqrt{-1} = \frac{2n+1}{\lambda}\,\frac{S^n}{\sigma^{n+1}}\,\frac{e^{\lambda(\sigma-s)} + e^{-\lambda(\sigma-s)}}{e^{\lambda(S-s)} - e^{-\lambda(S-s)}}.$$

Da S nicht sehr nahe gleich s, beide aber sehr gross sein sollen, so verschwindet im Nenner das zweite Glied gegen das erste, und es wird

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} = \frac{2n+1}{\lambda S} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} e^{-\lambda\mu(R-r)} \left(e^{\lambda\mu(\varrho-r)} + e^{-\lambda\mu(\varrho-r)}\right).$$

Das zweite Glied der Parenthese verschwindet gegen das erste, ausser wenn $\varrho = r$ ist, verzichten wir daher auf eine genaue Kenntniss der Strömung an der innern Grenze, so können wir setzen:

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} = \frac{2n+1}{\lambda S} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} e^{-\lambda\mu(R-\varrho)}.$$

Da s oder r aus dieser Gleichung verschwunden ist, so ist anzunehmen, dass sie auch für Vollkugeln Gültigkeit hat, in der That ergiebt sie sich leicht aus den für Vollkugeln geltenden exacten Formeln, wenn man ähnliche Vernachlässigungen macht, wie die oben ausgeführten, und auf eine genaue Kenntniss der Strömung im Centrum verzichtet, (wo übrigens die Intensität sehr klein ist).

In den erhaltenen Ausdrücken ist

$$\lambda = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1 + \sqrt{-1});$$

ohne die Sonderung des Imaginären und Reellen auszuführen finden wir leicht:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{f_2}{f_1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)$$

$$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \frac{2n+1}{\mu} \frac{R^n}{\varrho^{n+1}} e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in ψ ein, so erhält man

$$\psi = -\frac{2n+1}{2(n+1)} A \sqrt{\frac{i\omega}{\varkappa\pi}}\, e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)} \sin\left(i\omega - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\varrho)\right),$$

welches also diejenige Strömungsfunktion ist, die bei sehr grossen Drehungsgeschwindigkeiten von der äussern Potentialfunktion

$$\chi_n = A\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos i\omega\, P_{ni}$$

hervorgerufen wird.

Die Bedeutung obiger Formel lässt sich leicht durchschauen, stellen wir ihr Ergebniss mit den früheren zusammen, so können wir die Erscheinung, welche eine mit beständig wachsender Geschwindigkeit unter dem Einfluss einer inducirenden Kugelfunktion rotirende Hohlkugel darbieten würde, in folgender Weise beschreiben:

Zusammenfassung des Resultats.

Beginnt die Selbstinduction merklich zu werden, so verändert sie die Form der Strömungscurven in den einzelnen Kugelschichten nicht, die letzteren aber beginnen sich scheinbar zu drehen im Sinne der Rotation; dabei gehen die inneren Schichten den äusseren voraus. Die Drehung der inneren Schichten ist an keine Grenze gebunden, sondern kann ins Unendliche wachsen, der Drehungswinkel der äussersten Schicht convergirt gegen den Werth $\frac{\pi}{4i}$, nachdem er übrigens vorher bei Hohlkugeln diesen Werth überschritten haben kann. Ist die Drehungsgeschwindigkeit sehr gross, so liegen correspondirende Punkte verschiedener Schichten auf Archimedischen Spiralen, die Zahl der Windungen derselben in der Kugel wächst mit der Rotationsgeschwindigkeit ins Unendliche.

Die Intensität wächst Anfangs mit der Rotationsgeschwindigkeit, aber nirgends dieser proportional schneller in den äussern, als in den innern Schichten. In der äussersten Schicht wächst sie beständig, schliesslich wie $\sqrt{\omega}$, in allen andern erreicht sie bei einer gewissen Drehungsgeschwindigkeit ein Maximum, um dann wieder abzunehmen. Bei grossen ω nimmt sie vom Rande gegen das Innere ab wie eine Exponentialfunktion, deren Exponent $\sqrt{\omega}$ enthält.

Von Interesse ist noch die Abhängigkeit der Erscheinung von der Ordnungszahl i (deren Quadratwurzel auch in μ enthalten ist), ich verweise deshalb auf die Formeln.

Ein scheinbarer Widerspruch zwischen der Theorie einer unendlich dünnern Hohlkugel und der einer Hohlkugel von endlicher Dicke mag auffallen; derselbe löst sich leicht, wenn man beachtet, dass jede noch so dünne Hohlkugel nur bis zu einer gewissen Grösse der Rotationsgeschwindigkeit als unendlich dünn betrachtet werden darf.

Ich will noch kurz den Fall erledigen, dass die inducirenden Magnete im Innern der Hohlkugel liegen, dass also die auftretenden Kugelfunktionen negativer Ordnung sind.

Fall, dass die Magnete im Innern der Hohlkugel liegen.

Es sei

$$\chi_n = A\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} \cos i\omega\, P_{ni},$$

dann wird

$$\psi_0 = \frac{\omega}{\varkappa} A \varrho \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} \frac{i}{n} \sin i\omega\, P_{ni}.$$

Setzen wir nun

$$\psi = \frac{\omega}{\varkappa} A \varrho \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} \frac{i}{n} (f_1 \sin i\omega + f_2 \cos i\omega)\, P_{ni},$$

so wird die von ψ inducirte Funktion ψ':

$$\psi' = -\left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2 A \varrho \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1} \frac{i^2}{n} (F_1 \cos i\omega - F_2 \sin i\omega)\, P_{ni}.$$

Dabei ist aber der Zusammenhang zwischen f und F ein etwas anderer, als früher; es ist nämlich gesetzt:

$$F(\varrho) = \frac{4\pi}{2n+1} \left\{ \int_r^{\varrho} a f a\, da + \int_{\varrho}^{R} \frac{\varrho^{2n+1}}{a^{2n}} f a\, da \right\}.$$

Die Bedingung

$$\psi = \psi_0 + \psi'$$

liefert wieder die Gleichungen:

$$f_1 = 1 + \frac{i\omega}{\varkappa} F_2$$

$$f_2 = \quad -\frac{i\omega}{\varkappa} F_1.$$

Unter Benutzung derselben Abkürzungen, wie früher werden dieselben:

$$\varphi_1 \sigma = 1 + \frac{1}{2n+1}\left\{\int_s^\sigma a\varphi_2(a)\,da + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1} a^{-2n}\,\varphi_2\, a\, da\right\}$$

$$\varphi_2 \sigma = -\frac{1}{2n+1}\left\{\int_s^\sigma a\,\varphi_1\, a\, da + \int_\sigma^S \sigma^{2n+1} a^{-2n}\,\varphi_1\, a\, da\right\}.$$

Differenzirt geben diese

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{2n+2}\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{-2n-1}\varphi_1\right)\right) = -\sigma\varphi_2$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{2n+2}\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^{-2n-1}\varphi_2\right)\right) = \sigma\varphi_1$$

oder

$$\varphi_1'' - \frac{2n}{\sigma}\varphi_1' = -\varphi_2$$

$$\varphi_2'' - \frac{2n}{\sigma}\varphi_2' = \varphi_1.$$

Setzt man $\varphi = \sigma^{2n+1}\overline{\varphi}$, so folgen für die $\overline{\varphi}$ die Gleichungen:

$$\overline{\varphi}_1'' + \frac{2n+2}{\sigma}\overline{\varphi}_1' = -\overline{\varphi}_2$$

$$\overline{\varphi}_2'' + \frac{2n+2}{\sigma}\overline{\varphi}_2' = \overline{\varphi}_1,$$

also Gleichungen, welche wieder auf die p_n und q_n führen.

Die Bestimmung der Constanten lässt sich dann ganz analog der früheren ausführen und es wird erhalten:

$$\varphi_1\sqrt{-1} - \varphi_2$$

$$= -2(n+1)(2n+1)\frac{\sigma^{2n+1}}{s^{2n+3}}\cdot$$

$$\frac{q_{n-1}(\lambda S)\,q_n(-\lambda\sigma) - q_{n-1}(-\lambda S)\,q_n(\lambda\sigma)}{q_{n-1}(\lambda S)\,(q_{n+1}(-\lambda s) - q_{n-1}(-\lambda S)\,q_{n+1}(\lambda s)}.$$

Besonders einfach wird die Formel für den Fall, dass S ∞ ist, es sich also um einen kugelförmigen Hohlraum in einer unbegrenzten Masse handelt.

Dann wird $q_{n-1}(\lambda S) = 0$, und also wird

$$\varphi_1 \sqrt{-1} + \varphi_2 = -2(n+1)(2n+1)\frac{\sigma^{2n+1}}{s^{2n+3}} \cdot \frac{q_n(\sigma\lambda)}{q_{n+1}(s\lambda)}.$$

Kann man $\mu\varrho = \sigma$ wegen des sehr kleinen Werthes von ω gegen die Einheit vernachlässigen, so kann man für die q_n ihre Werthe für kleine Argumente (Seite 47) setzen und erhält dann:

$$\varphi_1 \sqrt{-1} + \varphi_2 = \lambda^2 e^{-\lambda(\sigma - s)},$$

oder da wir die Grössen von der Ordnung σ schon zum Theil vernachlässigt haben

$$\varphi_1 \sqrt{-1} + \varphi_2 = \lambda^2 = \sqrt{-1}$$

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = 0,$$

wie es sein muss.

Verschwindet andererseits die Einheit gegen $\mu\varrho$, und ersetzt man demgemäss die q_n durch ihre Näherungswerthe für grosse Argumente (Seite 47), so erhält man

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sqrt{-1} = (2n+1) \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \frac{1}{s\lambda} e^{-\lambda(\sigma - s)}.$$

Daraus ergeben sich ähnliche Erscheinungen, wie an der Vollkugel, die Drehung beträgt $\frac{45^\circ}{i}$ an der innersten Schicht und wächst mit wachsendem ϱ ins Unendliche.

Für ψ findet man

$$\psi = \frac{2n+1}{2n} A \sqrt{\frac{i\,\omega}{\varkappa\pi}}\, e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(\varrho - r)} \sin\left(i\omega - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(\varrho - r)\right),$$

welche Form der für die Vollkugel erhaltenen ganz analog ist.

Zur Vernachlässigung der Selbstinduction.

Man erkennt übrigens, dass schon bei den kleinsten Drehungsgeschwindigkeiten im unbegrenzten Raum ϱ so gross gewählt werden kann, dass die gemachten Annäherungen zulässig sind, es wird daher auch schon bei den kleinsten ω die Induction alle möglichen Winkel durchlaufen, allerdings in Entfernungen, in welchen die Intensität sehr klein ist.

Ich erinnere hier an die Bemerkung, welche wir schon auf Seite 30 betreffs der Vernachlässigung der Selbstinduction gemacht haben.

Es würde ein Leichtes sein, die für Hohlkugeln gewonnenen Resultate auf ebene Platten von endlicher Dicke auszudehnen; um Weitläufigkeiten zu vermeiden, verzichte ich hierauf. Das Wesentliche der Erscheinung lässt sich übrigens ohne Rechnung aus dem Besprochenen abnehmen.

§ 5.

Kräfte, welche die inducirten Strömungen ausüben.

Es sollen jetzt die von den inducirten Strömungen ausgeübten Kräfte und die von denselben erzeugte Wärme berechnet werden. Der letzteren ist die Arbeit gleich, welche geleistet werden muss, um die Rotation zu erhalten.

Das Potential der inducirten Ströme.

A. Das Potential der inducirten Strömungen.

1. Wir berechnen dasselbe zunächst für den äusseren Raum. Der Theil, welcher von der zwischen $\varrho = a$ und $\varrho = a + da$ liegenden Kugelschicht herrührt, ist

Werth desselben im äussern Raum.

$$d\,\Omega_a = \frac{4\pi n}{2n+1}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{n+1}\psi_{ni}(a)\,da\,,$$

wenn wir das Glied ψ_{ni} der gesammten Strömungsfunktion ψ betrachten.

Nun ist

$$\psi(a)\,da = -A\,\frac{\omega}{\varkappa}\,a\left(\frac{a}{R}\right)^{n}\frac{i}{n+1}\,(f_1 a \sin i\omega + f_2 a \cos i\omega)\,P_{ni}\,da.$$

Setzt man diesen Werth in $d\Omega$ ein, und versucht die Integration nach den a auszuführen, so trifft man auf die Integrale

$$\int_r^R a^{2n+2} f(a)\,da.$$