Über die Induction in rotirenden Kugeln

Hertz, Heinrich

1880

§ 1. Festsetzungen der Bezeichnungen

urn:nbn:de:bsz:31-279842

§ 1.

Festsetzung der Bezeichnungen.

In diesem Paragraphen sollen die Bezeichnungen festgesetzt, und einige bekannte Formeln, die ich beständig gebrauchen werde, zusammengestellt werden.

1. Das angewandte Coordinatensystem ist das Taf. 1a. dargestellte. Die als positiv geltenden Drehungsrichtungen sind in die Figur eingezeichnet. Die z Achse falle mit der Rotationsachse zusammen. Als Polarcoordinaten mögen verwendet werden ϱ, ω, θ. ω entspreche der geographischen Länge, sei 0 in der xz Ebene bei positiven x und wachse im Sinne der positiven Drehung, θ entspreche dem Complement der geographischen Breite und sei 0 in der positiven z Achse. Gelegentlich möge die Bezeichnung benutzt werden: Coordinaten.

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \omega_z} = \frac{\partial}{\partial \omega}$$

$$z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \omega_y}$$

$$y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \omega_x}$$

ferner werde der Differentialquotient $\frac{\partial}{\partial \omega}$ nach Lagrange's Weise bezeichnet, also z. B.

$$\frac{\partial \chi}{\partial \omega} = \chi'.$$

2. Die Rechnungen seien in elektromagnetischem Maasse geführt. Im Uebrigen seien die Bezeichnungen für die elektrischen Grössen diejenigen, welche von Herrn Geheimrath Helmholtz im 72. Bande des Borchardt'schen Journales eingeführt sind. Es seien also:

Bezeichnung der elektrischen Grössen.

$$u, v, w, \quad \frac{mgr^{\frac{1}{2}}}{mm^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{sec}}$$

die Dichtigkeiten der Strömung nach den x, y, z;

$$\begin{matrix} U \\ V \\ W \end{matrix} \quad \frac{mm^{\frac{1}{2}}\,mgr^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}}$$

die entsprechenden Componenten des Vectorpotentiales;

$$\varphi \quad \frac{mm^{\frac{3}{2}}\,mgr^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sec}^2}\ ^{*)}$$

die Potentialfunction der freien Elektricität;

$$\varkappa \quad \frac{mm^2}{\mathrm{sec}}$$

der specifische Widerstand des Materiales. Der specifische Widerstand einer Fläche von verschwindender Dicke δ, nämlich $\frac{\varkappa}{\delta}$, werde, wenn er als endlich betrachtet wird, bezeichnet mit

$$k\,\frac{mm}{\mathrm{sec}}.$$

Es seien ferner

$$\begin{matrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{matrix} \quad \frac{mgr^{\frac{1}{2}}}{mm^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sec}}$$

die Componenten einer magnetischen Polarisation;

$$\begin{matrix} L \\ M \\ N \end{matrix} \quad \frac{mgr^{\frac{1}{2}}\,mm^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{sec}}$$

---

*) Dies ist nicht elektromagnetisches Maass. In letzterem gemessen ist die Potentialfunktian der freien Elektricität $\varphi_m = \varphi A^2$, wenn $\frac{1}{A}$ die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Obige Einheit vermeidet den lästigen Faktor $\frac{1}{A^2}$.

die Potentiale der $\lambda\ \mu\ \nu$, letztere als Massen gedacht,

$$\theta \quad (0)$$

die magnetische Polarisationsconstante,

$$\chi \ \frac{mm^{\frac{1}{2}}\, mgr^{\frac{1}{2}}}{\sec}$$

das magnetische Potential; jedoch soll nur derjenige Theil desselben so bezeichnet werden, welcher thatsächlich von Magneten herrührt, das magnetische Potential der inducirten Strömungen sei

$$\Omega \ \frac{mm^{\frac{1}{2}}\, mgr^{\frac{1}{2}}}{\sec}$$

Ω verliert seine Bedeutung in der Masse der Hohlkugel, kann also durch dieselbe nicht fortgesetzt werden, ist also eindeutig im innern und äussern Raum.

Mit

$$\psi \ \frac{mm^{\frac{1}{2}}\, mgr^{\frac{1}{2}}}{\sec}$$

werde die Strömungsfunktion in einer unendlich dünnen Hohlkugel bezeichnet. Um jede Zweideutigkeit im Bezug auf die Vorzeichen zu vermeiden, ist hier die Bestimmung für ψ: Wächst bei Durchlaufung einer Strecke ds ψ um $d\psi$, so ist $d\psi$ die den zurückgelegten Weg von der Linken zur rechten Seite in der Zeiteinheit durchströmende positive Elektricitätsmenge. Bei Durchlaufung des Weges sind die Füsse gegen den Mittelpunkt der Kugel, das Angesicht gegen das Ziel gewandt zu denken.

Da wir es im folgenden nur mit Strömungen zu thun haben, die in concentrischen Kugelschaalen um den Nullpunkt erfolgen, so können und wollen wir

$$\psi \ \frac{mgr^{\frac{1}{2}}}{mm^{\frac{1}{2}} \sec}$$

etwas allgemeiner definiren als eine Funktion von ϱ, θ, ω, derart, dass

$$da\ \psi_{(\varrho=a)}$$

die Strömungsfunktion der Schicht zwischen $\varrho = a$ und $\varrho = a + da$ darstellt.

Den angeführten Grössen sind zur Bequemlichkeit ihre Einheiten beigefügt.

Maasse der betrachteten Kugel.

3. Der äussere Radius der betrachteten Hohlkugel sei R, der innere r. Die Drehungsgeschwindigkeit der Kugel sei ω.

Entwickelung nach Kugelfunktionen.

4. Wird eine Funktion χ, die in einem beliebigen Raum der Gleichung $\Delta \chi = o$ genügt, nach Kugelfunktionen entwickelt, so soll χ_n dasjenige Glied bezeichnen, welches den Faktor ϱ^n enthält, und diese Bezeichnung soll, wenn nicht näheres bestimmt wird, auch negative n umfassen.

Bei weiterer Zerlegung von χ_n gelte die Bezeichnung:

für positive n:

$$\chi_n = \varrho^n Y_n,$$

für negative n:

$$\chi_n = \varrho^n Y_{-n-1},$$

$$Y_n = \sum_o^n i \, (A_{ni} \cos i\omega + B_{ni} \sin i\omega) \, P_{ni}(\theta),$$

für alle n gelten die Gleichungen:

$$\Delta \chi_n = 0$$

$$x \frac{\partial \chi_n}{\partial x} + y \frac{\partial \chi_n}{\partial y} + z \frac{\partial \chi_n}{\partial z} = n \chi_n.$$

Die $m$ten Differentialquotienten von χ_n nach den $x\,y\,z$ sind Kugelfunktionen $n - m$ter Ordnung, sofern nicht ein vorangegangener der nullten Ordnung wird. Die Ausdrücke

$$\frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_x}, \quad \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_y}, \quad \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega_z}$$

sind Kugelfunktionen $n$ter Ordnung.

Ferner ist

$$\Delta (\varrho^m Y_n) = (m - n)(m + n + 1) \varrho^{m-2} Y_n$$

$$x \frac{\partial (\varrho^m Y_n)}{\partial x} + y \frac{\partial (\varrho^m Y_n)}{\partial y} + z \frac{\partial (\varrho^m Y_n)}{\partial z} = m \varrho^m Y_n$$

$$\frac{\partial (\varrho^m Y_n)}{\partial \varrho} = \frac{m}{\varrho} (\varrho^m Y_n).$$

5. Es sei ψ die Strömungsfunktion einer Kugelschaale vom Radius R, es sei $\Psi' = \int \frac{\psi\, ds}{r}$ das Potential einer Masse, welche auf der Kugelschaale mit der Dichtigkeit ψ verbreitet ist, so ist das Potential der Strömung:

Sätze über die Strömung in Kugelschaalen.

$$\Omega = -\frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial \varrho}\,(\Psi' \varrho)$$

und die Grössen $U\ V\ W$ sind:

$$U = \frac{y}{R}\,\frac{\partial \Psi'}{\partial z} - \frac{z}{R}\,\frac{\partial \Psi'}{\partial y} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial \omega_x}\,\Psi'$$

$$V = \frac{z}{R}\,\frac{\partial \Psi'}{\partial x} - \frac{x}{R}\,\frac{\partial \Psi'}{\partial z} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial \omega_y}\,\Psi'$$

$$W = \frac{x}{R}\,\frac{\partial \Psi'}{\partial y} - \frac{y}{R}\,\frac{\partial \Psi'}{\partial x} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial \omega_z}\,\Psi'.$$

Ist Ψ' eine homogene Funktion $n$ten Grades in x, y, z, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{n+1}{R}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\Psi'$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{n+1}{R}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\Psi'$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{n+1}{R}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\Psi'.$$

Immer ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}.$$

Man findet diese Formeln entwickelt in Maxwell's Treatise on electricity, Vol. II, pag. 276. Die Vorzeichen sind dort theilweise andere, es liegt dies daran, dass dort nicht unser Coordinatensystem, sondern das symmetrische angewandt ist. Das hier benutzte Coordinatensystem ist dasjenige, auf welches sich die Helmholtz'schen Formeln beziehen.

Formeln für die elektromotorischen Kräfte.

6. Für die elektromotorischen Kräfte, welche die als unveränderlich vorausgesetzten Componenten des Vectorpotentiales $U\ V\ W$ in dem mit den Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ bewegten Elemente hervorrufen, sind die Formen angenommen:

$$\mathfrak{X} = \beta\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) - \gamma\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)$$

$$\mathfrak{Y} = \gamma\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \alpha\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$\mathfrak{Z} = \alpha\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) - \beta\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

Es sind dies die von Herrn Jochmann aufgestellten Formen. Die Abänderung, welche die Formeln des Potentialgesetzes an den Resultaten hervorrufen würden, sind in § 8 besprochen.

Wirken ausser den Strömungen $u\ v\ w$, Magnete $\lambda\ \mu\ \nu$, so ist für diesen Theil der Induction in obigen Formeln zu ersetzen:

$$\begin{array}{lll} U & & \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y} \\ V & \text{durch} & \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z} \\ W & & \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x}. \end{array}$$

Die so erhaltenen Formeln gelten auch dann, wenn sich die Magnete im Innern der rotirenden Masse befinden. Befinden sich die Magnete nur ausserhalb der Masse, so wird, da in der Masse

$$\Delta L = o,\ \Delta M = o,\ \Delta N = o,$$

$$\mathfrak{X} = \beta\frac{\partial \chi}{\partial z} - \gamma\frac{\partial \chi}{\partial y}$$

$$\mathfrak{Y} = \gamma\frac{\partial \chi}{\partial x} - \alpha\frac{\partial \chi}{\partial z}$$

$$\mathfrak{Z} = \alpha\frac{\partial \chi}{\partial y} - \beta\frac{\partial \chi}{\partial x}$$

für die Elemente unserer Kugel ist

$$\alpha = -\,\omega y,\ \beta = \omega x,\ \gamma = 0.$$