Über die Induction in rotirenden Kugeln

Hertz, Heinrich

1880

§ 2. Lösung bei Vernachlässigung der Selbstinduction

urn:nbn:de:bsz:31-279842

§ 2.

Lösung bei Vernachlässigung der Selbstinduction.

In diesem Paragraphen soll das Problem für den Fall gelöst werden, dass von der Wirkung der Selbstinduction abgesehen werden kann. Für die Strömungen $u\ v\ w$ bestehen die Gleichungen

$$\varkappa u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{X}$$

$$\varkappa v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{Y} \text{ *)}$$

$$\varkappa w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{Z};$$

ferner, da die Strömung stationär ist, im Innern

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

und für $\varrho = R$ und $\varrho = r$,

$$ux + vy + wz = 0.$$

Hieraus ergeben sich für φ die Bedingungen:
im Innern:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z},$$

und an der Oberfläche:

$$\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = x\mathfrak{X} + y\mathfrak{Y} + z\mathfrak{Z},$$

welche φ bis auf eine additive Constante bestimmen.

Das Potential der im äussern und innern Raum befindlichen Magneten sei nach Kugelfunktionen entwickelt:

$$\chi = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}\, \chi_n.$$

Wir betrachten jedes Glied für sich und setzen daher das äussere Potential $= \chi_n$.

---

*) Unter Annahme der hier für φ gebrauchten Einheiten.

Dann ist

$$\mathfrak{X} = \qquad \omega\, x\, \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$\mathfrak{Y} = \qquad \omega\, y\, \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

$$\mathfrak{Z} = -\omega y \frac{\partial \chi}{\partial y} - \omega\, x\, \frac{\partial \chi}{\partial x} = \omega\, z\, \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - \omega n\, \chi_n.$$

Daraus folgen für φ die Bedingungen:

In der Masse der Hohlkugel

Bestimmung des elektrischen Potentiales.

a)
$$\Delta \varphi = 2\omega \frac{\partial \chi_n}{\partial z}$$

für $\varrho = r$ und $\varrho = R$:

b)
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{\omega}{\varrho}\left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n z \chi_n\right).$$

Eine Lösung dieser Gleichungen ist:

$$\varphi = \frac{\omega}{n+1}\left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n z \chi_n\right).$$

Denn es ist

$$\Delta\left(\varrho^2 \frac{\partial \chi}{\partial z} - n z \chi_n\right)$$

$$= 2\,(2n+1)\,\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - 2n\,\frac{\partial \chi_n}{\partial z} \qquad (\S\ 1{,}4)$$

$$= 2\,(n+1)\,\frac{\partial \chi_n}{\partial z},$$

so dass die Gleichung für das Innere befriedigt ist. Ferner ist φ ein Produkt aus ϱ^{n+1} und einer Funktion der Winkel θ und ω, daraus ergiebt sich leicht, dass φ der Grenzgleichung genügt.

Der Werth der Constanten, welchen man zu obigem Ausdruck zu addiren hat, um die allgemeine Lösung zu erhalten, hängt in jedem Falle von den elektrostatischen Einflüssen ab, denen die Kugel ausgesetzt ist. Es kann der Kugel in jedem Falle so viel freie Elektricität zugeführt werden, dass die Constante gleich Null wird, und es sei dies in der Folge vorausgesetzt.

Aus φ folgt unmittelbar:

Bestimmung von u, v, w.

$$u = \frac{\omega}{\varkappa}\left\{-\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + x\frac{\partial \chi}{\partial z}\right\}$$
$$v = \frac{\omega}{\varkappa}\left\{-\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + y\frac{\partial \chi}{\partial z}\right\}$$
$$w = \frac{\omega}{\varkappa}\left\{-\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho^2\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n\right) + z\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - n\chi_n\right\}.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen mit $x\ y\ z$ und addiren, so folgt
$$ux + vy + wz = 0.$$

Die Strömung ist also überall senkrecht zum Radius, sie findet in concentrischen Kugelschaalen um den Nullpunkt statt. Es ist dies eine Folge des Umstandes, dass Gleichung b) nicht nur an der Oberfläche, sondern in der ganzen Masse erfüllt ist.

Weiter findet man

$$\Delta u = \frac{\omega}{\varkappa}\left\{-2\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\,\partial z} + 2\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\,\partial z}\right\} = 0$$
$$\Delta v = 0$$
$$\Delta w = 0, \text{ da auch } \Delta \chi_n = 0.$$

Uebrigens sind $u\ v\ w$ homogene Funktionen n ten Grades in x, y, z; es sind also $u\ v\ w$ durch Kugelfunktionen n ten Grades dargestellt. Wir werden für $u\ v\ w$ alsbald einfachere Formen finden.

Da die Strömungen in den concentrischen Kugelschichten einander ähnlich sind, so sind sie auch ähnlich denjenigen, welche in einer unendlich dünnen Hohlkugel entstehen, wir wenden uns daher zunächst zu einer solchen und bestimmen den Werth der Integrale $U\ V\ W$, und zwar für den innern Raum, wenn n positiv ist; für den äussern Raum, wenn n negativ ist. Nur der erstere Fall soll durchgerechnet werden. $\varkappa$ ersetzen wir durch k. Für $U\ V\ W$ gelten die Bedingungen:
$$\Delta U = 0,\quad \Delta V = 0,\quad \Delta W = 0$$
im ganzen Raum, an der Kugelschaale
$$\frac{\partial U_a}{\partial \varrho} - \frac{\partial U_i}{\partial \varrho} = -4\pi u,$$

entsprechend für V und W; ausserdem die gewöhnlichen Stetigkeitsbedingungen. Allen diesen Bedingungen ist genügt, wenn man setzt:

Aufsuchung Funktion Ψ'.

$$U_i = \frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \left\{ -\frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) + x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right\}$$
$$V_i = \frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \left\{ -\frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) + y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right\}$$
$$W_i = \frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \left\{ -\frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\varrho^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right) + z \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - nz\chi_n \right\}$$
$$U_a(\varrho) = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} U_i\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$
$$V_a(\varrho) = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} V_i\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$
$$W_a(\varrho) = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} W_i\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

Aus diesen $U\ V\ W$ wollen wir die magnetisirenden Kräfte im Innern, nämlich

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \text{ etc.}$$

berechnen, und dieselben

$$= -\frac{n+1}{R} \frac{\partial \Psi'}{\partial z}, \text{ etc.}$$

setzen, wir erhalten so die Funktion Ψ' (§ 1,5). Wir finden nämlich:

$$-\frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right) = -\frac{n+1}{R} \frac{\partial}{\partial z} \Psi'_i$$
$$-\frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right) = -\frac{n+1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \Psi'_i$$
$$-\frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right) = -\frac{n+1}{R} \frac{\partial}{\partial y} \Psi'_i.$$

Also ergiebt sich

$$\Psi'_i = \frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)} \frac{\omega}{k} \left(x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right)$$
$$= \frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)} \frac{\omega}{k} \chi'_n,$$

und es folgen jetzt die übrigen Attribute der Strömung ohne Weiteres aus Ψ. Eine willkürliche Constante, welche noch zu Ψ hinzugefügt werden kann, ist ohne Belang.

Sonach erhalten wir die Lösung unserer Aufgabe für eine Kugelschaale in folgender Form (§ 1,5):

Zusammenstellung der Formeln.

Es sei

$$\chi_n = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n \quad n > 0$$

die inducirende Potentialfunktion, dann ist:

$$\Psi_i = \frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)} \frac{\omega}{k} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y'_n$$

$$\Psi_a = \frac{4\pi R^2}{(2n+1)(n+1)} \frac{\omega}{k} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y'_n$$

$$\psi = \frac{\omega}{k} \frac{R}{n+1} Y'_n$$

$$\Omega_i = -\frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y'_n$$

$$\Omega_a = \frac{4\pi R n}{(2n+1)(n+1)} \frac{\omega}{k} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y'_n.$$

Aus den Relationen

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \omega_x} \Psi, \quad \frac{\partial U_a}{\partial \varrho} - \frac{\partial U_i}{\partial \varrho} = -4\pi u$$

und den entsprechenden für V und W erhält man ferner:

$$u = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_x} = \frac{1}{n+1} \frac{\omega}{k} \frac{\partial Y'_n}{\partial \omega_x}$$

$$v = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_y} = \frac{1}{n+1} \frac{\omega}{k} \frac{\partial Y'_n}{\partial \omega_y}$$

$$w = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \omega_z} = \frac{1}{n+1} \frac{\omega}{k} \frac{\partial Y'_n}{\partial \omega_z}.$$

Endlich lässt sich der Ausdruck für das elektrische Potential in der Masse der Hohlkugel umformen. Setzt man für den Augenblick $\varrho' = \varrho \sin\theta$, so ist

$$\varphi = \frac{\omega}{n+1} \left(\varrho' \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial \varrho'}\right)$$

oder

$$\varphi = -\frac{\omega}{n+1}\,\varrho\,\sin\theta\,\frac{\partial\chi_n}{\partial\theta},$$

und in der Kugelschaale

$$\overline{\varphi} = -\frac{\omega R}{n+1}\sin\theta\,\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}$$

Ganz ähnliche Rechnungen lassen sich durchführen, wenn n negativ ist, sich also die inducirenden Magnete im Innern befinden. Wir erhalten aus denselben das Resultat:

Ist die inducirende Potentialfunktion

$$\chi_n = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n,$$

so ist

$$\Psi_i = -\frac{4\pi R^2}{(2n+1)n}\,\frac{\omega}{k}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n'$$

$$\Psi_a = -\frac{4\pi R^2}{(2n+1)n}\,\frac{\omega}{k}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n'$$

$$\Omega_i = \frac{4\pi R(n+1)}{(2n+1)n}\,\frac{\omega}{k}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n'$$

$$\Omega_a = -\frac{4\pi R}{2n+1}\,\frac{\omega}{k}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n'$$

$$\psi = -\frac{\omega}{k}\,\frac{R}{n}\,Y_n'$$

$$u = -\frac{1}{n}\,\frac{\omega}{k}\,\frac{\partial Y_n'}{\partial\omega_x}$$

$$v = -\frac{1}{n}\,\frac{\omega}{k}\,\frac{\partial Y_n'}{\partial\omega_y}$$

$$w = -\frac{1}{n}\,\frac{\omega}{k}\,\frac{\partial Y_n'}{\partial\omega_z}$$

$$\overline{\varphi} = \frac{\omega}{n}\,R\sin\theta\,\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}.$$

Von den hier angeführten Grössen gehen ψ, u, v, w, φ unmittelbar aus den früheren durch Vertauschung von n mit $-n-1$ hervor.

Zu der erhaltenen Lösung mache ich die folgenden Bemerkungen:

1. Rotirt eine Hohlkugel von endlicher Dicke unter dem Einfluss des Potentiales χ_n (n pos. oder neg.), so sind die inducirten Strömungen:

$$u = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\omega}{\varkappa} \cdot \frac{\partial \chi_n'}{\partial \omega_x}$$

$$v = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\omega}{\varkappa} \cdot \frac{\partial \chi_n'}{\partial \omega_y}$$

$$w = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\omega}{\varkappa} \cdot \frac{\partial \chi_n'}{\partial \omega_z}$$

und ihre Strömungsfunktion ist:

$$\psi = \frac{\varrho}{n+1} \cdot \frac{\omega}{\varkappa} \cdot \chi_n'.$$

2. Es sei χ_n noch weiter zerlegt, wir betrachten das Glied

$$\chi_{ni} = A_{ni} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos i\omega\, P_{ni}.$$

Construktion der Strömungslinien.

Dazu gehört die Strömungsfunktion:

$$\psi_{ni} = -\frac{\varrho}{n+1} \frac{\omega i}{\varkappa} A_{ni} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \sin i\omega\, P_{ni}.$$

Daraus ergiebt sich folgende einfache Construction für die Strömungslinien, welche ein derartiges einfaches Potential hervorruft:

Man zeichne auf eine beliebige Kugelschicht die Linien gleichen Potentiales auf, und drehe hierauf die Schicht um den Winkel $\frac{1}{i} \frac{\pi}{2}$, die gezeichneten Linien stellen jetzt die Stromlinien dar, welche unter dem Einfluss jenes Potentiales entstehen.

Rotirt beispielsweise die Kugel unter dem Einfluss einer constanten Kraft, deren Richtung zur Rotationsaxe senkrecht ist, so erfüllt das äussere Potential die hier gestellten Bedingungen, es ist $n = 1$, $i = 1$. Die Niveaulinien des Potentials auf der Kugel sind Kreise, also sind auch die Strömungslinien

Kreise. Die Ebenen ersterer sind parallel zur Rotationsaxe und senkrecht zur Richtung der Kraft, sonach sind die Ebenen letzterer parallel zur Richtung der Kraft und zur Rotationsaxe.

Umformung der Lösung.

3. Wir können den Werth von ψ in eine Form bringen, welche die Summation über sämmtliche Kugelfunktionen erlaubt, also die Zerlegung des äussern Potentials nach solchen überflüssig macht.

Es sei n positiv, dann ist

$$\int_0^\varrho \chi_n \, d\varrho = \frac{\varrho}{n+1} \chi_n.$$

Sei zweitens n negativ, dann ist

$$\int_\infty^\varrho \chi_n \, d\varrho = \frac{\varrho}{n+1} \chi_n.$$

Also ist für positive n

$$\psi = \frac{\omega}{\varkappa} \int_0^\varrho \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega} d\varrho$$

und für negative n

$$\psi = -\frac{\omega}{\varkappa} \int_\varrho^\infty \frac{\partial \chi_n}{\partial \omega} d\varrho.$$

Summation über die Kugelfunktionen.

Diese Ausdrücke lassen ohne Weiteres die Summation zu, und wir erhalten folgende zweite Form der Lösung:

Bezeichnet χ_i den Theil des Potentiales, welcher von inneren, χ_a den Theil, welcher von äusseren Magneten herrührt, so ist

$$\psi = \frac{\omega}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \int_0^\varrho \chi_a \, d\varrho - \int_\varrho^\infty \chi_i \, d\varrho \right\}.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\varphi = -\omega \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \int_0^\varrho \chi_a \, d\varrho - \int_\varrho^\infty \chi_i \, d\varrho \right\}.$$

Für eine unendlich dünne Kugelschaale vom Radius R wird:

$$\psi = \frac{\omega}{k} \left\{ \int_0^R \frac{\partial \chi_a}{\partial \omega} d\varrho - \int_R^\infty \frac{\partial \chi_i}{\partial \omega} d\varrho \right\}$$

$$\varphi = -\omega \sin\theta \left\{ \int_0^R \frac{\partial \chi_a}{\partial \theta} d\varrho - \int_R^\infty \frac{\partial \chi_i}{\partial \theta} d\varrho \right\}.$$

Daraus folgt zwischen φ und ψ die Bezeichnung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \varkappa \sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0.$$

§ 3.

Vollständige Lösung für unendlich dünne Hohlkugeln.

Es soll jetzt die Wirkung der Selbstinduction in Betracht gezogen werden, es werde jedoch in diesem Paragraphen die Betrachtung auf eine unendlich dünne Kugelschaale beschränkt. Der Einfachheit halber werde in der ausgeführten Rechnung n als positiv vorausgesetzt.

Einer üblichen Anschauungsweise folgend, betrachten wir zunächst den gesammten Inductionsact als eine unendliche Reihe einzelner Inductionen; die von den äussern Magneten inducirte Strömung inducirt eine zweite, diese eine dritte, und so fort ins Unendliche. Wir berechnen alle diese Ströme und addiren sie, so lange die Summe gegen einen endlichen Grenzwerth convergirt, stellt dieser sicherlich die thatsächlich stattfindende Strömung dar.

Sei

$$\chi_n = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n$$

ein Theil der äussern Potentialfunktion. Das von dieser inducirte Potential ist:

$$\Omega_i = -\frac{4\pi R}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{k} \cdot \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n'$$

$$\Omega_a = \frac{4\pi R n}{(2n+1)(n+1)} \cdot \frac{\omega}{k} \cdot \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n'.$$