Über die Induction in rotirenden Kugeln

Hertz, Heinrich

1880

§ 3. Vollständige Lösung für unendlich dünne Hohlkugeln

Für eine unendlich dünne Kugelschaale vom Radius R wird:

$$\psi = \frac{\omega}{k} \left\{ \int_0^R \frac{\partial \chi_a}{\partial \omega} d\varrho - \int_R^\infty \frac{\partial \chi_i}{\partial \omega} d\varrho \right\}$$

$$\varphi = -\omega \sin\theta \left\{ \int_0^R \frac{\partial \chi_a}{\partial \theta} d\varrho - \int_R^\infty \frac{\partial \chi_i}{\partial \theta} d\varrho \right\}.$$

Daraus folgt zwischen φ und ψ die Bezeichnung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \varkappa \sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0.$$

§ 3.

Vollständige Lösung für unendlich dünne Hohlkugeln.

Es soll jetzt die Wirkung der Selbstinduction in Betracht gezogen werden, es werde jedoch in diesem Paragraphen die Betrachtung auf eine unendlich dünne Kugelschaale beschränkt. Der Einfachheit halber werde in der ausgeführten Rechnung n als positiv vorausgesetzt.

Einer üblichen Anschauungsweise folgend, betrachten wir zunächst den gesammten Inductionsact als eine unendliche Reihe einzelner Inductionen; die von den äussern Magneten inducirte Strömung inducirt eine zweite, diese eine dritte, und so fort ins Unendliche. Wir berechnen alle diese Ströme und addiren sie, so lange die Summe gegen einen endlichen Grenzwerth convergirt, stellt dieser sicherlich die thatsächlich stattfindende Strömung dar.

Sei

$$\chi_n = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n$$

ein Theil der äussern Potentialfunktion. Das von dieser inducirte Potential ist:

$$\Omega_i = -\frac{4\pi R}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{k} \cdot \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y'_n$$

$$\Omega_a = \frac{4\pi R n}{(2n+1)(n+1)} \cdot \frac{\omega}{k} \cdot \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y'_n.$$

Berechnung der successiven Inductionen.

Lassen wir erstens innerhalb der Hohlkugel eine zweite rotiren, welche der ersten unendlich nahe sei und sich mit gleicher Geschwindigkeit bewege, so wird in dieser von den Strömen erster Ordnung (Ω_i) eine Strömung inducirt, deren magnetisches Potential im Innern ist:

$$\Omega_i' = \left(\frac{4\pi R}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{k}\right)^2 \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n''.$$

Lassen wir zweitens ausserhalb der ursprünglichen Hohlkugel eine zweite rotiren, die der ersten unendlich nahe sei, so wird in dieser durch den Einfluss der Ströme erster Ordnung (Ω_a) eine Strömung inducirt werden, deren Potential im Innern ist:

$$\Omega_i' = \frac{4\pi R n}{(2n+1)(n+1)} \frac{\omega}{k} \cdot \frac{4\pi R(n+1)}{(2n+1)n} \frac{\omega}{k} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n''$$
$$= \left(\frac{4\pi R}{2n+1} \frac{\omega}{k}\right)^2 \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n Y_n''.$$

Beide Ausdrücke für Ω' fallen zusammen. Mit beiden fällt daher auch das Potential derjenigen Strömung zusammen, welche die Strömung erster Ordnung in der Kugelschaale selber inducirt. Indem wir in ganz derselben Weise die folgenden Inductionen berechnen und Alles addiren, erhalten wir für die Gesammtwirkung:

$$\Omega_i = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \sum_1^\infty {}^m \left(-\frac{4\pi R\omega.}{(2n+1)k}\right)^m \frac{\partial^m Y_n}{\partial \omega^m}$$

$$\Omega_a = -\frac{n}{n+1}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \sum_1^\infty {}^m \left(-\frac{4\pi R\omega}{(2n+1)k}\right)^m \frac{\partial^m Y_n}{\partial \omega^m}$$

$$\psi = -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)} \sum_1^\infty {}^m \left(-\frac{4\pi R\omega}{(2n+1)k}\right)^m \frac{\partial^m Y_n}{\partial \omega^m}.$$

Die erhaltenen Ausdrücke lassen sich weiter entwickeln, wenn man Y_n noch weiter zerlegt. Man hat:

$$Y_n = \sum_0^n {}^i (A_{ni} \cos i\omega + B_{ni} \sin i\omega) P_{ni}.$$

Wir beschränken die Untersuchung auf ein Glied dieser Reihe, und sei also:

$$Y_n = A_{ni} \cos i\omega\, P_{ni}.$$

Dann haben wir:

$$\Omega_i = A_{ni}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n P_{ni}\left\{\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}\sin i\omega - \left(\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}\right)^2\cos i\omega\right.$$
$$\left. - \left(\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}\right)^3\sin i\omega + \left(\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}\right)^4\cos i\omega + \ldots\right\}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k} = h, \text{ (h ist eine reine Zahl)}$$

so wird jetzt:

$$\Omega_i = A_{ni}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n P_{ni}(\sin i\omega - h\cos i\omega)$$
$$\times(1 - h^2 + h^4 - h^6 + \ldots)h.$$

Ist h ein ächter Bruch, so convergirt die in Ω enthaltene Reihe und wir erhalten:

$$\Omega_i = A_{ni}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \frac{h}{1+h^2}(\sin i\omega - h\cos i\omega)P_{ni}$$

$$\Omega_a = -\frac{n}{n+1}A_{ni}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1}\frac{h}{1+h^2}(\sin i\omega - h\cos i\omega)P_{ni}$$

$$\psi = -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)}\frac{h}{1+h^2}(\sin i\omega - h\cos i\omega)P_{ni}.$$

Ist $h > 1$*), so divergirt die in Ω vorkommende Reihe, und die Auffassung des Phänomens als einer Reihe successiver Inductionen ist nicht mehr zulässig, da jede folgende grösser als die vorhergehende werden würde.

Nichtsdestoweniger gelten die aufgestellten Formeln für jedes h, wie man leicht a posteriori verificirt und auch durch dieselben Schlüsse ableiten kann, welche wir bei Hohlkugeln

*) Eine kupferne Hohlkugel von 50 mm Radius, 2 mm Wandstärke, muss beiläufig ca. 87 Umdrehungen in der Sekunde machen, damit für $i = 1$, $n = 1$, $h = 1$ werde.

von endlicher Dicke anzuwenden haben werden. Da ich die vorliegenden Formeln nochmals aus den allgemeinen ableiten werde, will ich mich hier nicht bei denselben aufhalten.

Wir setzen noch:

$$\operatorname{tg} \delta = h,$$

dann können wir schreiben:

$$\Omega_i = A_{ni} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \sin \delta \, \sin (i\omega - \delta) P_{ni}$$

Die Lösung:

$$\Omega_a = -\frac{n}{n+1} A_{ni} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \sin \delta \, \sin (i\omega - \delta) P_{ni}$$

$$\psi = -\frac{2n+1}{4\pi(n+1)} \sin \delta \sin (iw - \delta) P_{ni}.$$

Das Resultat ist also das folgende:

1. Die Strömungsfunktion, welche eine einfache Kugelfunktion inducirt, ist eine einfache Kugelflächenfunktion derselben Art, wie diejenige, welche in der inducirenden Funktion enthalten ist. Die Construction, welche wir früher (§ 2, 2) zur Bestimmung der Strömungskurven anwandten, können wir daher auch hier beibehalten, wir haben aber die behandelte Kugelschicht im Sinne der Rotation um einen gewissen Winkel $\frac{\delta}{i}$ gegen die früher festgesetzte Lage zu drehen. Dieser Winkel ist bei kleinen Drehungsgeschwindigkeiten diesen proportional, bei grösseren convergirt er gegen die Grösse $\frac{\pi}{2i}$. Die Intensität, welche anfangs den Rotationsgeschwindigkeiten proportional wächst, wächst bei steigenden Werthen derselben immer langsamer und convergirt gegen eine feste Grenze.

Construction der Stromlinien.

2. Wird schliesslich $\frac{\omega}{k} = \infty$, so wird $\delta = \frac{\pi}{2}$, also

$$\Omega_i = -\chi_n$$

Die Geschwindigkeit ist unendlich.

$$\Omega_a = \frac{n}{n+1} \chi_n$$

$$\psi = \frac{2n+1}{4\pi(n+1)} \bar{\chi}_n.$$

Dieser Schluss gilt nicht für diejenigen Glieder der Entwickelung, welche symmetrisch zur Rotationsaxe sind. Für diese ist i, also h, also Ω gleich Null für jede Drehungsgeschwindigkeit. Diese Glieder rufen keine Strömung, sondern nur eine Vertheilung freier Elektricität in der Kugel hervor.

Eine unendlich schnell rotirende Hohlkugel lässt also nur diejenigen Theile des äusseren Potentiales in ihrem Innern wirken, welche symmetrisch zur Axe sind, sind solche Glieder nicht vorhanden, so ist das Innere der Kugel gegen den Einfluss von Aussen geschützt. Ist das Potential eine Kugelfunktion, so findet die Strömung in den Linien gleichen Potentiales statt.

3. Für das elektrische Potential, welches χ_n entspricht, hatten wir gefunden ohne Berücksichtigung der Selbstinduction:

$$\overline{\varphi} = -\frac{\omega}{n+1} R \sin\theta \frac{\partial \overline{\chi_n}}{\partial \theta}.$$

Mit Berücksichtigung der Selbstinduction werden wir haben: Das elektrische Potential.

$$\overline{\varphi} = -\frac{w}{n+1} R \sin\theta \frac{\partial \overline{\chi_n + \Omega_i}}{\partial \theta}.$$

Daraus folgt: Die Gestalt der Niveaulinien des Potentials bleibt (für jede inducirende Kugelfunktion) ungeändert durch die Selbstinduction, die Niveaulinien erscheinen um denselben Winkel gedreht, wie die Strömungslinien. Für die Theile des äussern Potentials, welche symmetrisch zur Achse sind, wächst φ ins Unendliche bei wachsender Geschwindigkeit, für die übrigen convergirt es gegen einen endlichen Grenzwerth, welcher sich leicht bestimmen lässt.

Ausartungen der Kugelschaale.

Ebene Platten.

Wir lassen jetzt den Radius der Kugelschaale unendlich werden, die Variationen des inducirenden Potentials aber endlich bleiben, wir untersuchen sodann näher die elektrische Bewegung am Aequator und am Pol. Wir erhalten so die Theorie geradlinig bewegter und rotirender ebener Platten. Erstere kann als ein specieller Fall letzterer angesehen werden, es empfiehlt sich aber in mancher Hinsicht, diese Fälle gesondert zu behandeln.

A. Geradlinig bewegte Platten.

Wir führen das Coordinatensystem der $\xi\ \eta\ \zeta$ ein, dessen Zusammenhang mit den x, y, z durch Tafel 1b. gegeben ist.

Geradlinig bewegte Platten.

Die Richtung der η ist die positive Bewegungsrichtung. Die wirkenden Magnete denken wir uns in der Kugel, also auf der Seite der negativen ζ. Wir haben zu untersuchen, welche Form in den $\xi\ \eta\ \zeta$ die Kugelfunktion

$$A_{ni} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \cos i\omega\, P_{ni}$$

annimmt.

Um endliche Variationen zu erhalten, haben wir n und i ∞ werden zu lassen von der Ordnung von R, wir setzen

$$\text{für } n \qquad nR$$
$$\text{für } i \qquad rR.$$

Wir ersetzen ferner

$$\varrho,\ \omega,\ \theta$$

durch

$$R + \zeta,\ \frac{\eta}{R},\ \frac{\pi}{2} + \frac{\xi}{R}.$$

Dadurch geht über:

$$\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \text{ in } e^{-n\zeta}$$
$$\cos i\omega \text{ in } \cos r\eta.$$

$P_{ni}(\theta)$ muss in eine solche Funktion von ξ übergehen, dass das Produkt derselben mit $e^{-n\zeta} \cos r\eta$ der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt. Eine solche Funktion ist $\cos s\xi$ oder $\sin s\xi$, wenn

$$n^2 = r^2 + s^2$$

ist.

Sonach nehmen die früheren Kugelfunktionen jetzt die Form an

$$A_{rs}\, e^{-n\zeta} \cos r\eta \cos s\xi,$$

und verwandte.

Als Summe solcher Formen ist die äussere Potentialfunktion χ darzustellen. Diese Darstellung hat durch Fourier'sche Integrale zu erfolgen.

Für jedes Glied (Element) der Entwickelung geht nun die Lösung unmittelbar aus dem früheren hervor. Für das angeführte setzen wir

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\pi r}{n} \cdot \frac{\alpha}{k},$$

worin α die Geschwindigkeit der Platte bezeichnet, und haben:

Die Lösung.

$$\Omega_+ = A_{rs}\, e^{-n\zeta} \sin\delta \sin(r\eta - \delta) \cos s\xi$$

$$\Omega_- = -A_{rs}\, e^{n\zeta} \sin\delta \sin(r\eta - \delta) \cos s\xi$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} A_{rs} \sin\delta \sin(r\eta - \delta) \cos s\xi.$$

Durch Summation über alle Glieder folgen die vollständigen Integrale des Problems. Die Summation lässt sich ausführen für den Fall, dass $\frac{\alpha}{k}$ unendlich wird. Dann ist

$$\delta = \frac{\pi}{2}, \ \sin\delta = 1,$$

also

$$\Omega_+ = -\chi$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\,\bar{\chi}.$$

Auf der den Magneten abgewandten Seite ist dann das Potential Null, die Strömung erfolgt überall in den Niveaulinien des inducirenden Potentiales.

Abgesehen von diesem Grenzfall ist indessen die Anwendung der obigen Lösung eine sehr weitläufige; wir sehen uns deshalb nach Näherungsmethoden um. Zu solchen gelangen wir zunächst wieder durch Einführung der successiven Inductionen. Damit die Betrachtung derselben erlaubt sei, muss $\frac{2\pi\alpha}{k}$ ein ächter Bruch sein, ist diese Bedingung erfüllt, so führt die Rechnung, wie schon im allgemeinen Falle gezeigt ist, zu einem convergenten Resultat.

Wir gehen wieder von der unendlichen Hohlkugel aus. Zu der inducirenden Potentialfunction χ_{-n-1} gehörte im äussern Raum die inducirte Potentialfunktion:

$$\Omega_a = -\frac{4\pi R}{2n+1}\frac{\omega}{k}\frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial \omega}.$$

Lassen wir nun R unendlich werden, während wir ersetzen

$$\begin{array}{rll} \frac{\partial}{\partial \omega} & \text{durch} & R\frac{\partial}{\partial \eta} \\ n & \text{durch} & nR \\ \omega R & \text{durch} & \alpha \\ \chi_{-n-1} & \text{durch} & \chi_n = A_n e^{-n\zeta}\cos r\eta \cos s\xi \end{array}$$

so wird

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k}\frac{1}{n}\frac{\partial \chi_n}{\partial \eta}$$

Aber es ist:

$$\int_\zeta^\infty \chi_n \, d\zeta = \frac{\chi_n}{n}.$$

Also ist, nach Summation über alle n

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k}\int_\zeta^\infty \frac{\partial \chi}{\partial \eta} d\zeta.$$

Aus diesem Ω können wir nun in ganz derselben Weise das inducirte Potential zweiter Ordnung erhalten, und indem wir in derselben Weise fortrechnen, erhalten wir schliesslich das Resultat:

Zweite Form der Lösung.

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k}\int_\zeta^\infty \frac{\partial \chi}{\partial \eta} d\zeta + \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2 \int_\zeta^\infty\int_\zeta^\infty \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta} d\zeta^2 - \dots$$

$$\Omega_-(-\zeta) = -\Omega_+(\zeta)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\overline{\Omega}_+.$$

Diese Reihe führt, hinreichend fortgesetzt, zu dem exacten Resultat; in der That ist sie nur die Entwickelung desselben nach steigenden Potenzen von $\frac{2\pi\alpha}{k}$, wie sich in folgender Weise zeigt:

In der Kugelschaale lässt sich das zu $\chi_{(-n-1)i}$ gehörige Ω_a in der Form darstellen: (Seite 19 unten.)

$$\Omega_a = -\frac{1}{1+h^2}\left(\frac{h}{i}\frac{\partial\chi}{\partial\omega} + h^2\chi\right)$$

$$h = \frac{4\pi R\omega i}{(2n+1)k}.$$

Machen wir nun wieder die auf die ebene Platte bezüglichen Substitutionen, entwickeln

$$\frac{1}{1+h^2} = 1 - h^2 + h^4 - h^6 + \ldots,$$

und setzen für h seinen Werth

$$\frac{2\pi\alpha}{k}\cdot\frac{r}{n},$$

so folgt

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\alpha}{k}\frac{1}{n}\frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} - \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^2\frac{r^2}{n^2}\chi_{rs} + \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^3\frac{r^2}{n^3}\frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} + \left(\frac{2\pi\alpha}{k}\right)^4\frac{r^4}{n^4}\chi_{rs} - \ldots,$$

aus welcher Entwickelung die vorige folgt, wenn man die Relationen

$$\int_\zeta^\infty \chi_{rs}\, d\zeta = \frac{\chi_{rs}}{n},\quad \frac{\partial^2\chi_{rs}}{\partial\eta^2} = -r^2\chi_{rs}$$

anwendet, und die Summation über alle r und s ausführt. Hieran knüpft sich naturgemäss der Versuch, für sehr grosse Werthe von $\frac{2\pi\alpha}{k}$ eine Entwickelung nach absteigenden Potenzen dieser Grösse zu erhalten.

Ist $h > 1$, so haben wir

$$\frac{1}{1+h^2} = \frac{1}{h^2}\left(1 - \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^4} - \ldots\right),$$

also:

$$\Omega_+ = -\chi_{rs} - \frac{k}{2\pi\alpha}\frac{n}{r^2}\frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} + \left(\frac{k}{2\pi\alpha}\right)^2\frac{n^2}{r^2}\chi_{rs}$$

$$+ \left(\frac{k}{2\pi\alpha}\right)^3\frac{n^3}{r^4}\frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\eta} - \ldots$$

Die Glieder dieser Reihe lassen nun allerdings, wie der Versuch zeigt, eine Darstellung, welche unmittelbar die Summation über alle χ_{rs} erlaubt, nicht zu; setzen wir aber voraus, das χ symmetrisch zur η Achse sei, so dass in seiner Entwickelung nur Glieder mit $\cos r\eta$ vorkommen, so haben wir

$$-n\chi_{rs} = \frac{\partial\chi_{rs}}{\partial\zeta}$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial\eta} = \int_0^\eta \chi_{rs}\, d\eta,$$

und können dann wenigstens für die Glieder erster Ordnung in $\frac{k}{2\pi\alpha}$ die Summation ausführen. Indem wir uns auf diese beschränken, erhalten wir:

Annähernde Lösung für grosse Werthe der Geschwindigkeit.

$$\Omega_+ = -\chi - \frac{k}{2\pi\alpha}\int_0^\eta \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\, d\eta,$$

und für das sehr klein werdende Gesammtpotential auf der positiven Seite:

$$\Omega + \chi = -\frac{k}{2\pi\alpha}\int_0^\eta \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\, d\eta.$$

Ausser der schon angeführten Bedingung müssen wir dieser Formel jedoch eine weitere Beschränkung auferlegen.

Ist nämlich $\frac{2\pi\alpha}{k}$ auch noch so gross, so wird doch für gewisse Elememente, für welche r verschwindet $h < 1$, also die benutzte Entwickelung ungültig werden. Dieser Umstand hat zur Folge, dass der aufgestellte Ausdruck nur in einem begrenzten Gebiet gilt, welches übrigens um so weiter ist, je grösser $\frac{2\pi\alpha}{k}$ wird. Ich verweise deshalb auf die gleich folgende Betrachtung (Seite 29).

Wir bestimmen noch das Potential φ der freien Elektricität. Dasselbe ergiebt sich aus dem für die Hohlkugel gewonnenen Resultat durch ganz dieselben Substitutionen, welche wir beständig angewandt haben und wird erhalten: Potential der freien Elektricität.

1. ohne Berücksichtigung der Selbstinduction:

$$\overline{\varphi} = \alpha \int_0^\infty \frac{\partial \chi}{\partial \xi} d\zeta$$

2. mit Berücksichtigung derselben:

$$\overline{\varphi} = \alpha \int_0^\infty \frac{\partial (\chi + \Omega)}{\partial \xi} d\zeta.$$

Von Interesse ist der Fall, dass die Geschwindigkeit α unendlich wird. Nehmen wir an, dass χ symmetrisch zur η Achse ist, und beschränken uns auf ein endliches Gebiet, so haben wir für $\alpha = \infty$,

$$\Omega + \chi = -\frac{k}{2\pi\alpha} \int_0^\eta \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} d\eta,$$

also wird

$$\overline{\varphi} = -\frac{k}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\eta \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} d\eta\, d\zeta$$

$$= \frac{k}{2\pi} \int_0^\eta \frac{\partial \overline{\chi}}{\partial \xi} d\eta$$

φ nähert sich also bei wachsender Geschwindigkeit einem festen endlichen Grenzwerthe.

B. Rotirende Scheibe.

Es werde jetzt die Nachbarschaft des Poles betrachtet, wir erhalten so die Theorie einer unendlichen rotirenden Scheibe. Die inducirenden Magnete mögen wieder im Innern der Kugel Rotirende Scheiben.

gedacht sein. Die Schlüsse, welche wir anzuwenden haben, sind den im vorigen Falle gemachten ganz analog.

Als Coordinaten benutzen wir ϱ, ω, z; ϱ soll hier den senkrechten Abstand von der Rotationsaxe bezeichnen. In den allgemeinen Formeln haben wir dann zu ersetzen:

$$\varrho \text{ durch } R + z$$

$$\theta \text{ durch } \frac{\varrho}{R}$$

$$\omega \text{ bleibt } \omega,$$

nach Einführung dieser Substitutionen haben wir R unendlich werden zu lassen. Es geht dann eine einfache Kugelfunktion über in die Form:

$$A_{ni}\, e^{-nz} \cos i\omega\; J^i(n\varrho),$$

(und in analoge), in welcher J^i die $i$te Bessel'sche Funktion bezeichnet. Durch Integrale, welche den Fourier'schen ganz analog sind, ist das gegebene χ in Glieder dieser Form zu zerspalten.

Wir behandeln jedes Glied einzeln.

Setzen wir:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\pi\omega}{k} \cdot \frac{i}{n},$$

so ist für das angeführte Glied die Lösung des Problems:

Die Lösung.

$$\Omega_+ = A_{ni}\, e^{-nz} \sin\delta \sin(i\omega - \delta)\, J^i(n\varrho)$$

$$\Omega_- = -A_{ni}\, e^{nz} \sin\delta \sin(i\omega - \delta)\, J^i(n\varrho)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} A_{ni} \sin\delta \sin(i\omega - \delta)\, J^i(n\varrho).$$

Durch Summation ergeben sich die vollständigen Integrale.

Wir suchen wieder eine Entwickelung nach Potenzen von $\frac{2\pi\omega}{k}$ zu erhalten, durch Berücksichtigung der successiven Inductionen. Durch genau dieselben Schlüsse wie oben erhalten wir:

$$\Omega_+ = -\frac{2\pi\omega}{k}\int\limits_z^\infty \frac{\partial \chi}{\partial \omega}\,dz + \left(\frac{2\pi\omega}{k}\right)^2 \int\limits_z^\infty\int\limits_z^\infty \frac{\partial^2 \chi}{\partial \omega^2}\,dz^2 - \ldots$$

Zweite Form der Lösung.

$$\Omega_-(-z) = -\,\Omega_+(z)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\,\overline{\Omega}_+.$$

Die Gültigkeit dieser Formeln ist aber an eine Beschränkung geknüpft, welche den früheren analogen aufzuerlegen wir nicht nöthig hatten. Ihre Ableitung setzt nämlich voraus, dass für jedes einzelne Glied der Entwickelung von χ die Anschauung der Gesammtinduction als einer Reihe successiver Inductionen erlaubt sei. Nach den Resultaten, die wir für Kugeln erhalten haben, ist diese Bedingung nur für diejenigen Glieder erfüllt, für welche $\frac{2\pi\omega}{k}\,\frac{i}{n}$ ein ächter Bruch ist. Nun kann aber n jeden Werth von Null bis ∞ annehmen, für eine Reihe von Gliedern ist daher die nothwendige Bedingung nicht erfüllt, das Resultat kann also nur ein angenähertes sein. In Bezug hierauf bemerke ich folgendes:

Bemerkungen zu letzterer.

1. Im Endlichen verschwinden die Glieder, für welche n einen sehr kleinen Werth hat, gegen diejenigen, für welche n einen endlichen Werth hat. Der in obiger Formel begangene Fehler muss daher zunächst für grosse ϱ einen merklichen Werth erhalten.

2. Die Grösse $\frac{2\pi\omega}{k}$ kann immer so klein gedacht werden, dass innerhalb eines gegebenen Gebietes die Annäherung eine gegebene sei. Denn eine Verkleinerung von $\frac{2\pi\omega}{k}$ vermindert die Anzahl der Glieder, welcher der erforderlichen Bedingung nicht genügen, eine beliebige Verkleinerung vermindert die Anzahl derselben in beliebigem Grade.

Die genaue Bestimmung des Gültigkeitsgebietes bei einem gegebenen $\frac{2\pi\omega}{k}$ und gegebener Annäherung dürfte Schwierigkeiten haben, für die Anwendungen ist diese Bestimmung ohne Wichtigkeit, da es sich hier erstens immer um sehr kleine

Werthe von $\frac{2\pi\omega}{k}$, zweitens nicht um unendliche, sondern um begrenzte Platten handelt.

Die Gleichung

$$\Omega = -\frac{2\pi\omega}{k}\int\limits_z^\infty \frac{\partial\chi}{\partial\omega}\,dz$$

Möglichkeit, die Selbstinduction zu vernachlässigen.

ist exact, wenn man von der Selbstinduction absieht. Es zeigt sich also, dass die Erlaubniss, von der Selbstinduction absehen zu dürfen, nicht nur an die Bedingung, dass $\frac{2\pi\omega}{k}$ klein sei, sondern auch an die Beschränkung auf ein gewisses endliches Gebiet geknüpft ist. Die Grösse dieses Gebietes hängt von $\frac{2\pi\omega}{k}$ ab, über dasselbe hinaus aber ist ohne Berücksichtigung der Selbstinduction auch keine angenäherte Bestimmung der Strömung mehr möglich. Ein ganz analoges Resultat wird uns am Ende des § 4 begegnen.

Annäherung für grosse Werthe der Geschwindigkeit.

Auch eine Entwickelung für grosse Werthe von $\frac{2\pi\omega}{k}$ lässt sich aufstellen. Wir bezeichnen mit χ_0 den Theil von χ, welcher symmetrisch zur Rotationsaxe ist, mit $\chi_1 = \chi - \chi_0$ den Rest. Dem χ_0 entspricht für jede Drehungsgeschwindigkeit der Werth $\Omega = 0$. Wir erhalten daher, wenn wir χ als symmetrisch zur x Achse annehmen, für grosse Werthe von $\frac{2\pi\omega}{k}$

$$\Omega = -\chi_1 - \frac{k}{2\pi\omega}\int\limits_0^\omega \frac{\partial\chi_1}{\partial z}\,d\omega.$$

Die Ableitung ist dieselbe wie oben. Die Reihe lässt sich hier auch vollständig und auch für solche χ ausführen, welche nicht symmetrisch zur x Achse sind; ich gehe darauf nicht weiter ein.

Zum Schluss bestimmen wir das Potential φ der freien Elektricität. Durch die passenden Substitutionen ergiebt sich aus den allgemeinen Formeln:

1. ohne Berücksichtigung der Selbstinduction:

$$\varphi = \omega \varrho \int_0^\infty \frac{\partial \chi}{\partial \varrho} dz.$$

Diesem φ ist eventuell eine Constante von der Grösse hinzuzufügen, dass in der Unendlichkeit $\varphi = 0$ wird. Die Formel, zu welcher wir gelangt sind, ist schon von Herrn Jochmann angegeben für den Fall, dass χ symmetrisch zur z Achse ist, es zeigt sich, dass dieselbe ganz allgemein gilt. Potential der freien Elektricität.

2. mit Berücksichtigung der Selbstinduction haben wir:

$$\overline{\varphi} = \omega \varrho \int_0^\infty \frac{\partial (\chi + \Omega)}{\partial \varrho} dz.$$

Für ∞ werdende ω erhalten wir, wenn χ symmetrisch zur x Achse ist:

$$\varphi = \omega \varrho \int_0^\infty \frac{\partial \chi_0}{\partial \varrho} dz + \frac{k}{2\pi} \int_0^\omega \frac{\partial \chi_1}{\partial \varrho} d\omega.$$

Das erste Glied wächst mit ω ins Unendliche.

Wir haben bei der Behandlung ebener Platten immer angenommen, dass nur auf einer Seite der bewegten Platte sich inducirende Magnete befinden; diese Voraussetzung ist unwesentlich. Ist sie nicht erfüllt, so zerlegen wir das gesammte Potential nach seinem Ursprung in zwei Theile, und behandeln jeden so, wie dies oben an einem von ihnen gezeigt ist.

§ 4.

Vollständige Lösung für Kugeln und Hohlkugeln von endlicher Dicke.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der Induction in einer Hohlkugel von endlicher Dicke. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, mögen zunächst nur im äussern Raum inducirende Magnete vorausgesetzt werden.