Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen

Vorländer, J. J.

Leipzig, 1858

Schlussbemerkung

urn:nbn:de:bsz:31-271008

$v_{\Delta y}$

$$
\begin{array}{rlll}
20 = \Delta y_{20} & . \sin a_{20} \; (\mathrm{III} + \mathrm{V}) & + \Delta y_{20} & . \cos a_{20} \; (\mathrm{IV} + \mathrm{VI})\,^{*)} \\
1 = \Delta y_{1} & . \sin a_{1} \; (\mathrm{III} + \mathrm{V}) & + \Delta y_{1} & . \cos a_{1} \; (\mathrm{IV} + \mathrm{VI}) \\
2 = \Delta y_{2} & . \sin a_{2} \; (\mathrm{III} + \mathrm{V}) & + \Delta y_{2} & . \cos a_{2} \; (\mathrm{IV} + \mathrm{VI}) \\
3.1 = \Delta y_{3.1} & . \sin a_{3.1} \, . \, \mathrm{III} & + \Delta y_{3.1} & . \cos a_{3.1} \, . \, \mathrm{IV} \\
4 = \Delta y_{4} & . \sin a_{4} \, . \, \mathrm{III} & + \Delta y_{4} & . \cos a_{4} \, . \, \mathrm{IV} \\
5 = \Delta y_{5} & . \sin a_{5} \, . \, \mathrm{III} & + \Delta y_{5} & . \cos a_{5} \, . \, \mathrm{IV} \\
6 = \Delta y_{6} & . \sin a_{6} \, . \, \mathrm{III} & + \Delta y_{6} & . \cos a_{6} \, . \, \mathrm{IV} \\
3.2 = \Delta y_{3.2} & . \sin a_{3.2} \, . \, \mathrm{V} & + \Delta y_{3.2} & . \cos a_{3.2} \, . \, \mathrm{VI} \\
7 = \Delta y_{7} & . \sin a_{7} \, . \, \mathrm{V} & + \Delta y_{7} & . \cos a_{7} \, . \, \mathrm{VI} \\
8 = \Delta y_{8} & . \sin a_{8} \, . \, \mathrm{V} & + \Delta y_{8} & . \cos a_{8} \, . \, \mathrm{VI},
\end{array}
$$

ebenso $v_{\Delta x}$

$$
\begin{array}{rlll}
20 = \Delta y_{20} & . \cos a_{20} \; (\mathrm{III} + \mathrm{V}) & + \Delta x_{20} & . \cos a_{20} \; (\mathrm{IV} + \mathrm{VI}) \\
1 = \Delta y_{1} & . \cos a_{1} \; (\mathrm{III} + \mathrm{V}) & + \Delta x_{1} & . \cos a_{1} \; (\mathrm{IV} + \mathrm{VI}) \\
2 = \Delta y_{2} & . \cos a_{2} \; (\mathrm{III} + \mathrm{V}) & + \Delta x_{2} & . \cos a_{2} \; (\mathrm{IV} + \mathrm{VI}) \\
3.1 = \Delta y_{3.1} & . \cos a_{3.1} \, . \, \mathrm{III} & + \Delta x_{3.1} & . \cos a_{3.1} \, . \, \mathrm{IV} \\
4 = \Delta y_{4} & . \cos a_{4} \, . \, \mathrm{III} & + \Delta x_{4} & . \cos a_{4} \, . \, \mathrm{IV} \\
5 = \Delta y_{5} & . \cos a_{5} \, . \, \mathrm{III} & + \Delta x_{5} & . \cos a_{5} \, . \, \mathrm{IV} \\
6 = \Delta y_{6} & . \cos a_{6} \, . \, \mathrm{III} & + \Delta x_{6} & . \cos a_{6} \, . \, \mathrm{IV} \\
3.2 = \Delta y_{3.2} & . \cos a_{3.2} \, . \, \mathrm{V} & + \Delta x_{3.2} & . \cos a_{3.2} \, . \, \mathrm{VI} \\
7 = \Delta y_{7} & . \cos a_{7} \, . \, \mathrm{V} & + \Delta x_{7} & . \cos a_{7} \, . \, \mathrm{VI} \\
8 = \Delta y_{3} & . \cos a_{8} \, . \, \mathrm{V} & + \Delta x_{8} & . \cos a_{8} \, . \, \mathrm{VI}.
\end{array}
$$

Schlussbemerkung.

Wir schliessen diese Abhandlung mit einer näheren Erläuterung des oben benutzten Gauss'schen Eliminationsverfahrens, wobei wir uns füglich auf Gleichungen von drei unbekannten Grössen beschränken können, weil der Fall von zwei Unbekannten darin enthalten ist und das Verfahren immer dasselbe bleibt, daher eben so gut auf mehrere Unbekannte ausgedehnt als auf wenigere beschränkt werden kann.

Alle Ausgleichungsrechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate führen auf Normalgleichungen von der Form:

$$
\begin{array}{ll}
1) & [aa] \, . \, \mathrm{I} + [ab] \, \mathrm{II} + [ac] \, \mathrm{III} = [ak] \\
2) & [ab] \, . \, \mathrm{I} + [bb] \, \mathrm{II} + [bc] \, \mathrm{III} = [bk] \\
3) & [ac] \, . \, \mathrm{I} + [bc] \, \mathrm{II} + [cc] \, \mathrm{III} = [ck],
\end{array}
$$

welche das Eigenthümliche haben, dass — von den quadratischen Gliedern $[aa]$, $[bb]$, $[cc]$, aus — die horizontal stehenden Coëfficienten den vertical stehenden gleich sind.

Um diese Gleichungen durch Elimination aufzulösen, ist das Substitutionsverfahren als das zweckmässigste erkannt worden.

---

*) Für die Coëfficienten der zweiten Glieder kann auch gesetzt werden: $\Delta x . \sin a$.

Zunächst wird dabei die erste unbekannte Grösse durch Befreiung von ihrem Coëfficienten und Uebertragung der folgenden Glieder auf die andre Seite des Gleichheitszeichens aus der ersten Gleichung bestimmt, nämlich:

$$\mathrm{I} = -\frac{[ab]}{[aa]}.\mathrm{II} - \frac{[ac]}{[aa]}.\mathrm{III} + \frac{[ak]}{[aa]}.$$

Dann wird dieser Werth für I in die zweite und in die dritte Gleichung substituirt.

Wir erhalten dabei:

$$4)\ \left([bb] - \frac{[ab]}{[aa]}.[ab]\right)\mathrm{II} + \left([bc] - \frac{[ac]}{[aa]}.[ab]\right)\mathrm{III} = [bk] - \frac{[ak]}{[aa]}.[ab]$$

$$5)\ \left([bc] - \frac{[ab]}{[aa]}.[ac]\right)\mathrm{II} + \left([cc] - \frac{[ac]}{[aa]}.[ac]\right)\mathrm{III} = [ck] - \frac{[ak]}{[aa]}.[ac].$$

Betrachten wir den Gliederbau dieser Gleichungen im Einzelnen, so finden wir, dass wir die 4te Gleichung auch erhalten hätten, wenn wir statt jener Substitution die nach dem ersten Gliede folgenden Glieder der 1sten Gleichung mit dem gemeinschaftlichen Factor $\frac{[ab]}{[aa]}$ multiplicirt und die Producte von den gleichnamigen Gliedern der zweiten Gleichung abgezogen hätten. Ebenso würden wir die 5te Gleichung erhalten haben, wenn wir die gedachten Glieder der 1sten Gleichung mit $\frac{[ac]}{[aa]}$ multiplicirt und die Producte von der 3ten Gleichung abgezogen hätten. Hierbei hätten wir uns aber die auf das erste Glied der 5ten Gleichung verwendete Mühe sparen können. Denn der Coëfficient dieses Gliedes stimmt, wie wir sehen, mit dem des zweiten Gliedes der 4ten Gleichung überein. Daran finden wir also die an den ursprünglichen Gleichungen (1), (2), (3) bemerkte charakteristische Eigenschaft wieder, dass die Coëfficienten der neben und unter oder über den quadratischen Gliedern stehenden Glieder einander gleich sind. Wir können daher auch diese neuen Gleichungen ähnlich bezeichnen, wie die ursprünglichen, wenn wir sie zum Unterschiede von denselben etwa mit der Nummer des Eliminations-Actes versehen, also setzen:

$$4)\quad [bb_1]\,\mathrm{II} + [bc_1]\,\mathrm{III} = [bk_1]$$

$$5)\quad [bc_1]\,\mathrm{II} + [cc_1]\,\mathrm{III} = [ck_1].$$

Die Fortsetzung des Geschäfts geschieht nun ganz in der Weise des ersten Eliminations-Actes; wir multipliciren die dem ersten Gliede nachfolgenden Glieder der 4ten Gleichung mit $\frac{[bc_1]}{[bb_1]}$ und ziehen die Producte von den gleichnamigen Gliedern der 5ten Gleichung ab. Wir finden dann:

$$6)\quad \left([cc_1] - \frac{[bc_1]}{[bb_1]}.[bc_1]\right)\mathrm{III} = [ck_1] - \frac{[bk_1]}{[bb_1]}.[bc_1],$$

oder nach der eingeführten Bezeichnung:

$$6)\quad [cc_2]\,\mathrm{III} = [ck_2],$$

endlich

$$\mathrm{III} = \frac{[ck_2]}{[cc_2]}.$$

Durch Substitution des so gefundenen Zahlenwerthes für III in die 4te oder 5te Gleichung finden wir den Werth für II und durch Substitution beider Werthe in eine der Gleichungen (1), (2) oder (3) den Werth für I.

Der Umstand, dass die Coëfficienten der vor den Gliedern mit quadratischen Coëfficienten befindlichen Glieder den über ihnen stehenden Gliedern immer gleich sind, gestattet, die ersteren aus der Rechnung ganz fortzulassen, also zu setzen:

$$\begin{array}{rl}
1) & [aa]\,\mathrm{I} + [ab]\,\mathrm{II} + [ac]\,\mathrm{III} = [ak] \\
2) & \quad . \quad + [bb]\,\mathrm{II} + [bc]\,\mathrm{III} = [bk] \\
3) & \quad . \qquad\quad . \quad + [cc]\,\mathrm{III} = [ck] \\
\hline
4) & \qquad + [bb_1]\,\mathrm{II} + [bc_1]\,\mathrm{III} = [bk_1] \\
5) & \qquad\qquad . \quad + [cc_1]\,\mathrm{III} = [ck_1] \\
\hline
6) & \qquad\qquad\qquad + [cc_2]\,\mathrm{III} = [ck_2],
\end{array}$$

wobei die Punkte die Stelle der fortgelassenen Glieder vertreten.

Es ist endlich noch des wichtigen Controlmittels zu gedenken, welches oben unter der Ueberschrift „Quersumme“ angewendet wurde. Diese Spalte hat die algebraischen Summen aller horizontal stehenden Zahlenwerthe der ursprünglichen Gleichungen aufzunehmen. Bezeichnen wir also z. B. die erste Quersumme mit S_1, die zweite mit S_2 u. s. w., so ist:

$$\begin{aligned}
S_1 &= [aa] + [ab] + [ac] + [ak] \\
S_2 &= [ab] + [bb] + [bc] + [bk] \\
S_3 &= [ac] + [bc] + [cc] + [ck].
\end{aligned}$$

Da nun jeder Eliminations-Act in der Multiplication einer solchen Gleichung mit einem gemeinschaftlichen Factor und in der Subtraction von einer anderen dieser Gleichungen besteht, so folgt, dass die in jener Spalte befindlichen Zahlen immer die Summe der vor ihnen stehenden Zahlen darstellen müssen, wobei aber selbstredend die mit Punkten angedeuteten Glieder mitgezählt werden müssen. Der Rechner kann also seine Arbeit bei jedem Schritte prüfen und das ist insbesondere bei dem Eliminationsgeschäft von grosser Wichtigkeit. In unserem Beispiele muss er finden:

$$\begin{aligned}
S_4 &= [bb_1] + [bc_1] + [bk_1] \\
S_5 &= [bc_1] + [cc_1] + [ck_1] \\
S_6 &= [cc_2] + [ck_2].
\end{aligned}$$