Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen

Vorländer, J. J.

Leipzig, 1858

III. Ausgleichung verzweigter Linienzüge

urn:nbn:de:bsz:31-271008

Visual Library

Normalgleichungen: Quersumme:

$$356{,}18\,.\,\mathrm{I} - 93{,}31\,.\,\mathrm{II} = +\,0{,}655\,; \quad +\,263{,}525$$

$$-\,93{,}31\,.\,\mathrm{I} + 368{,}83\,.\,\mathrm{II} = -\,0{,}673\,; \quad +\,274{,}847.$$

Deren **Elimination**:

2,55167	1,96993$_n$	9,81624	2,42082
9,41826$_n$	1,38819	9,23450$_n$	1,83908$_n$
	24,445	— 0,17159	— 69,037
	+ 344,385	— 0,50141	+ 343,884
	2,53704	9,70019$_n$	

$$\log \mathrm{II} = 7{,}16315_n\,; \quad \mathrm{II} = -\,0{,}001456$$

9,13308	— 0,13586
	+ 0,51914
	9,71528

$$\log \mathrm{I} = 7{,}16361\,; \quad \mathrm{I} = +\,0{,}001457.$$

Probe:

7,16315	7,16361$_n$	
1,96993$_n$	2,56683	
9,13308$_n$	9,73044$_n$	
— 0,13586	— 0,53758 =	— 0,67344.

Die Gleichvertheilung des Winkelfehlers ist hier zwischen die Brechungswinkel geschrieben, was füglich geschehen kann, ohne die Ableitung der Neigungswinkel merklich zu erschweren.

Augenscheinlich bieten die Coordinatentafeln für die Ausgleichung der Polygonmessungen eine erhebliche Erleichterung dar. Bei ihrer Anwendung ist indessen die dritte Decimalstelle der Längen unsicher und die Unsicherheit kann bei den vielen Zusammensetzungen um so leichter sogar in die zweite Stelle hinüber spielen, als die Tafeln selbst für Seitenlängen über 10 Längeneinheiten mit der zweiten Decimalstelle abbrechen.

III. Ausgleichung verzweigter Linienzüge.

Die Verbindungen der Linienzüge sind nicht immer so einfacher Art, dass sie entweder in sich zurück oder von einem fest bestimmten Punkte zu einem anderen Punkte dieser Art laufen. Es kömmt nicht selten vor, dass die Züge sich unterwegs verzweigen und verschiedenen Schlusspunkten zueilen. Den einfachsten Fall dieser Art wollen wir noch kürzlich betrachten, und dabei, um die Gedanken zu fixiren, annehmen, dass von dem Dreieckspunkt No. 20 ein Zug sich über die Brechpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 nach dem Dreieckspunkt No. 21 fortbewege, im Punkte No. 3 aber ein Seitenzug über die Punkte 7 und 8 nach dem Dreieckspunkt No. 22 abgehe.

Ist es dem Rechner nicht um die grösste Wahrscheinlichkeit seiner Resultate zu thun, so kann er diese am leichtesten und schnellsten erlangen, wenn er den Zug ♁20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ♁21 als einen isolirten Zug behandelt, dann die gefundenen Resultate für den Anschlusspunkt No. 3 constant setzt und demnächst auch den Seitenzug No. 3, 4, 8, ♁22 als isolirten Zug berechnet.

Dagegen wird der tiefer eingehende Geometer berücksichtigen, dass der gemeinschaftliche Zweig der beiden Züge

1) ♁20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ♁21,
2) ♁20, 1, 2, 3, 7, 8, ♁22,

nämlich die Strecke von ♁20 bis No. 3 in dem zweiten Zuge ebenso wie in dem ersten stimmberechtigt ist. Er wird also den Winkel- und Seitenmessungen dieser Strecke für den zweiten Zug denselben Einfluss zu vindiciren suchen, wie für den ersten. Wollte er seine Aufgabe in aller Strenge behandeln, so würde er von den sechs Bedingungsgleichungen ausgehen müssen:

$$1)\quad w_{20} + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 - N_1 = k'_{w.1}$$
$$2)\quad w_{20} + w_1 + w_2 + w_3 + w_7 + w_8 - N_2 = k'_{w.2}$$
$$3)\quad s_{20}.\sin a_{20} + s_1.\sin a_1 + s_2.\sin a_2 + s_3.\sin a_3 + s_4.\sin a_4 + s_5.\sin a_5 + s_6.\sin a_6 - (Y_{21} - Y_{20}) = k_{y.1}$$
$$4)\quad s_{20}.\cos a_{20} + s_1.\cos a_1 + s_2.\cos a_2 + s_3.\cos a_3 + s_4.\cos a_4 + s_5.\cos a_5 + s_6.\cos a_6 - (X_{21} - X_{20}) = k_{x.1}$$
$$5)\quad s_{20}.\sin a_{20} + s_1.\sin a_1 + s_2.\sin a_2 + s_3.\sin a_3 + s_7.\sin a_7 + s_8.\sin a_8 - (Y_{22} - Y_{20}) = k_{y.2}$$
$$6)\quad s_{20}.\cos a_{20} + s_1.\cos a_1 + s_2.\cos a_2 + s_3.\cos a_3 + s_7.\cos a_7 + s_8.\cos a_8 - (X_{22} - X_{20}) = k_{y.2}.$$

Es würde leicht sein, aus diesen Gleichungen nach den obigen Regeln die Verbesserungsgleichungen abzuleiten. War aber, wie wir oben gesehen haben, schon bei drei Bedingungsgleichungen das Zahlenwerk der strengsten Ausgleichungsform von bedeutendem Umfange, so ist einleuchtend, dass die Vermehrung um drei Bedingungsgleichungen das Geschäft übermässig ausdehnen werde. Der Geometer wird daher in diesem Falle noch mehr Ursache haben, sich mit dem Verfahren No. III zu begnügen. Will er dabei aber doch die gemeinschaftliche Strecke für beide Züge mitstimmen lassen, so kann er die Winkelfehler in jedem derselben nicht mehr mit gleichen Quoten vertheilen; er muss für die vorgängige Winkelfehlervertheilung ein gemeinschaftliches Verbesserungssystem aufstellen; er muss setzen:

$$\text{I.}\quad \varphi'_{20} + \varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_{3.1} + \varphi'_4 + \varphi'_5 + \varphi'_6 + \varphi'_{21} = -k_{w.1}$$
$$\text{II.}\quad \varphi'_{20} + \varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_{3.2} + \varphi'_7 + \varphi'_8 + \varphi'_{22} = -k_{w.2}$$

und daraus ableiten:

$$8.\text{I} + 3.\text{II} = -k_{w.1}$$
$$3.\text{I} + 7.\text{II} = -k_{w.2},$$

wobei nicht übersehen werden darf, dass w_3 und w_3 in den Zügen No. 1 und No. 2 verschiedene Winkel bezeichnen, daher auch in den Gleichungen I und II ihre Verbesserungen $\varphi_{3.1}$ und $\varphi_{3.2}$ mit den angehängten Rangziffern (1) und (2) unterschieden sind.

Nach geschehener Elimination der vorstehenden Normalgleichungen finden wir:

$$
\begin{aligned}
\varphi'_{20} &= \mathrm{I} + \mathrm{II} = -\tfrac{4}{47}\,.\,k_{w.1} - \tfrac{5}{47}\,.\,k_{w.2}\\
\varphi'_{1} &= \mathrm{I} + \mathrm{II} = -\tfrac{4}{47}\,.\,k_{w.1} - \tfrac{5}{47}\,.\,k_{w.2}\\
\varphi'_{2} &= \mathrm{I} + \mathrm{II} = -\tfrac{4}{47}\,.\,k_{w.1} - \tfrac{5}{47}\,.\,k_{w.2}\\
\varphi'_{3.1} &= \mathrm{I} \qquad\;\; = -\tfrac{7}{47}\,.\,k_{w.1} + \tfrac{3}{47}\,.\,k_{w.2}\\
\varphi'_{3.2} &= \qquad \mathrm{II} = +\tfrac{3}{47}\,.\,k_{w.1} - \tfrac{8}{47}\,.\,k_{w.2}\\
\varphi'_{4} &= \mathrm{I} \qquad\;\; = -\tfrac{7}{47}\,.\,k_{w.1} + \tfrac{3}{47}\,.\,k_{w.2}\\
\varphi'_{5} &= \mathrm{I} \qquad\;\; = -\tfrac{7}{47}\,.\,k_{w.1} + \tfrac{3}{47}\,.\,k_{w.2}\\
\varphi'_{6} &= \mathrm{I} \qquad\;\; = -\tfrac{7}{47}\,.\,k_{w.1} + \tfrac{3}{47}\,.\,k_{w.2}\\
\varphi'_{21} &= \mathrm{I} \qquad\;\; = -\tfrac{7}{47}\,.\,k_{w.1} + \tfrac{3}{47}\,.\,k_{w.2}\\
\varphi'_{7} &= \qquad \mathrm{II} = +\tfrac{3}{47}\,.\,k_{w.1} - \tfrac{8}{47}\,.\,k_{w.2}\\
\varphi'_{8} &= \qquad \mathrm{II} = +\tfrac{3}{47}\,.\,k_{w.1} - \tfrac{8}{47}\,.\,k_{w.2}\\
\varphi'_{22} &= \qquad \mathrm{II} = +\tfrac{3}{47}\,.\,k_{w.1} - \tfrac{8}{47}\,.\,k_{w.2}.
\end{aligned}
$$

Werden nun nach erfolgter Winkelverbesserung die Neigungswinkel a_{20}, a_1, a_2, $a_{3.1}$, a_4, a_5, a_6, a_{21}, $a_{3.2}$, a_7, a_8, a_{22} abgeleitet, und mit Hülfe dieser und der Seiten s_{20}, s_1, s_2, $s_{3.1}$, s_4, s_5, s_6, $s_{3.2}$, s_7, s_8 die Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede berechnet, so müssen — der ausgesprochenen Absicht gemäss — die vier Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten-Unterschieden zusammen gefasst werden.

Wir erhalten dann, wenn wir, wie oben, den Fehler der Längeneinheit mit dem Buchstaben ε bezeichnen:

$$
\begin{aligned}
&\text{III.}\quad \Delta y_{20}\,.\,\varepsilon_{20} + \Delta y_1\,.\,\varepsilon_1 + \Delta y_2\,.\,\varepsilon_2 + \Delta y_{3.1}\,.\,\varepsilon_{3.1} + \Delta y_4\,.\,\varepsilon_4 + \Delta y_5\,.\,\varepsilon_5\\
&\qquad\qquad + \Delta y_6\,.\,\varepsilon_6 = -k_{\Delta y.1}\\
&\text{IV.}\quad \Delta x_{20}\,.\,\varepsilon_{20} + \Delta x_1\,.\,\varepsilon_1 + \Delta x_2\,.\,\varepsilon_2 + \Delta x_{3.1}\,.\,\varepsilon_{3.1} + \Delta x_4\,.\,\varepsilon_4 + \Delta x_5\,.\,\varepsilon_5\\
&\qquad\qquad + \Delta x_6\,.\,\varepsilon_6 = -k_{\Delta x.1}\\
&\text{V.}\quad \Delta y_{20}\,.\,\varepsilon_{20} + \Delta y_1\,.\,\varepsilon_1 + \Delta y_2\,.\,\varepsilon_2 + \Delta y_{3.2}\,.\,\varepsilon_{3.2} + \Delta y_7\,.\,\varepsilon_7 + \Delta y_8\,.\,\varepsilon_8 = -k_{\Delta y.2}\\
&\text{VI.}\quad \Delta x_{20}\,.\,s_{20} + \Delta x_1\,.\,\varepsilon_1 + \Delta x_2\,.\,\varepsilon_2 + \Delta x_{3.2}\,.\,\varepsilon_{3.2} + \Delta x_7\,.\,\varepsilon_7 + \Delta x_8\,.\,\varepsilon_8 = -k_{\Delta x.2}.
\end{aligned}
$$

Zur Abkürzung können die Summen der Hülfszahlen von der Form:

$$\Delta y\,.\sin a;\quad \Delta y\,.\cos a;\quad \Delta x\,.\cos a$$

oder

$$\Delta x\,.\sin a$$

für die Strecke

von ♁20 nach No. 3 mit $[PP]$; $[PQ]$; $[QQ]$
„ No. 3 „ ♁21 „ $[pp]$; $[pq]$; $[qq]$
„ No. 3 „ ♁22 „ $[\mathfrak{pp}]$; $[\mathfrak{pq}]$; $[\mathfrak{qq}]$

bezeichnet werden.

Dann sind die Normalgleichungen für die Correlaten III, IV, V, VI:

$$
\begin{aligned}
([PP] + [pp])\,\mathrm{III} + ([PQ] + [pq])\,\mathrm{IV} + [PP]\,\mathrm{V} + [PQ]\,\mathrm{VI} &= -k_{\Delta y.1}\\
([PQ] + [pq])\,\mathrm{III} + ([QQ] + [qq])\,\mathrm{IV} + [PQ]\,\mathrm{V} + [QQ]\,\mathrm{VI} &= -k_{\Delta x.1}\\
[PP]\,\mathrm{III} + [PQ]\,\mathrm{IV} + ([PP] + [\mathfrak{pp}])\,\mathrm{V} + [\mathfrak{pq}]\,\mathrm{VI} &= -k_{\Delta y.2}\\
[PQ]\,\mathrm{III} + [QQ]\,\mathrm{IV} + [\mathfrak{pq}]\,\mathrm{V} + ([QQ] + [\mathfrak{qq}])\,\mathrm{VI} &= -k_{\Delta x.2}.
\end{aligned}
$$

Sind demnächst III, IV, V, VI durch Elimination gefunden, so ergeben sich die Verbesserungen der Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede wie folgt:

$v_{\varDelta y}$

$$
\begin{array}{rl}
20 = & \varDelta y_{20} \ .\sin a_{20} \ (\mathrm{III}+\mathrm{V}) + \varDelta y_{20} \ .\cos a_{20} \ (\mathrm{IV}+\mathrm{VI})\,^{*)} \\
1 = & \varDelta y_{1} \ .\sin a_{1} \ (\mathrm{III}+\mathrm{V}) + \varDelta y_{1} \ .\cos a_{1} \ (\mathrm{IV}+\mathrm{VI}) \\
2 = & \varDelta y_{2} \ .\sin a_{2} \ (\mathrm{III}+\mathrm{V}) + \varDelta y_{2} \ .\cos a_{2} \ (\mathrm{IV}+\mathrm{VI}) \\
3.1 = & \varDelta y_{3.1} .\sin a_{3.1} .\mathrm{III} + \varDelta y_{3.1} .\cos a_{3.1} .\mathrm{IV} \\
4 = & \varDelta y_{4} \ .\sin a_{4} \ .\mathrm{III} + \varDelta y_{4} \ .\cos a_{4} \ .\mathrm{IV} \\
5 = & \varDelta y_{5} \ .\sin a_{5} \ .\mathrm{III} + \varDelta y_{5} \ .\cos a_{5} \ .\mathrm{IV} \\
6 = & \varDelta y_{6} \ .\sin a_{6} \ .\mathrm{III} + \varDelta y_{6} \ .\cos a_{6} \ .\mathrm{IV} \\
3.2 = & \varDelta y_{3.2} .\sin a_{3.2} .\mathrm{V} + \varDelta y_{3.2} .\cos a_{3.2} .\mathrm{VI} \\
7 = & \varDelta y_{7} \ .\sin a_{7} \ .\mathrm{V} + \varDelta y_{7} \ .\cos a_{7} \ .\mathrm{VI} \\
8 = & \varDelta y_{8} \ .\sin a_{8} \ .\mathrm{V} + \varDelta y_{8} \ .\cos a_{8} \ .\mathrm{VI},
\end{array}
$$

ebenso $v_{\varDelta x}$

$$
\begin{array}{rl}
20 = & \varDelta y_{20} \ .\cos a_{20} \ (\mathrm{III}+\mathrm{V}) + \varDelta x_{20} \ .\cos a_{20} \ (\mathrm{IV}+\mathrm{VI}) \\
1 = & \varDelta y_{1} \ .\cos a_{1} \ (\mathrm{III}+\mathrm{V}) + \varDelta x_{1} \ .\cos a_{1} \ (\mathrm{IV}+\mathrm{VI}) \\
2 = & \varDelta y_{2} \ .\cos a_{2} \ (\mathrm{III}+\mathrm{V}) + \varDelta x_{2} \ .\cos a_{2} \ (\mathrm{IV}+\mathrm{VI}) \\
3.1 = & \varDelta y_{3.1} .\cos a_{3.1} .\mathrm{III} + \varDelta x_{3.1} .\cos a_{3.1} .\mathrm{IV} \\
4 = & \varDelta y_{4} \ .\cos a_{4} \ .\mathrm{III} + \varDelta x_{4} \ .\cos a_{4} \ .\mathrm{IV} \\
5 = & \varDelta y_{5} \ .\cos a_{5} \ .\mathrm{III} + \varDelta x_{5} \ .\cos a_{5} \ .\mathrm{IV} \\
6 = & \varDelta y_{6} \ .\cos a_{6} \ .\mathrm{III} + \varDelta x_{6} \ .\cos a_{6} \ .\mathrm{IV} \\
3.2 = & \varDelta y_{3.2} .\cos a_{3.2} .\mathrm{V} + \varDelta x_{3.2} .\cos a_{3.2} .\mathrm{VI} \\
7 = & \varDelta y_{7} \ .\cos a_{7} \ .\mathrm{V} + \varDelta x_{7} \ .\cos a_{7} \ .\mathrm{VI} \\
8 = & \varDelta y_{3} \ .\cos a_{8} \ .\mathrm{V} + \varDelta x_{8} \ .\cos a_{8} \ .\mathrm{VI}.
\end{array}
$$

Schlussbemerkung.

Wir schliessen diese Abhandlung mit einer näheren Erläuterung des oben benutzten Gauss'schen Eliminationsverfahrens, wobei wir uns füglich auf Gleichungen von drei unbekannten Grössen beschränken können, weil der Fall von zwei Unbekannten darin enthalten ist und das Verfahren immer dasselbe bleibt, daher eben so gut auf mehrere Unbekannte ausgedehnt als auf wenigere beschränkt werden kann.

Alle Ausgleichungsrechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate führen auf Normalgleichungen von der Form:

$$
\begin{array}{ll}
1) & [aa].\mathrm{I} + [ab]\,\mathrm{II} + [ac]\,\mathrm{III} = [ak] \\
2) & [ab].\mathrm{I} + [bb]\,\mathrm{II} + [bc]\,\mathrm{III} = [bk] \\
3) & [ac].\mathrm{I} + [bc]\,\mathrm{II} + [cc]\,\mathrm{III} = [ck],
\end{array}
$$

welche das Eigenthümliche haben, dass — von den quadratischen Gliedern $[aa]$, $[bb]$, $[cc]$, aus — die horizontal stehenden Coëfficienten den vertical stehenden gleich sind.

Um diese Gleichungen durch Elimination aufzulösen, ist das Substitutionsverfahren als das zweckmässigste erkannt worden.

---

*) Für die Coëfficienten der zweiten Glieder kann auch gesetzt werden: $\varDelta x . \sin a$.