Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen

Vorländer, J. J.

Leipzig, 1858

Berechnung goniometrischer Coordinaten

urn:nbn:de:bsz:31-271008

Berechnung

goniometrischer Coordinaten.

Mit gänzlicher Sonderung der Winkel- und Längenausgleichung.

Nummern der Brechpunkte	Brechungs-Winkel w			Ausgeglichene Neigungs-Winkel a			Länge der Seiten s	Ordinaten-Unterschiede		Abscissen-Unterschiede		Hülfszahlen zur Fehlerausgleichung		
								in Theilen	zusammengesetzt	in Theilen	zusammengesetzt	Δy . sin a	Δy . cos a oder Δx . sin a	Δx . cos a
	Grad	Min.	Sec.	Grad	Min.	Sec.	s	$\Delta y = s$. sin a		$\Delta x = s$. cos a				
(1)		(2)			(3)		(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
♁11	270	46	18											
♁10	164	25 +	76 53	234	72	47	64,28	— 31,12 2,075 145	— 33,340	— 51,30 3,420 239	— 54,959	15,56 1,56 19	+ 25,95 2,77 26	42,74 3,42 80
128	127	03 +	00 52	161	75	99	107,90	+ 56,52 3,956 508	+ 60,984	— 82,50 5,775 742	— 89,017	34,48	— 50,33	73,43
127	148	94 +	35 52	110	70	86	143,46	+ 98,590 39,435 2,958 453	+141,436	— 16,745 6,695 502 77	— 24,019	98,59 39,43 98 43	— 16,74 6,70 17 7	3,35 67
126	224	91 +	78 52	135	63	16	54,50	+ 42,37 3,389 423	+ 46,182	— 26,55 2,124 266	— 28,940	33,89 5,08 15	— 21,24 3,19 10	10,62 4,25 50
125	191	87 +	68 52	127	51	36	24,66	+ 18,16 3,632 598	+ 22,390	— 8,379 1,676 278	— 10,333	18,16 1,82 35	— 8,38 84 16	4,19 14
124	209	56 +	22 53	137	08	11	85,93	+ 66,81 4,176 776	+ 71,762	— 44,01 2,750 514	— 47,274	58,46 84 68	— 38,50 55 42	22,00 3,85 15
123	256	33 +	38 52	193	42	01	84,52	+ 8,25 413 55	+ 8,718	— 79,57 3,979 517	— 84,066	0,82 7 2	— 7,96 72	79,57 3,98 6
137	205	75 +	37 52	199	17	90	87,80	+ 1,03 90 9	+ 1,129	— 79,99 6,999 800	— 87,789	0,01	— 1,03 9	79,99 7,00 79
136	258	52 +	94 52	257	71	36	71,90	— 55,12 787 709	— 56,616	— 43,15 616 554	— 44,320	39,37 4,75 49	+ 30,82 3,70 38	24,66 2,47 20
♁11	15	13 +	58 52	72	85	46								
							724,95	+ 352,601	+352,601	— 470,717	—470,717	356,18	+ 63,88	368,83
	2072	80	24					— 89,956	— 89,956				—157,19	
♁7	72	85	46											
	$k'_w = -$	5	22				725,01	+ 262,645	+262,645	— 470,717	—470,717	356,18	— 93,31	368,83
	$\frac{k'_w}{n+1} =$	+	52,2					+ 263,300	+263,300	— 471,390	—471,390			
							0,06	$k_y = -0{,}655$	— 0,655	$k_x = +0{,}673$	+ 0,673			

Ausgleichung des Ordinatenfehlers			Ausgleichung des Abscissenfehlers			Verbesserte Unterschiede		Ordinate	Abscisse
$\Delta y \cdot \sin a$ I	$\Delta y \cdot \cos a$ II	$= v_{\Delta y}$	$\Delta y \cdot \cos a$ I	$\Delta x \cdot \cos a$ II	$= v_{\Delta x}$	der Ordinaten $\Delta y + v_{\Delta y}$	der Abscissen $\Delta x + v_{\Delta x}$	y	x
(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)
+ 0,025	− 0,042	− 0,017	+ 0,042	−0,068	− 0,026	− 33,357	− 54,985	+26631,960	+28844,520
+ 0,050	+ 0,073	+ 0,123	− 0,073	−0,107	− 0,180	+ 61,107	− 89,197	+26598,603	+28789,535
+ 0,203	+ 0,034	+ 0,237	− 0,034	−0,006	− 0,040	+141,673	− 24,059	+26659,710	+28700,338
+ 0,057	+ 0,035	+ 0,092	− 0,035	−0,022	− 0,057	+ 46,274	− 28,997	+26801,383	+28676,279
+ 0,030	+ 0,014	+ 0,044	− 0,014	−0,006	− 0,020	+ 22,434	− 10,353	+26847,657	+28647,282
+ 0,088	+ 0,057	+ 0,145	− 0,058	−0,038	− 0,096	+ 71,907	− 47,370	+26870,091	+28636,929
+ 0,001	+ 0,013	+ 0,014	− 0,013	−0,122	− 0,135	+ 8,732	− 84,201	+26941,998	+28589,559
+ 0,000	+ 0,002	+ 0,002	− 0,002	−0,128	− 0,130	+ 1,131	− 87,919	+26950,730	+28505,358
+ 0,066	− 0,051	+ 0,015	+ 0,051	−0,040	+ 0,011	− 56,601	− 44,309	+26951,861	+28417,439
								+26895,260	+28373,130
+ 0,520	+ 0,228	+ 0,672	+ 0,093		+ 0,011	+353,258			
	− 0,093	− 0,017	− 0,229	−0,537	− 0,684	− 89,958	−471,390		
+ 0,520	+ 0,135	+ 0,655	− 0,136	−0,537	− 0,673	+263,300	−471,390	+ 263,300	− 471,390

Nach umstehender Elimination ist: I = + 0,001457
II = − 0,001456

Normalgleichungen: Quersumme:

$$356{,}18\,.\,\mathrm{I} - 93{,}31\,.\,\mathrm{II} = +\,0{,}655\,;\quad +\,263{,}525$$

$$-\,93{,}31\,.\,\mathrm{I} + 368{,}83\,.\,\mathrm{II} = -\,0{,}673\,;\quad +\,274{,}847.$$

Deren Elimination:

2,55167	$1{,}96993_n$	9,81624	2,42082
$9{,}41826_n$	1,38819	$9{,}23450_n$	$1{,}83908_n$
	24,445	− 0,17159	− 69,037
	+ 344,385	− 0,50141	+ 343,884
	2,53704	$9{,}70019_n$	

$$\log \mathrm{II} = 7{,}16315_n\,;\quad \mathrm{II} = -\,0{,}001456$$

9,13308	− 0,13586	
	+ 0,51914	
	9,71528	

$$\log \mathrm{I} = 7{,}16361\,;\quad \mathrm{I} = +\,0{,}001457.$$

Probe:

7,16315	$7{,}16361_n$	
$1{,}96993_n$	2,56683	
$9{,}13308_n$	$9{,}73044_n$	
− 0,13586	− 0,53758 =	− 0,67344.

Die Gleichvertheilung des Winkelfehlers ist hier zwischen die Brechungswinkel geschrieben, was füglich geschehen kann, ohne die Ableitung der Neigungswinkel merklich zu erschweren.

Augenscheinlich bieten die Coordinatentafeln für die Ausgleichung der Polygonmessungen eine erhebliche Erleichterung dar. Bei ihrer Anwendung ist indessen die dritte Decimalstelle der Längen unsicher und die Unsicherheit kann bei den vielen Zusammensetzungen um so leichter sogar in die zweite Stelle hinüber spielen, als die Tafeln selbst für Seitenlängen über 10 Längeneinheiten mit der zweiten Decimalstelle abbrechen.

III. Ausgleichung verzweigter Linienzüge.

Die Verbindungen der Linienzüge sind nicht immer so einfacher Art, dass sie entweder in sich zurück oder von einem fest bestimmten Punkte zu einem anderen Punkte dieser Art laufen. Es kömmt nicht selten vor, dass die Züge sich unterwegs verzweigen und verschiedenen Schlusspunkten zueilen. Den einfachsten Fall dieser Art wollen wir noch kürzlich betrachten, und dabei, um die Gedanken zu fixiren, annehmen, dass von dem Dreieckspunkt No. 20 ein Zug sich über die Brechpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 nach dem Dreieckspunkt No. 21 fortbewege, im Punkte No. 3 aber ein Seitenzug über die Punkte 7 und 8 nach dem Dreieckspunkt No. 22 abgehe.

Ist es dem Rechner nicht um die grösste Wahrscheinlichkeit seiner Resultate zu thun, so kann er diese am leichtesten und schnellsten erlangen, wenn er den Zug ♁20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ♁21 als einen isolirten Zug behandelt, dann die gefundenen Resultate für den Anschlusspunkt No. 3 constant setzt und demnächst auch den Seitenzug No. 3, 4, 8, ♁22 als isolirten Zug berechnet.

Dagegen wird der tiefer eingehende Geometer berücksichtigen, dass der gemeinschaftliche Zweig der beiden Züge

1) ♁20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ♁21,
2) ♁20, 1, 2, 3, 7, 8, ♁22,

nämlich die Strecke von ♁20 bis No. 3 in dem zweiten Zuge ebenso wie in dem ersten stimmberechtigt ist. Er wird also den Winkel- und Seitenmessungen dieser Strecke für den zweiten Zug denselben Einfluss zu vindiciren suchen, wie für den ersten. Wollte er seine Aufgabe in aller Strenge behandeln, so würde er von den sechs Bedingungsgleichungen ausgehen müssen:

$$\begin{aligned}
&1)\ w_{20} + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 - N_1 = k'_{w.1}\\
&2)\ w_{20} + w_1 + w_2 + w_3 + w_7 + w_8 - N_2 = k'_{w.2}\\
&3)\ s_{20}.\sin a_{20} + s_1.\sin a_1 + s_2.\sin a_2 + s_3.\sin a_3 + s_4.\sin a_4\\
&\qquad + s_5.\sin a_5 + s_6.\sin a_6 - (Y_{21} - Y_{20}) = k_{y.1}\\
&4)\ s_{20}.\cos a_{20} + s_1.\cos a_1 + s_2.\cos a_2 + s_3.\cos a_3 + s_4.\cos a_4\\
&\qquad + s_5.\cos a_5 + s_6.\cos a_6 - (X_{21} - X_{20}) = k_{x.1}\\
&5)\ s_{20}.\sin a_{20} + s_1.\sin a_1 + s_2.\sin a_2 + s_3.\sin a_3 + s_7.\sin a_7\\
&\qquad + s_8.\sin a_8 - (Y_{22} - Y_{20}) = k_{y.2}\\
&6)\ s_{20}.\cos a_{20} + s_1.\cos a_1 + s_2.\cos a_2 + s_3.\cos a_3 + s_7.\cos a_7\\
&\qquad + s_8.\cos a_8 - (X_{22} - X_{20}) = k_{y.2}.
\end{aligned}$$

Es würde leicht sein, aus diesen Gleichungen nach den obigen Regeln die Verbesserungsgleichungen abzuleiten. War aber, wie wir oben gesehen haben, schon bei drei Bedingungsgleichungen das Zahlenwerk der strengsten Ausgleichungsform von bedeutendem Umfange, so ist einleuchtend, dass die Vermehrung um drei Bedingungsgleichungen das Geschäft übermässig ausdehnen werde. Der Geometer wird daher in diesem Falle noch mehr Ursache haben, sich mit dem Verfahren No. III zu begnügen. Will er dabei aber doch die gemeinschaftliche Strecke für beide Züge mitstimmen lassen, so kann er die Winkelfehler in jedem derselben nicht mehr mit gleichen Quoten vertheilen; er muss für die vorgängige Winkelfehlervertheilung ein gemeinschaftliches Verbesserungssystem aufstellen; er muss setzen:

$$\begin{aligned}
&\text{I.}\ \varphi'_{20} + \varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_{3.1} + \varphi'_4 + \varphi'_5 + \varphi'_6 + \varphi'_{21} = -k_{w.1}\\
&\text{II.}\ \varphi'_{20} + \varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_{3.2} + \varphi'_7 + \varphi'_8 + \varphi'_{22} = -k_{w.2}
\end{aligned}$$

und daraus ableiten:

$$\begin{aligned}
8.\text{I} + 3.\text{II} &= -k_{w.1}\\
3.\text{I} + 7.\text{II} &= -k_{w.2},
\end{aligned}$$

wobei nicht übersehen werden darf, dass w_3 und w_3 in den Zügen No. 1 und No. 2 verschiedene Winkel bezeichnen, daher auch in den Gleichungen I und II ihre Verbesserungen $\varphi_{3.1}$ und $\varphi_{3.2}$ mit den angehängten Rangziffern (1) und (2) unterschieden sind.

Nach geschehener Elimination der vorstehenden Normalgleichungen finden wir:

$$
\begin{aligned}
\varphi'_{20} &= \mathrm{I} + \mathrm{II} = -\tfrac{4}{47} \cdot k_{w.1} - \tfrac{5}{47} \cdot k_{w.2}\\
\varphi'_{1} &= \mathrm{I} + \mathrm{II} = -\tfrac{4}{47} \cdot k_{w.1} - \tfrac{5}{47} \cdot k_{w.2}\\
\varphi'_{2} &= \mathrm{I} + \mathrm{II} = -\tfrac{4}{47} \cdot k_{w.1} - \tfrac{5}{47} \cdot k_{w.2}\\
\varphi'_{3.1} &= \mathrm{I} \qquad\;\; = -\tfrac{7}{47} \cdot k_{w.1} + \tfrac{3}{47} \cdot k_{w.2}\\
\varphi'_{3.2} &= \qquad\; \mathrm{II} = +\tfrac{3}{47} \cdot k_{w.1} - \tfrac{8}{47} \cdot k_{w.2}\\
\varphi'_{4} &= \mathrm{I} \qquad\;\; = -\tfrac{7}{47} \cdot k_{w.1} + \tfrac{3}{47} \cdot k_{w.2}\\
\varphi'_{5} &= \mathrm{I} \qquad\;\; = -\tfrac{7}{47} \cdot k_{w.1} + \tfrac{3}{47} \cdot k_{w.2}\\
\varphi'_{6} &= \mathrm{I} \qquad\;\; = -\tfrac{7}{47} \cdot k_{w.1} + \tfrac{3}{47} \cdot k_{w.2}\\
\varphi'_{21} &= \mathrm{I} \qquad\;\; = -\tfrac{7}{47} \cdot k_{w.1} + \tfrac{3}{47} \cdot k_{w.2}\\
\varphi'_{7} &= \qquad\; \mathrm{II} = +\tfrac{3}{47} \cdot k_{w.1} - \tfrac{8}{47} \cdot k_{w.2}\\
\varphi'_{8} &= \qquad\; \mathrm{II} = +\tfrac{3}{47} \cdot k_{w.1} - \tfrac{8}{47} \cdot k_{w.2}\\
\varphi'_{22} &= \qquad\; \mathrm{II} = +\tfrac{3}{47} \cdot k_{w.1} - \tfrac{8}{47} \cdot k_{w.2}.
\end{aligned}
$$

Werden nun nach erfolgter Winkelverbesserung die Neigungswinkel a_{20}, a_1, a_2, $a_{3.1}$, a_4, a_5, a_6, a_{21}, $a_{3.2}$, a_7, a_8, a_{22} abgeleitet, und mit Hülfe dieser und der Seiten s_{20}, s_1, s_2, $s_{3.1}$, s_4, s_5, s_6, $s_{3.2}$, s_7, s_8 die Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede berechnet, so müssen — der ausgesprochenen Absicht gemäss — die vier Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten-Unterschieden zusammen gefasst werden.

Wir erhalten dann, wenn wir, wie oben, den Fehler der Längeneinheit mit dem Buchstaben ε bezeichnen:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{III.}\quad \Delta y_{20} \cdot \varepsilon_{20} + \Delta y_1 \cdot \varepsilon_1 + \Delta y_2 \cdot \varepsilon_2 + \Delta y_{3.1} \cdot \varepsilon_{3.1} + \Delta y_4 \cdot \varepsilon_4 + \Delta y_5 \cdot \varepsilon_5\\
&\qquad\qquad + \Delta y_6 \cdot \varepsilon_6 = -k_{\Delta y.1}\\
&\mathrm{IV.}\quad \Delta x_{20} \cdot \varepsilon_{20} + \Delta x_1 \cdot \varepsilon_1 + \Delta x_2 \cdot \varepsilon_2 + \Delta x_{3.1} \cdot \varepsilon_{3.1} + \Delta x_4 \cdot \varepsilon_4 + \Delta x_5 \cdot \varepsilon_5\\
&\qquad\qquad + \Delta x_6 \cdot \varepsilon_6 = -k_{\Delta x.1}\\
&\mathrm{V.}\quad \Delta y_{20} \cdot \varepsilon_{20} + \Delta y_1 \cdot \varepsilon_1 + \Delta y_2 \cdot \varepsilon_2 + \Delta y_{3.2} \cdot \varepsilon_{3.2} + \Delta y_7 \cdot \varepsilon_7 + \Delta y_8 \cdot \varepsilon_8 = -k_{\Delta y.2}\\
&\mathrm{VI.}\quad \Delta x_{20} \cdot s_{20} + \Delta x_1 \cdot \varepsilon_1 + \Delta x_2 \cdot \varepsilon_2 + \Delta x_{3.2} \cdot \varepsilon_{3.2} + \Delta x_7 \cdot \varepsilon_7 + \Delta x_8 \cdot \varepsilon_8 = -k_{\Delta x.2}.
\end{aligned}
$$

Zur Abkürzung können die Summen der Hülfszahlen von der Form:

$$\Delta y \,.\, \sin a; \quad \Delta y \,.\, \cos a; \quad \Delta x \,.\, \cos a$$

oder

$$\Delta x \,.\, \sin a$$

für die Strecke

von ♁ 20 nach No. 3 mit $[PP]$; $[PQ]$; $[QQ]$
„ No. 3 „ ♁ 21 „ $[pp]$; $[pq]$; $[qq]$
„ No. 3 „ ♁ 22 „ $[\mathfrak{p}\mathfrak{p}]$; $[\mathfrak{p}\mathfrak{q}]$; $[\mathfrak{q}\mathfrak{q}]$

bezeichnet werden.

Dann sind die Normalgleichungen für die Correlaten III, IV, V, VI:

$$
\begin{aligned}
([PP] + [pp])\,\mathrm{III} + ([PQ] + [pq])\,\mathrm{IV} + [PP]\,\mathrm{V} + [PQ]\,\mathrm{VI} &= -k_{\Delta y.1}\\
([PQ] + [pq])\,\mathrm{III} + ([QQ] + [qq])\,\mathrm{IV} + [PQ]\,\mathrm{V} + [QQ]\,\mathrm{VI} &= -k_{\Delta x.1}\\
[PP]\,\mathrm{III} + [PQ]\,\mathrm{IV} + ([PP] + [\mathfrak{p}\mathfrak{p}])\,\mathrm{V} + [\mathfrak{p}\mathfrak{q}]\,\mathrm{VI} &= -k_{\Delta y.2}\\
[PQ]\,\mathrm{III} + [QQ]\,\mathrm{IV} + [\mathfrak{p}\mathfrak{q}]\,\mathrm{V} + ([QQ] + [\mathfrak{q}\mathfrak{q}])\,\mathrm{VI} &= -k_{\Delta x.2}.
\end{aligned}
$$

Sind demnächst III, IV, V, VI durch Elimination gefunden, so ergeben sich die Verbesserungen der Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede wie folgt:

$v_{\Delta y}$

$$
\begin{array}{rlllll}
20 = \Delta y_{20} & . \sin a_{20} & (\mathrm{III} + \mathrm{V}) & + \Delta y_{20} & . \cos a_{20} & (\mathrm{IV} + \mathrm{VI})\,^{*)} \\
1 = \Delta y_1 & . \sin a_1 & (\mathrm{III} + \mathrm{V}) & + \Delta y_1 & . \cos a_1 & (\mathrm{IV} + \mathrm{VI}) \\
2 = \Delta y_2 & . \sin a_2 & (\mathrm{III} + \mathrm{V}) & + \Delta y_2 & . \cos a_2 & (\mathrm{IV} + \mathrm{VI}) \\
3.1 = \Delta y_{3.1} & . \sin a_{3.1} & . \mathrm{III} & + \Delta y_{3.1} & . \cos a_{3.1} & . \mathrm{IV} \\
4 = \Delta y_4 & . \sin a_4 & . \mathrm{III} & + \Delta y_4 & . \cos a_4 & . \mathrm{IV} \\
5 = \Delta y_5 & . \sin a_5 & . \mathrm{III} & + \Delta y_5 & . \cos a_5 & . \mathrm{IV} \\
6 = \Delta y_6 & . \sin a_6 & . \mathrm{III} & + \Delta y_6 & . \cos a_6 & . \mathrm{IV} \\
3.2 = \Delta y_{3.2} & . \sin a_{3.2} & . \mathrm{V} & + \Delta y_{3.2} & . \cos a_{3.2} & . \mathrm{VI} \\
7 = \Delta y_7 & . \sin a_7 & . \mathrm{V} & + \Delta y_7 & . \cos a_7 & . \mathrm{VI} \\
8 = \Delta y_8 & . \sin a_8 & . \mathrm{V} & + \Delta y_8 & . \cos a_8 & . \mathrm{VI},
\end{array}
$$

ebenso $v_{\Delta x}$

$$
\begin{array}{rlllll}
20 = \Delta y_{20} & . \cos a_{20} & (\mathrm{III} + \mathrm{V}) & + \Delta x_{20} & . \cos a_{20} & (\mathrm{IV} + \mathrm{VI}) \\
1 = \Delta y_1 & . \cos a_1 & (\mathrm{III} + \mathrm{V}) & + \Delta x_1 & . \cos a_1 & (\mathrm{IV} + \mathrm{VI}) \\
2 = \Delta y_2 & . \cos a_2 & (\mathrm{III} + \mathrm{V}) & + \Delta x_2 & . \cos a_2 & (\mathrm{IV} + \mathrm{VI}) \\
3.1 = \Delta y_{3.1} & . \cos a_{3.1} & . \mathrm{III} & + \Delta x_{3.1} & . \cos a_{3.1} & . \mathrm{IV} \\
4 = \Delta y_4 & . \cos a_4 & . \mathrm{III} & + \Delta x_4 & . \cos a_4 & . \mathrm{IV} \\
5 = \Delta y_5 & . \cos a_5 & . \mathrm{III} & + \Delta x_5 & . \cos a_5 & . \mathrm{IV} \\
6 = \Delta y_6 & . \cos a_6 & . \mathrm{III} & + \Delta x_6 & . \cos a_6 & . \mathrm{IV} \\
3.2 = \Delta y_{3.2} & . \cos a_{3.2} & . \mathrm{V} & + \Delta x_{3.2} & . \cos a_{3.2} & . \mathrm{VI} \\
7 = \Delta y_7 & . \cos a_7 & . \mathrm{V} & + \Delta x_7 & . \cos a_7 & . \mathrm{VI} \\
8 = \Delta y_3 & . \cos a_8 & . \mathrm{V} & + \Delta x_8 & . \cos a_8 & . \mathrm{VI}.
\end{array}
$$

Schlussbemerkung.

Wir schliessen diese Abhandlung mit einer näheren Erläuterung des oben benutzten Gauss'schen Eliminationsverfahrens, wobei wir uns füglich auf Gleichungen von drei unbekannten Grössen beschränken können, weil der Fall von zwei Unbekannten darin enthalten ist und das Verfahren immer dasselbe bleibt, daher eben so gut auf mehrere Unbekannte ausgedehnt als auf wenigere beschränkt werden kann.

Alle Ausgleichungsrechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate führen auf Normalgleichungen von der Form:

$$
\begin{array}{ll}
1) & [aa]\,.\,\mathrm{I} + [ab]\,\mathrm{II} + [ac]\,\mathrm{III} = [ak] \\
2) & [ab]\,.\,\mathrm{I} + [bb]\,\mathrm{II} + [bc]\,\mathrm{III} = [bk] \\
3) & [ac]\,.\,\mathrm{I} + [bc]\,\mathrm{II} + [cc]\,\mathrm{III} = [ck],
\end{array}
$$

welche das Eigenthümliche haben, dass — von den quadratischen Gliedern $[aa]$, $[bb]$, $[cc]$, aus — die horizontal stehenden Coëfficienten den vertical stehenden gleich sind.

Um diese Gleichungen durch Elimination aufzulösen, ist das Substitutionsverfahren als das zweckmässigste erkannt worden.

---

*) Für die Coëfficienten der zweiten Glieder kann auch gesetzt werden: $\Delta x . \sin a$.

Zunächst wird dabei die erste unbekannte Grösse durch Befreiung von ihrem Coëfficienten und Uebertragung der folgenden Glieder auf die andre Seite des Gleichheitszeichens aus der ersten Gleichung bestimmt, nämlich:

$$\mathrm{I} = -\frac{[ab]}{[aa]} . \mathrm{II} - \frac{[ac]}{[aa]} . \mathrm{III} + \frac{[ak]}{[aa]} .$$

Dann wird dieser Werth für I in die zweite und in die dritte Gleichung substituirt.

Wir erhalten dabei:

$$4)\ \left([bb] - \frac{[ab]}{[aa]} . [ab]\right) \mathrm{II} + \left([bc] - \frac{[ac]}{[aa]} . [ab]\right) \mathrm{III} = [bk] - \frac{[ak]}{[aa]} . [ab]$$

$$5)\ \left([bc] - \frac{[ab]}{[aa]} . [ac]\right) \mathrm{II} + \left([cc] - \frac{[ac]}{[aa]} . [ac]\right) \mathrm{III} = [ck] - \frac{[ak]}{[aa]} . [ac] .$$

Betrachten wir den Gliederbau dieser Gleichungen im Einzelnen, so finden wir, dass wir die 4te Gleichung auch erhalten hätten, wenn wir statt jener Substitution die nach dem ersten Gliede folgenden Glieder der 1sten Gleichung mit dem gemeinschaftlichen Factor $\frac{[ab]}{[aa]}$ multiplicirt und die Producte von den gleichnamigen Gliedern der zweiten Gleichung abgezogen hätten. Ebenso würden wir die 5te Gleichung erhalten haben, wenn wir die gedachten Glieder der 1sten Gleichung mit $\frac{[ac]}{[aa]}$ multiplicirt und die Producte von der 3ten Gleichung abgezogen hätten. Hierbei hätten wir uns aber die auf das erste Glied der 5ten Gleichung verwendete Mühe sparen können. Denn der Coëfficient dieses Gliedes stimmt, wie wir sehen, mit dem des zweiten Gliedes der 4ten Gleichung überein. Daran finden wir also die an den ursprünglichen Gleichungen (1), (2), (3) bemerkte charakteristische Eigenschaft wieder, dass die Coëfficienten der neben und unter oder über den quadratischen Gliedern stehenden Glieder einander gleich sind. Wir können daher auch diese neuen Gleichungen ähnlich bezeichnen, wie die ursprünglichen, wenn wir sie zum Unterschiede von denselben etwa mit der Nummer des Eliminations-Actes versehen, also setzen:

$$4)\quad [bb_1]\ \mathrm{II} + [bc_1]\ \mathrm{III} = [bk_1]$$

$$5)\quad [bc_1]\ \mathrm{II} + [cc_1]\ \mathrm{III} = [ck_1] .$$

Die Fortsetzung des Geschäfts geschieht nun ganz in der Weise des ersten Eliminations-Actes; wir multipliciren die dem ersten Gliede nachfolgenden Glieder der 4ten Gleichung mit $\frac{[bc_1]}{[bb_1]}$ und ziehen die Producte von den gleichnamigen Gliedern der 5ten Gleichung ab. Wir finden dann:

$$6)\quad \left([cc_1] - \frac{[bc_1]}{[bb_1]} . [bc_1]\right) \mathrm{III} = [ck_1] - \frac{[bk_1]}{[bb_1]} . [bc_1] ,$$

oder nach der eingeführten Bezeichnung:

$$6)\quad [cc_2]\ \mathrm{III} = [ck_2] ,$$

endlich

$$\mathrm{III} = \frac{[ck_2]}{[cc_2]} .$$

Durch Substitution des so gefundenen Zahlenwerthes für III in die 4te oder 5te Gleichung finden wir den Werth für II und durch Substitution beider Werthe in eine der Gleichungen (1), (2) oder (3) den Werth für I.

Der Umstand, dass die Coëfficienten der vor den Gliedern mit quadratischen Coëfficienten befindlichen Glieder den über ihnen stehenden Gliedern immer gleich sind, gestattet, die ersteren aus der Rechnung ganz fortzulassen, also zu setzen:

$$
\begin{array}{rl}
1) & [aa]\,\mathrm{I} + [ab]\,\mathrm{II} + [ac]\,\mathrm{III} = [ak] \\
2) & \quad . \quad + [bb]\,\mathrm{II} + [bc]\,\mathrm{III} = [bk] \\
3) & \quad . \qquad . \quad + [cc]\,\mathrm{III} = [ck] \\
\hline
4) & \qquad + [bb_1]\,\mathrm{II} + [bc_1]\,\mathrm{III} = [bk_1] \\
5) & \qquad\quad . \quad + [cc_1]\,\mathrm{III} = [ck_1] \\
\hline
6) & \qquad\qquad + [cc_2]\,\mathrm{III} = [ck_2],
\end{array}
$$

wobei die Punkte die Stelle der fortgelassenen Glieder vertreten.

Es ist endlich noch des wichtigen Controlmittels zu gedenken, welches oben unter der Ueberschrift „Quersumme" angewendet wurde. Diese Spalte hat die algebraischen Summen aller horizontal stehenden Zahlenwerthe der ursprünglichen Gleichungen aufzunehmen. Bezeichnen wir also z. B. die erste Quersumme mit S_1, die zweite mit S_2 u. s. w., so ist:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= [aa] + [ab] + [ac] + [ak] \\
S_2 &= [ab] + [bb] + [bc] + [bk] \\
S_3 &= [ac] + [bc] + [cc] + [ck].
\end{aligned}
$$

Da nun jeder Eliminations-Act in der Multiplication einer solchen Gleichung mit einem gemeinschaftlichen Factor und in der Subtraction von einer anderen dieser Gleichungen besteht, so folgt, dass die in jener Spalte befindlichen Zahlen immer die Summe der vor ihnen stehenden Zahlen darstellen müssen, wobei aber selbstredend die mit Punkten angedeuteten Glieder mitgezählt werden müssen. Der Rechner kann also seine Arbeit bei jedem Schritte prüfen und das ist insbesondere bei dem Eliminationsgeschäft von grosser Wichtigkeit. In unserem Beispiele muss er finden:

$$
\begin{aligned}
S_4 &= [bb_1] + [bc_1] + [bk_1] \\
S_5 &= [bc_1] + [cc_1] + [ck_1] \\
S_6 &= [cc_2] + [ck_2].
\end{aligned}
$$