

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen

Vorländer, J. J.

Leipzig, 1858

Berechnung goniometrischer Coordinaten

[urn:nbn:de:bsz:31-271008](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-271008)

Berechnung
goniometrischer Coordinaten.

Mit gleichzeitiger Ausgleichung der Längen und Winkel.

Nummer des Brechpunkts	Brechungs- winkel			Neigungs- winkel			Längen der Seiten	Loga- rithmen der Seiten- längen	Logarithmen sinus cosinus der Neigungswinkel		Logarithmen der Ordinaten- Abscissen- Unterschiede		Lo- der zur
	w			a			s	log s	log sin a	log cos a	log s . sin a = log Δy	log s . cos a = log Δx	log Δy sin a
	Grad	Min.	Sec.	Grad	Min.	Sec.							
(1)	(2)			(3)			(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
♁ 8	270 46 18												
♁ 10	164	25	76	234	71	94	64,28	1,80808	9,71494 _n	9,93193 _n	1,52302 _n	1,74001 _n	1,23796
128	127	03	00	161	74	94	107,90	2,03302	9,75230	9,91638 _n	1,78532	1,94940 _n	1,53762
127	148	94	35	110	69	29	143,46	2,15673	9,99384	9,22317 _n	2,15057	1,37990 _n	2,14441
126	224	91	78	135	61	07	54,50	1,73640	9,92819	9,72481 _n	1,66459	1,46121 _n	1,59278
125	191	87	68	127	48	75	24,66	1,39199	9,95820	9,62167 _n	1,35019	1,01366 _n	1,30839
124	209	56	22	137	04	97	85,93	1,93414	9,92188	9,74011 _n	1,85602	1,67425 _n	1,77790
123	256	33	38	193	38	35	84,52	1,92696	9,01596	9,99765 _n	0,94292	1,92461	9,95888
137	205	75	37	199	13	72	87,80	1,94349	8,13201	9,99996 _n	0,07550	1,94345	8,20751
136	288	52	94	257	66	66	71,90	1,85679	9,89594 _n	9,79031 _n	1,75273 _n	1,64710	1,64867
♁ 11	15	13	58	72	80	24							
♁ 7				72	85	46							
	1802	34	06	1802	39	28	724,96						
				k'w = -5	22		log =	0,71767	log (n+1) = 1,00000				
							log sin 1' =	6,19612	log $\frac{1}{\mu p}$ = 7,14534				
								6,91379	8,14534				
							k _w =	-0,00082	$\frac{n+1}{\mu p}$ = 0,013975				
\mathcal{N}	$\frac{(Y_n - Y)}{(Y_n - Y)}$	$\frac{(Y_n - Y)}{(X_n - X)}$	$\frac{(X_n - X)}{(X_n - X)}$	$\frac{1}{\mu p} \cdot I$	$\frac{1}{\mu p} \cdot X$	$\frac{1}{\mu p} \cdot I$	φ	α	$\Delta x \cdot \alpha$				
(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)				
♁ 10	69084	- 123602	221502	+ 0,000512	- 0,000853	+ 0,000370	+ 0,000029	+ 0,000029	- 0,0016				
128	87722	- 123119	172793	+ 577	- 755	+ 369	+ 191	+ 220	- 0,0196				
127	55310	- 76831	106723	+ 458	- 593	+ 370	+ 235	+ 455	- 0,0109				
126	8788	- 28391	91627	+ 183	- 551	+ 369	+ 1	+ 456	- 0,0132				
125	2261	- 13015	74931	+ 93	- 499	+ 370	- 36	+ 420	- 0,0043				
124	633	- 6624	69412	+ 49	- 478	+ 369	- 60	+ 360	- 0,0170				
123	2174	+ 10112	46751	- 91	- 393	+ 370	- 114	+ 246	- 0,0207				
137	3623	+ 7313	17466	- 108	- 240	+ 369	+ 21	+ 267	- 0,0234				
136	3203	+ 2520	1967	- 110	- 81	+ 370	+ 179	+ 446	- 0,0198				
♁ 11						+ 369	+ 369	+ 815					
	+ 232798	- 351637	+ 803172	+ 0,001563	- 0,004443				- 0,1305				
$\times \frac{1}{\mu p}$	+ 325,33	- 491,39	+ 1122,41										
Dazu obige	+ 368,81	- 93,79	+ 356,15			+ 0,003695	+ 0,000815						
	+ 694,14	+ 397,60	+ 1478,56										

arithmen Hilfszahlen Ausgleichung		Ordinaten- Unterschiede	Abscissen- Unterschiede	Hilfszahlen zur Ausgleichung der Längen			Hilfszahlen zur Ausgleichung der Winkel	
$\log \Delta y \cdot \cos a$ oder $\log \Delta x \cdot \sin a$	$\log \Delta x$ $\cos a$	Δy	Δx	$\Delta y \sin a$	$\Delta y \cdot \cos a$ oder $\Delta x \cdot \sin a$	$\Delta x \cdot \cos a$	$Y_n - Y$	$X_n - X$
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)
1,45495	1,67194	- 33,344	- 54,956	17,297	+ 28,507	46,983	+ 262,838	- 470,641
1,40170 _n	1,86578	+ 60,999	- 89,002	34,484	- 50,315	73,415	+ 296,182	- 415,685
1,37374 _n	0,60307	+ 141,439	- 23,983	139,447	- 23,645	4,009	+ 235,183	- 326,683
1,38940 _n	1,18602	- 46,194	- 28,921	39,154	- 24,513	15,347	+ 93,744	- 302,700
0,97186 _n	0,63533	+ 22,397	- 10,320	20,342	- 9,373	4,318	+ 47,550	- 273,779
1,59613 _n	1,41436	+ 71,783	- 47,233	59,965	- 39,458	25,963	+ 25,153	- 263,459
0,94057 _n	1,92226	+ 8,769	- 84,064	0,910	- 8,721	83,611	- 46,630	- 216,226
0,07546 _n	1,93441	+ 1,190	- 87,791	0,016	- 1,190	87,783	- 55,399	- 132,162
1,54304	1,43741	- 56,589	- 44,371	44,532	+ 34,917	27,379	- 56,589	- 44,371
							0	0
		+ 352,771		356,147	+ 63,424	368,808	+ 960,650	
		- 89,933	- 470,641		- 157,215		- 158,618	- 2445,706
	$[\Delta y] =$	+ 262,838	- 470,641	$[\Delta x] =$	- 93,791	356,147	+ 802,032	- 2445,706
Im Netze der	Dreiecke	+ 263,300	- 471,390			724,955	mit $\frac{1}{\mu p} = 0,0013975$ multiplic.	
		$k_y = - 0,462$	$k_x = + 0,749$		Oben	724,96	+ 1,1208	- 3,4178

$\Delta y \cdot \sin \alpha$ II	$\Delta y \cdot \cos \alpha$ III	$v \Delta y$	$- \Delta y \cdot \alpha$	$\Delta y \cdot \cos \alpha$ II	$\Delta x \cdot \cos \alpha$ III	$v \Delta x$	$\Delta y + v \Delta y$	$\Delta x + v \Delta x$	Y	X
(30)	(31)	(32)	(33)	(34)	(35)	(36)	(37)	(38)	(39)	(40)
+ 0,0225	- 0,0399	- 0,019	+ 0,0010	+ 0,0370	- 0,0658	- 0,028	- 33,363	- 54,984	+ 26631,960	+ 28844,520
+ 0,0448	+ 0,0704	+ 0,096	- 0,0134	- 0,0654	- 0,1028	- 0,182	+ 61,095	- 89,184	+ 26598,597	+ 28789,536
+ 0,1814	+ 0,0330	+ 0,203	- 0,0642	- 0,0307	- 0,0056	- 0,101	+ 141,642	- 24,084	+ 26659,692	+ 28700,352
+ 0,0510	+ 0,0343	+ 0,072	- 0,0211	- 0,0318	- 0,0215	- 0,074	+ 46,266	- 28,995	+ 26801,334	+ 28676,268
+ 0,0264	+ 0,0132	+ 0,035	- 0,0094	- 0,0122	- 0,0061	- 0,028	+ 22,432	- 10,348	+ 26847,600	+ 28647,273
+ 0,0780	+ 0,0552	+ 0,116	- 0,0258	- 0,0513	- 0,0362	- 0,113	+ 71,899	- 47,346	+ 26870,032	+ 28636,925
+ 0,0012	+ 0,0122	- 0,008	- 0,0022	- 0,0113	- 0,1170	- 0,131	+ 8,761	- 84,195	+ 26941,931	+ 28559,579
+ 0,0000	+ 0,0017	- 0,022	- 0,0003	- 0,0016	- 0,1229	- 0,125	+ 1,168	- 87,916	+ 26950,692	+ 28505,384
+ 0,0579	- 0,0489	- 0,011	- 0,0252	+ 0,0454	- 0,0384	+ 0,033	- 56,600	- 44,338	+ 26951,860	+ 28417,468
									+ 26895,260	+ 28373,130
0,4632	+ 0,1312	+ 0,462	- 0,1102	- 0,1219	- 0,5163	- 0,749	+ 263,300	- 471,390	0	0

Demnach sind die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} & \text{; Quersumme} \\ 1) & + 0,013975 \text{ I} - 3,4178 \text{ II} - 1,1208 \text{ III} = + 0,00082; - 4,5238 \\ 2) & - 3,4178 \text{ I} + 1478,56 \text{ II} + 397,60 \text{ III} = + 0,462; + 1873,2042 \\ 3) & - 1,1208 \text{ I} + 397,60 \text{ II} + 694,14 \text{ III} = - 0,749; + 1089,8702 \end{aligned}$$

Deren Elimination ist:

	8,14535	0,53375 _n	0,04953 _n	6,91381	0,65550 _n
	2,38840 _n	2,92215	2,43793	9,30221 _n	3,04390
		+ 835,89	+ 274,11	- 0,2005	1106,38
4)		+ 642,67	+ 123,49	+ 0,6625	766,82
		2,80799	2,09163	9,82119	2,88469
	1,90418 _n		1,95371	8,81799 _n	2,55968
			+ 89,99	- 0,065764	362,81
			+ 604,25	- 0,683236	+ 727,06
		9,28364	1,37527	9,10483	2,16833
			+ 23,73	+ 0,12730	+ 147,34
5)			+ 580,52	- 0,810536	+ 579,72
			2,76382	9,90877 _n	
			log III = 7,14495 _n , III = - 0,0013962		
			9,23658	+ 0,17242	
				+ 0,83492	
				9,92164	
			log II = 7,11365, II = + 0,0012991		
	7,64740 _n	7,19448			
	- 0,004440	+ 0,001565	= + 0,002875		
			+ 0,003695		
			7,56764		
			log I = 9,42226, I = + 0,2644;		

Probe:

log I = 9,42220	log II = 7,11365	log III = 7,14495
0,53375 _n	3,16984	2,59945 _n
9,95595 _n	0,28349	9,74440 _n
- 0,90355	+ 1,92084	- 0,55514 = + 0,46215
log $\frac{1}{\mu p}$ = 7,14534		
log I = 9,42226	6,56760,	+ 0,0003695
log II = 7,11365	4,25899,	+ 0,0000018155
log III = 7,14495 _n	4,29029 _n ,	- 0,0000019512.

6) Die Elimination der Normalgleichungen ist durch die Quersummen der Coefficienten controlirt. Sobald nämlich bei dem Geschäft eine unbekannte Grösse vollständig fortgeschafft ist, muss die Quersumme mit der Summe der voranstehenden Zahlen übereinstimmen; z. B. bei den Gleichungen (4) und (5).

Bei den erwähnten Controlen versteht es sich leicht, dass von den Differenzen in den letzten Stellen abgesehen werden muss, sobald die einzelnen

Summanden anders als durch bloss Addition oder Subtraction entstehen. So muss z. B. Summe (24) + (25) + (26) genau = (27) sein, aber Summe (27) weicht von k_{10} um 5 in der 6^{ten} Decimalstelle ab, weil es für den Zweck der Rechnung ausreichend erschien, die Sicherung der Resultate nur bis zur 5^{ten} Decimalstelle zu treiben, wozu fünfstellige Logarithmen und Multiplicationstafeln mit dreistelligen Factoren genügten.

Die Vergleichung der beiden Schematen für die Methoden No. I und III und der darin ausgeführten Rechnungsbeispiele zeigt uns, dass die strengste Methode ungefähr doppelt so viel Arbeit erfordert, als das Verfahren No. III. Jene erforderte 40, oder wenn wir die nur zur Bequemlichkeit zugesetzten Spalten No. (37) und (38) abrechnen wollen, wenigstens 38 Spalten, letzteres dagegen nur 25; auch verhalten sich die beiden Eliminationsgeschäfte hinsichtlich des Arbeitsaufwandes zu einander nahe wie 9 zu 4.

Das Bedürfniss des doppelten Zeitaufwandes wird die Geometer der strengsten Methode abhold machen; sie werden sich zu der bei ihr erforderlichen Anstrengung nur entschliessen, wo sie ein besonderes Interesse haben, das schärfste Resultat zu erzielen.

Das Verfahren No. III empfiehlt sich nicht nur durch den sehr viel geringeren Umfang der Arbeit, sondern auch durch Einfachheit im Rechnungsmechanismus.

Wer einen Logarithmus und einen Sinus aufschlagen kann und mit Multiplicationstafeln umzugehen weiss, der kann im Formular III ein Polygon oder einen Linienzug ausgleichen, wenn er auch von der wissenschaftlichen Begründung der darin schematisirten Methode keine Kenntniss hat.

Stellen wir nun auch eine genauere Vergleichung des Arbeitsaufwandes dieser Methode mit dem der hausbackenen Manieren an, so finden wir, dass von den 25 Spalten des Formulars No. III die Spalten No. (10), (11), (12), (15), (16), (17), (20), (21), (24), (25), also 10 Spalten lediglich für das Ausgleichungsgeschäft bestimmt sind. Das Eliminationsgeschäft ist bei zwei Unbekannten so unbedeutend, dass es beinahe den zwei Fehlerdivisionen, welche bei dem hausbackenen Verfahren nöthig sind, gleichgeachtet werden kann. Die Arbeitsvermehrung des Verfahrens No. III findet also im Verhältniss wie 15 zu 25 oder wie 3 zu 5 statt. Dabei darf aber nicht ausser Betracht bleiben, dass, abgesehen von dem Werthe einer wissenschaftlich begründeten Fehlerausgleichung, die in dem Verfahren No. III enthaltenen Rechnungscontrollen von grosser Wichtigkeit sind.

Es scheint unnöthig zu sein, das vorstehende Rechnungsbeispiel nach dem Verfahren No. III nochmals logarithmisch durchzurechnen, weil das bei dem geschlossenen Polygon benutzte Rechnungsschema auch für nicht geschlossene Züge unverändert beizubehalten ist.

Statt dessen wollen wir nun das Beispiel mit Hilfe der Coordinatentafeln von Ulfers *) nach dem Verfahren No. III durchrechnen. Mit solchen Tafeln wird das Rechnungswerk durch den Umstand in hohem Grade erleichtert, dass

*) Coblenz 1854.

für jeden Brechpunkt nur einmaliges Aufschlagen derselben nöthig ist, um sowohl die Coordinaten-Unterschiede als auch sämtliche Hilfszahlen der Ausgleichung zu finden. Sind nämlich $\Delta y = s \cdot \sin a$, $\Delta x = s \cdot \cos a$ herausgehoben, so finden wir auf der Stelle auch die drei Hilfszahlen

$$\Delta y \cdot \sin a, \quad \Delta y \cdot \cos a, \quad \Delta x \cdot \cos a$$

oder

$$\Delta x \cdot \sin a,$$

indem wir Δy und Δx als neue Seitenlängen für den nämlichen Winkel a behandeln.

Um sich gegen Irrthümer zu schützen, ist es rathsam, die einzelnen Theile, aus denen sich die vorgedachten Resultate zusammensetzen, in das Schema niederzuschreiben, statt sie im Kopfe zusammenzuzählen. Es ist auch nützlich, Δy und Δx zusammengesetzt in eine besondere Rubrik zu schreiben; dagegen kann das Zusammenziehen der Theile für

$$\Delta y \cdot \sin a, \quad \Delta y \cdot \cos a, \quad \Delta x \cdot \cos a$$

füglich unterbleiben, weil bei Bildung der Summen

$$[\Delta y \cdot \sin a], \quad [\Delta y \cdot \cos a], \quad [\Delta x \cdot \cos a]$$

alle Theile einfach zusammen addirt werden können und bei der späteren Multiplication mit den durch die Elimination der Normalgleichungen gewonnenen Factoren I und II, wo wir

$$\Delta y \cdot \sin a, \quad \Delta y \cdot \cos a, \quad \Delta x \cdot \cos a$$

nur bis auf die erste Decimalstelle genau zu kennen brauchen, die Zusammenzählung leicht im Kopfe bewirkt werden kann.