Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen

Vorländer, J. J.

Leipzig, 1858

Berechnung goniometrischer Coordinaten

urn:nbn:de:bsz:31-271008

Berechnung

goniometrischer Coordinaten.

Mit gänzlicher Sonderung der Winkel- und Längenausgleichung.

Nummer der Brechpunkte	Ausgeglichene Brechungswinkel w Grad	Min.	Sec.	Neigungswinkel a Grad	Min.	Sec.	Längen der Seiten s Ruthen	Logarithmen der Seitenlängen log s	Logarithmen sinus | cosinus der Neigungswinkel log sin a	log cos a	Logarithmen der Ordinaten- | Abscissen-Unterschiede log s . sin a = log Δy	log s . cos a = log Δx	Lo… der … zur log Δy . sin a
(1)		(2)			(3)		(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
0				20	68	86	127,9	2,10687	9,50417	9,97665	1,61104	2,08352	1,11521
1	94	42	43	315	11	29	80,0	1,90309	$9,98765_n$	9,37138	$1,89074_n$	1,27447	1,87839
2	351	33	08	66	44	37	101,6	2,00689	9,93665	9,70159	1,94354	1,70848	1,88019
3	72	82	61	339	26	98	42,7	1,63043	$9,91153_n$	9,76228	$1,54196_n$	1,39271	1,45349
4	185	00	13	324	27	11	92,8	1,96755	$9,96764_n$	9,57063	$1,93519_n$	1,53818	1,90283
5	187	54	86	311	81	97	98,5	1,99344	$9,99247_n$	9,26623	$1,98591_n$	1,25967	1,97838
6	87	57	68	199	39	65	34,5	1,53782	7,97661	$9,99998_n$	9,51443	$1,53780_n$	$7,49104_n$
7	282	13	87	281	53	52	67,5	1,82930	$9,98147_n$	$9,45636_n$	$1,81077_n$	$1,28566_n$	1,79224
8	109	94	76	191	48	28	101,3	2,00561	9,12512	$9,99610_n$	1,13073	$2,00171_n$	0,25585
9	169	80	99	161	29	27	113,4	2,05461	9,75681	$9,91423_n$	1,81142	$1,96884_n$	1,56823
10	229	81	98	191	11	25	122,7	2,08884	9,14348	$9,99575_n$	1,23232	$2,08459_n$	0,37580
11	46	58	87	37	70	12	95,4	1,97955	9,74678	9,91893	1,72633	1,89848	1,47311
12	246	08	26	83	78	38	85,4	1,93146	9,98575	9,40136	1,91721	1,33282	1,90296
0	136	90	48	20	68	86							
	2200	00	00		0		1163,7						

											I	II	
											– 0,0000367	– 0,0007467	
											von der	Umseite	
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													

garithmen Hülfszahlen Ausgleichung		Ordinaten- Unterschiede	Abscissen- Unterschiede	Hülfszahlen zur Ausgleichung			Ordinate	Abscisse
$\log \Delta y \cos a$ oder $\log \Delta x \sin a$	$\log \Delta x . \cos a$	Δy	Δx	$\Delta y . \sin a$	$\Delta y . \cos a$ oder $\Delta x \sin a$	$\Delta x . \cos a$	Y	X
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)
1,58769	2,06017	+ 40,836	+121,205	13,038	+38,698	114,861	— 1092,600	+646,230
1,26212$_n$	0,64585	— 77,757	+ 18,814	75,577	— 18,286	4,425	— 1051,793	+767,348
1,64513	1,41007	+ 87,809	+ 51,107	75,891	+44,170	25,708	— 1129,539	+786,159
1,30424$_n$	1,15499	— 34,830	+ 24,701	28,411	— 20,148	14,288	— 1041,766	+837,245
1,50582$_n$	1,10881	— 86,137	+ 34,529	79,952	— 32,049	12,847	— 1076,582	+861,936
1,25214$_n$	0,52590	— 96,808	+ 18,183	95,144	— 17,871	3,357	— 1162,698	+896,457
9,51441	1,53778	+ 0,327	— 34,498	0,003	— 0,327	34,497	— 1259,496	+914,638
1,26713	0,74202	— 64,680	— 19,305	61,978	+18,498	5,521	— 1259,169	+880,114
1,12683$_n$	1,99781	+ 13,512	— 100,395	1,802	— 13,392	99,497	— 1323,865	+860,804
1,72565$_n$	1,88307	+ 64,777	— 93,076	37,002	— 53,168	76,396	— 1310,343	+760,336
1,22807$_n$	2,08034	+ 17,073	— 121,504	2,376	— 16,907	120,321	— 1245,528	+667,205
1,64526	1,81741	+ 53,251	+ 79,155	29,724	+44,183	65,676	— 1228,443	+545,612
1,31857	0,73418	+ 82,644	+ 21,519	79,976	+20,824	5,422	— 1175,226	+624,716
							— 1092,600	+646,230
		+360,229	+369,213	580,874	+166,373	582,816		
		— 360,212	— 368,778		— 172,148	580,874		
		+ 0,017 $= k_y$	+ 0,435 $= k_x$		— 5,775 oben	1163,690 1163,700	0	0

$\Delta y . \sin a$.I	$+ \Delta x . \sin a$.II	$= v_y$	$v_x =$	$\Delta y . \cos a$.I	$\Delta x . \cos a$.II
(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)
— 0,0005	— 0,0289	— 0,029	— 0,087	— 0,0014	— 0,0859
— 0,0028	+0,0137	+0,011	— 0,003	+0,0007	— 0,0033
— 0,0028	— 0,0330	— 0,036	— 0,021	— 0,0016	— 0,0192
— 0,0010	+0,0150	+0,014	— 0,010	+0,0007	— 0,0107
— 0,0029	+0,0239	+0,021	— 0,008	+0,0012	— 0,0096
— 0,0035	+0,0134	+0,010	— 0,002	+0,0007	— 0,0025
— 0,0000	+0,0002	+0,000	— 0,026	+0,0000	— 0,0258
— 0,0023	— 0,0137	— 0,016	— 0,005	— 0,0007	— 0,0041
— 0,0001	+0,0100	+0,010	— 0,073	+0,0005	— 0,0743
— 0,0014	+0,0397	+0,038	— 0,055	+0,0020	— 0,0571
— 0,0001	+0,0126	+0,012	— 0,089	+0,0006	— 0,0899
— 0,0011	— 0,0330	— 0,034	— 0,051	— 0,0016	— 0,0491
— 0,0029	— 0,0155	— 0,018	— 0,005	— 0,0008	— 0,0040
— 0,0214	+0,0044	— 0,017 $= - k_y$	— 0,435 $= - k_x$	+0,0003	— 0,4355

Elimination.

$$\begin{array}{llll}
580{,}874\,.\,\mathrm{I} \;- & 5{,}775\,.\,\mathrm{II} & = -\,0{,}017 & \\
-5{,}775\,.\,\mathrm{I} + & 582{,}816\,.\,\mathrm{II} & = -\,0{,}435 & \\
\hline
\underline{2{,}76408} & 0{,}76155_n & 8{,}23045_n{-10} & \\
7{,}99747_n & \underline{8{,}75902} & \underline{6{,}22792{-10}} & \\
-(+ & \underline{0{,}0574} & \underline{+\,0{,}000169)} & \\
 & +\,582{,}7606 & -\,0{,}435169 & \\
 & 2{,}76549 & 9{,}63866_n{-10} & \\
 & \log \mathrm{II} = & 6{,}87317_n{-10}; & \mathrm{II} = -\,0{,}0007467 \\
 & 7{,}63472\,\ldots\ldots & -\,\underline{0{,}004312} & \\
 & & -\,0{,}021312 & \\
 & & 8{,}32862_n{-10} & \\
 & \log \mathrm{I} = & 5{,}56454_n{-10}; & \mathrm{I} = -\,0{,}0000367.
\end{array}$$

Die Addition der horizontal neben einander stehenden Logarithmen hat für den einigermaassen geübten Rechner keine Schwierigkeit. Wer es gleichwohl für nöthig hält, sich gegen diese Arbeit noch mehr Controlen zu verschaffen, als in dem vorstehenden Formular angewendet sind, mag alle Verticalreihen der Logarithmen zusammen addiren; er muss dann erhalten:

$$\begin{array}{rl}
\text{Summe der Spalte } (8) & = (5) + (6) \\
(9) & = (5) + (7) \\
(10) & = (6) + (8) \\
(11) & = (7) + (8) = (6) + (9).
\end{array}$$

Bei diesen Controlen darf nicht übersehen werden, dass sie zwar gegen unrichtige Verbindung der Logarithmen und auch gegen Fehler im Aufschlagen der log sin und log cos schützen, gegen letztere jedoch nur in sofern, als sie nicht im unrichtigen Aufschlagen des Neigungswinkels und in Verwechslungen des Sinus mit dem Cosinus bestehen. Dieses Geschäft muss daher mit besondrer Sorgfalt ausgeführt werden.

Ebenso muss bei dem Aufsuchen der Zahlenwerthe für Δy und Δx mit aller Sorgfalt verfahren werden, weil auch für dieses Geschäft eine strenge Controle ohne weitläuftige, der doppelten Rechnung gleichkommende, Vorbereitungen nicht zu erlangen ist.

Die Controle: Spalte (4) = (15) + (17) sichert nicht nur die Additionen in den Spalten (8), (9), (10), (12), sondern auch gegen Fehler in dem Aufsuchen der Logarithmen in der Spalte (5) und gegen das Aufschlagen der Zahlenwerthe in den Spalten (15) und (17).

Das Eliminationsgeschäft controlirt sich selbst. Sobald in die betreffenden Gleichungen die gefundenen Werthe für I und II substituirt werden, müssen die Fehler k_y und k_x zum Vorschein kommen *).

*) Hinsichtlich einer Controle im Laufe des Geschäfts vergleiche die Schlussbemerkung dieser Abhandlung.

Die Berechnung der Verbesserungen $v_{\Delta y}$ und $v_{\Delta x}$ geschieht am bequemsten mit Multiplicationstafeln und wird mit diesem Hülfsmittel hinreichend genau; sie findet eine strenge Controle in den Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\text{Summe der Spalte } (20) &= (15).\mathrm{I} \\
(21) &= (16).\mathrm{II} \\
(24) &= (16).\mathrm{I} \\
(25) &= (17).\mathrm{II} \\
(22) &= -k_y \\
(23) &= -k_x.
\end{aligned}
$$

Werden die in den Spalten (22) und (23) berechneten Verbesserungen den Coordinaten-Unterschieden der Spalten (13) und (14) beigefügt und die dadurch verbesserten Unterschiede in den Spalten (18) und (19) zur Zusammenstellung der Coordinaten benutzt; so müssen beim Rücklaufe dieser Operation in den Anfangspunkt der Rechnung die anfänglichen Coordinaten wieder zum Vorschein kommen.

II. Ausgleichung einfacher Linienzüge.

Gehen wir nun zur Betrachtung der Linienzüge über, welche nicht in ihre Anfangspunkte zurücklaufen, also keine geschlossene Polygone sind, so müssen wir an die obige Bemerkung anknüpfen, dass die Anfangsstücke a_0, Y_0, X_0 für das Ausgleichungsgeschäft nicht mehr willkührlich oder bedeutungslos sind. In der Regel werden die Coordinaten des Anfangspunktes Y_0 und X_0, so wie die des Endpunktes Y_n, X_n durch eine Operation höherer Ordnung, z. B. für Flurpolygone durch ein Dreiecksnetz bestimmt, dessen Berechnung als eine geschlossene vorausgesetzt wird, so dass jene Anfangs- und Endcoordinaten für den Fortwuchs des Liniennetzes als constante Grössen betrachtet werden. Ebenso werden die Azimuthe oder Neigungswinkel der, von dem Anfangs- und dem Endpunkte ausgehenden, Dreiecksseiten als unveränderliche Winkel angesehen.

Hätten wir in der Drehungsweise der Neigungswinkel im Punkte 0 den Winkel zwischen der Anschluss-Dreiecksseite und dem Brechpunkte 1, an jedem folgenden Punkte zwischen der vorhergehenden und der nachfolgenden Seite, am n^{ten} Punkte zwischen dem letzten Brechpunkte und der dortigen Anschluss-Dreiecksseite gemessen, bezeichneten wir die Azimuthe oder Neigungswinkel dieser Anschluss-Dreiecksseiten in den Dreieckspunkten 0 und n mit A_0 und A_n, so würden wir entwickeln können:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= A_0 + w_0 \\
a_1 &= a_0 + w_1 - 2R \\
a_2 &= a_1 + w_2 - 2R \\
a_3 &= a_2 + w_3 - 2R \\
&\vdots \\
a_{n-1} &= a_{n-2} + w_{n-1} - 2R \\
a_n &= a_{n-1} + w_n - 2R,
\end{aligned}
$$

oder, wenn wir diese Gleichungen summiren,

$$a_n = A_0 + w_0 + w_1 + w_2 + w_3 \ldots\ldots + w_n - 2nR.$$

Wäre die Messung der Winkel w_0, w_1, w_2 ..... und die Angabe der Neigungswinkel A_0 und A_n absolut genau, so würden wir erhalten:

$$a_n = A_n,$$

also

$$A_n - A_0 + 2nR = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 \ldots\ldots + w_n.$$

Da aber sowohl jene Messungen als diese Angaben mit Fehlern behaftet sind, so wird die, in dieser Gleichung ausgesprochene Bedingung um eine gewisse Grösse, die wir, wie oben, mit k'_w bezeichnen, verfehlt; wir haben also thatsächlich:

$$-A_n + A_0 - 2nR + w_0 + w_1 + w_2 + \ldots\ldots w_n = k'_w.$$

Ebenso finden wir bei der Berechnung der Coordinaten, wenn wir die bei dem geschlossenen Polygon benutzte Bezeichnung überall beibehalten:

$$-Y_n + Y_0 + s_0 . \sin a_0 + s_1 . \sin a_1 + s_2 . \sin a_2 \ldots\ldots + s_{n-1} . \sin a_{n-1} = k_y$$

$$-X_n + X_0 + c_0 . \cos a_0 + s_1 . \cos a_1 + s_2 . \cos a_2 \ldots, \ldots + s_{n-1} . \cos a_{n-1} = k_x.$$

Wissen wir nun, dass die Fehler der Grössen A_0, A_n, Y_0, Y_n, X_0, X_n in dem Bildungsprocesse der Grössen k'_w, k_y, k_x mitgewirkt haben, behandeln wir jene Grössen gleichwohl als constante oder als absolut genaue Grössen, so können wir nur Anspruch darauf machen, unter dieser Beschränkung die wahrscheinlichsten Werthe für die Coordinaten der Brechpunkte zu finden.

Differenziren wir unter dieser Voraussetzung die obigen drei Gleichungen, so erhalten wir, nachdem wir für die Differenziale von w, s und a die endlich kleinen Veränderungen φ (in Halbmessermaass), $s\varepsilon$ und α setzen:

$$\text{I. } \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varphi_n = -k'_w \sin 1'$$

$$\text{II. } \Delta y_0 \varepsilon_0 + \Delta y_1 \varepsilon_1 + \Delta y_2 \varepsilon_2 \ldots. + \Delta y_{n-1} \varepsilon_{n-1} + \Delta x_0 \alpha_0$$
$$+ \Delta x_1 \alpha_1 + \Delta x_2 \alpha_2 \ldots. + \Delta x_{n-1} . \alpha_{n-1} = -k_y$$

$$\text{III. } \Delta x_0 \varepsilon_0 + \Delta x_1 \varepsilon_1 + \Delta x_2 \varepsilon_2 \ldots. + \Delta x_{n-1} \varepsilon_{n-1} - \Delta y_0 \alpha_0$$
$$- \Delta y_1 \alpha_1 - \Delta y_2 \alpha_2 \ldots. - \Delta y_{n-1} . \alpha_{n-1} = -k_x.$$

Wir sehen, dass diese Ausdrücke von den analogen Gleichungen für das geschlossene Polygon darin verschieden sind, dass φ_0 und φ_n beide darin vorkommen und weil hier n und 0 nicht einen und denselben Punkt bezeichnen, beide als selbstständige Grössen auftreten, die Fehler also nicht mehr auf n Winkel sondern auf $n + 1$ Winkel zu vertheilen sind. Ausserdem kommen hier die Glieder $\Delta x_0 \alpha_0$ und $-\Delta y_0 \alpha_0$ vor, welche in dem analogen Ausdrucke für das geschlossene Polygon fehlten.

Zur Vorbereitung der weiteren Entwicklung haben wir nun in den beiden letzten Gleichungen für die Veränderungen der Neigungswinkel, also für α, die Veränderungen der Brechungswinkel selbst, nämlich φ, einzuführen. Wir haben zu diesem Zwecke wie oben:

$$\Delta x_0 . \alpha_0 = \Delta x_0 . \varphi_0$$
$$\Delta x_1 . \alpha_1 = \Delta x_1 . \varphi_0 + \Delta x_1 . \varphi_1$$
$$\Delta x_2 . \alpha_2 = \Delta x_2 . \varphi_0 + \Delta x_2 . \varphi_1 + \Delta x_2 . \varphi_2$$
$$\Delta x_3 . \alpha_3 = \Delta x_3 . \varphi_0 + \Delta x_3 . \varphi_1 + \Delta x_2 . \varphi_2 + \Delta x_3 . \varphi_3$$
$$\vdots$$
$$\Delta x_{n-1} . \alpha_{n-1} = \Delta x_{n-1} . \varphi_0 + \Delta x_{n-1} . \varphi_1 + \Delta x_{n-1} . \varphi_2 + \Delta x_{n-1} . \varphi_3 \ldots. + \Delta x_{n-1} . \varphi_{n-1},$$

also zu beiden Seiten addirt:

$$\varDelta x_0 . \alpha_0 + \varDelta x_1 . \alpha_1 + \varDelta x_2 . \alpha_2 \ldots . + \varDelta x_{n-1} . \alpha_{n-1} = (X_n - X_0)\,\varphi_0 + (X_n - X_1)\,\varphi_1 \\ + (X_n - X_2)\,\varphi_2 \ldots . + (X_n - X_{n-1})\,\varphi_{n-1},$$

ebenso:

$$-\varDelta y_0\,\alpha_0 - \varDelta y_1\,\alpha_1 - \varDelta y_2\,\alpha_2 \ldots . - \varDelta y_{n-1} . \alpha_{n-1} = -(Y_n - Y_0)\,\varphi_0 - (Y_n - Y_1)\,\varphi_1 \\ -(Y_n - Y_2)\,\varphi_2 \ldots . -(Y_n - Y_{n-1})\,\varphi_{n-1};$$

wir können also die obigen Gleichungen schreiben:

$$\begin{aligned}
&\text{I. } \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi_n = -k'_w \sin 1' \\
&\text{II. } \varDelta y_0\,\varepsilon_0 + \varDelta y_1\,\varepsilon_1 + \varDelta y_2\,\varepsilon_2 \ldots . + \varDelta y_{n-1} . \varepsilon_{n-1} + (X_n - X_0)\,\varphi_0 \\
&\qquad + (X_n - X_1)\,\varphi_1 + (X_n - X_2)\,\varphi_2 \ldots . + (X_n - X_{n-1})\,\varphi_{n-1} = -k_y \\
&\text{III. } \varDelta x_0\,\varepsilon_0 + \varDelta x_1\,\varepsilon_1 + \varDelta x_2\,\varepsilon_2 \ldots . + \varDelta x_{n-1} . \varepsilon_{n-1} - (Y_n - Y_0)\,\varphi_0 \\
&\qquad - (Y_n - Y_1)\,\varphi_1 - (Y_n - Y_2)\,\varphi_2 \ldots . - (Y_n - Y_{n-1})\,\varphi_{n-1} = -k_x .
\end{aligned}$$

Verbinden wir hiermit endlich die Minimalgleichung:

$$s_0\,\varepsilon_0\,\varepsilon_0 + s_1\,\varepsilon_1\,\varepsilon_1 + s_2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_2 + s_3\,\varepsilon_3\,\varepsilon_3 \ldots\ldots + s_{n-1}\,\varepsilon_{n-1}\,\varepsilon_{n-1} \\ + \mu p\ (\varphi_0\,\varphi_0 + \varphi_1\,\varphi_1 + \varphi_2\,\varphi_2 \ldots\ldots + \varphi_n\,\varphi_n) = \text{Minimum},$$

so erhalten wir wie oben:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= \quad . \quad + \frac{\varDelta y_0}{s_0} . \text{II} + \frac{\varDelta x_0}{s_0} . \text{III} \\
\varepsilon_1 &= \quad . \quad + \frac{\varDelta y_1}{s_1} . \text{II} + \frac{\varDelta x_1}{s_1} . \text{III} \\
\varepsilon_2 &= \quad . \quad + \frac{\varDelta y_2}{s_2} . \text{II} + \frac{\varDelta x_2}{s_2} . \text{III} \\
&\vdots \\
\varepsilon_{n-1} &= \quad . \quad + \frac{\varDelta y_{n-1}}{s_{n-1}} . \text{II} + \frac{\varDelta x_{n-1}}{s_{n-1}} . \text{III.} \\
\varphi_0 &= \frac{1}{\mu p} . \text{I} + \frac{X_n - X_0}{\mu p} . \text{II} - \frac{Y_n - Y_0}{\mu p} . \text{III} \\
\varphi_1 &= \frac{1}{\mu p} . \text{I} + \frac{X_n - X_1}{\mu p} . \text{II} - \frac{Y_n - Y_1}{\mu p} . \text{III} \\
\varphi_2 &= \frac{1}{\mu p} . \text{I} + \frac{X_n - X_2}{\mu p} . \text{II} - \frac{Y_n - Y_2}{\mu p} . \text{III} \\
&\vdots \\
\varphi_{n-1} &= \frac{1}{\mu p} . \text{I} + \frac{X_n - X_{n-1}}{\mu p} . \text{II} - \frac{Y_n - Y_{n-1}}{\mu p} . \text{III} \\
\varphi_n &= \frac{1}{\mu p} . \text{I},
\end{aligned}$$

also schliesslich:

$$\frac{n+1}{\mu p} . \text{I} + \frac{[X_n - X]}{\mu p} . \text{II} - \frac{[Y_n - Y]}{\mu p} . \text{III} = -k'_w . \sin 1'$$

$$\frac{[X_n - X]}{\mu p} . \text{I} + \left(\left[\frac{\varDelta y . \varDelta y}{s}\right] + \frac{[(X_n - X)(X_n - X)]}{\mu p}\right) \text{II} + \left(\left[\frac{\varDelta y . \varDelta x}{s}\right] \right. \\ \left. - \frac{[(X_n - X)(Y_n - Y)]}{\mu p}\right) \text{III} = -k_y$$

$$-\frac{[Y_n - Y]}{\mu p} . \text{I} + \left(\left[\frac{\varDelta y . \varDelta x}{s}\right] - \frac{[(X_n - X)(Y_n - Y)]}{\mu p}\right) \text{II} + \left(\left[\frac{\varDelta x . \varDelta x}{s}\right] \right. \\ \left. + \frac{[(Y_n - Y)(Y_n - Y)]}{\mu p}\right) \text{III} = -k_x .$$

Sind durch Elimination die Werthe der Factoren I, II, III gefunden, so erhalten wir sofort durch Substitution derselben in die obigen Ausdrücke die Verbesserungen der Seitenlängen:

$$v_s = s \, . \, \varepsilon = \Delta y \, . \, \mathrm{II} + \Delta x \, . \, \mathrm{III},$$

ebenso die Verbesserungen für die Winkel

$$v_w = \varphi = \frac{1}{\mu p} \, . \, \mathrm{I} + \frac{X_n - X}{\mu p} \, . \, \mathrm{II} - \frac{Y_n - Y}{\mu p} \, . \, \mathrm{III}$$

oder in Minuten

$$v'_w = \varphi' = \frac{1}{\mu p \, . \sin 1'} \, . \, \mathrm{I} + \frac{X_n - X}{\mu p \, . \sin 1'} \, . \, \mathrm{II} - \frac{Y_n - Y}{\mu p \, . \sin 1'} \, . \, \mathrm{III}.$$

Die Verbesserungen der Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede $v_{\Delta y}$ und $v_{\Delta x}$ erhalten wir am bequemsten, wenn wir zunächst die Verbesserungen der Neigungswinkel α aus den Winkelverbesserungen durch successive Addition ableiten, z. B.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \varphi_0 \\ \alpha_1 &= \varphi_0 + \varphi_1 \\ \alpha_2 &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 \\ \alpha_3 &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \end{aligned}$$

u. s. w.

und dann uns erinnern, dass

$$\Delta y = s \, . \sin a \quad ; \quad \Delta x = s \, . \cos a$$

$$d \Delta y = v_s \, . \sin a + s \, . \cos a \, . \, \alpha; \quad d \Delta x = v_s \, . \cos a - s \, . \sin a \, . \, \alpha,$$

d. i.

$$v_{\Delta y} = \Delta y \, . \, \varepsilon + \Delta x \, . \, \alpha; \quad v_{\Delta x} = \Delta x \, . \, \varepsilon - \Delta y \, . \, \alpha,$$

oder wenn wir für ε den obigen Werth setzen:

$$v_{\Delta y} = \frac{\Delta y . \Delta y}{s} . \mathrm{II} + \frac{\Delta y . \Delta x}{s} . \mathrm{III} + \Delta x . \alpha; \quad v_{\Delta x} = \frac{\Delta y . \Delta x}{s} . \mathrm{II} + \frac{\Delta y . \Delta y}{s} . \mathrm{III} - \Delta y . \alpha.$$

Die Coëfficienten von I, II, III sind sämmtlich schon in der früheren Rechnung benutzt, sie brauchen also nur der Reihe nach mit I, II, III multiplicirt zu werden, wozu man sich am bequemsten einer Multiplicationstafel mit dreistelligen Factoren bedient.

Wir haben hier das strengste Verfahren der Berechnung eines nicht in sich selbst zurücklaufenden Linienzuges aus einander gesetzt und dargethan, dass die Rechnungsformen im Ganzen denen durchaus ähnlich sind, welche wir oben bei Behandlung des geschlossenen Polygons gesehen haben. Die gefundenen Ausdrücke unterscheiden sich hauptsächlich dadurch, dass die Hülfszahlen, welche in den Ordinaten- und Abscissen-Abständen des jeweiligen Punktes von dem Endpunkte des Zuges hier schicklicher mit zwei Buchstaben $Y_n - Y$ und $X_n - X$ bezeichnet wurden, wogegen wir bei dem geschlossenen Polygon voraussetzten, dass die Coordinatenachse in den Anfangspunkt der Rechnung verlegt und von da aus mit Null beginnend eine Zusammenstellung der Ordinaten und Abscissen der Ausgleichungsrechnung vorausgeschickt werde. Da dort der Anfangspunkt zugleich der Endpunkt war, so bestanden jene Abstände einfach in den, mit entgegengesetzten Zeichen genommenen, Coordinaten selbst. Bei der wirklichen Zahlenrechnung für nicht in sich geschlossene Züge können wir uns übrigens dieselbe Bequemlichkeit verschaffen, wenn wir, statt einer vom Anfangs- nach dem Endpunkte vorwärts schreitenden Coordinatenzusammenstellung, eine umgekehrt vom Endpunkte, mit Null beginnende, nach dem Anfangspunkte rückwärts gehende Zusammenstellung ausführen.

Die Rechnungsformen für das minder strenge Verfahren No. II werden bei den nicht in sich geschlossenen Zügen etwas einfacher als bei den geschlossenen Polygonen, weil auch das erste Azimuth α_0 veränderlich ist, daher aus den bezüglichen Ausdrücken die Minuenden $-\varDelta x_0 . \varDelta x_0$, $-\varDelta x_0 . \varDelta y_0$, $-\varDelta y_0 . \varDelta y_0$ fortfallen. Wir haben daher einfach:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varDelta y_0}{s_0} . \mathrm{I} + \frac{\varDelta x_0}{s_0} . \mathrm{II}$$
$$\varepsilon_1 = \frac{\varDelta y_1}{s_1} . \mathrm{I} + \frac{\varDelta x_1}{s_1} . \mathrm{II}$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\varDelta y_2}{s_2} . \mathrm{I} + \frac{\varDelta x_2}{s_2} . \mathrm{II}$$
$$\vdots \quad \text{u. s. w.}$$
$$\alpha_0 = \frac{\varDelta x_0}{\mu p} . \mathrm{I} - \frac{\varDelta y_0}{\mu p} . \mathrm{II}$$
$$\alpha_1 = \frac{\varDelta x_1}{\mu p} . \mathrm{I} - \frac{\varDelta y_1}{\mu p} . \mathrm{II}$$
$$\alpha_2 = \frac{\varDelta x_2}{\mu p} . \mathrm{I} - \frac{\varDelta y_2}{\mu p} . \mathrm{II}$$
$$\text{u. s. w.}$$

und
$$\left(\left[\frac{\varDelta y . \varDelta y}{s}\right] + \frac{[\varDelta x . \varDelta x]}{\mu p}\right) \mathrm{I} + \left(\left[\frac{\varDelta y . \varDelta x}{s}\right] + \frac{[\varDelta x . \varDelta y]}{\mu p}\right) \mathrm{II} = -k_y$$
$$\left(\left[\frac{\varDelta y . \varDelta x}{s}\right] + \frac{[\varDelta x . \varDelta y]}{\mu p}\right) \mathrm{I} + \left(\left[\frac{\varDelta x . \varDelta x}{s}\right] + \frac{[\varDelta y . \varDelta y]}{\mu p}\right) \mathrm{II} = -k_x.$$

Es versteht sich übrigens von selbst, dass bei der vorgängigen Vertheilung des Winkelsummenfehlers dieser durch $n+1$ statt durch n getheilt werden muss.

Die Formen für das III^te Verfahren ändern sich gar nicht. Weil hier nach geschehener Gleichvertheilung des Winkelsummenfehlers auf die $n+1$ Punkte die Neigungswinkel unveränderlich gesetzt werden, so haben wir einfach:

$$\left[\frac{\varDelta y . \varDelta y}{s}\right] . \mathrm{I} + \left[\frac{\varDelta y . \varDelta x}{s}\right] . \mathrm{II} = -k_y$$
$$\left[\frac{\varDelta y . \varDelta x}{s}\right] . \mathrm{I} + \left[\frac{\varDelta x . \varDelta x}{s}\right] . \mathrm{II} = -k_x$$

und

$$\varepsilon_0 = \frac{\varDelta y_0}{s_0} . \mathrm{I} + \frac{\varDelta x_0}{s_0} . \mathrm{II}$$
$$\varepsilon_1 = \frac{\varDelta y_1}{s_1} . \mathrm{I} + \frac{\varDelta x_1}{s_1} . \mathrm{II}$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\varDelta y_2}{s_2} . \mathrm{I} + \frac{\varDelta x_2}{s_2} . \mathrm{II}$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon_{n-1} = \frac{\varDelta y_{n-1}}{s_{n-1}} . \mathrm{I} + \frac{\varDelta x_{n-1}}{s_{n-1}} . \mathrm{II}.$$

Es sind hier absichtlich die Normalgleichungen den Ausdrücken für die Einheitsfehler vorangesetzt, weil in der That bei allen polygonometrischen Ausgleichungsrechnungen sogleich zur Bildung der Normalgleichungen geschritten werden kann, wogegen in der analytischen Entwicklung die Ausdrücke für die Einheitsfehler vorangehen müssen.

Wir haben oben bei der Behandlung des geschlossenen Polygons für das mindest strenge Verfahren No. III ein den entwickelten Formeln angepasstes Schema entworfen und mit einem concreten Beispiele angefüllt. Es folgt hier ein Formular zur Anwendung des strengsten Verfahrens No. I auf einen nicht in sich zurücklaufenden Linienzug, welcher aus dem im Eingange dieser Schrift erwähnten Polygonsystem entnommen ist, worin

der wahrscheinliche Längenmessungsfehler $\varepsilon = 0{,}000399$
der „ Winkelmessungsfehler $\varphi = 0',81783$
die mittlere Polygonseitenlänge $\mu = 74{,}2$ Ruthen

gefunden wurden.

Der Zusammenhang des Rechnungsschema's mit den obigen Formeln ist durch die Ueberschrift der Spalten erläutert; auch ist das Rechnungsverfahren von Spalte (1) bis (17) dem in dem Schema für das Verfahren No. III ganz gleich.

Für den folgenden Theil der Rechnung ist es nicht unwichtig, auf die darin enthaltenen Controlen aufmerksam zu machen.

1) Bei der Zusammenstellung von unten nach oben in den Spalten (18) und (19) muss oben zum Vorschein kommen:

$$Y_n - Y_0 = [\varDelta y] \quad \text{und} \quad X_n - X_0 = [\varDelta x].$$

2) Die Berechnung der Zahlen in den Spalten (21), (22), (23) controliren wir dadurch, dass wir bei Bildung der Producte in No. 22 einmal $Y_n - Y$, das andremal $X_n - X$ zum Argument nehmen.

3) Summe (24) muss sein $= \frac{1}{\mu p}.\mathrm{III}.[Y_n - Y]$

(25) „ „ $= \frac{1}{\mu p}.\mathrm{II}.[X_n - X]$

(26) „ „ $= \frac{1}{\mu p}.\mathrm{I}.(n+1)$

(27) „ „ $=$ Summe $(24)+(25)+(26) = k_w$

4) Summe (30) „ „ $= [\varDelta y.\sin a].\mathrm{II}$, ebenso $(34) = [\varDelta y.\cos a].\mathrm{II}$

(31) „ „ $= [\varDelta y.\cos a].\mathrm{III}$, „ $(35) = [\varDelta x.\cos a].\mathrm{III}$

(32) „ „ $[\varDelta x.\alpha] +$ Summe $(30)+(31) = k_y$

(36) „ „ $-[\varDelta y.\alpha] +$ „ $(34)+(35) = k_x$.

5) Bei der Zusammenstellung der α in Spalte (28) muss $\alpha_{n+1} = k_w$.