# Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen

**Vorländer, J. J.**

**Leipzig, 1858**

I. Ausgleichung geschlossener Polygone

# I. Ausgleichung geschlossener Polygone.

Nach dem Obigen haben wir es mit drei Bedingungsgleichungen zu thun, denen die Winkel und Seiten des geschlossenen Polygons genügen würden, wenn sie absolut genau wären; da sie dieses aber nicht sind, so verfehlen sie die Bedingungen um die Grössen $k'_w$, $k_y$, $k_x$; wir haben nämlich thatsächlich:

$$\text{I. } w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots w_{n-1} - N = k'_w$$
$$\text{II. } s_0 \sin a_0 + s_1 \sin a_1 + s_2 \sin a_2 + s_3 \sin a_3 + \ldots\ldots s_{n-1} \sin a_{n-1} = k_y$$
$$\text{III. } s_0 \cos a_0 + s_1 \cos a_1 + s_2 \cos a_2 + s_3 \cos a_3 + \ldots\ldots s_{n-1} \cos a_{n-1} = k_x.$$

Unsere Aufgabe ist nun, für die gemessenen Grössen $s$ und $w$ solche Verbesserungen $v$ und $\varphi'$ zu entwickeln, durch welche, wenn sie den $s$ und $w$ beigefügt, wenn also $s + v$ und $w + \varphi'$ für sie an der linken Seite der Gleichungen substituirt werden, die Grössen $k_w$, $k_y$, $k_x$ verschwinden oder aufgehoben werden, aber zugleich wahrscheinlicher sind, als jede andre Gruppe von Verbesserungen.

Nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung kömmt nur derjenigen Gruppe der Vorzug zu, die wahrscheinlichste zu sein, welche die kleinste Summe der Quadrate ihrer Glieder ergibt.

Diese beiden Eigenschaften, dass $v$ und $\varphi'$, wenn sie den gemessenen Grössen $s$ und $w$ beigefügt werden, die Grössen $k'_w$, $k_y$, $k_x$ vernichten, und dass sie, oder genauer die ihnen zum Grunde liegenden Einheitsfehler ein Minimum zur Quadratsumme ergeben müssen, haben wir nun zu benutzen, um die zur Zeit unbekannten $v$ und $\varphi'$ zu entwickeln.

Das Zeichen für die Winkelverbesserung ist hier mit dem Accent (') versehen worden, um anzudeuten, dass unter $\varphi'$ die Verbesserung in Minuten verstanden werden soll.

Späterhin soll sich das Zeichen $\varphi$, ohne Accent, auf das Bogenmaass dieser Verbesserung für den Halbmesser $= 1$ beziehen.

Bei der einfachen Form der ersten Bedingungsgleichung ersehen wir sogleich, dass die Verbesserungen $\varphi'_0$, $\varphi'_1$, $\varphi'_2$, $\varphi'_3$ u. s. w. für sich allein der Bedingung, zur Summe $-k_w$ zu geben, genügen müssen, dass

$$\varphi'_0 + \varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \ldots\ldots \varphi'_{n-1} = -k'_w,$$

weil nur unter dieser Bedingung

$$w_0 + \varphi'_0 + w_1 + \varphi'_1 + w_2 + \varphi'_2 + w_3 + \varphi'_3 + \ldots\ldots - N = 0$$

werden kann.

Die obige Gleichung kann nun auch so geschrieben werden:

$$1) \quad \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots\ldots \varphi_{n-1} = - k'_w . \sin 1'.$$

Die beiden nachfolgenden Gleichungen erfordern eine tiefer eingehende Betrachtung.

Zunächst bemerken wir, dass darin die Winkel $w_0$, $w_1$, $w_2$ u. s. w. gar nicht vorkommen, sondern nur die aus ihnen abgeleiteten Neigungswinkel. Wir können uns aber vorläufig darauf beschränken, statt für die Winkel $w$, für die Neigungswinkel $a$ die entsprechenden Verbesserungen $\alpha$ auszudrücken, mit dem Vorbehalt, späterhin aus diesen die Verbesserungen für jene, nämlich $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ u. s. w. ableiten zu wollen, was augenfällig um so weniger Schwierigkeit haben kann, als die Beziehungen zwischen $a$ und $w$, wie wir oben gesehen haben, durch Gleichungen von der einfachsten Form gegeben sind.

Wenn wir darthun wollen, um welche Grösse die linke Seite jeder der beiden obigen Gleichungen II und III sich ändert, sobald darin $s + v$ für $s$ und $a + \alpha$ für $a$ substituirt wird, so brauchen wir nur die Differenzialcoëfficienten derselben nach $s$ und $a$ mit $v$ und $\alpha$ zu multipliciren. Wir erhalten dann*):

aus II. $v_0 \sin a_0 + v_1 \sin a_1 + v_2 \sin a_2 + v_3 \sin a_3 \ldots\ldots + v_{n-1} \sin a_{n-1}$
$+ \alpha_1 . s_1 . \cos a_1 + \alpha_2 . s_2 . \cos a_2 + \alpha_3 . s_3 . \cos a_3 \ldots\ldots + \alpha_{n-1} . s_{n-1} . \cos a_{n-1}$,

aus III. $v_0 \cos a_0 + v_1 \cos a_1 + v_2 \cos a_2 + v_3 \cos a_3 \ldots\ldots + v_{n-1} . \cos a_{n-1}$
$- \alpha_1 s_1 \sin a_1 - \alpha_2 s_2 \sin a_2 - \alpha_3 s_3 \sin a_3 \ldots\ldots - \alpha_{n-1} . s_{n-1} . \sin a_{n-1}$,

wobei es kaum der Bemerkung bedarf, dass der Neigungswinkel $a_0$, weil er nach dem Obigen ohne Einfluss auf die Gestaltung des Polygons ist, keiner Veränderung unterliegt.

Betrachten wir nun $v_0$, $v_1$, $v_2$ u. s. w. als Totalfehler der Längen $s_0$, $s_1$, $s_2$ u. s. w., so haben wir nach dem Obigen:

$$v_0 = s_0 \, \varepsilon_0$$
$$v_1 = s_1 \, \varepsilon_1$$
$$v_2 = s_2 \, \varepsilon_2$$
u. s. w.

Die ersten Zeilen der vorstehenden Ausdrücke werden daher:

$$\varepsilon_0 \, s_0 \sin a_0 + \varepsilon_1 \, s_1 \sin a_1 + \varepsilon_2 \, s_2 \sin a_2 \ldots\ldots + s_{n-1} \, \varepsilon_{n-1} \sin a_{n-1}$$
und
$$\varepsilon_0 \, s_0 \cos a_0 + \varepsilon_1 \, s_1 \cos a_1 + \varepsilon_2 \, s_2 \cos a_2 \ldots\ldots + s_{n-1} \, \varepsilon_{n-1} \cos a_{n-1},$$

wofür wir auch nach der gewöhnlichen Bezeichnung bei polygonometrischen Rechnungen, indem man $\Delta y = s \sin a$ und $\Delta x = s \cos a$ setzt, schreiben können:

2) $\quad \varepsilon_0 \, \Delta y_0 + \varepsilon_1 \, \Delta y_1 + \varepsilon_2 \, \Delta y_2 \ldots\ldots + \varepsilon_{n-1} \, \Delta y_{n-1}$
und
3) $\quad \varepsilon_0 \, \Delta x_0 + \varepsilon_1 \, \Delta x_1 + \varepsilon_2 \, \Delta x_2 \ldots\ldots + \varepsilon_{n-1} \, \Delta x_{n-1}$.

Ebenso können die zweiten Zeilen jener Ausdrücke geschrieben werden:

$$+ \alpha_1 \, \Delta x_1 + \alpha_2 \, \Delta x_2 + \alpha_3 \, \Delta x_3 \ldots\ldots + \alpha_{n-1} . \Delta x_{n-1}$$
und
$$- \alpha_1 \, \Delta y_1 - \alpha_2 \, \Delta y_2 - \alpha_3 \, \Delta y_3 \ldots\ldots - \alpha_{n-1} . \Delta y_{n-1}.$$

Es bleibt jetzt noch übrig, in den beiden letzten Ausdrücken die Verbesserungen der Winkel selbst, also $\varphi$, für die Verbesserungen $\alpha$ einzuführen.

---

*) Ohne Anwendung der Differenzialrechnung findet man dieselben Ausdrücke, wenn man $s + v$ für $s$ und $a + \alpha$ für $a$ substituirt und berücksichtigt, dass $\cos \alpha = 1$ und $\sin \alpha = \alpha$ gesetzt werden darf.

Hatten wir oben:

$$a_1 = a_0 + w_1 - 2R$$
$$a_2 = a_1 + w_2 - 2R = a_0 + w_1 + w_2 - 4R$$
$$a_3 = a_2 + w_2 - 2R = a_0 + w_1 + w_2 + w_3 - 6R$$

u. s. w.,

so folgt, wenn wir $w_1$ um $\varphi_1$, $w_2$ um $\varphi_2$, $w_3$ um $\varphi_3$ u. s. w. sich verändern lassen, die davon abhängige Veränderung von $a_1$, $a_2$, $a_3$ u. s. w.

$$\alpha_1 = \varphi_1$$
$$\alpha_2 = \varphi_1 + \varphi_2$$
$$\alpha_3 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

u. s. w.

Substituiren wir nun diese Werthe für $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ u. s. w., so erhalten wir:

$$+ \Delta x_1 \varphi_1 + \Delta x_2 (\varphi_1 + \varphi_2) + \Delta x_3 (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + \ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

und

$$- \Delta y_1 \varphi_1 - \Delta y_2 (\varphi_1 + \varphi_2) - \Delta y_3 (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \ldots\ldots \text{ u. s. w.,}$$

oder wenn wir die Klammern vertical schreiben:

$$\begin{array}{l} + \Delta x_1 \varphi_1 + \Delta x_2 . \varphi_1 + \Delta x_3 . \varphi_1 + \Delta x_4 . \varphi_1 \ldots\ldots + \Delta x_{n-1} . \varphi_1 \\ \qquad\qquad + \Delta x_2 . \varphi_2 + \Delta x_3 . \varphi_2 + \Delta x_4 . \varphi_2 \ldots\ldots + \Delta x_{n-1} . \varphi_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \Delta x_3 . \varphi_3 + \Delta x_4 . \varphi_3 \ldots\ldots + \Delta x_{n-1} . \varphi_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \Delta x_4 . \varphi_4 \ldots\ldots + \Delta x_{n-1} . \varphi_4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \Delta x_{n-1} . \varphi_{n-1}, \end{array}$$

oder:

$$-(X_n - X_1)\varphi_1 - (X_n - X_2)\varphi_2 - (X_n - X_3)\varphi_3 - (X_n - X_4)\varphi_4 \ldots\ldots - (X_n - X_{n-1})\varphi_{n-1},$$

ebenso finden wir:

$$+(Y_n - Y_1)\varphi_1 + (Y_n - Y_2)\varphi_2 + (Y_n - Y_3)\varphi_3 + (Y_n - Y_4)\varphi_4 \ldots\ldots + (Y_n - Y_{n-1})\varphi_{n-1}.$$

Diese Ausdrücke vereinfachen sich noch, wenn wir die Ordinaten- und Abscissenrechnung im Punkte 0 oder $n$ mit 0 beginnen lassen, oder wenn wir setzen:

$$(X_n - X_1) = x_1, \quad (Y_n - Y_1) = y^1$$
$$(X_n - X_2) = x_2, \quad (Y_n - Y_2) = y_2$$
$$(X_n - X_3) = x_3, \quad (Y_n - Y_3) = y_3$$

u. s. w.;

sie werden dann:

4) $-x_1 \varphi_1 - x_2 \varphi_2 - x_3 \varphi_3 - x_4 \varphi_4 + \ldots\ldots - x_{n-1} . \varphi_{n-1},$

5) $+y_1 \varphi_1 + y_2 \varphi_2 + y_3 \varphi_3 + y_4 \varphi_4 + \ldots\ldots y_{n-1} \varphi_{n-1}.$

Sollen nun die Ausdrücke (2) und (4) mit (II) vereinigt die Grösse $k_y$, und die Ausdrücke (3) und (5) mit (III) verbunden die Grösse $k_x$ vernichten, so kann dieses nur geschehen, wenn

$$\varepsilon_0 \Delta y_0 + \varepsilon_1 \Delta y_1 + \varepsilon_2 \Delta y_2 \ldots\ldots + \varepsilon_{n-1} \Delta y_{n-1} - x_1 \varphi_1 - x_2 \varphi_2 - x_3 \varphi_3 \ldots\ldots - x_{n-1} \varphi_{n-1} = -k_y$$

$$\varepsilon_0 \Delta x_0 + \varepsilon_1 \Delta x_1 + \varepsilon_2 \Delta x_2 \ldots\ldots + \varepsilon_{n-1} \Delta x_{n-1} + y_1 \varphi_1 + y_2 \varphi_2 + y_3 \varphi_3 \ldots\ldots + y_{n-1} \varphi_{n-1} = -k_x.$$

Demnach haben wir schliesslich folgende Bedingungsgleichungen für die Verbesserungen:

$$\text{I.}\quad \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \ldots\ldots + \varphi_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\,k'_w \sin 1'$$

$$\text{II.}\quad -x_1\,\varphi_1 - x_2\,\varphi_2 - x_3\,\varphi_3 \ldots\ldots - x_{n-1}\,\varphi_{n-1} + \varepsilon_0\,\varDelta y_0 + \varepsilon_1\,\varDelta y_1 + \varepsilon_2\,\varDelta y_2 + \varepsilon_3\,\varDelta y_3 + \ldots\ldots \varepsilon_{n-1}\,\varDelta y_{n-1} = -\,k_y$$

$$\text{III.}\quad y_1\,\varphi_1 + y_2\,\varphi_2 + y_3\,\varphi_3 \ldots\ldots + y_{n-1}\varphi_{n-1} + \varepsilon_0\,\varDelta x_0 + \varepsilon_1\,\varDelta x_1 + \varepsilon_2\,\varDelta x_2 + \varepsilon_3\,\varDelta x_3 + \ldots\ldots \varepsilon_{n-1}\,\varDelta x_{n-1} = -\,k_x.$$

Wollen wir nun mit diesen Bedingungsgleichungen der gesuchten Verbesserungen die Bedingung ihres Quadratsummen-Minimums verbinden, so haben wir nach dem Obigen zu berücksichtigen, dass den Verbesserungen $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ u. s. w. verschiedene Gewichte beigemessen werden müssen, je nachdem die Seitenlängen, auf welche sie sich beziehn, grösser oder geringer sind, dass endlich den Verbesserungen $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ u. s. w. gegenüber den Längenmessungsfehlern das Gewicht $p$ zukömmt. Wir haben also zu setzen:

$$\frac{s_0}{\mu}\,\varepsilon_0\,\varepsilon_0 + \frac{s_1}{\mu}\,\varepsilon_1\,\varepsilon_1 + \frac{s_2}{\mu}\,\varepsilon_2\,\varepsilon_2 + \ldots\ldots \frac{s_{n-1}}{\mu}\,\varepsilon_{n-1}\,\varepsilon_{n-1} + p\,(\varphi_0\,\varphi_0 + \varphi_1\,\varphi_1 + \varphi_2\,\varphi_2 + \ldots\ldots \varphi_{n-1}\,\varphi_{n-1}) = \text{Minimum},$$

oder auch

$$\text{IV.}\quad s_0\,\varepsilon_0\,\varepsilon_0 + s_1\,\varepsilon_1\,\varepsilon_1 + s_2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_2 + \ldots\ldots s_{n-1}\,\varepsilon_{n-1}\,\varepsilon_{n-1} + \mu p(\varphi_0\,\varphi_0 + \varphi_1\,\varphi_1 + \varphi_2\,\varphi_2 + \ldots\ldots \varphi_{n-1}\,\varphi_{n-1}) = \text{Minimum}.$$

Wollen wir nun das durch die drei ersten Gleichungen bedingte Minimum dieser Quadratensumme finden, so haben wir alle vier Gleichungen zu differenziren, jeden der dadurch aus den drei ersten Gleichungen erlangten Ausdrücke mit einem vorläufig unbestimmten Factor, etwa der Nummer der Gleichung (I, II, III) zu multipliciren, dann die 3 ersten Gleichungen zu addiren, endlich der Reihe nach die Coëfficientensummen der Differenziale $d\varepsilon$, $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$ u. s. w., $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$ u. s. w. den entsprechenden Coëfficienten der 4[ten] Gleichung gleich zu setzen. Wir finden dann:

$$\begin{aligned}
\mu p\,\varphi_0 &= \text{I}\\
\mu p\,\varphi_1 &= \text{I} - x_1.\text{II} + y_1.\text{III}\\
\mu p\,\varphi_2 &= \text{I} - x_2.\text{II} + y_2.\text{III}\\
\mu p\,\varphi_3 &= \text{I} - x_3.\text{II} + y_3.\text{III}\\
&\vdots\\
\mu p\,\varphi_{n-1} &= \text{I} - x_{n-1}.\text{II} + y_{n-1}.\text{III}\\
s_0\,\varepsilon_0 &= +\,\varDelta y_0.\text{II} + \varDelta x_0.\text{III}\\
s_1\,\varepsilon_1 &= +\,\varDelta y_1.\text{II} + \varDelta x_1.\text{III}\\
s_2\,\varepsilon_2 &= +\,\varDelta y_2.\text{II} + \varDelta x_2.\text{III}\\
s_3\,\varepsilon_3 &= +\,\varDelta y_3.\text{II} + \varDelta x_3.\text{III}\\
&\vdots\\
s_{n-1}\,\varepsilon_{n-1} &= +\,\varDelta y_{n-1}.\text{II} + \varDelta x_{n-1}.\text{III},
\end{aligned}$$

mithin:

$$\varphi_0 = \frac{1}{\mu p}.\text{I}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{\mu p}.\text{I} - \frac{x_1}{\mu p}.\text{II} + \frac{y_1}{\mu p}.\text{III}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\mu p}.\mathrm{I} - \frac{x_2}{\mu p}.\mathrm{II} + \frac{y_2}{\mu p}.\mathrm{III}$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{\mu p}.\mathrm{I} - \frac{x_3}{\mu p}.\mathrm{II} + \frac{y_3}{\mu p}.\mathrm{III}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{n-1} = \frac{1}{\mu p}.\mathrm{I} - \frac{x_{n-1}}{\mu p}.\mathrm{II} + \frac{y_{n-1}}{\mu p}.\mathrm{III}$$

$$\varepsilon_0 = \quad + \frac{\Delta y_0}{s_0}.\mathrm{II} + \frac{\Delta x_0}{s_0}.\mathrm{III}$$

$$\varepsilon_1 = \quad + \frac{\Delta y_1}{s_1}.\mathrm{II} + \frac{\Delta x_1}{s_1}.\mathrm{III}$$

$$\varepsilon_2 = \quad + \frac{\Delta y_2}{s_2}.\mathrm{II} + \frac{\Delta x_2}{s_2}.\mathrm{III}$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_{n-1} = \quad + \frac{\Delta y_{n-1}}{s_{n-1}}.\mathrm{II} + \frac{\Delta x_{n-1}}{s_{n-1}}.\mathrm{III}.$$

Substituiren wir nun diese Werthe für $\varphi$ und $\varepsilon$ in die Gleichungen I, II, III und setzen zur Abkürzung:

$$\begin{array}{lll}
[x] & \text{für} & x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_{n-1} \\
[y] & \text{,,} & y_1 + y_2 + y_3 \ldots + y_{n-1} \\
[xx] & \text{,,} & x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 \ldots + x_{n-1} x_{n-1} \\
[xy] & \text{,,} & x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \ldots + x_{n-1} y_{n-1} \\
[yy] & \text{,,} & y_1 y_1 + y_2 y_2 + y_3 y_3 \ldots + y_{n-1} y_{n-1} \\
\left[\frac{\Delta x . \Delta x}{s}\right] & \text{,,} & \frac{\Delta x_0 . \Delta x_0}{s_0} + \frac{\Delta x_1 . \Delta x_1}{s_1} + \frac{\Delta x_2 . \Delta x_2}{s_2} \ldots + \frac{\Delta x_{n-1} . \Delta x_{n-1}}{s_{n-1}} \\
\left[\frac{\Delta x . \Delta y}{s}\right] & \text{,,} & \frac{\Delta x_0 . \Delta y_0}{s_0} + \frac{\Delta x_1 . \Delta y_1}{s_1} + \frac{\Delta x_2 . \Delta y_2}{s_2} \ldots + \frac{\Delta x_{n-1} . \Delta y_{n-1}}{s_{n-1}} \\
\left[\frac{\Delta y . \Delta y}{s}\right] & \text{,,} & \frac{\Delta y_0 . \Delta y_0}{s_0} + \frac{\Delta y_1 . \Delta y_1}{s_1} + \frac{\Delta y_2 . \Delta y_2}{s_2} \ldots + \frac{\Delta y_{n-1} . \Delta y_{n-1}}{s_{n-1}},
\end{array}$$

so erhalten wir schliesslich:

$$+\frac{n}{\mu p}\,\mathrm{I} - \frac{[x]}{\mu p}\,\mathrm{II} + \frac{[y]}{\mu p}\,\mathrm{III} = -k'_w \sin 1'$$

$$-\frac{[x]}{\mu p}\,\mathrm{I} + \left(\left[\frac{\Delta y . \Delta y}{s}\right] + \frac{[xx]}{\mu p}\right)\mathrm{II} + \left(\left[\frac{\Delta x . \Delta y}{s}\right] - \frac{[xy]}{\mu p}\right)\mathrm{III} = -k_y$$

$$+\frac{[y]}{\mu p}\,\mathrm{I} + \left(\left[\frac{\Delta x . \Delta y}{s}\right] - \frac{[xy]}{\mu p}\right)\mathrm{II} + \left(\left[\frac{\Delta x . \Delta x}{s}\right] + \frac{[yy]}{\mu p}\right)\mathrm{III} = -k_x.$$

Durch Elimination finden wir nun die Werthe für I, II, III, und durch Substitution derselben in die obigen Gleichungen die Werthe für $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ u. s. w., $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ u. s. w.; ferner durch Division mit sin 1′ in $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ u. s. w. die Winkelverbesserungen in Minuten, durch Multiplication der $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ u. s. w. beziehungsweise mit $s_0$, $s_1$, $s_2$ u. s. w. die Verbesserungen der gemessenen Seiten *). Wenn wir endlich beachten, dass:

$$\Delta y = s . \sin \alpha \quad ; \quad \Delta x = s . \cos \alpha$$

und

$$d\Delta y = \varepsilon . s . \sin \alpha + \alpha . s . \cos \alpha ; \quad d\Delta x = \varepsilon . s . \cos \alpha - \alpha . s . \sin \alpha$$

$$= \Delta y . \varepsilon + \Delta x . \alpha \quad ; \quad = \Delta x . \varepsilon - \Delta y . \alpha,$$

---

*) Man kann auch umgekehrt zuerst $v_s$ nach der Formel $v_s = s\varepsilon = \Delta y . \mathrm{II} + \Delta x\ \mathrm{III}$ berechnen und dann $\varepsilon$ durch Division mit $s$ finden.

oder, wenn wir $d\,\varDelta y$ mit $v_{\varDelta y}$ und $d\,\varDelta x$ mit $v_{\varDelta x}$ bezeichnen,

$$v_{\varDelta y} = \varDelta y.\varepsilon + \varDelta x.\alpha; \quad v_{\varDelta x} = \varDelta x.\varepsilon - \varDelta y.\alpha$$

und dass

$$\alpha_1 = \varphi_1$$
$$\alpha_2 = \varphi_1 + \varphi_2$$
$$\alpha_3 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$
u. s. w.,

so können wir auch ohne neue Berechnung der Coordinaten die Verbesserung der vorläufig berechneten Coordinaten-Unterschiede und Coordinaten der Reihe nach durch leichte Multiplicationen und Additionen ausführen.

Wir wollen die Anwendung der vorstehenden Entwicklungsformen an einem Zahlenbeispiel betrachten.

Bei der Aufnahme des Grundsteuer-Katasters wurden in dem Polygon der Flur VII der Gemeinde Hartum im Kreise Minden gemessen:

| Nummer. | Station No. | Winkel in Centesimaltheilung. | Seiten in Ruthen. |
|---|---|---|---|
| 0) | 66 | 136°. 90′. 11″ | 127,°9 |
| 1) | 62 | 94 . 42 . 07 | 80, 0 |
| 2) | 61 | 351 . 32 . 71 | 101, 6 |
| 3) | ♁ 72 | 72 . 82 . 25 | 42, 7 |
| 4) | 60 | 184 . 99 . 76 | 92, 8 |
| 5) | 59 | 187 . 54 . 50 | 98, 5 |
| 6) | 58 | 87 . 57 . 31 | 34, 5 |
| 7) | 39 | 282°. 13′. 50″ | 67,°5 |
| 8) | 38 | 109 . 94 . 40 | 101, 3 |
| 9) | 37 | 169 . 80 . 62 | 113, 4 |
| 10) | 40 | 229 . 81 . 62 | 122, 7 |
| 11) | 41 | 46 . 58 . 50 | 95, 4 |
| 12) | 67 | 246 . 07 . 90 | 85, 4 |

Der anfängliche Neigungswinkel für die Seite von der Station No. 66 nach No. 62 wurde gegeben zu 20°. 68′ 86″,

die Ordinate des Punktes No. 66 zu — 1092,60

„ Abscisse „ „ „ „ „ + 646,23.

Wir berechnen nun zunächst die Coordinaten mit den unveränderten Maassen, indem wir nach dem Obigen in der Station No. 66 sowohl die Ordinate als die Abscisse mit 0 beginnen lassen:

| Nummer | Station | $w$ Brechungswinkel | $s$ Seite | $a$ Neigungswinkel | $\varDelta y$ Ordinaten-unterschied | $\varDelta x$ Abscissen-unterschied | $y$ Ordinate | $x$ Abscisse |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 0 | 0 |
| 0 | 66 | 136°. 90′. 11″ | 127,°9 | 20°. 68′. 86″ | + 40,835 | + 121,205 | + 40,835 | + 121,205 |
| 1 | 62 | 94 . 42 . 07 | 80, 0 | 315 . 10 . 93 | — 77,757 | + 18,810 | — 36,922 | + 140,015 |
| 2 | 61 | 351 . 32 . 71 | 101, 6 | 66 . 43 . 64 | + 87,803 | + 51,118 | + 50,881 | + 191,133 |
| 3 | ♁ 72 | 72 . 82 . 25 | 42, 7 | 339 . 25 . 89 | — 34,835 | + 24,695 | + 16,046 | + 215,828 |
| 4 | 60 | 184 . 99 . 76 | 92, 8 | 324 . 25 . 65 | — 86,145 | + 34,509 | — 70,099 | + 250,337 |
| 5 | 59 | 187 . 54 . 50 | 98, 5 | 311 . 80 . 15 | — 96,812 | + 18,155 | — 166,911 | + 268,492 |
| 6 | 58 | 87 . 57 . 31 | 34, 5 | 199 . 37 . 46 | + 0,339 | — 34,499 | — 166,572 | + 233,993 |
| 7 | 39 | 282 . 13 . 50 | 67, 5 | 281 . 50 . 96 | — 64,672 | — 19,330 | — 231,244 | + 214,663 |
| 8 | 38 | 109 . 94 . 40 | 101, 3 | 191 . 45 . 36 | + 13,556 | — 100,387 | — 217,688 | + 114,276 |
| 9 | 37 | 169 . 80 . 62 | 113, 4 | 161 . 25 . 98 | + 64,826 | — 93,042 | — 152,862 | + 21,234 |
| 10 | 40 | 229 . 81 . 62 | 122, 7 | 191 . 07 . 60 | + 17,145 | — 121,491 | — 135,717 | — 100,257 |
| 11 | 41 | 46 . 58 . 50 | 95, 4 | 37 . 66 . 10 | + 53,201 | + 79,188 | — 82,516 | — 21,069 |
| 12 | 67 | 246 . 07 . 90 | 85, 4 | 83 . 74 . 00 | + 82,631 | + 21,576 | + 0,115 | + 0,507 |
| $\binom{0}{13}$ | | 2199 . 95 . 25 | | 20 . 64 . 11 | + 360,336 | + 369,256 | | |
| 13 | | 2200 . 00 . 00 | | 20 . 68 . 86 | — 360,221 | — 368,749 | — 1152,769 | + 1649,850 |
| **A** | , | $k'_w = -4'.75''$ | , | $k'_w = -4'.75''$, | $k_y = +0{,}115$, | $k_x = +0{,}507$, | **B** , | **C** |

Sodann berechnen wir die nachstehenden Hilfsgrössen, indem wir die Producte auf volle Ruthen abrunden *):

| | $\varDelta y\,\varDelta y$ | $\varDelta y\,\varDelta x$ | $\varDelta x\,\varDelta x$ | $\frac{\varDelta y\,\varDelta y}{s}$ | $\frac{\varDelta y\,\varDelta x}{s}$ | $\frac{\varDelta x\,\varDelta x}{s}$ | $yy$ | $yx$ | $xx$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | + 1667 | + 4949 | + 14690 | + 12,97 | + 38,61 | + 114,83 | —— | —— | —— |
| 1 | 6047 | — 1463 | 353 | 75,58 | — 18,28 | 4,42 | + 1667 | + 4949 | + 14689 |
| 2 | 7709 | + 4488 | 2613 | 75,87 | + 44,28 | 25,75 | 1363 | — 5169 | 19600 |
| 3 | 1213 | — 860 | 610 | 28,41 | — 20,15 | 14,29 | 2590 | + 9723 | 36520 |
| 4 | 7422 | — 2973 | 1191 | 79,98 | — 32,04 | 12,83 | 258 | + 3464 | 46570 |
| 5 | 9372 | — 1758 | 330 | 95,15 | — 17,85 | 3,27 | 4914 | — 17545 | 62650 |
| 6 | 0 | — 12 | 1190 | 0,00 | — 0,34 | 34,50 | 27864 | — 44813 | 72090 |
| 7 | 4182 | + 1250 | 374 | 61,96 | + 18,52 | 5,54 | 27757 | — 38985 | 54758 |
| 8 | 184 | — 1361 | 10080 | 1,82 | — 13,44 | 99,51 | 53454 | — 49640 | 46095 |
| 9 | 4203 | — 6032 | 8657 | 37,06 | — 53,31 | 76,34 | 47394 | — 24883 | 13065 |
| 10 | 294 | — 2083 | 14763 | 2,40 | — 16,97 | 120,31 | 23381 | — 3246 | 451 |
| 11 | 2830 | + 4213 | 6271 | 29,67 | + 44,16 | 65,73 | 18415 | + 13580 | 10060 |
| 12 | 6827 | + 1782 | 465 | 79,95 | + 20,87 | 5,45 | 6810 | + 1749 | 444 |
| | + 51950 | + 140 | + 61587 | + 580,82 | — 5,94 | + 582,74 | + 215867 | — 150816 | + 376992 |
| | | **D** | | | **E** | | | **F** | |

Nehmen wir nun beispielsweise das Gewichtsverhältniss zwischen Seiten- und Winkelmessung nach der eben mitgetheilten Erfahrung an, wo $p = 9{,}644$ und $\mu = 74{,}2$ war, so haben wir die Summen **A**, **B**, **C** und **F** mit $\mu p$ zu theilen, nämlich zu setzen **):

$$\begin{aligned}
\log\ p &= 0{,}98426\\
\log\ \mu &= \underline{1{,}87040}\\
&\phantom{=}\ \underline{2{,}85466}\\
Cp.\log\ p\mu &= 7{,}14534
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
+\,\mathbf{A})\ \log\ n & = 1{,}11394\ ,\ 8{,}25928\ ,\ +0{,}018167, & \text{dazu } \mathbf{E}\\
+\,\mathbf{B})\ \log\ [y] & = 3{,}06175_n,\ 0{,}20709_n,\ -1{,}6110 & \\
-\,\mathbf{C})\ \log\ [x] & = 3{,}21743\ ,\ 0{,}36277\ ,\ -2{,}3055 & \\
\left.\begin{array}{l} + \\ -\,\mathbf{F} \\ + \end{array}\right\{ \begin{array}{l} \log\ [yy] \\ \log\ [xy] \\ \log\ [xx] \end{array} & \begin{array}{l} = 5{,}33418\ ,\ 2{,}47952\ ,\ +301{,}66 + 582{,}74 = +\ 884{,}40 \\ = 5{,}17845_n,\ 2{,}32379_n,\ +210{,}76 -\ \ 5{,}94 = +\ 204{,}82 \\ = 5{,}57634\ ,\ 2{,}72168\ ,\ +526{,}84 + 580{,}82 = +1107{,}66. \end{array} &
\end{array}$$

Auch ist noch $k'_w$ in Halbmessermaass zu verwandeln:

$$\begin{aligned}
\log\ k'_w &= 0{,}67669_n\\
\log\sin 1' &= \underline{6{,}19612}\\
\log\ k_w &= 6{,}87281_n,\ -0{,}00074612.
\end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen ergeben sich die Gleichungen zur Bestimmung der Correlate I, II, III, wie folgt:

$$\begin{aligned}
+0{,}018167\ \mathrm{I} - \ \ 2{,}3055\ \mathrm{II} - 1{,}6110\ \mathrm{III} &= +\ 0{,}00074612\\
-2{,}3055\ \ \mathrm{I} + 1107{,}66\ \mathrm{II} + 204{,}82\ \mathrm{III} &= -\ 0{,}115\\
-1{,}6110\ \ \mathrm{I} + \ \ 204{,}82\ \mathrm{II} + 884{,}40\ \mathrm{III} &= -\ 0{,}507.
\end{aligned}$$

*) Zu diesen Multiplicationen können füglich Multiplicationstafeln mit dreistelligen Factoren benutzt werden. Eine ängstliche Sorge für die Genauigkeit der Endziffern ist unnöthig; dagegen muss auf die Stellenzahl alle Aufmerksamkeit verwendet werden.

**) Bei diesen und den nachfolgenden Rechnungen bezeichnet der den Logarithmen unten angehängte Buchstabe $n$, dass der betreffende Log. zu einer negativen Zahl gehört.

Damit der Leser den Umfang dieser Ausgleichungsrechnung vollständig übersehen könne, möge das Eliminationsgeschäft, wie es sich nach dem bekannten Gauss'schen Algorithmus gestaltet, hier Platz finden, und zwar so ausführlich, dass keine Ziffer anderswo berechnet werde.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | + 0,018167 . I — | 2,3055 . II — | 1,611 . III = | + 0,00074612, |
| | . | + 1107,66 . II + | 204,82 . III = | — 0,115 |
| | | . | + 884,40 . III = | — 0,507 |
| log | = 8,25928—10 | 0,36277$_n$ | 0,20709$_n$ | 6,87281—10 |
| (1) | 2,10349$_n$ | 2,46626 | 2,31058 | 8,97630$_n$—10 |
| | | —(+ 292,59 | + 204,447 | — 0,094689) |
| (2) | | + 815,07 | + 0,373 | — 0,020311 |
| | 1,94781$_n$ | | 2,15490 | 8,82062$_n$—10 |
| | | —( | + 142,857 | — 0,066183) |
| | | | + 741,543 | — 0,440817 |
| log (2) | | 2,91119 | 9,57171—10 | 8,30773$_n$—10 |
| | | 6,66052—10 | 6,23223—10 | 4,96825$_n$—10 |
| | | | + 0,00017 | — 0,0000093 |
| (3) | | | + 741,54283 | — 0,4408077 |
| log (3) | | | 2,87014 | 9,64425$_n$—10 |
| | | | log III = | 6,77411$_n$—10, III = — 0,0005944 |
| | | | 6,34582—10 | + 0,0002217 |
| | | | | — 0,0200893 |
| | | | | 8,30296$_n$—10 |
| | | | log II = | 5,39183$_n$—10, II = — 0,0000247 |
| | | 5,75460—10 | 6,98120—10 | |
| | | —(+ 0,0000568 | + 0,0009577) | = — 0,0010145 |
| | | | | — 0,0002684 |
| | | | | 6,42878$_n$—10 |
| | | | log I = | 8,16950$_n$—10, I = — 0,014774. |

Durch einfache Multiplication der Werthe für II und III mit $\Delta y$ und $\Delta x$ erhalten wir nun sofort die Verbesserungen $v_s$ der Seitenlängen. Es ist nämlich

$$v_s = \Delta y \,.\, \mathrm{II} + \Delta x \,.\, \mathrm{III}.$$

Dagegen erhalten wir die constanten Factoren für die Winkelverbesserungen erst, nachdem wir I, II, III mit $\mu p$ dividiren.

Wir haben zu diesem Ende:

$Cp . \log \mu p = 7{,}14534$

log I = 8,16950$_n$—10, 5,31484$_n$—10, — 0,000020646 = $m_{\mathrm{I}}$

log II = 5,39183$_n$—10, 2,53717$_n$—10, — 0,0000000344 = $m_{\mathrm{II}}$

log III = 6,77411$_n$—10, 3,91945$_n$—10, — 0,000000831 = $m_{\mathrm{III}}$

und damit: $\varphi = m_{\mathrm{I}} - x \,.\, m_{\mathrm{II}} + y \,.\, m_{\mathrm{III}}$;

endlich $\varphi' = \dfrac{\varphi}{\sin 1'} = 6366 \,.\, \varphi$.

Wir haben demnach:

| | $\varDelta y . \mathrm{II}$ | $\varDelta x . \mathrm{III}$ | | $v_s$ | $: s = \varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0) | − 0,00101 | − 0,07187 | = | − 0,0729 | − 0,000569 |
| 1) | + 0,00192 | − 0,01117 | = | − 0,0092 | − 0,000115 |
| 2) | − 0,00217 | − 0,03035 | = | − 0,0325 | − 0,000316 |
| 3) | + 0,00086 | − 0,01467 | = | − 0,0138 | − 0,000323 |
| 4) | + 0,00213 | − 0,02049 | = | − 0,0184 | − 0,000195 |
| 5) | + 0,00239 | − 0,01081 | = | − 0,0084 | − 0,000085 |
| 6) | − 0,00001 | + 0,02049 | = | + 0,0205 | + 0,000594 |
| 7) | + 0,00160 | + 0,01146 | = | + 0,0130 | + 0,000193 |
| 8) | − 0,00033 | + 0,05964 | = | + 0,0593 | + 0,000588 |
| 9) | − 0,00160 | + 0,05543 | = | + 0,0538 | + 0,000474 |
| 10) | − 0,00042 | + 0,07221 | = | + 0,0718 | + 0,000584 |
| 11) | − 0,00132 | − 0,04704 | = | − 0,0483 | − 0,000506 |
| 12) | − 0,00204 | − 0,01283 | = | − 0,0149 | − 0,000170 |
| | 0 | 0 | | 0 | |

ferner:

| | $m_{\mathrm{I}}$ | $- m_{\mathrm{II}} \cdot x$ | $+ m_{\mathrm{III}} \cdot y =$ | $\varphi$ | $; \varphi'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0) | − 0,0000206 | . . . . . . . . | . . . . . . . . | = − 0,0000206 | = − 0,′13,″1 |
| 1) | − 206 | + 0,0000042 | − 0,0000338 | = − 0,0000502 | = − 0, 32, 0 |
| 2) | − 206 | + 48 | + 306 | = + 0,0000148 | = + 0, 09, 4 |
| 3) | − 206 | + 66 | − 422 | = − 0,0000562 | = − 0, 35, 8 |
| 4) | − 206 | + 74 | − 133 | = − 0,0000265 | = − 0, 16, 7 |
| 5) | − 206 | + 86 | + 582 | = + 0,0000465 | = + 0, 29, 4 |
| 6) | − 206 | + 92 | + 1386 | = + 0,0001272 | = + 0, 80, 9 |
| 7) | − 207 | + 80 | + 1386 | = + 0,0001259 | = + 0, 80, 3 |
| 8) | 207 | + 74 | + 1917 | = + 0,0001784 | = + 1, 13, 4 |
| 9) | − 207 | + 39 | + 1809 | = + 0,0001641 | = + 1, 04, 5 |
| 10) | − 207 | + 07 | + 1270 | = + 0,0001070 | = + 0, 68, 1 |
| 11) | − 207 | − 34 | + 1120 | = + 0,0000879 | = + 0, 56, 0 |
| 12) | − 207 | − 07 | + 685 | = + 0,0000471 | = + 0, 30, 0 |
| Summe | − 0,0002684 | + 0,0000567 | + 0,0009568 | = + 0,0007451 | = + 4,′74,″4. |
| Sollte sein | . . . . . . . . | . . . . . . . . | . . . . . . . . | + 0,0007461 | = + 4,′75.″ |

Die vorstehende Summirung dient also zu einer bequemen Rechnungscontrole, wie auch die obige Berechnung von $v_s$ dadurch gesichert wurde, dass, abgesehen von den hier einflusslosen Fehlern $k_y$ und $k_x$, ist:

$$[\varDelta y] = 0 \text{ und mithin auch } [\varDelta y . \mathrm{II}\,] = 0$$
$$[\varDelta x] = 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad [\varDelta x . \mathrm{III}] = 0$$
$$[\varDelta y . \mathrm{II}] + [\varDelta x . \mathrm{III}] = [v_s] = 0.$$

Die Verbesserungen der Neigungswinkel finden wir durch successive Addition der Winkelverbesserungen. Wir führen diese Rechnung vorbedachtlich des künftigen Gebrauchs im Halbmessermaasse. Es ist:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\varphi_1 = -$ | 0,0000502 | $\alpha_1 = -$ | 0,0000502 |
| $\varphi_2 = +$ | 0148 | $\alpha_2 = -$ | 0354 |
| $\varphi_3 = -$ | 0562 | $\alpha_3 = -$ | 0916 |
| $\varphi_4 = -$ | 0265 | $\alpha_4 = -$ | 1181 |
| $\varphi_5 = +$ | 0462 | $\alpha_5 = -$ | 0719 |
| $\varphi_6 = +$ | 1272 | $\alpha_6 = +$ | 0553 |
| $\varphi_7 = +$ | 1259 | $\alpha_7 = +$ | 1812 |
| $\varphi_8 = +$ | 1784 | $\alpha_8 = +$ | 3596 |

| | |
|---|---|
| $\varphi_9 = + 0{,}0001641$ | $\alpha_9 = + 0{,}0005237$ |
| $\varphi_{10} = +$ 1070 | $\alpha_{10} = +$ 6307 |
| $\varphi_{11} = +$ 0879 | $\alpha_{11} = +$ 7186 |
| $\varphi_{12} = +$ 0471 | $\alpha_{12} = +$ 7657 |
| $\varphi_0 = -$ 0206 | $\alpha_0 = +$ 7451 |

Mit Hülfe dieser Werthe erhalten wir endlich die Verbesserungen $v_{\Delta y}$ und $v_{\Delta x}$ der Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede:

| | $\varepsilon \Delta y$ + | $\alpha \Delta x$ = | $v_{\Delta y}$ | $\varepsilon \Delta x$ + | $\alpha \Delta y$ = | $v_{\Delta x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0) | − 0,0232 | | = − 0,0232 | − 0,0691 | | = − 0,0691 |
| 1) | + 0,0089 | − 0,0009 | = + 0,0080 | − 0,0022 | − 0,0039 | = − 0,0061 |
| 2) | − 0,0278 | − 0,0018 | = − 0,0296 | − 0,0162 | + 0,0031 | = − 0,0131 |
| 3) | + 0,0112 | − 0,0023 | = + 0,0089 | − 0,0080 | − 0,0032 | = − 0,0112 |
| 4) | + 0,0171 | − 0,0041 | = + 0,0130 | − 0,0068 | − 0,0102 | = − 0,0170 |
| 5) | + 0,0082 | − 0,0013 | = + 0,0069 | − 0,0016 | − 0,0070 | = − 0,0086 |
| 6) | + 0,0002 | − 0,0019 | = − 0,0017 | − 0,0205 | − 0,0000 | = − 0,0205 |
| 7) | − 0,0124 | − 0,0035 | = − 0,0159 | − 0,0037 | + 0,0117 | = + 0,0080 |
| 8) | + 0,0079 | − 0,0360 | = − 0,0281 | − 0,0588 | − 0,0049 | = − 0,0637 |
| 9) | + 0,0306 | − 0,0487 | = − 0,0181 | − 0,0440 | − 0,0340 | = − 0,0780 |
| 10) | + 0,0100 | − 0,0766 | = − 0,0666 | − 0,0711 | − 0,0108 | = − 0,0819 |
| 11) | − 0,0269 | + 0,0569 | = + 0,0300 | − 0,0401 | − 0,0383 | = − 0,0784 |
| 12) | − 0,0144 | + 0,0165 | = + 0,0021 | − 0,0038 | − 0,0633 | = − 0,0671 |
| | + 0,0941 | + 0,0734 | + 0,0689 | | + 0,0148 | + 0,0080 |
| | − 0,1047 | − 0,1771 | − 0,1832 | − 0,3459 | − 0,1756 | − 0,5147 |
| | − 0,0106 | − 0,1037 | = − 0,1143 | − 0,3459 | − 0,1608 | = − 0,5067 |
| Sollte sein . . . . . . . . | | | = − 0,1150 | | | = − 0,5076 |

Runden wir nun die Verbesserungen $v_{\Delta y}$ und $v_{\Delta x}$ auf drei Decimalstellen der Ruthen ab, so ist die Schlussrechnung:

| | $\Delta y$ + | $v_{\Delta y}$ = | $\Delta y'$ | $\Delta x$ + | $v_{\Delta x}$ = | $\Delta x'$ | $Y$ | $X$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0) | + 40,835 | − 0,023 | = + 40,812 | + 121,205 | − 0,069 | = + 121,136 | − 1092,600 | + 646,230 |
| 1) | − 77,757 | + 0,008 | = − 77,749 | + 18,810 | − 0,006 | = + 18,804 | − 1051,788 | + 767,366 |
| 2) | + 87,803 | − 0,030 | = + 87,773 | + 51,118 | − 0,013 | = + 51,105 | − 1129,537 | + 786,170 |
| 3) | − 34,835 | + 0,009 | = − 34,826 | + 24,695 | − 0,011 | = + 24,684 | − 1041,764 | + 837,275 |
| 4) | − 86,145 | + 0,013 | = − 86,132 | + 34,509 | − 0,017 | = + 34,492 | − 1076,590 | + 861,959 |
| 5) | − 96,812 | + 0,007 | = − 96,805 | + 18,155 | − 0,009 | = + 18,146 | − 1162,722 | + 896,451 |
| 6) | + 0,339 | − 0,002 | = + 0,337 | − 34,499 | − 0,021 | = − 34,520 | − 1259,527 | + 914,597 |
| 7) | − 64,672 | − 0,016 | = − 64,688 | − 19,330 | + 0,008 | = − 19,322 | − 1259,190 | + 880,077 |
| 8) | + 13,556 | − 0,028 | = + 13,528 | − 100,387 | − 0,064 | = − 100,451 | − 1323,878 | + 860,755 |
| 9) | + 64,826 | − 0,018 | = + 64,808 | − 93,042 | − 0,078 | = − 93,120 | − 1310,350 | + 760,304 |
| 10) | + 17,145 | − 0,067 | = + 17,078 | − 121,491 | − 0,082 | = − 121,573 | − 1245,542 | + 667,184 |
| 11) | + 53,201 | + 0,030 | = + 53,231 | + 79,188 | − 0,078 | = + 79,110 | − 1228,464 | + 545,611 |
| 12) | + 82,631 | + 0,002 | = + 82,633 | + 21,576 | − 0,067 | = + 21,509 | − 1175,233 | + 624,721 |
| 0) | | | | | | | − 1092,600 | + 646,230 |
| | + 0,115 | − 0,115 | = 0 | + 0,507 | − 0,507 | = 0 | 0 | 0 |

Wie angenehm es immerhin ist, die unvermeidlichen Beobachtungsfehler nach den strengen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgeglichen zu sehen, so lässt sich doch nicht verkennen, dass dieses Gefühl der vollen Befriedigung im vorliegenden Falle durch ein Rechnungswerk von ziemlich bedeutendem Umfange erlangt wird. Nun dürfen wir aber bei Beurtheilung eines Verfahrens den Zweck der Arbeit nicht aus dem Auge verlieren. Es würde sich nicht rechtfertigen lassen, bei jedem Vermessungswerk schlechthin verlangen zu wollen, dass es so genau sein müsse, als es bei Aufwendung aller menschlichen Wissenschaft und Kunst hergestellt werden könne; es würde z. B. lächerlich sein, bei der geometrischen Aufnahme eines Grundstücks zu irgend einem ökonomischen Zwecke alle die kostspieligen und zeitraubenden Vorkehrungen treffen zu wollen, welche bei Gradmessungen nöthig sind, um mit ihren Resultaten einen Schluss auf die Gestalt der Erde begründen zu können.

Bevor wir also zu einem Vermessungswerke selbst schreiten, haben wir die Aufgabe zu lösen, die Mittel mit dem Zwecke in's Gleichgewicht zu setzen. Wir können uns hier auf theoretische Betrachtungen über diese schwierige Aufgabe nicht einlassen und müssen uns darauf beschränken, für das Rechnungsgeschäft des Polygonometers ein Verfahren zu zeigen, wodurch im Vergleiche zur strengsten Regel die Arbeit bedeutend verringert, an Schärfe der Resultate aber nur wenig eingebüsst wird, ihm dann überlassend, zwischen beiden Verfahrungsarten zu wählen.

Die Aufnahme eines Polygons erfordert, wie wir oben bemerkt, die beiden wesentlich verschiedenen Acte der Winkelmessung und der Seitenmessung. Die Winkelmessung ist, wie sie gewöhnlich betrieben wird, bei allen Winkeln eines Polygons eine völlig gleichförmige Operation, und der Fehler eines gemessenen Winkels ist unabhängig von der Grösse des letzteren. Es sind also wenigstens Thatumstände vorhanden, welche gegen den Vorwurf der Leichtfertigkeit angeführt werden können, wenn wir das Ausgleichungsgeschäft ebenfalls in zwei Acte theilen, also eine besondre Winkelausgleichung voranschicken und bei dieser von der Voraussetzung ausgehen, dass zur Bildung des Fehlers in der Summe aller Winkel eines Polygons jeder einzelne Winkel in gleichem Maasse beigetragen habe, wie jeder andre.

Unter dieser Voraussetzung wäre also der Fehler $k'_w$ durch die Anzahl der Winkel zu theilen und der Quotient $\frac{1}{n} . k_w$ mit entgegengesetztem Zeichen jedem einzelnen Winkel beizufügen. Würden sodann die ausgeglichenen Winkel zur Ableitung der Neigungswinkel benutzt, so würde diese ohne Widerspruch endigen, es würde sich ergeben:

$$a_n = a_0 .$$

Berechneten wir dann mit den so gefundenen Neigungswinkeln und den gemessenen Seiten die Coordinaten-Unterschiede des Polygons und fänden bei der Summirung der Ordinaten-Unterschiede den Fehler $k_y$, bei jener der Abscissen-Unterschiede den Fehler $k_x$, so hätten wir es jetzt nur noch mit den zwei thatsächlichen Gleichungen zu thun:

$$s_0 \sin a_0 + s_1 \sin a_1 + s_2 \sin a_2 \ldots\ldots + s_{n-1} \sin a_{n-1} = k_y$$
$$s_0 \cos a_0 + s_1 \cos a_1 + s_2 \cos a_2 \ldots\ldots + s_{n-1} \cos a_{n-1} = k_x .$$

Bei der Differenzirung dieser Gleichungen können wir sowohl $s$ als $a$ veränderlich setzen; wir können aber auch, wenn die juristische Ausdrucksweise hier gestattet ist, noch summarischer verfahren, nämlich die aus einer vorbereitenden Winkelausgleichung hervorgegangenen Neigungswinkel unveränderlich nehmen. Betrachten wir zunächst die Folgerungen der ersteren Voraussetzung, so finden wir als Bedingungsgleichungen der Verbesserungen:

$$\text{I. } \varepsilon_0 . \varDelta y_0 + \varepsilon_1 . \varDelta y_1 + \varepsilon_2 . \varDelta y_2 + \ldots \varepsilon_{n-1} . \varDelta y_{n-1} + \alpha_1 . \varDelta x_1 + \alpha_2 . \varDelta x_2 + \alpha_3 . \varDelta x_3 \ldots + \alpha_{n-1} . \varDelta x_{n-1} = - k_y$$

$$\text{II. } \varepsilon_0 . \varDelta x_0 + \varepsilon_1 . \varDelta x_1 + \varepsilon_2 . \varDelta x_2 + \ldots \varepsilon_{n-1} . \varDelta x_{n-1} - \alpha_1 . \varDelta y_1 - \alpha_2 . \varDelta y_2 - \alpha_3 . \varDelta y_3 \ldots - \alpha_{n-1} . \varDelta y_{n-1} = - k_x .$$

Nehmen wir nun ferner an, dass durch die vorbereitende Ausgleichung, welche lediglich unter den Winkeln vorgegangen ist, das Gewichtsverhältniss zwischen Winkel- und Seitenmessung sich nicht geändert habe, so behält die Bedingung des Minimums der Quadratensumme die obige Form, nämlich

$$s_0 \varepsilon_0 \varepsilon_0 + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 + s_2 \varepsilon_2 \varepsilon_2 + \ldots s_{n-1} \varepsilon_{n-1} \varepsilon_{n-1} + \mu p (\alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_3 + \ldots \alpha_{n-1} \alpha_{n-1}) = \text{Minimum.}$$

Wir erhalten weiter:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varDelta y_0}{s_0} . \text{I} + \frac{\varDelta x_0}{s_0} . \text{II}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\varDelta y_1}{s_1} . \text{I} + \frac{\varDelta x_1}{s_1} . \text{II}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varDelta y_2}{s_2} . \text{I} + \frac{\varDelta x_2}{s_2} . \text{II}$$

$\vdots$ u. s. w.

$$\alpha_1 = \frac{\varDelta x_1}{\mu p} . \text{I} - \frac{\varDelta y_1}{\mu p} . \text{II}$$

$$\alpha_2 = \frac{\varDelta x_2}{\mu p} . \text{I} - \frac{\varDelta y_2}{\mu p} . \text{II}$$

$$\alpha_3 = \frac{\varDelta x_3}{\mu p} . \text{I} - \frac{\varDelta y_3}{\mu p} . \text{II}$$

u. s. w.,

endlich

$$\left(\left[\frac{\varDelta y . \varDelta y}{s}\right] + \frac{[\varDelta x . \varDelta x] - \varDelta x_0 \varDelta x_0}{\mu p}\right) \text{I} + \left(\left[\frac{\varDelta y . \varDelta x}{s}\right] - \frac{[\varDelta y . \varDelta x] - \varDelta y_0 \varDelta x_0}{\mu p}\right) \text{II} = - k_y$$

$$\left(\left[\frac{\varDelta y . \varDelta x}{s}\right] - \frac{[\varDelta y . \varDelta x] - \varDelta y_0 \varDelta x_0}{\mu p}\right) \text{I} + \left(\left[\frac{\varDelta x . \varDelta x}{s}\right] + \frac{[\varDelta y . \varDelta y] - \varDelta y_0 \varDelta y_0}{\mu p}\right) \text{II} = - k_x .$$

Der Anschein der Weitläuftigkeit dieser Formeln verliert sich, wenn wir diese wörtlich ausdrücken, nämlich:

1) Wir multipliciren die Glieder jeder der beiden Reihen der Abscissen- und Ordinaten-Unterschiede zuerst mit sich selbst, dann mit dem Brudergliede der andern Reihe, summiren die drei Productenreihen, mit Ausschluss der ersten Producte, und theilen die Summen mit dem Gewichtsfactor der Winkelmessung; wir erhalten dadurch:

$$\frac{[\varDelta x . \varDelta x] - \varDelta x_0 . \varDelta x_0}{\mu p}, \quad \frac{[\varDelta y . \varDelta x] - \varDelta y_0 . \varDelta y_0}{\mu p}, \quad \frac{[\varDelta y . \varDelta y] - \varDelta y_0 \varDelta y_0}{\mu p};$$

2) wir theilen jedes der drei gleichstufigen Producte (1) mit der betreffenden Seite und summiren die Quotienten, wodurch wir erlangen:

$$\left[\frac{\varDelta y . \varDelta y}{s}\right], \left[\frac{\varDelta y . \varDelta x}{s}\right], \left[\frac{\varDelta x . \varDelta x}{s}\right];$$

3) durch Summirung, beziehungsweise Subtrahirung der Resultate der beiden vorstehenden Operationen erhalten wir die Coëfficienten in den beiden

Schlussgleichungen, aus denen wir sodann durch Elimination die Correlaten I und II entwickeln können;

4) endlich multipliciren wir mit dem gemeinschaftlichen Factor I der Reihe nach alle Ordinaten-Unterschiede, mit dem Factor II alle Abscissen-Unterschiede, vereinigen die gleichstufigen Producte und finden dadurch die Seitenverbesserungen, sowie durch verwechselte Multiplication mit den gemeinschaftlichen Factoren $\frac{\mathrm{I}}{\mu p}$ und $\frac{\mathrm{II}}{\mu p}$ und Zusammensetzung der gleichstufigen Producte die Verbesserungen der Neigungswinkel in Halbmessermaass.

Die Berechnung der Verbesserung der Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede geschieht nun nach der oben, bei der Auseinandersetzung des strengsten Verfahrens gegebenen Regel.

Wollen wir uns endlich des oben angedeuteten summarischen Verfahrens bedienen, also die nach der vorbereitenden Winkelausgleichung hervorgegangenen Neigungswinkel als unverbesserliche Angaben betrachten, so haben wir bei der Differenzirung der beiden thatsächlichen Gleichungen die Grösse $a$ constant zu setzen. Wir finden dann einfach:

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & \varepsilon_0 \Delta y_0 + \varepsilon_1 \Delta y_1 + \varepsilon_2 \Delta y_2 + \ldots\ldots \varepsilon_{n-1} \Delta y_{n-1} = -k_y \\
\text{II.}\quad & \varepsilon_0 \Delta x_0 + \varepsilon_1 \Delta x_1 + \varepsilon_2 \Delta x_2 + \ldots\ldots \varepsilon_{n-1} \Delta x_{n-1} = -k_x \\
& s_0 \varepsilon_0 \varepsilon_0 + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 + s_2 \varepsilon_2 \varepsilon_2 + \ldots\ldots s_{n-1} \varepsilon_{n-1} \varepsilon_{n-1} = \text{Minimum},
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= \frac{\Delta y_0}{s_0}.\mathrm{I} + \frac{\Delta x_0}{s_0}.\mathrm{II} \\
\varepsilon_1 &= \frac{\Delta y_1}{s_1}.\mathrm{I} + \frac{\Delta x_1}{s_1}.\mathrm{II} \\
\varepsilon_2 &= \frac{\Delta y_2}{s_2}.\mathrm{I} + \frac{\Delta x_2}{s_2}.\mathrm{II} \\
&\vdots \\
\varepsilon_{n-1} &= \frac{\Delta y_{n-1}}{s_{n-1}}.\mathrm{I} + \frac{\Delta x_{n-1}}{s_{n-1}}.\mathrm{II}
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\Delta y.\Delta y}{s}\right].\mathrm{I} + \left[\frac{\Delta y.\Delta x}{s}\right].\mathrm{II} &= -k_y \\
\left[\frac{\Delta y.\Delta x}{s}\right].\mathrm{I} + \left[\frac{\Delta x.\Delta x}{s}\right].\mathrm{II} &= -k_x.
\end{aligned}$$

Um zu den constanten Factoren für die Berechnung der Verbesserungen zu gelangen, haben wir also hier nur die oben erwähnten drei Productenreihen zu bilden, die gleichstufigen Glieder mit der betreffenden Seitenlänge zu theilen, die Quotienten in drei Summen zusammen zu ziehen und dann, nachdem diese Summen als Coëfficienten der unbekannten Grössen I und II in die Gleichungen für dieselben eingeführt worden, diese Grössen durch Elimination zu entwickeln.

Wollen wir nach diesen Regeln das obige Zahlenbeispiel noch einmal durchrechnen, so haben wir zunächst den Fehler der Winkelsumme zu vertheilen und mit den so ausgeglichenen Brechungswinkeln die Neigungswinkel abzuleiten, sodann mit diesen die Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede zu berechnen. Der gedachte Winkelfehler war $= -4'.75''$, es sind also $+\frac{4'.75''}{13} = +36'',54$ jedem Winkel beizufügen oder bei Abrundung auf Secunden

$$\begin{array}{lr} \text{bei 6 Winkeln} & 36'' = 216 \\ \text{„ 7 „} & \underline{37'' = 259} \\ & \text{Summe } 475. \end{array}$$

Demnach erhalten wir:

| Nummer | Seitenlängen | Brechungswinkel | Neigungswinkel | Ordinatenunterschied | Abscissenunterschied |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $s$ | $w$ | $a$ | $\Delta y$ | $\Delta x$ |
| 0 | 127,9 | | 20 . 68 . 86 | +40,835 | +121,205 |
| 1 | 80,0 | 94 . 42 . 07<br>+36 | 315 . 11 . 29 | −77,757 | + 18,814 |
| 2 | 101,6 | 351 . 32 . 71<br>+37 | 66 . 44 . 37 | +87,809 | + 51,107 |
| 3 | 42,7 | 72 . 82 . 25<br>+36 | 339 . 26 . 98 | −34,831 | + 24,701 |
| 4 | 92,8 | 184 . 99 . 76<br>+37 | 324 . 27 . 11 | −86,137 | + 34,529 |
| 5 | 98,5 | 187 . 54 . 50<br>+36 | 311 . 81 . 97 | −96,808 | + 18,183 |
| 6 | 34,5 | 87 . 57 . 31<br>+37 | 199 . 39 . 65 | + 0,327 | − 34,498 |
| 7 | 67,5 | 282 . 13 . 50<br>+37 | 281 . 53 . 52 | −64,680 | − 19,305 |
| 8 | 101,3 | 109 . 94 . 40<br>+36 | 191 . 48 . 28 | +13,512 | −100,395 |
| 9 | 113,4 | 169 . 80 . 62<br>+37 | 161 . 29 . 27 | +64,777 | − 93,077 |
| 10 | 122,7 | 229 . 81 . 62<br>+36 | 191 . 11 . 25 | +17,074 | −121,504 |
| 11 | 95,4 | 46 . 58 . 50<br>+37 | 37 . 70 . 12 | +53,251 | + 79,155 |
| 12 | 85,4 | 246 . 07 . 90<br>+36 | 83 . 78 . 38 | +82,644 | + 21,519 |
| 0 | | 136 . 90 . 11<br>+37 | 20 . 68 . 86 | | |
| 13 | | 2200 . 00 . 00 | | +360,229<br>−360,213 | +369,213<br>−368,779 |
| | | | | $k_y = +0,016$ | $k_x = +0,434$ |

Es würde überflüssig sein, an dieser Stelle die oben schon benutzten Hülfsgrössen **D** und **E** nochmals zu berechnen, weil sie sich nach den vorstehenden Coordinaten-Unterschieden nur ganz unmerklich ändern würden, auch mehr als hinreichende Genauigkeit vorhanden ist, wenn die Producte $\Delta y . \Delta y$, $\Delta x . \Delta y$, $\Delta x . \Delta x$ in vollen Ruthen zuverlässig sind.

Wir hatten oben:

$$\begin{array}{rlrr}
[\Delta y \,.\, \Delta y] = & 51950; & [\Delta y \,.\, \Delta x] = +140; & [\Delta x \,.\, \Delta x] = +61587 \\
-\Delta y_0 . \Delta y_0 = & \underline{-1667}; & -\Delta y_0 . \Delta x_0 = \underline{-4949}; & \Delta x_0 . \Delta x_0 = \underline{-14690} \\
 & +50283 & -4809 & +46897 \\
\log = & 4,70142 & 3,68205_n & 4,67115 \\
Cp . \log \mu p = & \underline{7,14534} & \underline{7,14534} & \underline{7,14534} \\
 & 1,84676 & 0,82739_n & 1,81649 \\
 & +70,268 & -(-6,720) & +65,538 \\
 & \underline{+582,74} & \underline{-5,94} & \underline{+580,82} \\
 & +653,01 & +0,78 & +646,36.
\end{array}$$

Die Normalgleichungen sind demnach:

$$
\begin{array}{rrr}
 & 646{,}36\,.\,\mathrm{I} + 0{,}78\,.\,\mathrm{II} = & -\,0{,}016 \\
 & +0{,}78\,.\,\mathrm{I} + 653{,}01\,.\,\mathrm{II} = & -\,0{,}434 \\
\log = 2{,}81047 & 9{,}89209 & 8{,}20412_n \\
\underline{7{,}08162} & 6{,}97371 & 5{,}28574_n \\
 & \underline{0{,}0009} & \underline{-\,0{,}00002} \\
 & 653{,}0091 & -\,0{,}43398 \\
 & 2{,}81492 & 9{,}63747_n \\
 & & \log \mathrm{II} = 6{,}82255_n;\ \mathrm{II} = -\,0{,}00066458 \\
 & 6{,}71464; & \underline{+\,0{,}00052} \\
 & & -\,0{,}01547 \\
 & & 8{,}18949_n \\
 & & \log \mathrm{I} = 5{,}37902_n;\ \mathrm{I} = -\,0{,}00002393.
\end{array}
$$

Wir finden nun durch Multiplication:

| | $\Delta y.\mathrm{I}$ | $+\Delta x.\mathrm{II} =$ | $v_s$ | $\frac{v_s}{s} = \varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| 0) | — 0,0010 | — 0,0805 | = — 0,0815 | — 0,000627 |
| 1) | + 0,0019 | — 0,0125 | = — 0,0106 | — 0,000135 |
| 2) | — 0,0021 | — 0,0340 | = — 0,0361 | — 0,000354 |
| 3) | + 0,0008 | — 0,0164 | = — 0,0156 | — 0,000365 |
| 4) | + 0,0021 | — 0,0229 | = — 0,0208 | — 0,000224 |
| 5) | + 0,0023 | — 0,0121 | = — 0,0098 | — 0,000100 |
| 6) | — 0 | + 0,0229 | = + 0,0229 | + 0,000664 |
| 7) | + 0,0015 | + 0,0128 | = + 0,0143 | + 0,000212 |
| 8) | — 0,0003 | + 0,0667 | = + 0,0664 | + 0,000655 |
| 9) | — 0,0015 | + 0,0618 | = + 0,0603 | + 0,000534 |
| 10) | — 0,0004 | + 0,0808 | = + 0,0804 | + 0,000654 |
| 11) | — 0,0013 | — 0,0527 | = — 0,0540 | — 0,000566 |
| 12) | — 0,0020 | — 0,0143 | = — 0,0163 | — 0,000197 |

Die Abweichungen dieser Verbesserungen der Seitenlängen von den nach dem strengsten Verfahren gefundenen bewegen sich innerhalb eines Zolles; die grösste derselben beträgt 0,0086 Ruthen. Um die constanten Factoren für die Verbesserungen der Neigungswinkel zu erhalten, setzen wir:

$$
\begin{array}{rl}
\log\ \mathrm{I} = 5{,}37908_n{-10}; & \log \mathrm{II} = 6{,}82255_n{-10} \\
Cp.\log \mu p = \underline{7{,}14534{-10}} \ldots\ldots & = \underline{7{,}14534{-10}} \\
\log (1) = 2{,}52442_n{-10}; & \log (2) = 3{,}97789_n{-10} \\
(1) = -\,0{,}0000000335; & (2) = -\,0{,}00000095.
\end{array}
$$

Mit Hülfe dieser Factoren erhalten wir:

| | $\Delta x.(1)$ | $-\Delta y.(2)$ | $= \alpha$ | ; $\alpha'$ in Gradmaass |
|---|---|---|---|---|
| 1) | = — 0,0000006 | — 0,0000739 | = — 0,0000745 | ; — 0′. 30,″2 |
| 2) | = — 017 | + 834 | = + 817 | ; + 0 . 52, 0 |
| 3) | = — 008 | — 330 | = — 338 | ; — 0 . 21, 5 |
| 4) | = — 012 | — 818 | = — 830 | ; — 0 . 52, 9 |
| 5) | = — 006 | — 919 | = — 925 | ; — 0 . 59, 9 |
| 6) | = + 012 | + 0 | = + 012 | ; + 0 . 07, 6 |
| 7) | = + 006 | — 615 | = — 609 | ; — 0 . 38. 8 |
| 8) | = + 034 | + 128 | = + 162 | ; + 0 . 10, 3 |
| 9) | = + 031 | + 615 | = + 646 | ; + 0 . 41, 1 |
| 10) | = + 041 | + 162 | = + 203 | ; + 0 . 12, 9 |
| 11) | = — 026 | + 505 | = + 478 | ; + 0 . 30, 4 |
| 12) | = — 007 | + 785 | = + 778 | ; + 0 . 49, 6 |

endlich durch Multiplication der $\alpha$ und $\varepsilon$ mit $\Delta y$ und $\Delta x$ die Verbesserungen der Coordinaten-Unterschiede:

| | $\Delta y . \varepsilon + \Delta x . \alpha =$ | $vy$ | $\Delta x . \varepsilon - \Delta y . \alpha =$ | $vx$ |
|---|---|---|---|---|
| 0) | $-0{,}0256$ ——— | $= -0{,}026$ | $-0{,}0759$ ——— | $= -0{,}076$ |
| 1) | $+0{,}0105 - 0{,}0014$ | $= +0{,}009$ | $-0{,}0025 - 0{,}0058$ | $= -0{,}008$ |
| 2) | $-0{,}0311 + 0{,}0042$ | $= -0{,}027$ | $-0{,}0181 - 0{,}0072$ | $= -0{,}025$ |
| 3) | $+0{,}0127 - 0{,}0008$ | $= +0{,}012$ | $-0{,}0090 - 0{,}0012$ | $= -0{,}010$ |
| 4) | $+0{,}0193 - 0{,}0029$ | $= +0{,}016$ | $-0{,}0077 - 0{,}0071$ | $= -0{,}015$ |
| 5) | $+0{,}0101 - 0{,}0017$ | $= +0{,}008$ | $-0{,}0027 - 0{,}0090$ | $= -0{,}012$ |
| 6) | $+0{,}0002 - 0{,}0000$ | $= +0{,}000$ | $-0{,}0229 - 0{,}0000$ | $= -0{,}023$ |
| 7) | $-0{,}0137 + 0{,}0012$ | $= -0{,}013$ | $-0{,}0041 - 0{,}0039$ | $= -0{,}008$ |
| 8) | $+0{,}0088 - 0{,}0016$ | $= +0{,}007$ | $-0{,}0656 - 0{,}0002$ | $= -0{,}066$ |
| 9) | $+0{,}0346 - 0{,}0060$ | $= +0{,}029$ | $-0{,}0497 - 0{,}0042$ | $= -0{,}054$ |
| 10) | $+0{,}0112 - 0{,}0025$ | $= +0{,}008$ | $-0{,}0792 - 0{,}0003$ | $= -0{,}079$ |
| 11) | $-0{,}0305 + 0{,}0038$ | $= -0{,}026$ | $-0{,}0453 - 0{,}0026$ | $= -0{,}048$ |
| 12) | $-0{,}0163 + 0{,}0017$ | $= -0{,}013$ | $-0{,}0037 - 0{,}0064$ | $= -0{,}010$ |
| | $-0{,}0102 - 0{,}0060$ | $= -0{,}016$ | $-0{,}3864 - 0{,}0479$ | $= -0{,}434$ |

Werden diese Verbesserungen nun den Coordinaten-Unterschieden beigefügt, so erhalten wir die Schlussrechnung:

| Nummer | $\Delta y$ | $v_{\Delta y}$ | $\Delta y'$ | $\Delta x$ | $v_{\Delta x}$ | $\Delta x'$ | $Y$ | $X$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | + 40,835 | − 0,026 | + 40,809 | + 121,205 | − 0,076 | + 121,129 | − 1092,600 | + 646,230 |
| 1 | − 77,757 | + 0,009 | − 77,748 | + 18,814 | − 0,008 | + 18,806 | − 1051,791 | + 767,359 |
| 2 | + 87,809 | − 0,027 | + 87,782 | + 51,107 | − 0,025 | + 51,082 | − 1129,539 | + 786,165 |
| 3 | − 34,831 | + 0,012 | − 34,819 | + 24,701 | − 0,010 | + 24,691 | − 1041,757 | + 837,247 |
| 4 | − 86,137 | + 0,016 | − 86,121 | + 34,529 | − 0,015 | + 34,514 | − 1076,576 | + 861,938 |
| 5 | − 96,808 | + 0,008 | − 96,800 | + 18,183 | − 0,012 | + 18,171 | − 1162,697 | + 896,452 |
| 6 | + 0,327 | + 0,000 | + 0,327 | − 34,498 | − 0,023 | − 34,521 | − 1259,497 | + 914,623 |
| 7 | − 64,680 | − 0,013 | − 64,693 | − 19,305 | − 0,008 | − 19,313 | − 1259,170 | + 880,102 |
| 8 | + 13,512 | + 0,007 | + 13,519 | − 100,395 | − 0,066 | − 100,461 | − 1323,863 | + 860,789 |
| 9 | + 64,777 | + 0,029 | + 64,806 | − 93,077 | − 0,054 | − 93,131 | − 1310,344 | + 760,328 |
| 10 | + 17,074 | + 0,008 | + 17,082 | − 121,504 | − 0,079 | − 121,583 | − 1245,538 | + 667,197 |
| 11 | + 53,251 | − 0,026 | + 53,225 | + 79,155 | − 0,048 | + 79,107 | − 1228,456 | + 545,614 |
| 12 | + 82,644 | − 0,013 | + 82,631 | + 21,519 | − 0,010 | + 21,509 | − 1175,231 | + 624,721 |
| | + 0,016 | − 0,016 | 0 | + 0,434 | − 0,434 | 0 | − 1092,600 | + 646,230 |
| | | | | | | | 0 | 0 |

Um endlich auch nachzuweisen, welche Veränderungen die ursprünglichen Brechungswinkel durch die beiden Ausgleichungsacte zusammen genommen erlitten haben, setzen wir:

$$
\begin{array}{lrrl}
 & & \frac{1}{n} . k_w & \\
\alpha_1 - \alpha_0 & = -30,''2 & +36 & = +\;6'' \\
\alpha_2 - \alpha_1 & = +82,\;2 & +37 & = +119 \\
\alpha_3 - \alpha_2 & = -73,\;5 & +36 & = -\;38 \\
\alpha_4 - \alpha_3 & = -31,\;4 & +37 & = +\;6 \\
\alpha_5 - \alpha_4 & = -\;7,\;0 & +36 & = +\;29 \\
\alpha_6 - \alpha_5 & = +67,\;5 & +37 & = +104 \\
\alpha_7 - \alpha_6 & = -46,\;4 & +37 & = -\;9 \\
\alpha_8 - \alpha_7 & = +49,\;1 & +36 & = +\;85 \\
\alpha_9 - \alpha_8 & = +30,\;8 & +37 & = +\;68 \\
\alpha_{10} - \alpha_9 & = -28,\;2 & +36 & = +\;8 \\
\alpha_{11} - \alpha_{10} & = +17,\;5 & +37 & = +\;55 \\
\alpha_{12} - \alpha_{11} & = +19,\;2 & +36 & = +\;55 \\
\alpha_0 - \alpha_{12} & = -49,\;6 & +37 & = -\;13 \\
\hline
 & 0'' & +4'75'' & = \;4'75''.
\end{array}
$$

Wollen wir endlich die wiederholte Ausgleichung der Neigungswinkel vernachlässigen, also nach der erfolgten gleichmässigen Vertheilung des Winkelfehlers die Coordinatenfehler einfach auf das System der Polygonseiten werfen, so finden wir die Coëfficienten der Normalgleichungen:

$$\left[\frac{\Delta y\,.\,\Delta y}{s}\right].\,\mathrm{I}+\left[\frac{\Delta y\,.\,\Delta x}{s}\right].\,\mathrm{II}=-k_y$$

$$\left[\frac{\Delta y\,.\,\Delta x}{s}\right].\,\mathrm{I}+\left[\frac{\Delta x\,.\,\Delta x}{s}\right].\,\mathrm{II}=-k_x$$

einfach in den Hülfsgrössen **E**, nämlich:

$$+580{,}82\,.\,\mathrm{I}-\phantom{0}5{,}94\,.\,\mathrm{II}=-0{,}016$$

$$-\phantom{0}5{,}94\,.\,\mathrm{I}+582{,}74\,.\,\mathrm{II}=-0{,}434.$$

Die Elimination derselben ist:

| | | |
|---|---|---|
| 2,76404 | 0,77379$_n$ | 8,20412$_n$$^{-10}$ |
| 8,00975$_n$ | 8,78354 | 6,21387 |
| | + 0,06 | + 0,000164 |
| | 582,68 | — 0,434164 |
| | 2,76543 | 9,63765$_n$ |
| | | log II = 6,87222$_n$; II = — 0,000745 |
| | 7,64601 | — 0,004426 |
| | | — 0,020426 |
| | | 8,30918$_n$ |
| | | log I = 5,54514$_n$; I = — 0,000035. |

Demnach sind die Verbesserungen der Seitenlängen:

| | $\Delta y\,.\,\mathrm{I}$ | $\Delta x\,.\,\mathrm{II}$ = | $v_s$ | $\frac{v_s}{s}=\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| 0) | — 0,0014 | — 0,0901 | = — 0,0915 | — 0,000757 |
| 1) | + 0,0027 | — 0,0140 | = — 0,0113 | — 0,000141 |
| 2) | — 0,0031 | — 0,0381 | = — 0,0412 | — 0,000404 |
| 3) | + 0,0012 | — 0,0184 | = — 0,0172 | — 0,000403 |
| 4) | + 0,0030 | — 0,0257 | = — 0,0227 | — 0,000245 |
| 5) | + 0,0034 | — 0,0136 | = — 0,0102 | — 0,000104 |
| 6) | — 0,0000 | + 0,0257 | = + 0,0257 | + 0,000745 |
| 7) | + 0,0023 | + 0,0144 | = + 0,0167 | + 0,000248 |
| 8) | — 0,0005 | + 0,0748 | = + 0,0743 | + 0,000727 |
| 9) | — 0,0023 | + 0,0693 | = + 0,0670 | + 0,000593 |
| 10) | — 0,0006 | + 0,0905 | = + 0,0899 | + 0,000731 |
| 11) | — 0,0019 | — 0,0590 | = — 0,0609 | — 0,000638 |
| 12) | — 0,0029 | — 0,0160 | = — 0,0189 | — 0,000222; |

endlich die Verbesserungen der Coordinaten-Unterschiede:

| | $\Delta y\,.\,\varepsilon=v_y$ | $\Delta x\,.\,\varepsilon=v_x$ |
|---|---|---|
| 0) | — 0,031 | — 0,091 |
| 1) | + 0,011 | — 0,002 |
| 2) | — 0,035 | — 0,020 |
| 3) | + 0,014 | — 0,010 |
| 4) | + 0,021 | — 0,008 |
| 5) | + 0,010 | — 0,002 |
| 6) | + 0,000 | — 0,025 |
| 7) | — 0,016 | — 0,005 |
| 8) | + 0,010 | — 0,073 |
| 9) | + 0,039 | — 0,055 |
| 10) | + 0,013 | — 0,088 |
| 11) | — 0,034 | — 0,050 |
| 12) | — 0,018 | — 0,005 |
| | — 0,016 | — 0,434. |

Es würde jetzt von Interesse sein, die drei Verbesserungssysteme, von denen jedes, wie wir gesehen haben, die Widersprüche der thatsächlichen Angaben aufhebt, hinsichtlich ihrer relativen Wahrscheinlichkeit zu kritisiren. Jenem Interesse wird aber noch vollständiger entsprochen werden, wenn wir auch die bei den Geometern zur Zeit noch übliche Fehlervertheilung in den Kreis dieser Untersuchung hineinziehen. Da dieses Verfahren aber darin besteht, den Ordinatenfehler nur auf die Ordinaten, den Abscissenfehler nur auf die Abscissen zu vertheilen, so ist vorher eine besondere Rechnungsoperation nothwendig, um den Einfluss der Verbesserungen der Ordinaten und Abscissen auf die Seiten und Winkel zu ermitteln.

Bei dem Vertheilungsverfahren, welches auf die Länge der Coordinaten-Unterschiede Rücksicht nimmt, finden wir die constanten Factoren zur Bildung der Verbesserungen, indem wir den Ordinatenfehler durch das Aggregat der Ordinaten-Unterschiede, den Abscissenfehler durch das Aggregat der Abscissen-Unterschiede theilen, oder wenn wir diese Factoren mit I und II bezeichnen wollen:

$$\mathrm{I} = -\frac{0{,}016}{720}; \qquad \mathrm{II} = -\frac{0{,}434}{738}$$
$$= -0{,}0000223 \qquad = -0{,}000588.$$

Mit Hülfe dieser Factoren würden dann die Verbesserungen:

| | $\Delta y . \mathrm{I} = v_{\Delta y}$; | $\Delta x . \mathrm{II} = v_{\Delta x}$ |
|---|---|---|
| 0) | $-0{,}001$ | $-0{,}071$, |
| 1) | $-0{,}002$ | $-0{,}011$ |
| 2) | $-0{,}002$ | $-0{,}030$ |
| 3) | $-0{,}001$ | $-0{,}014$ |
| 4) | $-0{,}002$ | $-0{,}020$ |
| 5) | $-0{,}002$ | $-0{,}011$ |
| 6) | $-0{,}000$ | $-0{,}020$ |
| 7) | $-0{,}001$ | $-0{,}011$ |
| 8) | $-0{,}000$ | $-0{,}059$ |
| 9) | $-0{,}002$ | $-0{,}055$ |
| 10) | $-0{,}000$ | $-0{,}072$ |
| 11) | $-0{,}001$ | $-0{,}047$ |
| 12) | $-0{,}002$ | $-0{,}013$ |
| | $-0{,}016$ | $-0{,}434$ |

wobei die Multiplication ohne Rücksicht auf die Zeichen von $\Delta y$ und $\Delta x$ geschehen muss.

Um nun aus diesen Verbesserungen der Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede die daraus folgenden Veränderungen der Seiten und Neigungswinkel abzuleiten, haben wir zu beachten, dass:

$$s^2 = \Delta y^2 + \Delta x^2$$
$$s . v_s = \Delta y . v_{\Delta y} + \Delta x \, v_{\Delta y}$$
$$v_s = \frac{\Delta y}{s} . v_{\Delta y} + \frac{\Delta x}{s} . v_{\Delta x}$$
$$v_s = v_{\Delta y} \sin a + v_{\Delta x} . \cos a$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\frac{da}{\cos a^2} = \frac{\Delta x d \, \Delta y - \Delta y d \, \Delta x}{\Delta x^2}$$
$$\alpha = \frac{\Delta x}{s^2} . v_{\Delta y} - \frac{\Delta y}{s^2} . v_{\Delta x}$$
$$\alpha = \frac{\cos a}{s} . v_{\Delta y} - \frac{\sin a}{s} . v_{\Delta x} .$$

Die Anwendung dieser Formeln ergiebt:

| | $\sin a$ | $\cos a$ | $v_{\Delta y} \cdot \sin a$ | $v_{\Delta x} \cos a$ | $v_s$ | $\frac{\cos a}{s}$ | $-\frac{\sin a}{s}$ | $\frac{\cos a}{s} v_{\Delta y}$ | $-\frac{\sin a}{s} v_{\Delta x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | +0,319 | +0,948 | — 0,000 | — 0,067 | — 0,067 | +0,00741 | — 0,00249 | — 0,0000074 | +0,0001768 |
| 1 | — 0,972 | +0,235 | +0,002 | — 0,003 | — 0,001 | +0,00294 | +0,01215 | — 058 | — 1331 |
| 2 | +0,864 | +0,503 | — 0,002 | — 0,015 | — 0,017 | +0,00494 | — 0,00847 | — 098 | + 2541 |
| 3 | — 0,815 | +0,578 | +0,001 | — 0,008 | — 0,007 | +0,01375 | +0,01885 | — 137 | — 2632 |
| 4 | — 0,928 | +0,372 | +0,002 | — 0,007 | — 0,005 | +0,00401 | +0,01000 | — 080 | — 2000 |
| 5 | — 0,982 | +0,185 | +0,002 | — 0,002 | — 0,000 | +0,00188 | +0,00997 | — 038 | — 1096 |
| 6 | +0,009 | — 0,999 | — 0,000 | +0,020 | +0,020 | — 0,02900 | — 0,00026 | + 000 | + 0042 |
| 7 | — 0,958 | — 0,286 | +0,001 | +0,003 | +0,004 | — 0,00424 | +0,01420 | + 042 | — 1562 |
| 8 | +0,133 | — 0,991 | — 0,000 | +0,059 | +0,059 | — 0,00982 | — 0,00132 | + 000 | + 0779 |
| 9 | +0,571 | — 0,821 | — 0,001 | +0,045 | +0,044 | — 0,00727 | — 0,00506 | + 145 | + 2783 |
| 10 | +0,139 | — 0,990 | — 0,009 | +0,071 | +0,071 | — 0,00805 | — 0,00113 | + 000 | + 0814 |
| 11 | +0,558 | +0,830 | — 0,001 | — 0,039 | — 0,040 | +0,00869 | — 0,00585 | — 087 | + 2750 |
| 12 | +0,968 | +0,252 | — 0,002 | — 0,003 | — 0,005 | +0,00295 | — 0,01136 | — 059 | + 1482 |

| | $\alpha$ | $\alpha'$ | $\alpha'_{m+1} - \alpha'_m$ | $+ \frac{k_w}{n} =$ | $v_w$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | +0,0001694 | +1'. 08" | + 0'. 18" | + 37" | +0'. 55" |
| 1 | — 0,0001389 | — 88 | — 1. 96 | + 36 | — 1. 60 |
| 2 | +0,0002443 | +1. 55 | + 2. 43 | + 37 | +2. 80 |
| 3 | — 0,0002769 | — 1. 76 | — 3. 31 | + 36 | — 2. 95 |
| 4 | — 0,0002080 | — 1. 32 | + 0. 44 | + 37 | +0. 81 |
| 5 | — 0,0001134 | — 72 | + 0. 60 | + 36 | +0. 96 |
| 6 | +0,0000042 | + 3 | + 0. 75 | + 37 | +1. 12 |
| 7 | — 0,0001520 | — 97 | — 1. 00 | + 37 | — 0. 63 |
| 8 | +0,0000779 | + 50 | + 1. 47 | + 36 | +1. 83 |
| 9 | +0,0002928 | +1. 87 | + 1. 37 | + 37 | +1. 74 |
| 10 | +0,0000814 | + 52 | — 1. 35 | + 36. | — 0. 99 |
| 11 | +0,0002663 | +1. 70 | + 1. 18 | + 37 | +1. 55 |
| 12 | +0,0001423 | + 90 | — 0. 80 | + 36 | — 0. 44 |
| | | | 0 | +4'. 75" = | +4'. 75" |

Werden endlich die Ordinaten- und Abscissenfehler einfach nach der Anzahl der Punkte vertheilt, so erhält jeder der 13 Ordinaten-Unterschiede die Verbesserung $-\frac{0{,}016}{13} = -0{,}00123$, jeder Abscissen-Unterschied $-\frac{0{,}431}{13} = -0{,}0334$. Werden diese Verbesserungen mit $\sin a$ und $\cos a$ multiplicirt und die Producte addirt, so finden wir die Veränderungen der Seitenlängen. Ebenso finden wir die Veränderungen der Neigungswinkel, wenn wir die Ordinaten-Unterschiede mit $\frac{\cos a}{s}$, die Abscissen-Unterschiede mit $-\frac{\sin a}{s}$ multipliciren, die Producte addiren und mit dem Sinus einer Minute dividiren, d. h. mit 6366 multipliciren.

| | $\Delta y . \sin a + \Delta x \cos a = v_s$ | $\frac{\cos a}{s} . v_{\Delta y}$ | $\frac{\sin a}{s} . v_{\Delta x} =$ | $\alpha$ | $\alpha'$ | $\alpha'_{m+1} - \alpha'_m$ | $\frac{k_w}{n}$ | $v_w$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — 0,0004 — 0,0317 = — 0,032 | — 0,0000091 | +0,0000831 | +0,0000740 | +0'. 47" | — 1'. 92" | +37" | — 1'. 55" |
| 1 | +0,0012 — 0,0078 = — 0,007 | — 036 | — 4041 | — 4077 | — 2. 60 | — 3. 07 | +36 | — 2. 71 |
| 2 | — 0,0011 — 0,0168 = — 0,018 | — 061 | + 2829 | + 2768 | +1. 76 | +4. 36 | +37 | +4. 73 |
| 3 | +0,0010 — 0,0193 = — 0,020 | — 169 | — 6295 | — 6464 | — 4. 12 | — 5. 88 | +36 | — 5. 52 |
| 4 | +0,0011 — 0,0124 = — 0,013 | — 049 | — 3340 | — 3389 | — 2. 16 | +1. 96 | +37 | +2. 33 |
| 5 | +0,0012 — 0,0062 = — 0,005 | — 023 | — 3330 | — 3353 | — 2. 13 | +0. 03 | +36 | +0. 39 |
| 6 | — 0,0001 +0,0334 = +0,033 | + 357 | + 0086 | + 0443 | +0. 28 | +2. 41 | +37 | +2. 78 |
| 7 | +0,0012 +0,0096 = +0,011 | + 052 | — 4743 | — 4691 | — 2. 99 | — 3. 27 | +37 | — 2. 90 |
| 8 | — 0,0002 +0,0331 = +0,033 | + 121 | + 0440 | + 0561 | +0. 36 | +3. 35 | +36 | +3. 71 |
| 9 | — 0,0007 +0,0274 = +0,027 | + 089 | + 1690 | + 1779 | +1. 13 | +0. 77 | +37 | +1. 14 |
| 10 | — 0,0002 +0,0330 = +0,033 | + 099 | + 0377 | + 0476 | +0. 30 | — 0. 83 | +36 | — 0. 47 |
| 11 | — 0,0010 — 0,0277 = — 0,029 | — 107 | + 1954 | + 1847 | +1. 18 | +0. 88 | +37 | +1. 25 |
| 12 | — 0,0012 — 0,0084 = — 0,010 | — 036 | + 3790 | + 3754 | +2. 39 | +1. 21 | +36 | +1. 57 |
| | | | | | | | | +4'. 75" |

Wir haben also fünf Ausgleichungssysteme, welche wir nach der Verschiedenheit ihrer Grundlagen benennen:

A) wissenschaftliche Methode
- I. Gesammtausgleichung,
- II. Ausgleichung durch Theilung mit Neigungsveränderung,
- III. Ausgleichung durch Theilung ohne Neigungsveränderung,

B) hausbackene Manier
- IV. Ausgleichung auf die Aggregate der Coordinaten-Unterschiede,
- V. Ausgleichung auf die Anzahl der Brechpunkte.

Die berechneten Verbesserungen ergeben hiernach folgende

Zusammenstellung:

| | I | | II | | III | | IV | | V | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $v_s$ | $v_w$ | $v_s$ | $v_w$ | $v_s$ | $v_w$ | $v_s$ | $v_w$ | $v_s$ | $v_w$ |
| 0 | — 0,$^{m}$073 | — 0′. 13″ | — 0,$^{m}$081 | +0′. 06″ | — 0,$^{m}$092 | +0′. 37″ | — 0,$^{m}$067 | +0′. 55″ | — 0,$^{m}$032 | — 1′. 55″ |
| 1 | — 0, 009 | — 0 . 32 | — 0, 011 | +1 . 19 | — 0, 011 | +0 . 36 | — 0, 001 | — 1 . 60 | — 0, 007 | — 2 . 71 |
| 2 | — 0, 032 | +0 . 10 | — 0, 036 | — 0 . 38 | — 0, 041 | +0 . 37 | — 0, 017 | +2 . 80 | — 0, 018 | +4 . 73 |
| 3 | — 0, 014 | — 0 . 36 | — 0, 015 | +0 . 06 | — 0, 017 | +0 . 36 | — 0, 007 | — 2 . 95 | — 0, 020 | — 5 . 52 |
| 4 | — 0, 018 | — 0 . 17 | — 0, 021 | +0 . 29 | — 0, 0 3 | +0 . 37 | — 0, 005 | +0 . 81 | — 0, 013 | +2 . 33 |
| 5 | — 0, 008 | +0 . 29 | — 0, 010 | +1 . 04 | — 0, 010 | +0 . 36 | — 0, 000 | +0 . 96 | — 0, 005 | +0 . 39 |
| 6 | +0, 020 | +0 . 81 | +0, 023 | — 0 . 09 | +0, 026 | +0 . 37 | +0, 020 | +1 . 12 | +0, 033 | +2 . 78 |
| 7 | +0, 013 | +0 . 80 | +0, 014 | +0 . 85 | +0, 016 | +0 . 37 | +0, 004 | — 0 . 63 | +0, 011 | — 2 . 90 |
| 8 | +0, 059 | +1 . 14 | +0, 067 | +0 . 68 | +0, 074 | +0 . 36 | +0, 059 | +1 . 83 | +0, 033 | +3 . 71 |
| 9 | +0, 054 | +1 . 05 | +0, 060 | +0 . 08 | +0, 067 | +0 . 37 | +0, 044 | +1 . 74 | +0, 027 | +1 . 14 |
| 10 | +0, 072 | +0 . 68 | +0, 080 | +0 . 55 | +0, 090 | +0 . 36 | +0, 071 | — 0 . 99 | +0, 033 | — 0 . 47 |
| 11 | — 0, 049 | +0 . 56 | — 0, 054 | +0 . 55 | — 0, 061 | +0 . 37 | — 0, 040 | +1 . 55 | — 0, 029 | +1 . 25 |
| 12 | — 0, 015 | +0 . 30 | — 0, 016 | — 0 . 13 | — 0, 018 | +0 . 36 | — 0, 005 | — 0 . 44 | — 0, 010 | +1 . 57 |
| | 0 | +4 . 75 | 0 | +4 . 75 | 0 | +4 . 75 | | +4 . 75 | | +4 . 75 |

Eine oberflächliche Vergleichung dieser fünf Systeme unter einander kann uns nur darüber belehren, dass das wissenschaftliche Verfahren grössere Längenverbesserungen ergab, als die hausbackene Methode, dass dagegen die letztere beträchtlich grössere Winkelverbesserungen zur Folge gehabt hat. Verlangen wir sichere Kennzeichen für die relativen Werthe der Methoden, so müssen wir innerhalb jeder der fünf Spalten jede einzelne Verbesserung zum Quadrat erheben, sie mit dem Gewicht der Grösse, zu welcher sie gehört, multipliciren und die Producte addiren, d. h. wir haben nach obiger Bezeichnung zu bilden:

$$[s\,\varepsilon\,\varepsilon] + p\mu\,[v_w\, v_w].$$

Da wir aber in den Systemen IV und V die Grössen $\varepsilon$ nicht gebildet haben, sondern nur die $v_s$, so ist es bequemer, den vorstehenden Ausdruck durch Substitution der $v_s$ für $s\varepsilon$ umzugestalten in

$$\left[\frac{v_s\, v_s}{s}\right] + p\mu\,[v_w\, v_w].$$

Werden nun in jeder Spalte die $v_s$ zum Quadrat erhoben und jedes dieser Quadrate mit der zugehörigen Seitenlänge getheilt, dann die Quotienten addirt; werden auch die $v_w$ zum Quadrat erhoben und die Quadrate addirt, so finden wir:

$$\left[\frac{v_s\, v_s}{s}\right]_{\mathrm{I}} = 0{,}0002056;\quad [v_w\, v_w]_{\mathrm{I}} = 4{,}'9361$$

$$\left[\frac{v_s\, v_s}{s}\right]_{\mathrm{II}} = 0{,}0002568;\quad [v_w\, v_w]_{\mathrm{II}} = 4{,}'5547$$

$$\left[\frac{v_s\, v_s}{s}\right]_{III} = 0{,}0003237\,; \quad [v_w\, v_w]_{III} = 1{,}'7359$$

$$\left[\frac{v_s\, v_s}{s}\right]_{IV} = 0{,}0001607\,; \quad [v_w\, v_w]_{IV} = 32{,}5867$$

$$\left[\frac{v_s\, v_s}{s}\right]_{V} = 0{,}0000924\,; \quad [v_w\, v_w]_{V} = 103{,}6213.$$

Um nun die Glieder der zweiten Verticalreihe mit den zugehörigen Gliedern der zweiten Reihe verbinden zu können, haben wir sie mit diesen auf einerlei Maass- und Gewichtseinheit zu bringen, ersteres, indem wir sie mit $(\sin 1')^2$, letzteres, indem wir sie mit $p\mu$ multipliciren:

$$\left.\begin{array}{r} 2\log\sin 1' = 2{,}39224{-}10 \\ \log p = 0{,}98426 \\ \log \mu = 1{,}87040 \end{array}\right\} \text{wie oben}$$

$$\underline{\phantom{0}5{,}24690{-}10}$$

$$\begin{array}{lll} \log\, [v_w\, v_w]_I & = 0{,}69338 = 5{,}94028{-}10 & \text{zu } 0{,}0000871 \\ \log\, [v_w\, v_w]_{II} & = 0{,}65846 = 5{,}90536{-}10 & \text{zu } 0{,}0000804 \\ \log\, [v_w\, v_w]_{III} & = 0{,}23956 = 5{,}48646{-}10 & \text{zu } 0{,}0000307 \\ \log\, [v_w\, v_w]_{IV} & = 1{,}51303 = 6{,}75993{-}10 & \text{zu } 0{,}0005753 \\ \log\, [v_w\, v_w]_{V} & = 2{,}01544 = 7{,}26234{-}10 & \text{zu } 0{,}0018295. \end{array}$$

Es ist also die Summe der Quadrate der Verbesserungen:

$$\text{bei dem Verfahren No.}\ \left.\begin{array}{r} \text{I} = 0{,}0002927 \\ \text{,, II} = 0{,}0003372 \\ \text{,, III} = 0{,}0003544 \end{array}\right\} \text{wissenschaftlich}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{,, IV} = 0{,}0007360 \\ \text{,, V} = 0{,}0019219 \end{array}\right\} \text{hausbacken.}$$

Die Summe der Fehlerquadrate der hausbackenen Methode No. IV ist also mehr als doppelt so gross als die der mindest strengen wissenschaftlichen Ausgleichung No. III. Die Quadratsumme des Systems No. V überragt noch die Summe der vier vorhergehenden Quadratsummen.

Dass bei einer genauen Beleuchtung die Schwäche der letzteren Methode scharf in die Augen springen werde, liess sich erwarten, weil sie schon durch das praktische Gefühl der sorgfältigeren Geometer als unzulässig erkannt ist.

Die Quadratsumme des Verfahrens No. III übersteigt die des strengsten Verfahrens No. I nur um den sechsten Theil, die der II^ten Methode nur um den zwanzigsten Theil. Im Vergleiche zur II^ten Methode wird also bei dem III^ten Verfahren mit dem Gewinn einer bedeutenden Rechnungserleichterung nur sehr wenig an Genauigkeit eingebüsst.

Wir überlassen es für jetzt Anderen, dieses empirische Ergebniss durch eine theoretische Analyse der obigen Entwicklungsformen zu vervollständigen, und beschränken uns darauf, die praktische Regel aufzustellen:

„Wenn der Zweck der Arbeit die grösste Strenge erfordert, so muss das „Verfahren No. I angewendet werden, wo nicht, so ist das Ausgleichungs- „geschäft nach dem Verfahren No. III zu bewirken."

Fällt hiernach voraussichtlich der weithin grössere Theil aller polygonometrischen Rechnungen dem Verfahren No. III zu, so erscheint es nicht überflüssig, die Rechnungsform noch einmal darauf anzusehen, ob sie nicht noch erheblicher Abkürzungen fähig ist.

Wir haben oben eine Berechnung der Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede als geschehen vorausgesetzt, ohne des dabei benutzten Verfahrens zu gedenken. Jetzt, wo es uns darauf ankommt, das ganze Rechnungswerk in die kürzeste und übersichtlichste Form zu bringen, dürfen wir auch dieses einfache Stadium nicht vernachlässigen.

Man hat sich in den letzteren Jahren zur Abkürzung der Coordinatenberechnung vielfach der Multiplicationstafeln mit dreistelligen Factoren und der besonders zu diesem Zwecke veranstalteten sogenannten Coordinatentafeln bedient. Da indessen die Berechnung mit Logarithmen zur Zeit noch die verbreitetste und jedenfalls die exacteste ist, so erscheint es angemessen, das Rechnungsschema zunächst auf logarithmische Rechnung einzurichten, demnächst auch die Benutzung der Coordinatentafeln zu zeigen, und dann dem Leser die Wahl zu überlassen.

Von den gegebenen Winkeln ($w$) und Seiten ($s$) eines geschlossenen Polygons aus bis zu den nach dem III[ten] Ausgleichungsverfahren zu ermittelnden Verbesserungen der Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede haben wir nach dem Obigen folgende Formeln:

1) $[w] - (n \pm 2)\, 2R = k_w$

2) $v_w = -\dfrac{k_w}{n}$

3) $a_0 = a_0$
$a_1 = a_0 + w_1 + v_w - 2R$
$a_2 = a_1 + w_2 + v_w - 2R$
$a_3 = a_2 + w_3 + v_w - 2R$
u. s. w.

4) $\Delta y_0 = s_0 \,.\, \sin a_0; \quad \Delta x_0 = s_0 \,.\, \cos a_0$
$\Delta y_1 = s_1 \,.\, \sin a_1; \quad \Delta x_1 = s_1 \,.\, \cos a_1$
$\Delta y_2 = s_2 \,.\, \sin a_2; \quad \Delta x_2 = s_2 \,.\, \cos a_2$
u. s. w.

5) $[\Delta y] = k_y \quad ; \quad [\Delta x] = k_x$

6) $\left[\dfrac{\Delta y \,.\, \Delta y}{s}\right] . \mathrm{I} + \left[\dfrac{\Delta y \,.\, \Delta x}{s}\right] . \mathrm{II} = -k_y$
$\left[\dfrac{\Delta y \,.\, \Delta x}{s}\right] . \mathrm{I} + \left[\dfrac{\Delta x \,.\, \Delta x}{s}\right] . \mathrm{II} = -k_x$

7) $v_s = \Delta y \,.\, \mathrm{I} + \Delta x \,.\, \mathrm{II}$

8) $v_{\Delta y} = v_s \sin a; \quad v_{\Delta x} = v_s \,.\, \cos a$

oder

$$v_{\Delta y} = \Delta y \,.\, \sin a \,.\, \mathrm{I} + \Delta x \sin a \,.\, \mathrm{II}; \; v_{\Delta x} = \Delta y \cos a \,.\, \mathrm{I} + \Delta x \,.\, \cos a \,.\, \mathrm{II}.$$

Dass in diesen Formeln

$$[w] = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots\ldots$$
$$[\Delta y] = \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots\ldots$$
$$\left[\frac{\Delta y \,.\, \Delta y}{s}\right] = \frac{\Delta y_0 \,.\, \Delta y_0}{s} + \frac{\Delta y_1 \,.\, \Delta y_1}{s_1} + \frac{\Delta y_2 \,.\, \Delta y_2}{s_2} + \ldots\ldots$$

bedeuten und so die ähnlichen Ausdrücke zu verstehen sind, ist oben schon bemerkt. Es erübrigt nur noch zu erläutern, dass der Ausdruck (7) erscheint, wenn wir in den bereits benutzten Formeln:

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta y_0}{s_0}.\mathrm{I} + \frac{\Delta x_0}{s_0}.\mathrm{II}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta y_1}{s_1}.\mathrm{I} + \frac{\Delta x_1}{s_1}.\mathrm{II}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta y_2}{s_2}.\mathrm{I} + \frac{\Delta x_2}{s_2}.\mathrm{II}$$

u. s. w.

an beiden Seiten mit $s$ multipliciren und dann $v_s$ für $s\varepsilon$ setzen.

Wir können aber auch die Formeln (6) bequemer einrichten, wenn wir berücksichtigen, dass

$$\Delta y = s.\sin a; \quad \Delta x = s.\cos a$$

oder $$\frac{\Delta y}{s} = \sin a; \quad \frac{\Delta x}{s} = \cos a;$$

sie werden dann:

$$[\Delta y.\sin a].\mathrm{I} + [\Delta y.\cos a].\mathrm{II} = -k_y$$

$$[\Delta y.\cos a].\mathrm{I} + [\Delta x.\cos a].\mathrm{II} = -k_x.$$

Den bei der Berechnung der Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede bereits gebildeten log $\Delta y$ und log $\Delta x$ brauchen also beziehungsweise die log sin $a$ und log cos $a$ nur zuaddirt zu werden, um sofort die Logarithmen der Hülfsgrössen zu erhalten, durch deren Addition wir die Coëfficienten der Correlaten I und II in den vorstehenden Gleichungen zusammen setzen.

Bei diesem Geschäft ergibt sich schon eine wichtige Controle gegen die logarithmische Rechnung. Da nämlich

$$\Delta y.\cos a = \Delta x.\sin a,$$

so muss eine kreuzweise Addition der Logarithmen gleiche Summen ergeben. Geschieht dieses, so sind wir sicher, dass nicht blos diese, sondern auch die Logarithmen der Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede aus log $s$ und log sin $a$ und log cos $a$ richtig zusammen gesetzt sind.

Eine noch wichtigere Controle besteht aber darin, dass

$$\Delta y.\sin a = s.\sin^2 a$$

$$\Delta x.\cos a = s.\cos^2 a,$$

also $$\Delta y.\sin a + \Delta x.\cos a = s(\sin^2 a + \cos^2 a) = s.$$

Die Summe der Hülfszahlen in den beiden betreffenden Rubriken muss also immer der Seitenlänge gleich sein, folglich muss auch sein:

$$[\Delta y.\sin a] + [\Delta x.\cos a] = [s].$$

Bringen wir nun obige Vorschriften in ein Formular und berechnen darin das oben behandelte Polygon nochmals, so erhalten wir: