Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen

Vorländer, J. J.

Leipzig, 1858

Einleitung

Einleitung.

Zur Erleichterung der graphischen Darstellung grad-gebrochener Linienzüge suchen wir die Lage der Brechpunkte gewöhnlich vermittelst rechtwinkliger Coordinaten auf eine gemeinschaftliche Abscissen-Achse zu beziehen. Diesen Zweck können wir erreichen, wenn für irgend eine der im Zuge liegenden graden Linien der Neigungswinkel gegen die Coordinaten-Achse, ferner die Längen der auf einander folgenden graden Linien und die Winkel, welche sie am Brechpunkte mit einander einschliessen, gegeben sind. Um jedem Missverständnisse über die Lage dieser Stücke vorzubeugen, gebrauchen wir die Vorsicht, dass, nach erfolgter Feststellung der Reihenfolge, in welcher der Linienzug bei der Coordinatenberechnung durchlaufen werden soll, jeder Winkel in derselben Drehungsweise von der vorhergehenden Linie bis zur nachfolgenden gezählt wird, wie der gegebene Neigungswinkel von dem positiven Zweige der Abscissen-Achse bis zu der ihrer Lage nach gegen dieselbe bestimmten Linie.

Ist der Punkt, an welchem dieser Neigungswinkel liegt, der Anfangspunkt des Zuges, so können wir die Neigungswinkel für die nachfolgenden Linien, die wir gewöhnlich mit dem Namen Polygonseiten, oder auch schlechtweg Seiten belegen, durch einfache Addition des Neigungswinkels der vorhergehenden Seite zu dem Winkel, den diese mit der nachfolgenden Seite einschliesst, und durch jedesmaligen Abzug von zwei rechten Winkeln ableiten. Es bleibt dann nur noch übrig, vermittelst der Neigungswinkel und der Seiten die Coordinaten-Unterschiede der Punkte trigonometrisch zu berechnen und durch deren Zusammensetzung die Coordinaten selbst zu finden.

Gesetzt, wir hätten den Anfangspunkt des Zuges mit dem Zeichen 0, die nachfolgenden Brechpunkte mit den Ziffern 1, 2, 3 u. s. w., den Endpunkt des Zuges mit dem Zeichen n belegt, die grade Linie

von	0	nach	1	mit	s_0
„	1	„	2	„	s_1
„	2	„	3	„	s_2
⋮					
von	$n-1$	„	n	„	s_{n-1},

den Neigungswinkel der Seite

$$\begin{array}{llllll} \text{von} & 0 & \text{nach} & 1 & \text{mit} & a_0 \\ ,, & 1 & ,, & 2 & ,, & a_1 \\ ,, & 2 & ,, & 3 & ,, & a_2 \\ \vdots \\ \text{von} & n-1 & ,, & n & ,, & a_{n-1}, \end{array}$$

endlich den Brechungswinkel

$$\begin{array}{llllllll} \text{im Punkte} & 1 & \text{zwischen} & 0 & \text{und} & 2 & \text{mit} & w_1 \\ ,, \quad ,, & 2 & ,, & 1 & ,, & 3 & ,, & w_2 \\ ,, \quad ,, & 3 & ,, & 2 & ,, & 4 & ,, & w_3 \\ \vdots \\ \text{im Punkte} & n-1 & ,, & n-2 & ,, & n & ,, & w_{n-1}, \end{array}$$

so erhalten wir der Reihe nach:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + w_1 - 2R \\ a_2 &= a_1 + w_2 - 2R \\ a_3 &= a_2 + w_3 - 2R \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + w_{n-1} - 2R, \end{aligned}$$

wo R den rechten Winkel bezeichnet.

So oft bei den Subtractionen der Rest negativ ausfällt, wird seine positive, an trigonometrischen Linien ihm gleiche Ergänzung zu 4 Rechten für ihn gesetzt. Geht der Rest über 4 rechte Winkel hinaus, so werden letztere fallen gelassen. Bezeichnen wir nun die Abstände von der Ordinaten-Achse mit X, jene von der Abscissen-Achse mit Y, und sind die Coordinaten irgend eines der Brechpunkte, etwa des Anfangspunktes X_0 und Y_0, gegeben, so finden wir:

$$\begin{array}{l|l} Y_1 = Y_0 + s_0 \sin a_0 & X_1 = X_0 + s_0 \cos a_0 \\ Y_2 = Y_1 + s_1 \sin a_1 & X_2 = X_1 + s_1 \cos a_1 \\ Y_3 = Y_2 + s_2 \sin a_2 & X_3 = X_2 + s_2 \cos a_2 \\ \vdots & \vdots \\ Y_n = Y_{n-1} + s_{n-1} \sin a_{n-1} & X_n = X_{n-1} + s_{n-1} \cos a_{n-1}. \end{array}$$

Addiren wir diese Gleichungen und tilgen die an beiden Seiten des Gleichheitszeichens stehenden, also gegenseitig sich aufhebenden Glieder, so haben wir auch:

$$Y_n = Y_0 + s_0 \sin a_0 + s_1 \sin a_1 + s_2 \sin a_2 + s_3 \sin a_3 + \ldots . s_{n-1} . \sin a_{n-1}$$
$$X_n = X_0 + s_0 \cos a_0 + s_1 \cos a_1 + s_2 \cos a_2 + s_3 \cos a_3 + \ldots . s_{n-1} . \cos a_{n-1}.$$

Bei der Anwendung dieser Formeln haben wir es mit zwei verschiedenen Fällen zu thun. Entweder fällt der Punkt n mit dem Punkte 0 zusammen, der Zug bildet also ein geschlossenes Polygon, oder es findet ein solches Zurücklaufen des Zuges nicht statt.

Im ersteren Falle controlirt sich sowohl die Ableitung der Neigungswinkel als auch die Berechnung der Coordinaten. Gehen wir nämlich mit der obigen Neigungsentwicklung noch einen Schritt weiter und setzen

$$a_n = a_{n-1} + w_n - 2R,$$

addiren hierauf alle Gleichungen zusammen, indem wir die sich aufhebenden Glieder fortlassen, so erhalten wir:

$$a_n = a_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots w_{n-1} + w_n - 2nR.$$

Sind die Punkte n und 0 identisch und abstrahiren wir von den Fehlern der Winkelmessung, so entsteht die Gleichung:

$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots w_{n-1} = 2nR.$$

Wäre die Rechnung mit den Aussenwinkeln des Polygons geführt, so würde die Summe derselben $= 2nR + 4R$, wären hingegen die innern Winkel benutzt, $= 2nR - 4R$ sein. In den obigen Formeln ist es unbestimmt geblieben, ob die Rechnung mit innern oder äussern Winkeln geschehen soll, daher die Summe zwischen beide Ausdrücke in die Mitte fällt. Wir können von dieser Unbestimmtheit um so mehr absehen, als es sich bei unsern Aufgaben nicht um Differenzen von ganzen Vollkreisen, sondern nur um kleine unvermeidliche Beobachtungsfehler handelt. Wir ersehen jedenfalls, dass, wenn die Summe der Brechungswinkel von der Summe $2nR \pm 4R$, die wir mit N bezeichnen wollen, um die Grösse k'_w abweicht, der endliche Neigungswinkel a_n von dem anfänglichen a_0 um eben diese Grösse verschieden ist, dass mithin der Fehler k'_w von der Grösse des Winkels a_0 nicht abhängig ist.

Wären die Grössen w und s absolut genau gegeben, so müsste $Y_n = Y_0$ und $X_n = X_0$ sein. Sind sie aber gemessene, folglich mit Fehlern behaftete Grössen, so fallen Y_n von Y_0, X_n von X_0 verschieden aus. Bezeichnen wir den ersteren Unterschied mit k_y, den zweiten mit k_x, so haben wir für geschlossene Polygone die drei thatsächlichen Gleichungen:

$$\text{I. } w_0 + w_1 + w_3 + w_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots w_{n-1} - N = k'_w$$
$$\text{II. } s_0 \sin a_0 + s_1 \sin a_1 + s_2 \sin a_2 + s_3 \sin a_3 + \ldots\ldots s_{n-1} \sin a_{n-1} = k_y$$
$$\text{III. } s_0 \cos a_0 + s_1 \cos a_1 + s_2 \cos a_2 + s_3 \cos a_3 + \ldots\ldots s_{n-1} \cos a_{n-1} = k_x.$$

Bildet der Linienzug kein geschlossenes Polygon, so erheischt eine von den Seitenlängen unabhängige Controle der Winkelsumme, dass ausser der Anfangsneigung a_0 auch die Endneigung a_n gegeben sei, welche, bei absoluter Genauigkeit aller Winkel, $= a_{n-1} \pm 2R$ sein würde. Ebenso würde zur Controle der Coordinaten-Entwicklung erforderlich sein, dass ausser Y_0 und X_0 auch die Endcoordinaten Y_n und X_n gegeben seien. Die thatsächlichen Gleichungen sind daher für diesen Fall:

$$\text{I. } -a_n + a_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots w_{n-1} - 2(n \pm 1)R = k'_w$$
$$\text{II. } -Y_n + Y_0 + s_0 \sin a_0 + s_1 \sin a_1 + s_2 \sin a_2 + \ldots\ldots s_{n-1} \sin a_{n-1} = k_y$$
$$\text{III. } -X_n + X_0 + s_0 \cos a_0 + s_1 \cos a_1 + s_2 \cos a_2 + \ldots\ldots s_{n-1} \cos a_{n-1} = k_x.$$

Die Verschiedenheit beider Fälle ist nicht blos eine formelle, sie ist eine wesentliche durch den Umstand, dass im ersteren Falle die Grössen k'_w, k_y, k_x von a_0, Y_0, X_0 völlig unabhängig, im zweiten Falle aber von $a_0, a_n, Y_0, Y_n, X_0, X_n$ abhängig sind. Wir werden auf die praktische Bedeutung dieses Unterschiedes zurückkommen und beschränken uns zuvörderst auf eine nähere Betrachtung des ersteren Falles.

Entsprechen die thatsächlichen Angaben der Seitenlängen und Winkelmaasse den Bedingungen, denen sie vermöge ihres Zusammenhanges in dem geschlossenen Polygon unterliegen, nicht, verfehlen sie dieselben um die Grössen k_w', k_y, k_x, so entspringt für den Geometer die Aufgabe, die gemessenen Grössen so zu verbessern, dass jenen Bedingungen vollständig genügt werde.

Schwerlich gibt es einen Zweig der praktischen Geometrie, wo das Bedürfniss einer solchen Verbesserung dringender wäre, als bei polygonometrischen Bestimmungen. Die Anzahl der Reihenglieder, welche gemeinschaftlich jenen Bedingungen unterliegen, ist gewöhnlich beträchtlich; es findet also eine Häufung vieler, wenn auch im Einzelnen geringer Fehler *) statt, und sie wachsen zuletzt zu Grössen an, die im Verhältniss zu den einzelnen Beobachtungsmaassen und den daraus abgeleiteten Coordinaten bedeutend sind. Diese Endfehler an der Stelle, wo sie zur Wahrnehmung kommen, ohne Weiteres stecken zu lassen, wagt auch der leichtfertigste Geometer nicht. Die Nothwendigkeit einer Vertheilung derselben ist also allgemein anerkannt. Aber die Art, wie man diesem Bedürfniss bisher abzuhelfen suchte, entbehrt einer wissenschaftlichen Begründung. Ein Theil der Geometer beschränkt sich darauf, nach geschehener einfacher Vertheilung des Winkelfehlers auf alle Winkel die Endfehler der Ordinate und Abscisse einfach nach der Anzahl der Punkte zu vertheilen, also die Quotienten $\frac{k_y}{n}$ und $\frac{k_x}{n}$ zu bilden und diese mit entgegengesetztem Zeichen den einzelnen Ordinaten- und Abscissen-Unterschieden als Verbesserungen beizufügen. Abgesehen von sonstigen Mängeln dieses Verfahrens nimmt es keine Rücksicht auf die Länge der Polygonseiten und der aus ihnen resultirenden Ordinaten- und Abscissen-Unterschiede. Dies ist offenbar fehlerhaft, weil, bevor ein Anderes nachgewiesen ist, längeren Polygonseiten grössere Fehler zugeschrieben werden müssen, als kürzeren. Andere Geometer suchen diesen Fehler im Princip dadurch zu vermeiden, dass sie die positiven und negativen Ordinaten-Unterschiede ohne Rücksicht auf ihr Zeichen in eine Summe (Aggregat) ziehen, diese in den Fehler der Ordinate theilen, mit dem Quotienten sämmtliche Ordinaten-Unterschiede multipliciren und die Producte mit dem, dem Zeichen des Ordinatenfehlers entgegengesetzten Zeichen den Ordinaten-Unterschieden als Verbesserungen beifügen, in gleicher Art auch mit der Abscisse verfahren.

Beide Verfahrungsarten sind, abgesehen von der Nichtgleichzeitigkeit der Winkelausgleichung, in sofern fehlerhaft, als es, sobald die Endfehler der Abscisse und der Ordinate entgegengesetzte Zeichen haben, eintritt, dass vermöge der entgegengesetzten Verbesserungen der Abscissen- und Ordinaten-Unterschiede die ihnen gemeinschaftliche Seite zugleich länger und auch kürzer wird, was sich widerspricht.

Lägen auch Gründe vor, die Winkelverbesserung einem besonderen vorbereitenden Acte der Ausgleichungsrechnung zuzuwenden, so würde doch die

*) Nur von kleinen unvermeidlichen Fehlern der Beobachtung handelt diese Schrift; vermeidliche, grobe Fehler (Irrthümer) sind gänzlich ausgeschlossen.

Ausgleichung des Ordinatenfehlers und des Abscissenfehlers in einen ungetheilten Act schon desshalb zusammengezogen werden müssen, weil bei der Berechnung eines Ordinaten- und Abscissen-Unterschiedes die Länge der betreffenden Seite gemeinschaftlicher Factor ist.

Neben diesen offenbaren Mängeln des bisherigen Ausgleichungsverfahrens entbehrt es auch jedes wissenschaftlichen Grundes; es nimmt keine Rücksicht auf die Entstehungsform des Endfehlers und unterlässt es, an die sogenannten Verbesserungen der Resultate die Anforderung zu stellen, dass sie wahrscheinlicher als andere sein müssen.

Je mehr die Grundlosigkeit und die Unrichtigkeit jenes Verfahrens zum Bewusstsein gelangten, desto lebhafter drängte sich der Wunsch nach einer auf die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestützten Berichtigungsform auf. Die ersten Versuche, welche zur Erlangung der letzteren angestellt wurden, waren nicht sehr geeignet, die Geometer auf die betretene Bahn zu locken. Das Zahlenwerk wurde so weitläuftig, dass der Schriftsteller, der es empfahl, sich bewogen fühlte, die Seitenmessung als unverbesserlich zu betrachten, weil sie jedenfalls überwiegend genauer sei, als die Leistungen der zur Winkelbeobachtung gewöhnlich benutzten Boussole, wobei er nur übersehen hatte, dass zu der Zeit die Boussole bei den Geometern von einiger wissenschaftlicher Bildung längst nicht mehr im Gebrauche war, dass von diesen die Winkel der Polygone mit Theodoliten gemessen wurden, und zwar grade umgekehrt genauer als die mit Messketten oder Messlatten gemessenen Seitenlängen. Ein andrer Schriftsteller fasste zwar Seiten und Winkel in ein Ausgleichungssystem zusammen, empfahl aber eine besondere Coordinirung des Polygons auf eine seiner Seiten, lediglich zum Zwecke der Ausgleichung, und obgleich er zu seinem Beispiele ein Polygon von nur 6 Seiten wählte, so wurde doch die Rechnung schon so weitläuftig, dass Wenige sich entschliessen mochten, ihm auf dem gezeigten Wege zu folgen.

Es ist nun der Zweck dieser Blätter, dem Leser zunächst das Verfahren vorzuführen, welches bei einer strengen Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf polygonometrische Bestimmungen einzuschlagen sein würde, demnächst auf solche Abkürzungen desselben aufmerksam zu machen, welche das Rechnungswesen erheblich vermindern, ohne die Genauigkeit der Resultate merklich zu gefährden.

Die Elemente der polygonometrischen Bestimmungen sind Seitenlängen und Winkel; Längenmessungen und Winkelbeobachtungen sind aber wesentlich verschiedene Operationen. Bei den ersteren sind die Instrumente nur kleine Theile der zu messenden Längen und sie müssen daher vielmal auf den letzteren abgetragen werden, bei den Winkelmessungen dagegen ist der zu messende Winkel nur ein Theil des Umfangs des Instruments, die einmalige Messung des Winkels nur ein einfacher Act. Jeder einzelnen Winkelmessung, welche mit demselben Instrument und unter gleichzuachtenden Umständen angestellt wird wie die einzelne Messung eines andern, grösseren oder kleineren Winkels, kann ein gleich grosser Fehler zugeschrieben werden als der letzteren; es würde aber der Natur der Sache und aller Erfahrung widersprechen, wenn wir der mit demselben Instrument und unter gleichgeltenden Umständen ausgeführten Messung einer Linie von 10 Ruthen Länge einen ebenso grossen Totalfehler zuschreiben wollten, als einer Linie von 300 Ruthen.

Müssen nun in einer Rechnung Längen und Winkel mit einander verbunden werden, so muss zunächst festgestellt werden, wie sich in Beziehung auf eine gemeinschaftliche Einheit die Winkelfehler zu den Längenfehlern verhalten, sodann muss berücksichtigt werden, dass die letzteren mit den Längen der Linien wachsen. Als charakteristisches Fehlermaass nimmt man gewöhnlich den sogenannten wahrscheinlichen Fehler, diejenige Fehlergrösse nämlich, welche in einer Reihe gleichartiger Fehler ebenso leicht überschritten wird, als unerreicht bleibt. Den wahrscheinlichen Fehler eines Winkelinstruments bestimmt man gewöhnlich durch möglichst vielmal wiederholte Messung eines Winkels, wobei die Nonien nach erfolgten Versetzungen des Instruments in allen Gegenden des Vollkreises abgelesen werden. Nimmt man nun aus sämmtlichen Resultaten das arithmetische Mittel und zieht dieses von allen einzelnen Resultaten ab, so erhält man eine Reihe von Fehlern, welche auf zweifache Art zu dem gedachten Zwecke in Benutzung genommen werden können. Ist nämlich die Anzahl (n) der Fehler so gross, dass, wenn diese ohne Rücksicht auf das Zeichen, also lediglich ihrer Grösse nach geordnet sind, die Intervalle zwischen je zwei nächsten Fehlern nicht zu bedeutend ausfallen, so kann derjenige Fehler für den wahrscheinlichen Fehler des Instruments genommen werden, welcher in dieser Reihe der $\frac{n}{2}^{\text{te}}$ ist. Man kann dessen Grösse aber auch dadurch ermitteln, dass man sämmtliche Fehler quadrirt, die Quadrate summirt, die Summe mit $n-1$ theilt, aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht und diese mit 0,6745 *) multiplicirt.

Die Ermittlung des wahrscheinlichen Fehlers der Längenmessungen ist weniger leicht. Der Geometer kann aber den Umstand zu diesem Zwecke benutzen, dass er ohnehin, um sich gegen grobe Irrthümer zu schützen, jede Polygonseite doppelt gemessen hat. Die Vergleichung jeder solchen Doppelmessung ergibt ihm ein, der betreffenden Seitenlänge zugehöriges Fehlermaass. Theilt er diese Differenz zwischen der ersten und zweiten Seitenmessung mit der Länge der Linie, summirt er alle solche Quotienten, theilt die Summe durch die Anzahl derselben und multiplicirt die Quotienten mit 0,47694, so erhält er für eine hinreichend grosse Anzahl von Polygonseiten einen auf die Einheit des gebrauchten Längenmaasses sich beziehenden und für sein Ausgleichungsgeschäft brauchbaren Werth des wahrscheinlichen Einheitsfehlers seiner Längenmessungen.

Nach der in der Dresdener Zeitschrift für Mathematik und Physik Jahrgang 1856 Seite 142 abgedruckten Mittheilung ist bei einer umfangreichen Vermessungsoperation der wahrscheinliche Messungsfehler einer Längenruthe zu

---

*) Hagen, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin bei Dümmler 1837, Seite 60.

0,000399 gefunden worden. Für den zu den Winkelmessungen gebrauchten Theodoliten ergab sich der wahrscheinliche Fehler einer Winkelmessung zu 0,81783 der Centesimalminute. Wollen wir beide Fehler auf einander beziehen, so müssen wir den letzteren auf die Einheit des Längenmaasses zurückführen, also die Länge des, dem Winkel von 0,81783 Minuten entsprechenden Bogens für den Halbmesser $=1$ dafür setzen. Wir finden diesen durch Multiplication der Zahl 0,81783 mit dem Sinus einer Minute, also zu

$$0{,}81783 \times 0{,}0001571 = 0{,}00012848.$$

Während also der Endpunkt einer Linie von der Länge einer Ruthe vermöge des wahrscheinlichen Längenmessungsfehlers um 0,000399 Ruthen verschoben wird, wird er vermöge des wahrscheinlichen Winkelmessungsfehlers um 0,00012848 Ruthen verlegt.

Nun verhalten sich bekanntlich die Gewichte zweier Messungen zu einander umgekehrt wie die Quadrate der wahrscheinlichen Fehler. Setzen wir also das Gewicht einer Seitenmessung von einer Ruthe Länge $=1$, das einer Winkelmessung $=p$, so haben wir

$$\begin{aligned} 1 : p &= (0{,}00012848)^2 : (0{,}000399)^2 \\ \text{oder } &= \quad 1 \quad : \quad 9{,}644. \end{aligned}$$

Aehnliche Ermittlungen wird jeder Geometer vor seinen Ausgleichungsrechnungen anzustellen haben, weil möglicherweise seine Instrumente besser oder schlechter als diejenigen sind, welche die vorstehenden Thatsachen geliefert haben.

Bei der Benutzung des obigen Gewichtsverhältnisses müsste nun noch berücksichtigt werden, dass, nach den am angezeigten Orte mitgetheilten Ergebnissen, aus dem Totalfehler Δ einer gemessenen Länge von s Ruthen der dieser Messung zum Grunde liegende Einheitsfehler ε einfach durch die Formel

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{s}$$

gefunden wird, und dass diesem Werthe das Gewicht s beigelegt werden muss, gleichwie dem arithmetischen Mittel aus n einfachen Beobachtungen eines unveränderlichen Gegenstandes das Gewicht n zugeschrieben wird.

Nun war die mittlere Länge einer Polygonseite in dem Vermessungswerk, das den wahrscheinlichen Längenmessungsfehler von 0,000399 ergab, $=74{,}2$ Ruthen. Wollten wir also diesen Einheitsfehler mit dem Einheitsfehler einer Länge von s Ruthen in Rechnung bringen, und hätten wir das Gewicht des ersteren bei seiner Vergleichung mit dem wahrscheinlichen Winkelfehler $=1$ gesetzt, so müssten wir nun das Gewicht des Fehlers ε

$$p_\varepsilon = \frac{s}{74{,}2}$$

setzen, oder $p_\varepsilon = \frac{s}{\mu}$, wo μ die Länge der mittleren Polygonseite bezeichnet. Wir gehen nun zur Auseinandersetzung des Ausgleichungsgeschäfts selbst über.