Ausgleichung der Fehler polygonometrischer Messungen

Vorländer, J. J.

Leipzig, 1858

[Erläuterungen]

Demnach sind die Normalgleichungen:

					; Quersumme
1)	$+ 0{,}013975\ \mathrm{I}$	$- 3{,}4178\ \mathrm{II}$	$- 1{,}1208\ \mathrm{III}$	$= + 0{,}00082$	; $- 4{,}5238$
2)	$- 3{,}4178\ \mathrm{I}$	$+ 1478{,}56\ \mathrm{II}$	$+ 397{,}60\ \mathrm{III}$	$= + 0{,}462$	; $+ 1873{,}2042$
3)	$- 1{,}1208\ \mathrm{I}$	$+ 397{,}60\ \mathrm{II}$	$+ 694{,}14\ \mathrm{III}$	$= - 0{,}749$	; $+ 1089{,}8702$

Deren **Elimination** ist:

	$8{,}14535$	$0{,}53375_n$	$0{,}04953_n$	$6{,}91381$	$0{,}65550_n$
	$2{,}38840_n$	$2{,}92215$	$2{,}43793$	$9{,}30221_n$	$3{,}04390$
		$+ 835{,}89$	$+ 274{,}11$	$- 0{,}2005$	$1106{,}38$
4)		$+ 642{,}67$	$+ 123{,}49$	$+ 0{,}6625$	$766{,}82$
		$2{,}80799$	$2{,}09163$	$9{,}82119$	$2{,}88469$
	$1{,}90418_n$		$1{,}95371$	$8{,}81799_n$	$2{,}55968$
			$+ 89{,}99$	$- 0{,}065764$	$362{,}81$
			$+ 604{,}25$	$- 0{,}683236$	$+ 727{,}06$
		$9{,}28364$	$1{,}37527$	$9{,}10483$	$2{,}16833$
			$+ 23{,}73$	$+ 0{,}12730$	$+ 147{,}34$
5)			$+ 580{,}52$	$- 0{,}810536$	$+ 579{,}72$
			$2{,}76382$	$9{,}90877_n$	

$\log \mathrm{III} = 7{,}14495_n$, $\mathrm{III} = - 0{,}0013962$

$9{,}23658$	$+ 0{,}17242$
	$+ 0{,}83492$
	$9{,}92164$

$\log \mathrm{II} = 7{,}11365$, $\mathrm{II} = + 0{,}0012991$

$7{,}64740_n$	$7{,}19448$	
$- 0{,}004440$	$+ 0{,}001565$	$= + 0{,}002875$
		$+ 0{,}003695$
		$7{,}56764$

$\log \mathrm{I} = 9{,}42226$, $\mathrm{I} = + 0{,}2644$;

Probe:

$\log\ \mathrm{I} = 9{,}42220$	$\log \mathrm{II} = 7{,}11365$	$\log \mathrm{III} = 7{,}14495$
$0{,}53375_n$	$3{,}16984$	$2{,}59945_n$
$9{,}95595_n$	$0{,}28349$	$9{,}74440_n$
$- 0{,}90355$	$+ 1{,}92084$	$- 0{,}55514 = + 0{,}46215$
$\log \frac{1}{\mu p} = 7{,}14534$		
$\log\ \mathrm{I} = 9{,}42226$	$6{,}56760$,	$+ 0{,}0003695$
$\log\ \mathrm{II} = 7{,}11365$	$4{,}25899$,	$+ 0{,}0000018155$
$\log \mathrm{III} = 7{,}14495_n$	$4{,}29029_n$,	$- 0{,}0000019512$.

6) Die Elimination der Normalgleichungen ist durch die Quersummen der Coëfficienten controlirt. Sobald nämlich bei dem Geschäft eine unbekannte Grösse vollständig fortgeschafft ist, muss die Quersumme mit der Summe der voranstehenden Zahlen übereinstimmen; z. B. bei den Gleichungen (4) und (5).

Bei den erwähnten Controlen versteht es sich leicht, dass von den Differenzen in den letzten Stellen abgesehen werden muss, sobald die einzelnen

Summanden anders als durch blosse Addition oder Subtraction entstehen. So muss z. B. Summe (24) + (25) + (26) genau = (27) sein, aber Summe (27) weicht von k_w um 5 in der 6ten Decimalstelle ab, weil es für den Zweck der Rechnung ausreichend erschien, die Sicherung der Resultate nur bis zur 5ten Decimalstelle zu treiben, wozu fünfstellige Logarithmen und Multiplicationstafeln mit dreistelligen Factoren genügten.

Die Vergleichung der beiden Schematen für die Methoden No. I und III und der darin ausgeführten Rechnungsbeispiele zeigt uns, dass die strengste Methode ungefähr doppelt so viel Arbeit erfordert, als das Verfahren No. III. Jene erforderte 40, oder wenn wir die nur zur Bequemlichkeit zugesetzten Spalten No. (37) und (38) abrechnen wollen, wenigstens 38 Spalten, letzteres dagegen nur 25; auch verhalten sich die beiden Eliminationsgeschäfte hinsichtlich des Arbeitsaufwandes zu einander nahe wie 9 zu 4.

Das Bedürfniss des doppelten Zeitaufwandes wird die Geometer der strengsten Methode abhold machen; sie werden sich zu der bei ihr erforderlichen Anstrengung nur entschliessen, wo sie ein besonderes Interesse haben, das schärfste Resultat zu erzielen.

Das Verfahren No. III empfiehlt sich nicht nur durch den sehr viel geringeren Umfang der Arbeit, sondern auch durch Einfachheit im Rechnungsmechanismus.

Wer einen Logarithmus und einen Sinus aufschlagen kann und mit Multiplicationstafeln umzugehen weiss, der kann im Formular III ein Polygon oder einen Linienzug ausgleichen, wenn er auch von der wissenschaftlichen Begründung der darin schematisirten Methode keine Kenntniss hat.

Stellen wir nun auch eine genauere Vergleichung des Arbeitsaufwandes dieser Methode mit dem der hausbackenen Manieren an, so finden wir, dass von den 25 Spalten des Formulars No. III die Spalten No. (10), (11), (12), (15), (16), (17), (20), (21), (24), (25), also 10 Spalten lediglich für das Ausgleichungsgeschäft bestimmt sind. Das Eliminationsgeschäft ist bei zwei Unbekannten so unbedeutend, dass es beinahe den zwei Fehlerdivisionen, welche bei dem hausbackenen Verfahren nöthig sind, gleichgeachtet werden kann. Die Arbeitsvermehrung des Verfahrens No. III findet also im Verhältniss wie 15 zu 25 oder wie 3 zu 5 statt. Dabei darf aber nicht ausser Betracht bleiben, dass, abgesehen von dem Werthe einer wissenschaftlich begründeten Fehlerausgleichung, die in dem Verfahren No. III enthaltenen Rechnungscontrolen von grosser Wichtigkeit sind.

Es scheint unnöthig zu sein, das vorstehende Rechnungsbeispiel nach dem Verfahren No. III nochmals logarithmisch durchzurechnen, weil das bei dem geschlossenen Polygon benutzte Rechnungsschema auch für nicht geschlossene Züge unverändert beizubehalten ist.

Statt dessen wollen wir nun das Beispiel mit Hülfe der Coordinatentafeln von Ulffers*) nach dem Verfahren No. III durchrechnen. Mit solchen Tafeln wird das Rechnungswerk durch den Umstand in hohem Grade erleichtert, dass

*) Coblenz 1854.

für jeden Brechpunkt nur einmaliges Aufschlagen derselben nöthig ist, um sowohl die Coordinaten-Unterschiede als auch sämmtliche Hülfszahlen der Ausgleichung zu finden. Sind nämlich $\Delta y = s \,.\sin a$, $\Delta x = s \,.\cos a$ herausgehoben, so finden wir auf der Stelle auch die drei Hülfszahlen

$$\Delta y \,.\sin a, \quad \Delta y \,.\cos a, \quad \Delta x \,.\cos a$$

oder

$$\Delta x \,.\sin a,$$

indem wir Δy und Δx als neue Seitenlängen für den nämlichen Winkel a behandeln.

Um sich gegen Irrthümer zu schützen, ist es rathsam, die einzelnen Theile, aus denen sich die vorgedachten Resultate zusammensetzen, in das Schema niederzuschreiben, statt sie im Kopfe zusammenzuzählen. Es ist auch nützlich, Δy und Δx zusammengesetzt in eine besondre Rubrik zu schreiben; dagegen kann das Zusammenziehen der Theile für

$$\Delta y \,.\sin a, \quad \Delta y \,.\cos a, \quad \Delta x \,.\cos a$$

füglich unterbleiben, weil bei Bildung der Summen

$$[\Delta y \,.\sin a], \quad [\Delta y \,.\cos a], \quad [\Delta x \,.\cos a]$$

alle Theile einfach zusammen addirt werden können und bei der späteren Multiplication mit den durch die Elimination der Normalgleichungen gewonnenen Factoren I und II, wo wir

$$\Delta y \,.\sin a, \quad \Delta y \,.\cos a, \quad \Delta x \,.\cos a$$

nur bis auf die erste Decimalstelle genau zu kennen brauchen, die Zusammenzählung leicht im Kopfe bewirkt werden kann.