Wärmetheorie & Hydraulik

Pieper, Andreas

Karlruhe, 1872/73

Nicht permanente Bewegung des Wassers

urn:nbn:de:bsz:31-279864

[illegible] $R_1 T_1 = p_1 v_1$ [illegible]

$$u = \varphi \sqrt{2g \frac{n}{n-1} p_1 v_1 \left[1-\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

[illegible] A [illegible] $= \alpha A$ [illegible] u [illegible] $= \alpha A u$. [illegible]

$$G = \alpha A u$$

[illegible] α [illegible] $p v^n = p_1 v_1^n$ [illegible] $v = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}} v_1$ [illegible]

$$G = \alpha A u \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{v_1}.$$

[illegible] α [illegible] u [illegible] $\alpha\varphi = \mu$ [illegible]

$$G = \mu A \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} \sqrt{2g \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{v_1} \left[1-\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

Nicht permanente Bewegung des Wassers.

[illegible]

[illegible] A [illegible] h [illegible] $= F$ [illegible] F [illegible] h [illegible] h_0 [illegible] $= F_0$ [illegible] t [illegible] $= h_0$ [illegible] h_1 [illegible] A [illegible] F [illegible]

$$u = \varphi\sqrt{2gh}$$

[illegible]

h nur einen unmerklichen, vorübergehenden Einfluss hat, wird streng genommen das nicht d. Fall sein, indessen zeigt eine spezielle Untersuchung, daß man, falls nur d. Öffnung ziemlich klein ist im Vergleich mit d. Querschnitt F und natürlich $p_0 = p$ ist, einen geringen Fehler begeht. –

Es soll nun zunächst vorausgesetzt werden, d. Gefäß erhalte keinen Zufluß, es muß dann während d. Abfließens d. Wassers d. Oberfl. desselben sich senken. Ist in irgend einem Augenblick h d. Wasserstand im Gefäß, so ändert sich derselbe im nächstfolgenden Zeitelement dt um dh und zwar ist dann dh eine negative Größe und setzt $-dh$ d. absolute Senkung d. Wasserspiegels und d. verschwindende Wasservolumen $= + F\,dh$. Dieses Volumen kann aber auch gleich gesetzt werden $= \mu A\sqrt{2gh}\,dt$ und setzt:

$$dt = -\frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\,\frac{F\,dh}{\sqrt{h}}$$

und folgt hieraus durch Integration d. Zeit, in welcher d. Wasserstand von h_0 auf h herabsinkt:

$$t = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_h^{h_0}\frac{F\,dh}{\sqrt{h}}$$

Wird ein Gefäß von constantem Horizontalschnitt vorausgesetzt, so folgt:

$$t = \frac{2F}{\mu A\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0}-\sqrt{h}\right) = \frac{F}{\mu A}\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}}-\sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

Es ist also d. Zeit, d. d. Wasser braucht, um bis zur Höhe d. Mündung abzufließen:

$$T = \frac{F}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Erfolgt d. Ausfluß aus einer kürzeren Ausflußröhre, so ist h d. Höhe d. Wasserspiegels über d. Mündung d. Röhre u. es sollte dann d. Widerstand in dieser Röhre mit zu berücksichtigen. Natürlich braucht dann, besonders wenn d. Ausflußröhre geneigt ist, d. Wasserspiegel im Gefäß nicht bis $h = 0$ herabsinken.

Hat d. Ausflußgefäß eine beliebige Gestalt, so kann in d. meisten Fällen gesetzt werden:

$$F = p + qh + rh^2$$

Hierzu gehören alle prismatischen Gefäße ohne Grenze und alle pyramidenförmigen Gefäße; zu d. letzteren gehören alle Gefäße, deren Wände Umdrehungsfl. sind. Unter einem Prismatoid pflegt ein Körper verstanden zu werden, d. auf folgende Art entstanden zu denken ist: Hat man irgend ein ebenes Polyg. und legt durch d. Seiten desselben gerade Linien und denkt sich nun d. Polyg. so fortbewegt, daß seine Ebene beständig parallel bleibt und seine Eckpunkte beständig auf diesen geraden Linien bleiben, so beschreibt dieses Polyg. ein Prismatoid. –

Setzt man letzteren Ausdruck für F in d. Gl. für T, so folgt:

$$T = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_0^h\left(p z^{-\frac{1}{2}} + q z^{\frac{1}{2}} + r z^{\frac{3}{2}}\right)dz$$

$$= \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\left(\frac{p h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{q h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{r h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)$$

$$T = \frac{1}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(p + \tfrac{1}{3}qh + \tfrac{1}{5}rh^2\right)$$

Hier können d. Coeff. p, q u. r auch ersetzt werden durch 3 an gewissen Stellen bekannte Horizontalschnitte d. Gefäßes; dazu eignen sich namentlich d. Horizontalschnitt in d. Höhe h über d. Mündung, in d. Höhe $\frac{h}{2}$ und in d. Höhe 0. Bezeichnet man d. Inhalte dieser Schnitte mit F, G u. H, so hat man nun:

$$F = p + qh + rh^2 \qquad G = p + \tfrac{1}{2}qh + \tfrac{1}{4}rh^2 \quad \text{und} \quad H = p.$$

und daraus ergiebt sich:

$$T = \frac{1}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left\{H + \frac{1}{3}(-F + 4G - 3H) + \frac{2}{5}(F - 2G + H)\right\}$$

$$T = \frac{F + 8G + 6H}{15\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Soll d. Zeit t gefunden werden, binnen welcher d. Anfangswasserstand h_0 sich reducirt auf h, so ist

$$t = T_0 - T = \frac{1}{\mu A}\left\{\frac{F_0 + 8G_0 + 6H_0}{15}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \frac{F + 8G + 6H}{15}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right\}$$

Wenn d. Gestalt d. Gefässes ganz genau bestimmt ist, so wird man einen dieser 3 Horizontalschnitte durch d. Dimensionen d. beiden andern ausdrücken können, so daß dann, um d. Zeit für d. Niedersinken d. Wasserspiegels zu bestimmen nur d. Kenntniß von 2 resp. 3 verschiedenen Horizontalschnitten nöthig ist.

Es habe z. B. d. Ausflußbehälter eine obeliskenförmige Gestalt, also ein Prisma mit parallelen Seiten, d. aber im Allgemeinen nicht einander ähnlich sind; es sei:

$F = ab$ u. $H = a'b'$

dann ist für d. mittleren Querschnitt: $G = \frac{a+a'}{2}\cdot\frac{b+b'}{2}$

und folgl.: $F + 8G + 6H = 3ab + 8a'b' + 2(ab' + a'b)$

so daß man nur d. Dimensionen von F u. H zu kennen braucht, um T zu berechnen; um t zu berechnen müßte man noch d. Dimensionen von F_0 kennen. –

Wäre d. Gefäß pyramidal, so würde auch irgend eine Dimension d. Querschnitts d. arithmetische Mittel d. homologen Dimension d. Querschnitte F u. H sein; in einem solchen Falle würden auch d. homologen Dimensionen proportional d. Wurzel aus d. Inhalt d. Querschnitte; wenn also irgend eine Dimension d. Querschnitts G d. arithmetische Mittel d. analogen Dimensionen von F u. H ist, so ist mithin auch d. Wurzel aus d. mittleren Querschnitt G d. arithmetische Mittel aus d. Wurzel von F und H, also: $\sqrt{G} = \frac{\sqrt{F} + \sqrt{H}}{2}$

und folgl.: $F + 8G + 6H = 3F + 8H + 4\sqrt{FH}$

Es wird mit Rücksicht auf derartige ~~[illegible]~~ Aufgaben nicht selten vorkommen, daß d. Gestalt d. Ausflußbehälters so complicirt ist, daß man sich mit einer angenäherten Berechnung dieses Inhaltes behelfen muß. Als erste Annäherung kann dazu d. Voraussetzung dienen, es seien d. Querschnitte ganz [illegible] proportional d. Abstand von irgend einer Horizontalebene. Wenn es sich also um d. Ausfluß aus einem Teich handelt, so wird in d. Regel d. Gestalt dieses Behälters so complicirt, daß man sich mit einem solchen Näherungsverfahren behelfen muß, dabei kann es d. Fall sein, daß man von d. Teiche weiter nichts kennt, als d. Oberfl. u. allenfalls d. größte Tiefe desselben. In einem solchen Falle wird man d. Wahrheit ziemlich nahe kommen, wenn man annimmt, daß d. Horizontalschnitte eines solchen Teichs d. Höhen bis zum tiefsten Punkt proportional wären, wie es d. Fall wäre, wenn d. Boden d. Teiches wie ein Umdrehungsparaboloid gestaltet wäre. Wenn eine gewöhnliche Parabel sich um d. vertical liegende Axe dreht, so ~~[illegible]~~ beschreibt dieselbe einen Körper, d. d. Eigenschaft hat, daß irgend ein Horizontalschnitt proportional d. Abstande bis zum tiefsten Punkte ist. Kennt man also von Teich nur d. Größe d. Oberfl. und d. größte Tiefe, so wird man meistens am wenigsten fehl greifen, wenn man annimmt, es sei d. Grundfl. d. Teiches annähernd einem Umdrehungsparaboloid gestaltet. Auf Grund dieser Voraussetzung würde man dann folgende Formel herstellen können, um d. Zeit = t zu berechnen, bis zu welcher ein ursprünglicher Wasserstand in einen kleineren übergeht; es sei d. ursprünglich wahrgenommene Wasseroberfl. = F_0 und d. Höhe derselben über d. Schwerpunkt d. Ausflußmündung = h_0. diese Ausflußmündung liege noch um a höher als d. tiefste Punkt d. Teiches, so daß also d. größte Wassertiefe = $h_0 + a$ ist; es handelt sich nun um d. Größe $F + 8G + 6H$. Zu dem Ende ist: –

$$F_0 : G_0 : H = (a+h_0) : (a+\tfrac{1}{2}h_0) : a$$

also $$G = \frac{a+\frac{1}{2}h_0}{a+h_0} F_0 \qquad \text{und} \qquad H = \frac{a}{a+h_0} F_0 .$$

demnach $$F_0 + 8G_0 + 6H = \frac{15a+5h_0}{a+h_0} F_0$$

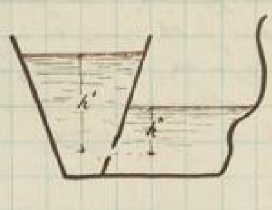
daher $$F + 8G + 6H = \frac{15a+5h}{a+h} F = \frac{15a+5h}{a+h_0} F_0$$

also $$t = \frac{F_0}{\mu A}\left(\frac{a+\frac{1}{3}h_0}{a+h_0}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \frac{a+\frac{1}{3}h}{a+h}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

Erfolgt d. Abfluß durch eine Röhre, so muß bei d. Wahl von μ natürlich auch d. Widerstand in d. Abflußröhre mit Rücksicht genommen werden, μ bedeutet dann also einen resultierenden Geschw.-Coeff.; ist ζ d. resultierende Widerstandscoeff., so ist:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{\mu^2} - 1 \text{ also: } \frac{1}{\mu} = \sqrt{1+\zeta}. -$$

Es war bei allen diesen Aufgaben vorausgesetzt worden, daß d. Ausfluß aus d. Behälter einfach in d. freie Luft erfolge. Ein anderer Fall, d. auch von Wichtigkeit ist, betrifft d. Ausfluß d. Wassers aus einem Gefäß in ein anderes, welche mit einander communicieren durch eine Öffnung in ihrer gemeinschaftlichen Scheidewand; statt dieser Öffnung kann jedoch auch eine Communicationsröhre vorhanden sein. Steht d. eine resp. andere Gefäß [illegible] mit einem Zufluß od. Abfluß, so ist [illegible] Ausströmung stattfindet.



Anfangs stehe in d. ersten Gefäß d. Wasser in d. Höhe h' über d. Schwerpunkt d. Communicationsmündung, im zweiten in d. Höhe h''; d. Differenz dieser beiden Höhen sei h; es fragt sich nun, binnen welcher Zeit wird diese anfängliche Niveaudifferenz übergehen in 0. Es sei irgend ein Horizontalschnitt d. ersten Gefäßes bezeichnet mit F', derselbe ist eine gegebene Function d. Höhe z' dieses Schnittes über d. Schwerpunkt d. Mündung. Es sei ebenso irgend ein Horizontalschnitt d. 2ten Gefäßes in d. Höhe z'' über d. Schwerpunkt d. Mündung mit F'' bezeichnet, so daß F'' gleichfalls eine gegebene Function von z'' ist. Irgend eine beliebige Niveaudifferenz d. beiden Wasserspiegel sei mit z bezeichnet; ist während d. Abflusses d. Wassers d. Niveaudifferenz in irgend einem Augenblick $= z$ geworden, dann würde, wenn dieses z eine Zeit lang unverändert bliebe, d. ausfließende Wasservolumen $= \mu A\sqrt{2gz}$ sein; diesen Zustand kann man wenigstens für ein unendl. kleines Zeitelement dt [illegible] constant setzen, dann ist dieses Volumen $= A\mu\sqrt{2gz}\,dt$. Dieses Volumen kann aber auch noch auf eine 2te Weise ausgedrückt werden, wenn nämlich in diesem Augenblick d. Höhe d. Wasserspiegels über d. Schwerpunkt d. Mündung $= z'$ geworden ist, so wird im nächstfolgenden Zeitelement dt d. Wasservolumen, welches aus diesem Gefäß herausfließt, $= -F'dz'$ sein, also:

$$\mu A\sqrt{2gz}\,dt = -F'dz'$$

Aus d. Gl. $z' - z'' = z$, wo z' u. z'' veränderliche Höhen sind, folgt: $dz' - dz'' = dz$. Andererseits kann durch z' u. z'' d. Wasservolumen ausgedrückt werden, welches in einem Zeitelement überfließt; wie schon gezeigt, ist dieses Wasservol. $= -F'dz'$; es ist aber auch $= +F''dz''$; also:

$$F'dz' + F''dz'' = 0.$$

Multipliziert man d. vorletzte Gl. mit F'' und addiert sie zur letzteren, so folgt:

$$(F' + F'')\,dz' = F''dz$$

also $$F'dz' = \frac{F'F''}{F'+F''}\,dz$$

und daraus: $$\mu A\sqrt{2gz}\,dt = -\frac{F'F''}{F'+F''}\,dz.$$

Wenn man hieraus dt entwickelt, so ist nun, um diejenige Zeit zu erhalten, binnen welcher

H2279. –

d. anfängliche Höhe h übergeht in 0, d. Integration zu erstrecken links von $t=0$ bis $t=\tau$ und rechts von $z=0$ bis $z=h$, dann findet man:

$$\tau = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{\sigma'\cdot\sigma''}{\sigma'+\sigma''}\cdot\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

Bevor d. Integration ausgeführt werden kann, müssen σ' u. σ'' als Funktionen von z ausgedrückt werden. Dazu dienen d. Gl.:

$$z'-z''=z \quad \text{und} \quad \int_{h'}^{z'}\sigma' dz' + \int_{h''}^{z''}\sigma'' dz'' = 0.$$

mit denen z' u. z'' durch z, h' u. h'' ausgedrückt werden können. d. Integration obiger Gl. wird aber gewöhnlich so umständlich, daß man sich mit einem Näherungswert begnügen muß. Wenn aber d. Querschnitte konstant sind, wie bei Schleusenkammern, kann man d. Faktor $\frac{\sigma'\sigma''}{\sigma'+\sigma''}$ herausnehmen und erhält dann:

$$\tau = \frac{2}{\mu A\sqrt{2g}}\,\frac{\sigma'\sigma''}{\sigma'+\sigma''}\sqrt{h} = \frac{1}{\mu A}\,\frac{\sigma'\sigma''}{\sigma'+\sigma''}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

dieser Ausdruck unterscheidet sich von d. Formel für d. Ausfließzeit d. Wassers aus einfachen prismatischen Gefäßen nur dadurch, daß an Stelle d. konstanten Horizontalschnitts hier d. halbe harmonische Mittel d. konstanten Querschnitte beider Gefäße getreten ist. Unter d. harmonischen Mittel verschiedener Größen versteht man nämlich d. Größe, deren reziproker Wert = d. arithmetischen Mittel aus d. reziproken Werten aller einzelnen Größen ist, also z. B.:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots\frac{1}{a_n}\right).$$

Es ist also d. harmonische Mittel aus 2 Größen a_1 u. a_2 folgendermaßen zu bestimmen.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a_1+a_2}{a_1 a_2} \quad \text{also} \quad a = 2\,\frac{a_1 a_2}{a_1+a_2}$$

Soll wieder d. Zeit t berechnet werden, binnen welcher d. anfängliche Niveaudifferenz h_0 übergeht in h, so hat man $t=\tau_0-\tau$ zu setzen also:

$$t = \frac{1}{\mu A}\,\frac{\sigma'\sigma''}{\sigma'+\sigma''}\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}}-\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$$

Diese Formel ist namentlich d. an τ [illegible] in Anwendung bei d. Leeren und Füllen von Schleusenkammern; hierbei können dreierlei Fragen vorkommen, wenn in Schiffahrtskanälen eine doppelte Schleuse gegeben ist mit 2 Kammern.

nämlich 1) wenn d. obere Schleusenkammer gegen d. Oberwasser abgesperrt ist und d. untere gegen d. Unterwasser, dann dient diese Formel zur Berechnung d. Zeit, binnen welcher d. Höhendifferenz in beiden Kammern = 0 ist.

2) wenn d. untere Kammer gegen d. obere abgesperrt ist, hier aber d. Wasserhöhe steht als d. Unterwasserspiegel [illegible] und d. Schützen an unteren geöffnet werden, so handelt es sich um d. Berechnung d. Zeit, in welcher sich d. Wasserstand in d. untersten Kammer bis zum Unterwasserstand erniedrigt hat; letzterer ist aber konstant, so daß $\sigma''=\infty$ gesetzt werden kann und damit ist: $\tau = \frac{\sigma'}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

3) kann es d. Fall sein, daß d. Zeit berechnet werden soll, binnen welcher d. obere Schleusenkammer, wenn sie gegen d. untere abgesperrt ist, sich bis zum Oberwasserspiegel füllen wird; zu d. Zweck hat man $\sigma'=\infty$ zu setzen u. es wird dann: $\tau = \frac{\sigma''}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}$, es tritt also nur σ'' an Stelle von σ'!

Es kann nun ein verwickelter [illegible] Fall vorkommen, in sofern als ein Gefäß, durch welches Wasser abfließt, zwar einen ganz geringen Zufluß hat, d. aber nicht beständig = d. Abfluß aus d. Mündung ist. Es sei ein Gefäß gegeben, welches einen konstanten Wasserzufluß hat und zwar fließe p. Sek. ein Wasservolumen V ein. Es fließt andererseits durch eine Öffnung Wasser aus d. Gefäße ab. Anfangs sei d. Wasserstand im Gefäß $= h_0$

und es fragt sich, in welcher Zeit wird sich diese ursprüngliche Höhe h_0 ändern in h. Sei irgend einem Augenblick bei z d. Höhe d. Wasserspiegels im Gefäß über d. Schwerpunkt d. Mündung oder über d. Unterwasserspiegel. Bliebe diese Höhe z eine Sekunde hindurch unverändert, so würde ein Wasservolumen ausfließen $= \mu A\sqrt{2gz}$; weil aber gleichzeitig d. Wasservolumen V in d. Gefäß hineinfließt, so würde d. Wasserverlust $= \mu A\sqrt{2gz} - V$ sein; ein negativer Werth dieses Verlustes würde einem Zuwachs entsprechen. Wenn diese Annahme auch thatsächlich nie eintrifft, so kann man doch annehmen, es bliebe dieser Zustand während eines Zeitelements dt constant, dann erhalten wir als Wasserverlust in diesem Zeitelement: $(\mu A\sqrt{2gz} - V)dt$. Ist nun Ω d. Flächeninhalt d. Querschnitts d. Gefäßes in d. Höhe z, so ist d. verschwindende Wasservolumen auch hier $= -\Omega dz$, also:

$$(\mu A\sqrt{2gz} - V)dt = -\Omega dz.$$

Entwickelt man hieraus dt, so müßte man, um d. Zeit t zu erhalten, binnen welcher sich z von h_0 bis h ändert, d. Ausdruck rechts integriren von h_0 bis h; statt dessen kann man wieder wie früher integriren von h bis h_0 u. d. $-$ Zeichen in $+$ verwandeln.

also:

$$t = \int_h^{h_0} \frac{\Omega dz}{\mu A\sqrt{2gz} - V} = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}} \int_h^{h_0} \frac{\Omega dz}{\sqrt{z} - \sqrt{k}}$$

wenn $\sqrt{k} = \frac{V}{\mu A\sqrt{2g}}$ ist; also $k = \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\mu A}\right)^2$.

Folglich ist k d. Druck-Höhe, welche d. mittleren Geschwindigkeit entspricht, vermöge welcher V durch d. Querschnitt μA hindurchfließen würde; es ist also k eine Constante.

Ist Ω constant, so ist:

$$t = \frac{\Omega}{\mu A}\sqrt{\frac{2}{g}} \int_h^{h_0} \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z} - \sqrt{k}}$$

Nun ist:

$$\frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z} - \sqrt{k}} = \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}} + \sqrt{k}\,\frac{\frac{1}{2}dz\sqrt{z}}{\sqrt{z} - \sqrt{k}} = d\sqrt{z} + \sqrt{k}\,d[l(\sqrt{z} - \sqrt{k})]$$

also:

$$t = \frac{\Omega}{\mu A}\sqrt{\frac{2}{g}}\left\{\sqrt{h_0} - \sqrt{h} + \sqrt{k}\,l\left(\frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h}}{\sqrt{h} - \sqrt{k}}\right)\right\}.$$

Wäre $h = k$, so müßte $t = \infty$ sein d.h.: es nähert sich d. Höhe d. Wasserspiegels asymptotisch d. Größe k. Diese Annäherung kann mit steigendem od. mit sinkendem Wasserspiegel hergestellt werden, je nachdem diese Grenze erreicht wird, dann aber ändert sich d. ganze Zustand d. Wassers eine gewisse Zeit. Setzt man $V = 0$, so muß man wieder auf eine bekannte Formel kommen, dies ist auch thatsächlich d. Fall, denn für $V = 0$ ist auch $k = 0$, also d. ganze letzte Glied $= 0$.