Wärmetheorie & Hydraulik

Pieper, Andreas

Karlruhe, 1872/73

Bewegung der Luft in längeren Röhren

urn:nbn:de:bsz:31-279864

Setzt man diese Zahlenwerte in G ein, so findet man:

$$\frac{G}{bA} = \frac{13324}{1-0,85\,f(p)}\sqrt{\frac{f(p)}{T_1}}$$

wobei dann d. Werth von $f(p)$ entweder d. umstehenden Tabelle entnommen werden, od. man kann ihn auch mit genügender Annäherung berechnen aus d. Formel $f(p) = 0,291\,\delta(1+0,355\,\delta)$ und zwar mit Rücksicht darauf, daß dieselbe δ hier niemals größer als 0,2 zu sein pflegt, wo $\delta = \frac{p_1 - p}{p_1}$. Unter solchen Umständen kommt es wenig darauf an, daß man einen Gliede nimmt, da d. Fehler sehr klein werden.

Es sei z. B.: eine Gebläsemaschine für einen Cupolofen zu berechnen, welchem p. Min. 2,5 klg. Luft zugeführt werden soll, also $G = 2,5$. Dem Ort d. Aufstellung entsprechend sei $b = 0,74$ ~~[illegible]~~, dann ist: $\frac{1}{b} = \frac{76}{74} = 1,027$. Angenommen es solle in d. Windkammer vor d. Düsen eine Luftspannung stattfinden, welche gemessen wird durch eine Quecksilbersäule von 88 Ctm. Höhe, so daß also d. Überdruck durch einen Unterschied $88-74 = 14$ Ctm Quecksilbersäule gemessen ist, dann ist: $\delta = \frac{88-74}{88} = 0,159$.
Vorausgesetzt, d. Gebläse solle durch kalten Wind gespeist werden, so daß d. absolute Temp. in runder Zahl etwa $= 300$ gesetzt werden mag. Hierfür findet man:

$$f(p) = 0,04888$$

und damit d. erforderliche Größe sämmtlicher Düsenöffnungen:

$$A = 1,027 \cdot 2,5\,\frac{1-0,85 \cdot 0,04888}{13324}\sqrt{\frac{300}{0,0488}} = 0,01447 \text{ □m.}$$

Bewegung der Luft in längeren Röhren.

Hierfür gelten zunächst d. schon bekannten Glen:

$$\frac{\sigma u}{g} = \frac{RT}{p}$$

$$\frac{u\,du}{g} + \frac{n}{n-1} R\,dT = ds\cos\psi + W\,dQ$$

$$\frac{R}{n-1}\,dT + RT\,\frac{d(\sigma u)}{\sigma u} = W\,dQ + \lambda\,\frac{ds}{\delta}\,\frac{u^2}{2g}$$

$$\frac{u\,du}{g} + R\,dT - RT\,\frac{d(\sigma u)}{\sigma u} = ds\cos\psi - \lambda\,\frac{ds}{\delta}\,\frac{u^2}{2g}.$$

Es sei nun vorausgesetzt, d. betr. Röhre sei in einer Reihe von constanten Durchmesser, ferner sei dieselbe annähernd horizontal, so daß man d. Einfluß d. Schwere vernachlässigen kann, und endlich sei angenommen, daß d. Wärmeübertragung durch d. Rohrwand so gering sei, daß sie ganz vernachlässigt werden kann, es ist also zu setzen: $dQ = 0$ und $\cos\psi = 0$.
Für d. Anfangszustand sei d. Pr. $= p_1$, d. absolute Temp. $= T_1$ und d. Geschw. $= u_1$, es sollen dieselben Größen nun in d. Entfernung s gefunden werden.
Zur Abkürzung sei $\frac{u^2}{2g} = h$ und $\frac{u_1^2}{2g} = h_1$; dann folgt aus d. Ersten Gl.:

$$dT = -\frac{n-1}{n}\,\frac{dh}{R}$$ und somit durch Integration: $$T = T_1 - \frac{n-1}{n}\,\frac{h-h_1}{R}.$$

Somit ist d. Temp. in d. Entfernung s gefunden, wenn man d. Geschw.-Höhe h kennt.
Zunächst ist zu bemerken, daß mit d. Querschnitt constant ist: $\frac{d(\sigma u)}{\sigma u} = \frac{du}{u} = \frac{u\frac{du}{g}}{\frac{u^2}{g}} = \frac{dh}{2h}$ ist und somit lautet Gl. 3 wenn man für dT seinen Werth und $\psi = 0$ setzt:

$$-\frac{dh}{n} + RT\,\frac{dh}{2h} = \lambda\,\frac{ds}{\delta}\,h.$$

Setzt man hier d. Ausdruck für T ein, so läßt sich d. Gl. auf folgende Form bringen:

$$\left(\mathfrak{R}\mathfrak{T}_1 + \frac{n-1}{n} h_1\right)\frac{dh}{h^2} - \frac{n+1}{n}\frac{dp}{p} = 2\lambda\frac{ds}{d}.$$

Diese Gl. kann nun integrirt werden, dabei ist $\frac{dh}{h^2} = d\left(-\frac{1}{h}\right)$ und $\frac{dh}{h} = d[\ln h]$.

also:
$$\left(\mathfrak{R}\frac{\mathfrak{T}_1}{h_1} - \frac{n-1}{n}\right)\left(1-\frac{h_1}{h}\right) - \frac{n+1}{n}\ln\frac{h}{h_1} = 2\lambda\frac{s}{d}.$$

Durch diese Gl. ist h bestimmt. Bei d. Anwendung derselben erfordert diese Gl. allerdings d. unbequeme Lösung durch allmähliges Probiren. Hierbei läßt sich nun aber bemerken, daß selbst bei verhältnißmäßig sehr langen Rohrleitungen d. Änderung d. Temp. immer eine so äußerst geringe ist, daß man genau genug [?] ist, wenn man von vornherein eine constante Temp. zu Grunde legt, welches an einem Beispiel gezeigt werden soll. Zu d. Zweck sei zunächst etwas bezüglich λ vorausgeschickt. Gewöhnlich hat man denselben aus Versuchen festgestellt, wo d. Geschw. ungefähr 20 m/s betrug, wie dies bei Gebläsen vorzukommen pflegt. Es ergab sich dann: $\lambda = 0{,}025$. Weisbach hat namentlich für größere Geschw. bis zu 150 m p. Sek. Versuche angestellt und fand:
$$\lambda = \frac{0{,}12}{\sqrt{u}}, \text{ d. h.:}$$

für $u =$	9	16	25	36
$\lambda =$	0,04	0,03	0,024	0,02.

Weil aber diese Weisbach'schen Versuche angestellt sind für Geschw. von wenigstens 25 m, so wird es doch fraglich sein, ob man sich für d. kleineren Geschw. danach richten kann. Jedenfalls bei noch kleineren Geschw. wie 9 m p. Sek. wird es nicht erlaubt sein λ größer als 0,04 zu nehmen. – Es sei nun z. B.: $u_1 = 16$ m. Gegen d. Ende d. Rohres nimmt d. Geschw. zu, indem d. spec. Gewicht [?] abnimmt, muß d. Volumen, damit also dasselbe durch denselben Querschnitt hindurchströmen kann, muß d. Geschw. vergrößert werden und es sei dementsprechend $u = 20$ m; es wird λ entsprechend $u_1 = 16$ zu 0,03 angenommen und es sei d. absolute Temp. zu Anfang, also $\mathfrak{T}_1 = 300$; also ist: $\frac{u_1}{u} = 0{,}8$ und folgl.: $\frac{h_1}{h} = 0{,}64$. Dies in d. letzte Gl. eingesetzt giebt:

$$\left(\frac{29{,}3\cdot 300}{\frac{1}{2\cdot 9{,}81}\cdot 256} + \frac{,41}{1,41}\right)0{,}36 - \frac{2,41}{1,41}\ln\frac{1}{0{,}64} = 0{,}06\frac{s}{d}$$

und also
$$\frac{s}{d} = 4031.$$

ferner bekommt man:
$$\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T} = \frac{,41}{1,41}\frac{h}{\mathfrak{R}}\left(1-\frac{h_1}{h}\right) = \frac{,41}{1,41}\frac{400}{2\cdot 9{,}81\cdot 29{,}3}\,0{,}36 = 0{,}073^\circ.$$

Man ersieht hieraus daß d. Voraussetzung einer sehr langen Röhre von Gleich[?] ist und daß in derselben d. Änderung d. Temp. noch nicht $\frac{1}{10}^\circ$ beträgt, dieses erscheint sich schon d. gewöhnlichen Leitungen [?], so daß man genau genug ist, wenn d. einfachere Voraussetzung constanter Temperatur zu Grunde gelegt [?]. – Es bleiben nun also nur 2 Unbekannte übrig, wodurch es hier zulässig sein wird, gleichzeitig d. [?] d. Schwere zu berücksichtigen, wie dies bei nicht horizontalen Röhren d. Fall ist. Also

$$d\mathfrak{T} = 0 \quad \text{und} \quad d\mathfrak{T} = 0$$

Es lautet nun Gl. 4 wenn wie oben $\frac{u\,du}{g} = dh$ und $\frac{d\,\mathfrak{J}u}{\mathfrak{J}u} = \frac{dh}{2h}$ gesetzt wird:

$$dh - \mathfrak{R}\mathfrak{T}\frac{dh}{2h} = ds\cos\psi - \lambda\frac{ds}{d}h$$

o.
$$\left(\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}{2h} - 1\right)dh = \left(\lambda\frac{h}{d} - \cos\psi\right)ds.$$

Dazu kommt: $\frac{\mathfrak{J}u}{g} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}{p}$. Dann hat man 2 Gln., worin $\mathfrak{T}$ u. h gegeben sind, wenn sie für einen bestimmten Querschnitt bekannt sind. Man bemerkt erst [?] Gl. [?], daß man 1 gegen $\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}{2h}$ vernachlässigt, denn es ist im Allgemeinen $\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}{2h}$ eine sehr große Zahl, es ist nämlich $\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}{2h} \geq 100$, so daß nur d. Fall, wenn d. Vernachlässigung auch schon ganz gerechtfertigt, da λ ohnehin nicht genau auf 1% angegeben werden kann.

[illegible] $\frac{RT}{2h} > 100$ wenn $h < \frac{RT}{200}$ oder T mit d. durchschnittlichen 300 angenommen und mit $R = 29{,}8$: wenn $h < \frac{29{,}8 \cdot 300}{200}$ also wenn $h < 43{,}95$ oder demnach wenn $u < \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 43{,}95}$ also wenn $u < 29{,}4$ ist. [illegible] in d. That selten größer als dieser Werth, so daß man 1 gegen $\frac{RT}{2h}$ vernachlässigen kann. [illegible] so kann man d. Gl. integrieren unter d. Voraussetzung, daß ψ eine Constante ist, [illegible] d. Röhre [illegible] oder wenn ψ ein [illegible] Mittelwerth; dann folgt

$$ds = \frac{\frac{RT}{2h}\,dh}{\lambda\frac{h}{d} - \cos\psi} \quad \text{oder} \quad \frac{2\cos\psi}{RT}\,ds = \frac{dh}{\left(\frac{\lambda}{d\cos\psi}h - 1\right)h}$$

$$\frac{2\cos\psi}{RT}\,ds = \left(\frac{\frac{\lambda}{d\cos\psi}}{\frac{\lambda}{d\cos\psi}h - 1} - \frac{1}{h}\right)dh = \left(\frac{1}{h - \frac{d\cos\psi}{\lambda}} - \frac{1}{h}\right)dh$$

dieses integriert von 0 bis s giebt:

$$\frac{2\cos\psi}{RT}\,s = \ln\frac{h - \frac{d\cos\psi}{\lambda}}{h_1 - \frac{d\cos\psi}{\lambda}} - \ln\frac{h}{h_1} = \ln\frac{1 - \frac{d\cos\psi}{\lambda h}}{1 - \frac{d\cos\psi}{\lambda h_1}}$$

Für d. Specialfall, daß d. Röhre horizontal ist, also $\psi = 90°$ würde diese Gl. eine identische Gl. liefern; man muß dann auf d. ursprüngl. Diff.-Gl. zurückgehen; diese lautet für $\psi = 90°$:

$$ds = \frac{RT}{2h}\,\frac{d}{\lambda h}\,dh$$

und hieraus durch Integration:

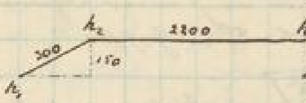
$$\text{da } \frac{dh}{h^2} = -d\frac{1}{h} \text{ ist}: \quad \lambda\frac{s}{d} = \frac{RT}{2}\left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{h_1}\right)$$

$$\text{oder } \frac{RT}{2}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h}\right) = \lambda\frac{s}{d}.$$

[illegible] in dem andern Fall ist nun d. Geschw.-Höhe h und damit d. Geschw. selbst bestimmt und durch d. Continuitätsgl. auch d. Pressung. —

Beispiel. Größere Leitungen von Luft kommen unter Andern bei Tunnelarbeiten, wo es darauf ankommt Luft fortzuleiten zum Betrieb d. Maschinenbohrmaschinen, wozu d. alte Luft sich besonders gut eignet indem dieselbe nach d. Gebrauch noch zur Ventilation verwendet werden kann. Angenommen, es sei d. Bohrung eines größeren Tunnels fortgeschritten bis auf eine solche Stelle, daß d. Luftleitungsröhre eine Länge von 2500 m hat. Diese Röhre habe einen Durchmesser $d = 0{,}2$ m und es werde durchschnittlich 1 kgr gepreßte Luft per Sec. verbraucht also $G = 1$. Angenommen nun d. Tracé d. Röhrenleitung sei wie nebenstehend (M. Cenis-Tunnel), daß d. Compressionsmaschinen stehen im Thale und d. Röhre auf 300 m Länge um 150 m in d. Höhe steigen also bis d. Tunneleingang erreicht, in welchem sie nun in einer Strecke von 2200 m horizontal weiter läuft. d. Compressionsmaschinen spannen d. Luft auf 5 Atm und es fragt sich, mit welcher Gr. d. Luft am andern Ende d. Röhre anlangt. Zu dem Ende fragt sich zunächst wie groß unter diesen Umständen d. Anfangsgeschw. u_1 ist. Ein Cubm. Luft wiegt nun bekanntlich bei d. Temp. 0 und bei normalem Atm.-Druck 1,293 kgr. umgekehrt hat also unter denselben Bedingungen 1 kgr Luft ein Volumen $= \frac{1}{1{,}293}$ Cubm. Es soll hier aber d. Luft mit einer Gr. von 5 Atm einströmen, es ist also d. Volumen nun nur $\frac{1}{5}$ so groß; ferner sei d. constante Temp. $= 27°$ C so daß d. absolute Temp. $= 300$ anzunehmen sind. dann ist d. Volumen von diesem kgr Luft von 5 Atm Gr. mit Rücksicht auf diese etwas höhere Temp.: $= \frac{1}{1{,}293} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{300}{273} = 0{,}170$ Cbm.

d. Röhrenquerschnitt ist: $= \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}0314$ Cubm.



und demnach d. Anfangsgeschw.: $u_1 = \frac{0{,}17}{0{,}0314} = 7{,}33$ m. demnach kann d. Coeff. λ in runder Zahl $= 0{,}04$ angenommen werden.

ferner ist d. Geschw. Höhe $h_1 = 1{,}49$.

Es fragt sich nun, in welchem Grade nimmt d. Geschw.-Höhe ab bis zu d. Stelle, wo d. Röhrenleitung in d. Tunnel hineingeht, also h_2. Hierzu dient d. Gl. von ψ nicht $= 90°$ war, Es ist nämlich im vorliegenden Fall $\cos\psi = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}$. Multipliziert man nun noch d. Gl. mit d. Modulus d. Briggs'schen Logarithmen-Systems 0,4343, so lautet dieselbe

$$\log \frac{1+\frac{0,1}{0,4\,h_2}}{1+\frac{0,1}{0,4 \cdot 1,49}} = \div\, 0,4343\,\frac{300}{29,3 \cdot 300}$$

$$\text{Also:}\quad \frac{1+\frac{25}{h_2}}{2,678} = 0,9664 \text{ und somit } h_2 = 1,574$$

Um nun d. Geschw.-Höhe h zu finden, muss d. Gl. für $\psi = 90°$ benutzt werden,

also:
$$\frac{29,3 \cdot 300}{2 \cdot 1,574}\left(1-\frac{h_2}{h}\right) = 0,04\,\frac{2200}{92}$$

$$\text{somit}\quad \frac{h_2}{h} = 0,843 \text{ also } \frac{h_1}{h} = 0,843\,\frac{h_1}{h_2} = 0,843 \cdot \frac{1,49}{1,574} = 0,798$$

Durch dieses Verhältnis ist nun auch d. Pressungsverhältnis bestimmt nach Gl.: $\frac{Fu}{g} = \frac{RT}{p}$

In unserem Falle ist auch pu constant und folgt

$$\frac{p}{p_1} = \frac{u_1}{u} = \sqrt{\frac{h_1}{h}} = 0,894$$

und folgt d. Pr. p am Ende d. Röhre:

$$p = 0,894 \cdot p_1 = 0,894 \cdot 5 = 4,47 \text{ Atm.}$$

Es geht also etwas mehr als eine halbe Atm. verloren. —

Wenn bei einer solchen langen Röhrenleitung ein besonderer Widerstand vorkommen soll, d. im Allgemeinen mit einer Querschnittsänderung verbunden sein kann, so kann man auch hier von d. Temp.-Änderung absehen und es handelt sich nur darum, näherungsweise d. Pr.-Änderung zu untersuchen. Jedenfalls nimmt an einer solchen Stelle, wo besondere Widerstände vorkommen, d. Pr. ab, jedoch nur in einem solchen Grade, dass man sich mit einer näherungsweisen Rechnung begnügen kann.

Es sei nun an einer solchen Stelle, unmittelbar vor derselben d. Pr. $= p_1$, d. Geschw. $= u_1$ und unmittelbar hinter d. fraglichen Stelle d. Pr. $= p_2$ und d. Geschw. $= u_2$; vor d. fraglichen Stelle sei d. Rohrquerschnitt $= F_1$ und hinter derselben $= F_2$. Außer diesen plötzlichen Querschnittsänderungen kann auch noch ein besonderer Widerstand vorkommen, d. gemessen werden soll durch d. Widerstandscoeff. ζ. Setzt man $p_2 = p_1(1-\delta)$ so darf dieses δ nur als eine sehr kleine Größe betrachtet werden. Es war nun nach einer allgemeinen Formel, d. sich bezog auf d. Ausfl. d. Luft in irgend einem beliebigen Punkt d. Geschw.

$$u = \varphi\sqrt{u_1^2 + \frac{n}{n-1}\,2g\,R\,T_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

dieses war d. Formel für d. Ausflussgeschw. aus einer Öffnung in d. Gefäßwand; dieselbe war unter solchen Umständen abgeleitet, dass von d. Wärmeleitung durch d. Rohrwand abgesehen war, ferner von d. Einfluss d. Schwere und endlich von ζ, also vom Leitungswiderstand d. Röhre. Diese Abweichungen kann man auch hier annehmen für d. betrachtete mehr oder weniger kurze Strecke, nur muss u_2 statt u, p_2 statt p und T_2 statt T_1 gesetzt werden. Dividiert man dann d. Gl. durch φ, quadriert dieselbe und setzt schließlich $\frac{1}{\varphi^2} = 1+\zeta$, so ergibt sich:

$$\frac{n}{n-1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{(1+\zeta)u_2^2 - u_1^2}{2g\,R\,T} = \frac{h_1}{RT}\left[(1+\zeta)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 - 1\right]$$

Setzt man $p_2 = p_1(1-\delta)$ wo δ nur klein ist, so ist: $1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{n-1}{n}\,\delta$ und es wird

$$\delta = \frac{h_1}{RT}\left[(1+\zeta)\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 - 1\right]$$

da $\frac{u_2}{u_1}$ von d. Pr. und d. Querschnitten abhängt, wobei Abhängigkeit aber sehr gering ist.

Nun kann p_2 und p_1 berechnet werden.

Bewegung des Leuchtgases in einer Stadtleitung.

Hierbei kann man sich noch weitere Vereinfachungen erlauben, weil es sich hier um einen Fall handelt, wobei d. Pr. sich nur äußerst wenig ändert; selbst für d. ganze Strecke d. Leitung soll d. Druck, unter welchem d. Gas steht, nur etwa abnehmen um einen solchen Betrag, d. gemessen wird durch eine Wassersäule von 30 mm. Da d. Atm.-Druck einer Wassersäule von 10 m entspricht, so ist dieses = 0,003 Atm., es handelt sich also um einen Fall, wo d. Pressungsabnahme sehr gering ist, es können deshalb d. Formeln vereinfacht werden. Ist p d. Pr. in d. Entfernung s vom Anfang, p_1 d. Pr. im Anfangsquerschnitt, so ist $\frac{p}{p_1} = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$ gemäß d. Gl.: $\frac{\delta u}{g} = \frac{R\delta}{p}$, wo R δ g u. δ unveränd. sind, wobei also d. Luft immer gleichen Atmosphärendruck hat. Bei Vernachlässigung einer ungleich horizontalen Lage d. Röhrenleitung ist dann:

$$\frac{R\delta}{2h}\left(1 - \frac{h_1}{h}\right) = \lambda \frac{s}{d}$$

Bestimmt man hieraus d. Wert von h u. substituiert denselben in $\frac{p}{p_1}$, so folgt:

$$\frac{p}{p_1} = \sqrt{1 - \lambda \frac{s}{d} \frac{2k_1}{R\delta}}$$

und da $\frac{p}{p_1}$ nur wenig von d. Einheit verschieden ist, kann man setzen:

$$\frac{p}{p_1} = 1 - \lambda \frac{s}{d} \frac{u_1^2}{2gR\delta}$$

also:

$$1 - \frac{p}{p_1} = \frac{p_1 - p}{p_1} = \lambda \frac{s}{d} \frac{u_1^2}{2gR\delta}$$

Ist hier nun mit V d. Gasvolumen bezeichnet, welches p. Sek. durch d. fragliche Gasleitungsröhre hindurchströmen soll und zwar gemessen bei d. Druck, welcher zu Anfang d. Leitungsröhre stattfindet, also im Zustand p_1, δ_1, dann ist:

$$u_1 = \frac{4V}{\pi d^2}$$

diesen Ausdruck in d. letzte Gl. gesetzt, ergibt:

$$d^5 = \lambda s \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{V^2}{2gR\delta} \frac{p_1}{p_1 - p}$$

Setzt man hier $g = 9{,}81$ und bezeichnet ferner mit ρ d. Dichtigkeit d. Gases verglichen mit d. atm. Luft bei gleicher Temp. u. Pr. (für gewöhnl. Steinkohlengas $\rho = 0{,}4 - 0{,}45$), dann ist: $R = \frac{29{,}27}{\rho}$. Nimmt man ferner d. durchschnittl. Temp. in d. Röhre = 12° C. an, also $T = 285$, so folgt:

$$d^5 = \frac{\lambda \rho}{100960} s V^2 \frac{p_1}{p_1 - p}.$$

D. Pr. d. Gases pflegen, da es sich nur um kl. Unterschiede handelt, gewöhnl. durch eine Wassersäule gemessen zu werden. Angenommen es sei h diejenige Wassersäule ausgedrückt in mm, welche diese Pr.-Abnahme $p_1 - p$ gemessen wird, so ist: $\frac{p_1}{p_1 - p} = \frac{10096}{h}$, da p_1 ungefähr = d. atm. Druck ist, so können wir setzen 10096. Setzt man dies ein, so erhält man:

$$d^5 = 0{,}1 \lambda \rho \frac{sV^2}{h}.$$

Längs d. ganzen Röhrenleitung findet auch hier eine stetige Gasentziehung statt; nimmt man an, daß auch für dieselbe gleichförmig sei u. ist V d. Volumen, welches in d. Zeiteinheit durch d. Anfangsquerschnitt strömt, während d. Volumen, welches im Endquerschnitt ausströmt $= \alpha V$ ist, dann wird dasjenige Gasvolumen, welches durch einen Querschnitt in d. Entfernung s vom Anfang d. Röhrenstrecke hindurchströmt, bestimmt sein durch:

$$\frac{V - \varphi}{(1-\alpha)V} = \frac{s}{l}$$

wenn nämlich φ d. Gasvolumen ist, welches p. Sek. durch d. Querschnitt in d. Entfernung s hindurchströmt; so ist dann $V - \varphi$ d. Verlust auf diesem Wege, $(1-\alpha)V$ d. Verlust auf d. ganzen Strecke, also:

$$\varphi = V\left(1 - \frac{(1-\alpha)}{l} s\right).$$

Bezeichnet man dh d. Druckverlust in Folge d. Reibungswiderstandes für ein unendl. kl. Längenelement ds d. Röhre, dann erhält wenn dh auf d. Gl. für d^5, nun für V jetzt geschrieben muß $V(1-\frac{1-\alpha}{l}s)$ also:

$$dh = 0{,}1\lambda\rho \frac{ds}{d^5} V^2\left(1 - 2\frac{1-\alpha}{l}s + \frac{1-2\alpha+\alpha^2}{l^2}s^2\right)$$

Integrirt man diese Gl. von $s=0$ bis $s=l$, so erhält man d. ganzen Druckverlust für d. Strecke l:

$$h = 0{,}1\lambda\rho \frac{V^2}{d^5}\left[l-(1-\alpha)l + \frac{1-2\alpha+\alpha^2}{3}l\right]$$

od.

$$h = 0{,}1\lambda\rho \frac{lV^2}{d^5}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Es ergibt sich hier genau so, wie bei d. Wasserleitung, nur daß V^2 d. Factor $\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$ bekommen hat. Es ist also nun d. endgültige Formel, welche d. Stärke längs d. ganzen Länge l erhaltenen Gebrauchsleitung Rechnung trägt:

$$d^5 = 0{,}1\lambda\rho \frac{lV^2}{h}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Es war in dieser Formel d. Druckverlust h gemessen durch eine in mm ausgedrückte Wassersäule. Man könnte nun streng genommen in derselben Weise verfahren, wie bei d. Wasserleitung, daß also d. Anlagekosten ein Minimum werden; jedoch würde dies eine sehr umständliche Rechnung liefern, indem einmal für λ sehr wenig bekannt und ferner ρ eine ziemlich wechselnde Größe ist, endlich kommen für d. Herstellungskosten ungefähr in demselben Grade in Betracht wie bei d. Wasserleitung, da hier d. Röhren viel weniger weit sind; es wird also zulässig sein eine einfachere Annahme zu machen. Es läßt sich nun erfahrungsmäßig behaupten, daß man d. vortheilhaftesten Anlage ziemlich nahe kommt, wenn man d. Röhrenweite so einrichtet, daß d. Last ziemlich gleichförmig von einem bis zum anderen Ende abnimmt; ist also L d. ganze Länge d. zunächst zu betrachtenden Hauptstranges d. Röhrenleitung und H d. gegebene zulässige Druckverlust von einem bis zum anderen Ende in Folge d. Leitungswiderstandes, dann wird d. Forderung eines gleichförmigen Druckverlustes d. Proportion entsprechen:

$$\frac{l}{h} = \frac{L}{H}$$

Dabei sind L u. H gegebene Größen, H pflegt = 20 höchstens = 30 mm Wassersäule angenommen zu werden; setzt man dies ein, so folgt:

$$d^5 = 0{,}1\lambda\rho \frac{L}{H} V^2 \frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Es sind nun V u. α gegebene Größen für jede Strecke d. Hauptstrangs u. man kann also sofort d. erforderlichen Durchmesser dieses Hauptstrangs berechnen zwischen je zwei Abzweigstellen. Gewöhnlich wird man jedoch nicht an jeder Abzweigstelle einen anderen Durchmesser nehmen, um so mehr als d. Preisliste d. Röhren nur endliche Abstufungen u. nicht genau d. Rechnung gemäß angenommen werden kann. – Es fragt sich nun, was man für λ u. ρ einzusetzen hat. Zunächst sollte noch d. Formel umgestaltet werden mit Rücksicht auf d. hier zu Grunde liegenden Einheiten. In d. Formel ist vorausgesetzt, daß d. m zu Grunde liegt mit Ausnahme von H, welches in mm ausgedrückt ist. V bedeutet d. Gasvolumen in Cubm. p. Sek., es pflegt jedoch gewöhnl. d. Gasverbrauch in Cubm. pr. Stunde ausgedrückt zu werden und außerdem pflegt d. Durchmesser in Ctm ausgedrückt zu werden; dann ist:

$$\frac{d^5}{10^{10}} = 0{,}1\lambda\rho \frac{L}{H}\,\frac{V^2}{3600}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$$

$$\text{also } d^5 = \frac{\lambda\rho}{0{,}01296}\,\frac{L}{H} V^2 \frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

$\frac{\lambda\rho}{0{,}01296}$ betrifft, so ist derselbe durchschnittlich = 2 also: $d^5 = 2\frac{L}{H}V^2\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$. { Hat man d. Werthe d in ctm, L in m, H in mm, V in Cbm. p. Stund.

Was nämlich λ betrifft, so liegen darüber spezielle Versuche von Blochmann vor, wonach sich für d. Leuchtgas ergab: $\lambda = 0{,}009 + \frac{0{,}0653}{\sqrt{u}}$ also in hohem Grade abhängig von d. Geschw. letztere ist nun in einer städtischen Röhrenleitung im Allgemeinen eine geringe; setzt man $\frac{\lambda\rho}{0{,}01296} = 2$, so würde dieses entsprechen $\lambda\rho = 0{,}02592$ u. wenn man durchschnittl. d. Dichtigkeit

d. Leuchtgases als $s = 0{,}42$ setzt, so würde dieser Annahme entsprechen: $\lambda = 0{,}062$ und dies stimmt mit d. Blochmann'schen Versuchen in Uebereinstimmung, wenn d. durchschnittl. Geschw. = 1 m p. Sek. war. Wenn man also ein für allemal d. Coeff. $\frac{L}{H}$ u. für d. einzelnen Strecken zwischen 2 Abzweigungsstellen d. Werthe von $\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$ berechnet, so findet man d. Durchmesser d. einzelnen Rohrstrecken in Ctm. Findet man, daß d. Durchmesser von einer Strecke zur Andern nur wenig ändern, so wird man dieselbe Rohrweite beibehalten. —

Nun ist es noch leicht, zu d. abzweigenden Rohrstrecken überzugehen, es seien etwa d. Hauptstrangs bezeichnet mit $A_0\, A_1\, A_2 \ldots\ldots A_n$. Geht man nun von d. ersten Abzweigungsstelle A_1 aus und verfolgt man nach d. größeren d. abzweigenden Leitungen und nimmt man Rücksicht an, daß H d. zulässige Druckverlust von d. Gasometer bis zu d. äußersten Punkten sei, so wird man für d. hier ins Auge gefaßten Seitenstränge dieselbe Formel benutzen können, wenn nur an Stelle von L gesetzt wird $A_0A_1 + L_1$, unter L_1 d. Länge d. abzweigenden Seitenleitung verstanden; ist L_2 d. Länge d. von A_2 ausgehenden Zweigleitung, so wird man auch von hier ausgehen können, wenn man nur statt L setzt $A_0A_2 + L_2$. —

Es fragt sich weiter, einen wie großen Ueberdruck man im Gasometer d. Gasanstalt erhalten muß. In d. Hinsicht muß bemerkt werden, daß an allen Stellen d. ganzen Leitung ein genügender Ueberdruck d. Gases disponibel bleibt, um d. Widerstand zu überwinden, d. d. Gasmesser u. d. Brenner hervorrufen und um d. Gas in d. Brennern hervorzutreiben; mit Rücksicht auf diese Widerstände pflegt man gewöhnlich einen Ueberdruck von 20 mm Wassersäule zu rechnen. Wird nun zunächst angenommen, es sei d. ganze Leitung horizontal, dann muß d. manometrische Ueberdruck d. Gases im Gasometer = H + 20 mm sein; nimmt man also H auch = 20 m, so muß im Gasometer 40 mm Ueberdruck sein. Ist d. Terrain bedeutend hügelig, so kann es sich in dieser Beziehung wesentlich anders verhalten. Angenommen es liege eine Stelle X in d. Entfernung x vom Gasometer um y m höher als d. Gasfabrik. Es sei nun G_0 d. absolute Gasdruck im Gasometer, derselbe sinkt dann in Folge d. Leit.-Widerstands bis zu dieser Stelle ab um $\frac{x}{L}H$. Wenn nun aber d. Gasleitung vom Gasometer bis zu d. betrachteten Stelle ansteigt, so nimmt in Folge d. eigenen Gewichts d. Gases auch aus diesem Grunde d. absolute Druck bis zu diesem Punkte ab. Für d. atm. Luft selbst beträgt d. Druckabnahme bei d. Erhebung um 1 m so viel, daß d. Druckhöhe gemessen wird mit einer Wassersäule von 1,24, indem ein Cbm Luft bei 12–15° C = 1,24 kgr wiegt. Wenn man sich in d. untern Regionen d. Atm. um 1 m empor hebt, so nimmt d. Druck auf 1 qm Grundfl. um 1,24 kgr ab, eine Wasserschicht von 1 mm Höhe entspricht auf 1 qm Grundfläche mit 1 kgr; also einer Druckabnahme von 1,24 kgr entspricht einer Wassersäule von 1,24 mm Höhe. Ist d. Dichtigkeit d. Leuchtgases um s kleiner als d. d. Luft, wenn man also in einer Leuchtgasmasse sich um 1 m erhebt, so wird d. Abnahme d. Druckes weniger als 1,24 mm Wassersäule abnehmen, nämlich um $1{,}24 \cdot s$ mm. Wenn man sich also um y m erhebt, so ist d. Druckabnahme $1{,}24\, s\, y$. Es ist also d. absolute Druck gemessen in mm Wassersäule an d. fraglichen Stelle, welche um x m von d. Gasometer entfernt liegt und y m höher liegt, ausgedrückt durch:

$$G = G_0 - \frac{x}{L}H \mp 1{,}24\, s\, y$$

Liegt d. Stelle um y m tiefer, so gilt d. + Zeichen und umgekehrt. Bezeichnet L_0 d. absoluten, gleichfalls in mm Wassersäule gemessenen Luftdruck nahezu an d. Gasfabrik, so ist d. Luftdruck L an d. hier betrachteten Stelle: $L = L_0 \mp 1{,}24\, y$ da $s = 1$ ist.

Hat man nun unmittelbar mit d. Manometer gemessen, so ist d. Unterschied d. Gasdrucks über d. Luftdruck, derselbe sei mit M bezeichnet $= G - L$; an d. betrachteten Stelle wird dieser Unterschied $= M_0$ sein und:

$$M = M_0 - \frac{x}{L}H \pm 1{,}24\,(1 - s)\,y$$

oder für $s = 0{,}42$:

$$M = M_0 - \frac{x}{L}H \pm 0{,}7\,y.$$

Es ist nun d. erforderliche

[illegible] — 20 [illegible]:

$$\min\left(M_1 - \frac{x}{L} H \pm 0{,}7\,y \right) = 20.$$

[illegible] + [illegible] $-\frac{x}{L} H$ [illegible] $+ 0{,}7\,y$ [illegible]:

$$\frac{y}{x} = \frac{H}{0{,}7\,L}$$

[illegible] M_1 [illegible] = 20 [illegible] = 20. [illegible] H [illegible] = 21 [illegible]:

$$\frac{y}{x} = \frac{30}{L}$$

[illegible] L [illegible] = 1000, [illegible] = 10 [illegible]

$$\frac{y}{x} = 0{,}003.$$

[illegible] 3 : 1000, [illegible] = 20 mm. [illegible]. —

Bewegung eines Gases in einer Röhre, deren Wand eine wesentliche Wärmeübertragung nach Aussen hin oder von Aussen her vermittelt.

[illegible] 3 [illegible] p, T [illegible] u [illegible] s [illegible]:

[illegible]:
$$\frac{\delta u}{g} = \frac{R\,T}{p}$$

[illegible]:
$$\frac{u\,du}{g} + \frac{n}{n-1}\,R\,dT = ds\cos\psi + W\,dQ$$

[illegible]:
$$\frac{u\,du}{g} + R\,dT - R\,T\,\frac{d(\delta u)}{\delta u} = ds\cos\psi - \lambda\,\frac{ds}{d}\,\frac{u^2}{2g}$$

[illegible] $= \delta$, [illegible] $= \mathfrak{P}$ [illegible] ψ [illegible]:

$$d = \frac{4\,\delta}{\mathfrak{P}}$$

[illegible] dQ [illegible]:

$$G\,dQ = k(\vartheta'-\vartheta)\,d\sigma'$$

wo ϑ' d. äußerliche Temp., ϑ d. innere absolute Temp. ist, $d\sigma'$ d. Umfangstheil, an welchem Wärmeaustausch stattfindet. Es kann nun im Allgemeinen d. Fall sein, daß d. Wärmeabgabe nur durch einen Theil d. Canalwand hindurchgeht, wie dies d. Fall ist, wo d. Heizkanal außen d. Kessel berührt, so findet d. Wärmeaustausch nur durch d. Theil d. Canals statt, welcher durch d. Kesselwand gebildet ist, während durch d., vom Mauerwerk begrenzten Theil nur wenig übergeht. Bezeichnet man σ' d. Theil d. Umfangs σ, an d. d. Wärmeaustausch stattfindet, so ist:

$$d\sigma' = \sigma'\,ds, \text{ also: } \quad G\,dQ = k\sigma'(\vartheta'-\vartheta)\,ds.$$

zwischen $W = \frac{1}{A}$ u. R besteht nun d. Beziehung:

$$AR = c_1 - c$$

wenn c d. spec. Wärme bei constantem Volumen und c_1 d. spec. Wärme bei constantem Dr. bedeutet u. A d. Wärme, welche d. Arbeitseinheit also W d. Arbeitswerth d. Wärmeeinheit bedeutet, also:

$$AR = c_1\left(1-\frac{1}{n}\right) = c_1\,\frac{n-1}{n} \qquad \text{wenn } n = \frac{c_1}{c} \text{ ist.}$$

$$\text{und } \quad W = \frac{1}{A} = \frac{n}{n-1}\,\frac{R}{c_1}$$

Aus d. Gl. für $W\,dQ$ folgt nun:

$$W\,dQ = \frac{n}{n-1}\,\frac{R k \sigma'}{G c_1}(\vartheta'-\vartheta)\,ds$$

Es seien jetzt k u. σ' constant für d. ganze Länge d. betreffenden Rohrstrecke, dann ist, wenn zur Abkürzung d. Const.: $\frac{G c_1}{k\sigma'} = a$ gesetzt wird:

$$W\,dQ = -\frac{n}{n-1}(\vartheta-\vartheta')\,\frac{ds}{a}$$

führt man diesen Ausdruck in d. 2te u. 3te d. 3 Hauptgln. ein, u. setzt man ferner wieder $\frac{u^2}{2g} = h$ so folgt: $\frac{u\,du}{g} = dh$ u. $\frac{du}{u} = \frac{dh}{2h}$ also:

$$2)\quad dh + \frac{n}{n-1}R\,d\vartheta + \frac{n}{n-1}R(\vartheta-\vartheta')\frac{ds}{a} = ds\cos\psi$$

$$\text{und } 3)\quad dh + R\,d\vartheta - R\vartheta\,\frac{dh}{2h} + 2\,\frac{ds}{\delta}\,h = ds\cos\psi.$$

Es sind also nun zur Verfügung d. Gl. 1. 2 3; in d. Gln 2 u 3 kommen von d. variabeln Größen, d. als Functionen von s bestimmt werden sollen nur d. Temp. und d. Geschw.-Höhe vor, so daß dieselben 2 simultane, partielle Differentialgl. erster Ordnung zwischen d. unabhängig Variabel. s u. d. 2 abhängig Variabel. h u. ϑ bilden. Um diese Gln. zu integriren, würde d. allgemeine Verfahren darin bestehen, daß man eine d. abhängig Variabel. eliminirt und dann eine Gl. erhält, in d. nur eine abhängige Variable vorkommt; es könnte dies geschehen, indem man jede d. Gln. noch einmal bezüglich s differentiirt, dadurch würde man 2 neue differential. Gl., d. von d. 2ten Ordnung wären; man erhalte dann im Ganzen 4 Diff.-Gl. mit d. Größen $h\ h'\ h''\ \vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$, wo d. Striche d. betreffenden Differentialquotienten bedeuten. Zwischen diesen Gln. könnte man dann d. 3 Größen $\vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$ eliminiren und man erhält eine Gl. zwischen $h\ h'\ h''$ u. s, also eine Diff.-Gl. 2ter Ordnung von h als Function von s, oder man könnte d. umgekehrte Verfahren anwenden mit h u. erhält $\vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$ u. s. Auf alle Fälle würde dies Verfahren zu ganz außerordentlichen Weitläufigkeiten führen, d. zu d. hier überhaupt erreichbaren Genauigkeit in keinem Verhältniß stünden; es würde sich also darum handeln, d. Aufgabe zu vereinfachen, um zu praktisch brauchbaren Formeln zu gelangen. D. Gl. 2 ist diejenige, welche d. Wärmeleitung d. Rohrwand allein berücksichtigt, dieselbe ist bedingt durch $\vartheta - \vartheta'$; von dieser Wärmeleitung d. Rohrwand hängt in erster Linie d. Temp.-Änderung d. Gasstroms von Querschnitt zu Querschnitt ab. Im Vergleich mit d. 2 hauptsächlichsten Gliedern dieser Gl. ist d. Glied dh u. d. Glied $ds\cos\psi$ so klein, daß dieselben vernachlässigt werden können; dies kommt darauf hinaus, daß d. Temp. d. Stroms nur in ganz untergeordnetem Grade von d. Geschw. u. von d. Schwere abhängt. Daß dies richtig, ist implicite schon früher dadurch berücksichtigt worden, daß im Allgemeinen [illegible] 100 m [illegible] 1° C. [illegible]

1 kg [illegible]

$$A H = C_1$$

[illegible] 1° [illegible] $C_1 = 0{,}2375$:

$$H = 0{,}2375 \cdot 424 = 100{,}7 \text{ m}.$$

[illegible] 100,7 m [illegible] 1° [illegible] $\Delta s \cos\psi$ [illegible] Δh [illegible] Δh [illegible] 1° C [illegible]

$$A \cdot \Delta h = C_1$$

[illegible] $\Delta h = 100{,}7$ m [illegible] $\Delta(u^2) = 1976$; [illegible] 1° [illegible] 20 m [illegible] 1° [illegible] $\sqrt{400 + 1976}$ [illegible] 20 m [illegible] 48,7 m [illegible]

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta'} = -\frac{ds}{a}$$

[illegible] ϑ' [illegible] ϑ' [illegible] ϑ [illegible] ϑ' [illegible] ϑ_1 [illegible]

$$l\left(\frac{\vartheta - \vartheta'}{\vartheta_1 - \vartheta'}\right) = -\frac{s}{a}.$$

[illegible] s [illegible]

$$\vartheta = \vartheta' + (\vartheta_1 - \vartheta')\, e^{-\frac{s}{a}}$$

[illegible] ϑ_1 [illegible] ϑ' [illegible] ϑ [illegible] s [illegible] s [illegible] ϑ [illegible]

[illegible] ϑ [illegible] ϑ [illegible]

$$\vartheta = \text{const.}\; p\, u, \quad l(\vartheta) = \text{Const} + lp + lu$$

[illegible]

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{dp}{p} + \frac{du}{u}, \quad \frac{du}{u} = \frac{dh}{2h}$$

$$R\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{\vartheta} - \frac{dh}{2h}\right) = R\vartheta\, \frac{dp}{p}.$$

[illegible] 0 [illegible]

$$\frac{dh}{h} + \frac{R\vartheta}{h}\frac{dp}{p} + \left(\frac{2}{\vartheta} - \frac{\cos\psi}{h}\right) ds = 0$$

[illegible]

$$\frac{dh}{h} = 2\left(\frac{d\vartheta}{\vartheta} - \frac{dp}{p}\right), \quad ds = -a\,\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta'}$$

$$2\,\frac{d\vartheta}{\vartheta} + \left(\frac{R\vartheta}{h} - 2\right)\frac{dp}{p} - \left(2\,\frac{a}{\vartheta} - \frac{a}{h}\cos\psi\right)\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta'} = 0$$

[illegible] $\frac{R\vartheta}{2h}$ [illegible] 1 [illegible] es zeigt sich, daß dieser Coeff. größer als 100 mm, wenn $a > 30$ m [illegible]; im vorliegenden Falle wird diese Vernachlässigung noch kleiner; [illegible] im Allgemeinen d. [illegible] größer wegen d. [illegible] durch d. [illegible] u. es wird durch d. Vernachlässigung von 1 gegen $\frac{\mathfrak{A}\delta}{2h}$ dasselbe erreicht, wie durch $\frac{\mathfrak{A}\delta}{h}$ gegen 2. Theilt man durch [illegible] d. ganze Gl. mit δ, so folgt:

$$2\,d\delta + \frac{\mathfrak{A}\delta^2}{h}\frac{dp}{p} - \left(2\frac{a}{\partial} - \frac{a}{p}\cos\psi\right)\frac{\delta\,d\delta}{\delta-\delta'} = 0$$

Setzen wir d. Klammer [illegible] $\frac{\delta}{\delta-\delta'} = 1+\frac{\delta'}{\delta-\delta'}$, so folgt:

$$-\frac{\mathfrak{A}\delta^2}{h}\frac{dp}{p} = \left(2-2\frac{a}{\partial}\right)d\delta - 2\frac{a}{\partial}\frac{\delta'\,d\delta}{\delta-\delta'} + \frac{a}{h}\cos\psi\frac{\delta\,d\delta}{\delta-\delta'}$$

oder wenn im dritten Glied $\frac{d\delta}{\delta-\delta'} = \div\frac{ds}{a}$ gesetzt wird: $-\frac{\mathfrak{A}\delta^2}{h}\frac{dp}{p} = 2\frac{ds}{\partial}\delta' - \left(2\frac{a}{\partial}-2\right)d\delta + \frac{a}{h}\cos\psi\frac{\delta\,d\delta}{\delta-\delta'}$

ferner ist $\frac{\mathfrak{A}\delta^2}{h} = 2g\,\mathfrak{A}\left(\frac{\delta}{u}\right)^2$, [illegible] ist d. Quotient $\frac{\delta}{u}$ proportional d. [illegible] p, wenn also d. Werthe von δ, u u. p im Anfangsquerschnitt mit δ_1, u_1 u. p_1 bezeichnet werden, so ist: $2g\,\mathfrak{A}\left(\frac{\delta}{u}\right)^2 = 2g\,\mathfrak{A}\left(\frac{\delta_1}{u_1}\right)^2\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = \alpha\,\delta'\left(\frac{p}{p_1}\right)^2$ wenn $\alpha = \frac{2g\,\mathfrak{A}}{\delta'}\left(\frac{\delta_1}{u_1}\right)^2$ ist.

Setzt man dies ein, so folgt:

$$-\alpha\,\delta'\,\frac{p\,dp}{p_1^2} = 2\frac{ds}{\partial}\delta' - \left(2\frac{a}{\partial}-2\right)d\delta + \frac{a}{\mathfrak{A}}\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 a\cos\psi\,\frac{\delta'\,d\delta}{(\delta-\delta')\delta}$$

Was d. letzte Größe betrifft, so ist: $\frac{\delta'\,d\delta}{\delta(\delta-\delta')} = \left(\frac{1}{\delta-\delta'} - \frac{1}{\delta}\right)d\delta = \div\frac{ds}{a} - d\,l(\delta)$.

Dies eingesetzt u. d. ganze Gl. durch $\alpha\,\delta'$ dividirt, liefert:

$$-\tfrac{1}{2}\,d\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = \frac{1}{\alpha}\left\{2\frac{ds}{\partial} - \left(2\frac{a}{\partial}-2\right)\frac{d\delta}{\delta'}\right\} - \frac{\cos\psi}{\mathfrak{A}\delta'}\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\left(ds + a\,d\,l(\delta)\right).$$

Bei d. Integration macht nun d. Factor $\frac{p}{p_1}$ einige Schwierigkeit, weshalb hierfür eine Annäherung gemacht werden soll; es soll im letzten Glied statt d. eigentlich veränderlichen Factors $\frac{p}{p_1}$ ein constanter Mittelwerth gesetzt werden. Versteht man nun unter p d. Dr. in d. Entfernung s vom Anfang d. Düse, so ist d. Mittelwerth von $\left(\frac{p}{p_1}\right)^2$ für d. ganze Düsenlänge $s = \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]$, denn für d. Anfang ist $\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = 0$ und am Ende $= \left(\frac{p}{p_1}\right)^2$. Dies eingesetzt, so erhält man durch Integration:

$$\tfrac{1}{2}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] = \frac{1}{\alpha}\left[2\frac{s}{\partial} + \left(2\frac{a}{\partial}-2\right)\frac{\delta_1-\delta}{\delta'}\right] - \tfrac{1}{2}\frac{\cos\psi}{\mathfrak{A}\delta'}\left[1+\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]\left(s + a\,l\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)\right).$$

Setzt man nun: $1+\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = 2-\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]$, so folgt durch Umformung:

$$\tfrac{1}{2}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] = \frac{\frac{1}{\alpha}\left[2\frac{s}{\partial} + \left(2\frac{a}{\partial}-2\right)\frac{\delta_1-\delta}{\delta'}\right] - \cos\psi\left(s + a\,l\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)\right)}{1 - \frac{\cos\psi}{\mathfrak{A}\delta'}\left(s + a\,l\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)\right)}.$$

Hiermit kann man nun, da δ u. u Function von s bereits gefunden, auch für jeden Werth von s d. Größe rechts berechnen, wodurch dann auch d. Werth von p gefunden ist. In d. Regel wird hierbei d. Änderung d. Druck nur von mäßiger Größe sein wie z. B.: wenn es sich handelt um d. [illegible] d. Speisewassers in d. Kessel einer [illegible], so kann d. Dr. vom [illegible] d. [illegible] bis zum [illegible] sich nur wenig ändern, [illegible] durch d. [illegible] Unter solchen Umständen kann $p = p_1(1-\delta)$ gesetzt werden, wo δ ein sehr kleiner Bruch ist, von welchem d. höheren Potenzen vernachlässigt werden können, so daß also: $\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = 1-2\delta$ und $\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] = \delta$.

Ebenso kann im Nenner d. kleine Glied mit $\cos\psi$ gegen 1 vernachlässigt werden. [illegible] diesen Ausdruck [illegible] zu [illegible], nämlich bei d. Theorie d. [illegible]; [illegible], sofern es sich um d. [illegible] d. [illegible] handelt, [illegible] d. [illegible] Glied im Zähler [illegible] sein, [illegible] in einer [illegible] sich befindet, also $\cos\psi = 0$. Handelt es sich um d. [illegible] d. [illegible] im [illegible], so ist $\psi = 180^\circ$ und [illegible] $\cos\psi = \div 1$ zu setzen. –

Ist nun auf diese Weise d. Pr. bekannt, so findet man aus d. Continuitäts-Gl. d. Geschw., denn es sind d. Geschw. direct proportional d. absoluten Temp. u. umgekehrt proportional d. Pr.: sind also für d. Anfangsquerschnitt u_1, T_1 u. p_1, so ist:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{T}{T_1}\,\frac{p_1}{p}.$$

Was diese Berechnung d. Änderungen d. äußeren u. inneren Zustandes von Querschnitt zu Querschnitt betrifft, so war nur d. allgemeine Leitungswiderstand berücksichtigt worden; es können aber auch hier besondere Widerstände in Betracht kommen, wie z. B.: bei d. Ltg. eines Heizgases einer Feuerung an d. Ende d. Rostes, wo d. Kanal eine plötzliche Richtungsänderung erfährt, sowie auch eine Querschnittsänderung; in solchen Fällen ist es in d. Regel nothwendig, d. ganze Strecke, auf welcher d. Gasgemenge sich strömend bewegt, in einzelne Theile zu theilen, die durch diese Stellen, wo Änderungen eintreten, getrennt sind, u. es muß dann d. Änderung d. Ltg.-Zustandes für jede Strecke für sich betrachtet werden. Was d. Zustandsänderung betrifft, d. durch einen besonderen Widerstand hervorgebracht wird, so genügt es, d. Druckänderung zu betrachten, denn auf einer solchen kurzen Strecke wird keine wesentliche Wärmeleitung als stattfindend betrachtet werden können; es kann also ganz dieselbe Rechnungsformel benutzt werden, wie bei d. Ltg. d. Gasgemenges durch einen Kanal, wo keine Wärmeleitung stattfand. D. Formel war folgende:
Geht an einer solchen Stelle d. Pr. von p_1 zu p_2 über und wenn ferner gleichzeitig eine Querschnittsänderung von F_1 zu F_2 vorkommt u. wenn man d. Pr. p_2 an d. fraglichen Stelle setzt:

$$p_2 = p_1(1-\delta)$$

so kann man setzen:

$$\delta = \frac{k}{RT}\left[(1+\xi)\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 - 1\right]. —$$

Was d. Ltg. d. Dämpfe betrifft, so soll nur eine Formel über d. Ausflußgeschw. u. Ausflußmenge angegeben werden; es können hier ganz analoge Formeln benutzt werden, wie beim Ausfluß d. Gase. Es war bekanntlich d. Ausflußgeschw. eines Gases beim Ausströmen aus einer Mündung:

$$u = \varphi\sqrt{2g\,\frac{n}{n-1}\,RT_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

wo p_1 d. Pr. im Innern u. p d. im Äußern d. Gefäßes bedeutet. T_1 d. absolute Temp. im Innern d. Gefäßes, n d. Verhältniß d. spec. Wärme bei constanter Pr. zur spec. Wärme bei constantem Volumen, φ d. Geschw.-Coeff. Es war d. Formel auf d. Weise erhalten worden, daß man u_0 berechnete wie es sein würde, wenn keine Widerstände stattfinden u. d. Zustandsänderung nach d. adiabatischen Curve stattfindet und dieser Ausdruck wurde dann mit φ multiplicirt. Bei einer solchen Zustandsänderung d. Gases stehen bekanntlich d. Pr. u. d. spec. Vol. in d. Beziehung zu einander, daß: $p v^n = p_1 v_1^n$ ist.
Nun gilt näherungsweise dieselbe Beziehung für d. Zustandsänderung von Dämpfen ohne Mittheilung u. Entziehung von Wärme, nur daß n eine andere Bedeutung hat. Wenn es sich zunächst um überhitzte Dämpfe handelt, so folgt aus d. Versuchen von Hirn u. Cazin, daß, wenn d. Wasserdampf ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme seinen Zustand ändert, wenn auch eine solche Beziehung stattfindet u. zwar ergibt sich für Wasserdampf $n = \frac{4}{3}$. Für gesättigte Dämpfe hatte sich gezeigt, daß man auch hier d. Gesetz zu Grunde legen darf, daß d. Pr. sich proportional ändert einer gewissen Potenz d. spec. Vol., nur hatte d. Potenz wieder einen anderen Werth, sie war nämlich abhängig von d. Mischungsverhältniß. Wenn im Anfangszustand in 1 Kgr. d. Gemenges y Kgr Dampf enthalten ist, so konnte gesetzt werden:

$$n = 1{,}035 + 0{,}1\,y.$$

Es werden also d. betreffenden Formeln einfach übertragen werden können, so fern nur in d. Formel p u. v vorkommen u. nicht d. Temp. weil letztere bedeutend anders ist.

Es bildet sich nun d. Formel für d. Ausflussgeschw. d. Gase so umzugestalten, dass d. Temp. nicht mehr darin vorkommt, da $R\,T_1 = p_1\,v_1$ ist, also:

$$u = \varphi\sqrt{2g\frac{n}{n-1}\,p_1 v_1\left[1-\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

Was nun d. pro Sek. ausströmende Gasmenge betrifft, so sei A wie früher d. Flächeninhalt d. Ausflussöffnung; indem aber hier zu denken, wie bei tropfbaren Flüssigkeiten im Allgemeinen auch eine Contraction stattfinden kann, so wird d. kleinste Querschnitt d. contrahirten Strahls auch hier $= \alpha A$ sein und hierdurch strömt nun d. Dampf mit d. Geschw. u, es ist also d. hierdurch strömende Dampfvolumen $= \alpha A u$. Multiplicirt man dies mit d. Gew. d. Volumeneinheit od. dividirt man durch d. Volumen d. Gewichtseinheit, so erhält man d. pro Sek. ausfliessende Dampfgewicht. Dieses bezieht sich streng genommen nicht auf dieser Gl., in Wirklichkeit findet d. Zustandsänderung nicht ohne Mittheilung von Wärme statt, sondern wenn überhaupt ein Gas-Zustand ausfließt, so hat derselbe zur Folge, dass eine gewisse Arbeit sich in Wärme umsetzt u. diese wird d. ausströmenden Dampf. zurückgeführt. Es ist also streng genommen d. vorliegende Aufgabe die, diejenige Aenderung d. spec. Vol. zu ermitteln, welche stattfindet mit Rücksicht auf d. Ergänzung in d. Wärmemittheilung; jedoch würde es sich kaum verlohnen, hierauf näher einzugehen, man kann einfach setzen: $G = \alpha A u$, dividirt durch d. Vol. u. d. Fehler auf α überzutragen, welches doch nicht berechnet werden kann, sondern nur durch Versuchen zu bestimmen ist; d. Vol. ist aber, da $p\,v^n = p_1\,v_1^n$ ist, $v = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}} v_1$ also:

$$G = \alpha A u\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{v_1}.$$

Nun hat α jetzt einen zusammengesetzten Werth; setzt man für u seinen Ausdruck und setzt $\alpha\varphi = \mu$, so folgt:

$$G = \mu A\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}}\sqrt{2g\frac{n}{n-1}\,\frac{p_1}{v_1}\left[1-\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

Nicht permanente Bewegung des Wassers.

Es sollen für d. nicht permanente Bew. einige Fälle behandelt werden, nämlich solche, die sich beziehen auf d. Ausfluss d. Wassers aus Gefässen, d. keinen Zufluss erhalten od. wenigstens nur einen solchen, d. nicht = d. gleichzeitigen Abfluss ist, so dass also d. Wasserhöhe im Gefäss variabel ist.

Es sei wieder A d. Grösse d. Ausflussöffnung, d. horizontale Querschnitt d. Gefässes in d. Höhe h über d. Schwerpunkt dieser Mündung sei $= F$, wobei im Allgemeinen F irgend eine gegebene Function von h sein kann. Anfangs liege d. freie Wasseroberfl. in d. Höhe h_0 über d. Schwerp. d. Mündung und in dieser Höhe sei d. horizontale Querschnitt d. Gefässes $= F_0$. Gewöhnlich handelt es sich nun hier um d. Aufgabe, diejenige Zeit t Sek. zu berechnen, welche unter gegebenem Gesetz d. Wasserzuflusses verstreicht von d. Augenblick an, wo d. Wasserstand $= h_0$ ist bis zu d. Augenblick wo d. Wasserstand sich bis zu h_1 vermindert hat. Wenn d. Mündung A einigermassen klein ist im Vergleich mit d. horizontalen Querschnitt F an einer beliebigen Stelle, so kann man sich durch eine specielle Untersuchung davon überzeugen, dass man nur einen kleinen Fehler begeht, wenn man d. Ausflussgeschw. in jedem einzelnen Augenblick gleich derjenigen setzt, wenn d. Wasserhöhe constant bliebe; es würde also dann:

$u = \varphi\sqrt{2gh}$ sein. Im vorliegenden Fall, wo