Wärmetheorie & Hydraulik

Pieper, Andreas

Karlruhe, 1872/73

Bewegung des Wassers in längeren Röhren

urn:nbn:de:bsz:31-279864

es sind also alle d. in obiger Formel mit A bezeichneten Größen $= F_1$ und d. mit F bezeichneten $= F_2$. Was d. Contractionscoeff. betrifft, so sind sie für Verhältnisse $= 1$, Verhältnisse von 1 verschieden. Eine Contraction findet nur statt dort, wo d. Flüssigkeit in d. engeren Querschnitt einfließt, es ist also $\alpha_1 = \alpha_3 = \ldots\ldots \alpha_{2n+1}$, eine Größe selbst, die mit α_1 bezeichnet werden, im Übrigen dagegen ist: $\alpha_2 = \alpha_4 = \ldots \alpha_{2n} = 1$ und ebenso d. Coeff. α d. äußeren Contraction. In d. allgemeinen Formel besteht nun ζ aus $2n+1$ Summanden. Von diesen sind $n+1$ unter sich gleich und d. übrigen n auch. D. ersteren erhält man, wenn man d. Index m d. Reihe nach d. Werthe $1, 3, 5 \ldots 2n+1$ beilegt, von denen jeder $= \frac{1}{\alpha_1} - 1$ sein wird, also $(n+1)(\frac{1}{\alpha_1} - 1)^2$. D. übrigen n Summanden sind auch untereinander gleich und zwar da $\alpha_m = 1$, $A_m = F$, $F_m = F_2$ ist, $= 1 - \frac{F_1}{F_2}$, also erhält man: $n(1 - \frac{F_1}{F_2})^2$ und folgt: $\zeta = (n+1)(\frac{1}{\alpha_1} - 1)^2 + n(1 - \frac{F_1}{F_2})^2$.

Was d. Coeff. α_1 betrifft, so muß man berücksichtigen, daß d. Contraction überall dort, wo d. Flüssigkeit in einen engeren Querschnitt eintritt, nur eine partielle Contraction ist, dagegen ist d. weitere Flüssigkeit nachträglich abzuändern, es ist für d. Partialität d. Contraction ungefähr $= \frac{1}{2}$. Man kann also d. Contractionscoeff. α_1 = denjenigen setzen, welcher unter sonst gleichen Umständen bei vollständiger Contraction stattfindet, multiplicirt mit $(1 + 0{,}155 \cdot \frac{1}{2})$. D. Contractionscoeff., welcher unter sonst gleichen Umständen bei vollständiger Contraction stattfindet, kann auch hier wieder $= 0{,}64$ gesetzt werden, also:

$$\alpha_1 = 0{,}64(1 + 0{,}155 \cdot \tfrac{1}{2}) = 0{,}6896.$$

mit diesem Werth wird $(\frac{1}{\alpha} - 1)^2 = 0{,}2025$ also annähernd $= 0{,}2$, und somit ergibt sich:

$$\zeta = \left[0{,}2 + (1 - \tfrac{F_1}{F_2})^2\right] n + 0{,}2$$

D. Verhältniß $\frac{F_1}{F_2}$ ist immer sehr klein, so daß es gegen 1 vernachlässigt werden kann; dann ist: $\zeta = 1{,}2n + 0{,}2$ und zwar

für n =	2	4	6	8
ist ζ =	2,6	5	7,4	9,8
$\mu = \varphi$ =	0,527	0,408	0,345	0,304

und somit nach d. Formel $\mu = \varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$

und endlich: $V = \mu A \sqrt{2gH}$ wenn A sehr klein ist. —

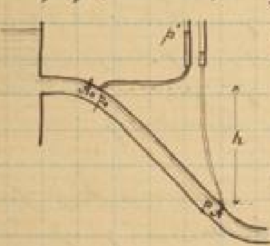
Bewegung des Wassers in längeren Röhren.

Es fließe jetzt d. Wasser in einer geraden od. nur schwach gekrümmten längeren cylindrischen Röhre; d. Länge derselben, $= l$, sei so groß, daß d. Leitungswiderstand derselben einen wesentlichen und in manchen Fällen d. hauptsächlichsten Bestandtheil d. Gesammtwiderstandes ausmacht. Dieser Leitungswiderstand, welcher von d. inneren und äußeren Reibungen abhängt, ist erfahrungsgemäß nahezu von d. Dr. ganz unabhängig und unterscheidet sich dadurch wesentlich von d. Reibung 2 fester Körper. Es ist dadurch nachgewiesen, daß man d. äußeren Druck an d. Oberfl. d. Wassers und an d. Mündung d. Röhre um beliebig vergrößerte und zwar um mehr als 1 Atm.; es fand sich dadurch nicht im Geringsten eine Änderung im Leitungs-Widerstand. Es unterscheidet sich aber d. Zustand d. Wassers in verschiedenen Querschnitten d. Röhre durch weiter nichts als durch d. dort herrschenden Druck u. da dieselbe keinen Einfluß hat auf d. Leitungswiderstand d. Röhre, so ist d. Leitungswiderstand einfach proportional d. Länge, also d. Leitungswiderstand pr. Längeneinheit in allen Stellen d. Röhre gleich; er kann also derselbe $= l B_1$ gesetzt werden, wo B_1 d. Leitungswiderstand pr. 1 m Länge bedeutet, wobei es ganz gleichgültig ist, ob in d. ersten Leitungseinheit ein größerer Druck herrscht als in d. letzteren. Außer diesem Leitungswiderstand können auch noch besondere Widerstände vorkommen, wie früher besprochen d.h. ein besonderer Widerstand; ob seine aber $\zeta\frac{u^2}{2g}$ d. übrigen Widerstandshöhe, dann ist: $\mathfrak{B} = \zeta\frac{u^2}{2g} + \mathfrak{B}_1 l$ — Gesammtwiderstandshöhe für d. Last in d. Röhre, wo u d. mittlere Wassergeschw. bedeutet. —

Es handelt sich nun zunächst darum, durch Versuche d. Größe $\mathfrak{B}_1$ zu ermitteln, also d. Abweichungshöhe von $\mathfrak{B}_1$ = spez. Leitungswiderstandshöhe. Es kann dies auf verschiedene Weise geschehen. Erinnern wir uns d. Grundgleichungen: $\frac{u^2-u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}$, welche Formel sich bezieht auf d. Last von einem beliebigen Querschnitt d. Rohrleitung bis zu einem anderen, u d. mittlere Geschw. im Endquerschnitt und u_0 d. im Anfangsquerschnitt, H d. wirksame Druckhöhe für d. ganze Rohrstrecke und $\mathfrak{B}$ d. Widerstandshöhe. — Bezieht man nun diese Gl. auf d. Last von d. Oberfl. d. Wassers im Gefäß bis zur Mündung d. ganzen Röhre, so ist $u_0 = 0$ und $\mathfrak{B} = \zeta\frac{u^2}{2g} + l\mathfrak{B}_1$ also:

$$H = (1+\zeta)\frac{u^2}{2g} + l\mathfrak{B}_1.$$

wo H in diesem Falle $= h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist, worin p_0 d. äußeren Druck an d. freien Oberfl. d. Wassers im Ausflußgefäß und p an d. Mündung, während h d. Höhe d. freien Wasseroberfl. im Ausflußgefäß über d. Schwerpunkt d. Mündung od. dem Unterwasserspiegel bedeutet. Diese Gl. in Verbindung mit $u = \frac{V}{F}$ kann dazu dienen, d. Größe $\mathfrak{B}_1$ zu ermitteln, wenn d. Größen l, d. wirksame Druckhöhe H und d. Rohrquerschnitt F bekannt sind und wenn man ferner durch Versuche d. pr. Sek. ausfließende Wasservolumen V mißt und d. Coeff. ζ kennt. Natürlich wird man d. Versuche so anstellen, daß derartige besondere Widerstände nicht viel vorkommen. Man kann nun $\mathfrak{B}_1$ in jedem Fall ermitteln und thut man dies für möglichst viele verschiedene Fälle, so wird sich ein empirisches Gesetz ergeben, wie $\mathfrak{B}_1$ von d. verschiedenen Umständen abhängig ist. — Dieses Verfahren ist indessen daher ein umständlich zu nennen, indem man diesen zunächst abhängig ist von d. Fehlern d. d. $\mathfrak{B}$ und V u. ζ anhaften. D. Versuche sind nun so angestellt worden, daß man von diesen Mängeln möglichst unabhängig war.



Es wird eine beliebig lange Röhre genommen, A_0 u. A seien 2 Querschnitte derselben, und zwar liege A_0 in einer Höhe h über A. Es werden nun mit diesen Leitungsröhren 2 beliebig enge Zweigröhren verbunden mit einem luftdichten Verschluß, verbunden und diese münden nach d. anderen Seite in 2 oben offenen Glasröhren geführt, d. neben einander stehen. Es wird dann d. Wasser in diesen Glasröhren verschieden hoch stehen. Man erhält eine ganz einfache Beziehung zwischen d. Differenz dieser Wasserhöhen und d. gesammten Widerstandshöhe für d. Rohrstrecke A_0A. Es sei p_0 d. Dr. in A_0 und p d. in A; p' sei d. äußere atm. Druck, an d. Glasröhren sich befinden. Dann ist d. Höhe d. Wasserspiegels in d. ersten Glasröhre über A_0 einfach ein Maß für d. Unterschied d. Drucks p_0 über p' od. es ist d. Höhe d. Wassers in d. Glasröhre über $A_0 = \frac{p_0 - p'}{\gamma}$, folglich ist d. Höhe d. Wasserspiegels in d. ersten Glasröhre über d. ersten Querschnitt d. Leitungsröhre um h größer als $\frac{p_0-p'}{\gamma}$. Andererseits ist d. Höhe d. Wasserspiegels in d. 2ten Glasröhre über A ein Maß für d. Unterschied d. Drucks p über p' oder $= \frac{p-p'}{\gamma}$. Zieht man d. Höhe d. Wasserspiegels in d. 2ten Glasröhre über A ab von d. ersten über A, so erhält man d. Höhendifferenz: $h + \frac{p_0-p'}{\gamma} - \frac{p-p'}{\gamma} = h + \frac{p_0-p}{\gamma} = H$ d.h. = d. wirksamen Druckhöhe für d. Rohrstrecke A_0A; die mittlere Geschw. u_0 ist $= u$, also ist $H = \mathfrak{B}$. Wählt man d. Stellen A_0 u. A so, daß d. Strecke A_0A geradlinig ist, also keine besonderen Widerstände vorkommen, so ist $\mathfrak{B} = l\mathfrak{B}_1$, also $\mathfrak{B}_1 = \frac{H}{l}$. und man wird $\mathfrak{B}_1$ um so genauer finden, je größer H ist. —

Diese Versuche zur Bestimmung von $\mathfrak{B}_1$ sind durchgängig mit gusseisernen Röhren von kreisförmigem Querschnitt angestellt worden, jedoch sind auch Versuche mit gezogenen schmiedeeisernen Röhren, ferner mit Messing-, Zink-, Blei-, Asphalt-, Glas- und Holzröhren angestellt worden, welche Versuche erkennen lassen, daß bei äußerlicher Gestalt und Beschaffenheit d. Röhren d. Material nicht viel auf d. Leitungswiderstand einwirkt; sind jedoch d. Röhren rauher, so ist d. Leitungswiderstand größer z.B. bei rauhen Holzröhren ist d. Leitungswiderstand $1\frac{3}{4}$ mal so groß wie bei guten Eisenröhren. Sind d. Röhren

[illegible]

$$B_1 = \frac{R'U}{F}.$$

[illegible] $U = \pi d$ und $F = \frac{\pi d^2}{4}$ also $B_1 = \frac{R'}{r} \cdot \frac{4}{d}$.

[illegible] $\frac{R'}{r}$ [illegible]

[illegible] Couplet, 26 m, Bossut, 18 m, Dubuat, [illegible] $d = 0{,}027$ bis $0{,}49$ m [illegible] $u \leqq 2$ m. [illegible] $\frac{R'}{r}$ [illegible] Woltmann [illegible]:

$$\frac{R'}{r} = a u^n$$

[illegible] $n = \frac{7}{4}$; [illegible] 1796 [illegible] Eytelwein [illegible] $n = \frac{35}{18}$ [illegible] Du Buat [illegible]:

$$\frac{R'}{r} = 0{,}0002956\, u^{\frac{7}{4}} \qquad (\text{Längeneinheit} = m).$$

[illegible] 1802 [illegible] Prony [illegible]

$$\frac{R'}{r} = a u^2 + b u$$

[illegible]: $a = 0{,}000348$ und $b = 0{,}0000173$.

[illegible] Eytelwein [illegible]: $a = 0{,}000280$ und $b = 0{,}0000224$.

d'Aubuisson [illegible] 51 [illegible]: $a = 0{,}000343$ und $b = 0{,}0000188$.

Weisbach [illegible]:

$$B' = \zeta \frac{u^2}{2g}$$

[illegible] ζ [illegible] d [illegible]

$$B' = \frac{\lambda}{d} \frac{u^2}{2g}$$

[illegible] λ [illegible]

Setzt d. Verf. nun d. beiden Ausdrücke für $\Re$ mit einander, so folgt:

$$\lambda = \frac{2g}{u^2}\,\frac{4\Re'}{r} = \frac{8g}{u^2}\,\frac{\Re'}{r}.$$

Wenn also wie nach Prony $\frac{\Re'}{r} = au^2 + bu$ gesetzt wird, so ist $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{u}$, wo $\alpha = 8ga$ und $\beta = 8gb$ ist. Später nun hat Weisbach außer diesen 51 Beobachtungen noch 12 weitere Versuche mit hinzugezogen, von denen 11 von ihm selbst und einer von Gueymard in Grenoble angestellt sind, wobei d. Mittelgeschw. des Wassers erheblich größer war als früher, nämlich bis zu 4,6 m p. Sek., so daß nun ein weiteres Geltungsgebiet geschaffen worden war. Damit bestimmte Weisbach ein genaueres Gesetz auf Grund dieser 63 Versuche. Er erkannte, daß eine bessere Anschließung an d. Gesamtheit d. Versuche erzielt werden könnte, wenn d. Coeff. λ nicht $= \alpha + \frac{\beta}{u}$ gesetzt würde, sondern $= \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{u}}$; indem für d. Coeff. α u. β auf Grund dieser 63 Versuche mit Hilfe d. Methode d. kleinsten Quadrate d. wahrscheinlichsten Werte bestimmt wurden, fand sich:

$$\lambda = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{u}}.$$

Später sind von Weisbach Versuche angestellt worden mit Glas-, Messing- und Zinkröhren, welche eine Geschw. annahmen von 21–22 m p. Sek. Obgleich diese neuen Versuche ganz genügende Übereinstimmung mit dieser Formel zeigten, ließ sich aus diesen Versuchen noch ein weiterer Einfluß erkennen; sie zeigten sich daß λ nicht nur v. Geschwind. abhängig sei, sondern in demselben Sinne wie von u, d. h. so daß λ um so größer je kleiner u u. d sind, wenn auch d. Einfluß d. Durchmessers nicht in so hohem Grade stattfand, wie d. von u. —

D. gründlichsten Beobachtungen sind von d. französischen Ingenieur Darcy an d. Wasserleitung Chaillot in Paris angestellt worden. Es wurden dabei im Ganzen 22 verschiedene Röhrenleitungen benutzt, welche teils aus Gußeisen, teils aus gezogenem Schmiedeeisen, teils aus Glas- u. Asphalt-Röhren bestanden. Alle diese Röhren waren ~~neu~~ u. durchweg gereinigt mit Ausnahme von 3 gußeisernen Röhrensträngen, d. schon lange im Gebrauch waren. Da diese Versuche zu d. Zwecke am meisten benutzt werden sollen, so sollen d. Umstände zunächst [illegible] werden, unter denen sie angestellt wurden. D. bei d. Versuchen benutzten Asphaltröhren waren von solcher Art, wie sie in Frankreich vielfach benutzt werden: sie sind aus Eisenblech zusammengelegen, am Rande vernietet, dann mit Zinn überzogen, und schließlich innen und außen mit Asphalt versehen. Die einzelnen Röhrenstücke wurden in einander eingeschmolzen; d. eisernen gezogenen und d. Glasröhren waren durch übergeschobene Muffen mit einander verbunden und d. Bleiröhren durch Lötung. D. Röhrenstränge, an denen d. Versuche vorgenommen wurden, waren meistens etwas über 100 m lang, nur d. Glas- und Bleiröhren waren etwa halb so lang. D. Durchmesser d. einzelnen Leitungen zwischen $d = 0{,}012$ bis $d = 0{,}5$ m; d. mittlere Geschw. d. Wassers lag zwischen d. Grenzen $u = 0{,}16$ m bis 5 m p. Sek. Es lagen also sowohl d. Durchmesser, wie d. Geschw. zwischen ziemlich weiten Grenzen. Darcy erkannte aus seinen Versuchen nun zunächst, daß d. Leitungswiderstand in höherem Grade vom Material und vom Oberflächenzustand abhängig sei, als bisher angenommen wurde und daß d. Einfluß d. Materials mehr und mehr schwindet, je länger d. Röhren im Gebrauch sind und durch solche Verunreinigung, wie sie immer in erheblich höherem Grade nach längerer Zeit vorkommt, soll d. Widerstandshöhe noch größer als im doppelten Grade wachsen. Diese Verunreinigung hängt jedoch von so vielen verschiedenen Umständen ab, so daß man von d. Grade d. Verunreinigung keine Voraussetzung machen kann; überdies kam es Darcy nicht so sehr darauf an, d. Gesetz d. Leitungswiderstandes selbst näher zu bestimmen, als es ihm nur darauf ankam, gewisse empirische Regeln aufzustellen, nach welchen d. Leitungswiderstand im ungereinigten Zustand und nach längerer Zeit Gebrauch beurteilt werden kann. Zu diesem Zweck empfiehlt Darcy zu setzen:

$$\frac{\Re'}{r} = \left(0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{d}\right)u^2.$$

Diese Formel bezieht sich auf Leitungsröhren, d. schon längere Zeit in Gebrauch waren; es ist vorausgesetzt, daß hierbei $u > 0{,}2$ m sei. Es wird nach dieser Formel $\frac{\Re'}{r}$ ungefähr doppelt so groß gefunden, als bei neuen gußeisernen Röhren.

Mit Rücksicht auf d. Beziehung zwischen λ und $\frac{\Re'}{r}$, wäre also hiernach λ von d. Form $\alpha + \frac{\beta}{d}$, während also, wie wir früher erwähnten, λ nur mit abnehmender Geschw. wächst. Während nach d.

Weisbach'schen Versuchen λ mit abnehmendem u u. d wachsen würde, würde nach Darcy λ einzig und allein mit abnehmender Rohrweite wachsen, wie auch von Weisbach d. Gesetz d. Abhängigkeit nicht bestimmt. Es sind nun diese Darcy'schen Versuche später von Andern benützt worden, um es zu versuchen, d. Gesetz d. Widerstandes noch genauer zu bestimmen. Zunächst ist ein solcher Versuch von Gauckler gemacht worden. Er fand aus d. Darcy'schen Versuchen, daß sich für B_1 folgende empirische Formel ergibt:

$$B_1 = \left(\frac{u^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{4}u^{\frac{1}{4}}}{\alpha\, d^{\frac{1}{3}}}\right)^4.$$

wo u d. mittlere Geschw., d d. Rohrweite bedeutet, während α ein Coeff. ist, welcher für verschiedenartige Röhren und verschiedene Zustände derselben verschieden ist, und zwar bestimmt Gauckler für Asphalt- und Bleiröhren α = 7,0; für Glas α = 6,7; für neue Gußeisenröhren α = 6,6; für gezogenes Schmiedeeisen α = 6,4; für unreine Gußeisenröhren α = 5,5. Hiernach wäre d. ungünstigste Verhältniß d. Widerstandshöhe B_1 für gußeiserne Röhren in unreinem Zustande über d. geringsten: $=\left(\frac{6,6}{5,5}\right)^4 = 2,07$. Vergleicht man diesen Ausdruck für d. spez. Leitungswiderstandshöhe mit d. Ausdruck für $B_1 = \frac{\lambda}{d}\frac{u^2}{2g}$, dessen wir uns bis jetzt vorzugsweise bedient haben, so folgt daraus:

$$\lambda = \frac{2g}{\alpha^4}\frac{\left(1+\frac{\alpha}{4u^{\frac{1}{4}}}\right)^4}{d^{\frac{1}{3}}}.$$

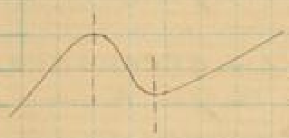
Demgemäß wird d. Coeff. λ in Uebereinstimmung mit d. früher besprochenen Erfahrungen durchaus um so größer sein, je kleiner u ist; was aber d. Abhängigkeit von d betrifft, so ist sie eine zusammengesetzte; d. Zähler und d. Nenner wächst mit d, es zeigt sich jedoch, daß es für jede Geschw. einen bestimmten d gibt, für welchen λ ein Min. wird. Wenn man bei gegebenem Werth von u diesen Ausdruck als eine Function von d betrachtet und untersucht, für welchen Werth von d dieser Ausdruck ein Min. wird, so findet man $d = \frac{4}{11}u^{\frac{1}{4}}$. Es würde also, wenn man anzunehmen hat, nach dieser Formel für jede mittlere Geschw. ein bestimmter Röhrendurchmesser resultieren, für welchen d. Geschw. verhältnißmäßig am ...,

also für:	$d =$	0,346	0,364	0,432	0,514 m
für:	$u =$	0,5	1	2	4

Diese Formel erscheint auch kaum empfehlenswerth für d. Gebrauch, wenngleich kann sie als d. richtige Abhängigkeitsgesetz d. Widerstandshöhe betrachtet werden. Auch ist zu bemerken, daß d. Coeff. α, welche für d. verschiedenen Rohrweiten verschieden sind, nicht nur in sich begreifen d. Einfluß d. verschiedenen Materials und d. verschiedenen Oberfl.-Beschaffenheit, sondern auch d. bei diesen verschiedenen Röhren vorkommenden Abweichungen von d. cylindrischen Form, welche mehr od. weniger zufällig sind. Zur Bestimmung von α sind von Gauckler durchaus nicht d. Versuche mit Röhren verwendet, welche von kleinen theoretischen Werth sind, namentlich d. Versuche an Glasröhren sind nicht gut zu brauchen, da dieselben immer nicht zuverlässig, so daß d. Durchmesser zwischen 53 u. 44 mm schwankte, womit also erheblich zufällige Querschnittsänderungen verbunden sind. Ebenso verhält es sich mit d. Asphaltröhren; diese konnten kaum mit Sicherheit benutzt werden, um d. Abhängigkeitsgesetz von B_1 zu ermitteln, weil d. Asphalt nur anfangs im ursprünglichen Zustande aufgetragen wurde und nicht immer erhalten wurde. Auch d. Versuche mit d. gezogenen Röhren hätten kaum verwendet werden dürfen, weil d. Schweißnähte schon einen merklichen Einfluß auszuüben konnten. D. Formel ist demnach als theoretische nicht gut verwendbar. —

D. Leitungswiderstandshöhe B_1 kann auch von anderen Umständen abhängig sein. Daß zunächst d. Abs. Flüssigkeit mit dazu beiträgt, ist klar; jedoch wollen wir uns nur auf d. Bewegung mit Wasser begnügen. D. Größe B_1 kann auch von d. Wärmezustande abhängen, welcher wiederum von d. Temperatur abhängt. Daß d. Temp. keine merkliche Änderung ausübt, ist schon gesagt und wäre also nur eine Änderung von B_1 durch d. Temperatur denkbar. Es wurde auf diesen Umstand schon im Jahre 1800 von Gerstner hingewiesen und zwar wurde nachgewiesen, daß d. Menge d. durch eine enge Röhre abfließenden Wassers unter sonst gleichen Umständen sich verdoppeln kann, wenn d. Temperatur um 30° C. wächst. Dieser merkliche Einfluß d. Temperatur ist später von Oberbaurath Hagen in Berlin beobachtet worden, freilich auch nur mit Röhren von geringen Weiten [illegible] 3 [illegible] 2,8 4 u. 6 mm, [illegible] 0,5 m lang, [illegible] 1 m. [illegible] 0,07 – 0,88 m [illegible] 67° R.

Es zeigte sich nun im Allgemeinen folgendes Verhalten: [illegible] max. [illegible] min. [illegible]



[illegible] max. u. min. [illegible] 10° bis 20° [illegible]

[illegible] $ud > 0,00375$ [illegible] Hagen'schen [illegible]

$$\beta_1 = \frac{h}{d}\frac{u}{g}$$

$$h = \frac{0,000496\,(22,6 - \sqrt{t})}{\sqrt{ud}}$$, wenn t d.

Temperatur d. Wassers in Réaumur'schen Graden bedeutet.

[illegible] $h = \frac{0,01}{\sqrt{a}}$ [illegible] $t = 6°$ R. [illegible] Hagen'schen [illegible] max. [illegible] Hagen [illegible]

[illegible] $\beta_1 = b\frac{u}{d}$ [illegible] $h = \frac{\beta}{ud}$ [illegible] $b = \frac{\beta}{d}$ [illegible]

$$\beta = \beta_0\left(\sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{t}\right). -$$

[illegible] Hagen [illegible] Darcy'schen [illegible] Hagen [illegible] Hagen [illegible] Darcy'schen [illegible] 3 [illegible] 8 [illegible] 87 [illegible]

$u = 0,16$ bis 5 m p. Sek. und d. Durchmesser zwischen $d = 0,014$ bis 0,5 m. Unter verschiedenen empirischen Formeln zur Darstellung d. Abhängigkeit d. Größe B_1 zeigte sich am brauchbarsten folgende:

$$B_1 = a\frac{u^2}{d} + b\frac{u}{d^2}$$

worin nach d. 87 Versuchen sich ergeben:

$$a = 0,0011193 \text{ und } b = 0,0000005336.$$

Entgegen [illegible] Hagen diesen unmittelbar aus d. sorgfältigen Darcy'schen Versuchen abgeleiteten Werth von a u. b [illegible] Correction, um sie mit seinen eigenen Beobachtungen besser in Übereinstimmung zu bringen. [illegible] Formel für B_1, [illegible] erkennt man, daß [illegible] d. Wasser ist, [illegible] auf d. [illegible] Grund [illegible]; es [illegible] sich deshalb [illegible], daß bei solchen Versuchen, [illegible] Röhren [illegible] waren, B_1 [illegible] bestimmt werden kann. Bei d. Versuchen von Hagen [illegible] d. Röhrenweiten [illegible] und [illegible] eine [illegible] Anzahl [illegible] d. Röhren [illegible]. Auf Grund seiner eigenen Versuche setzte nun Hagen d. von d. Temp. t abhängigen Coeff. b:

$$b = 0,000005871 - 0,000000267\,t + 0,000000000735\,t^2$$

unter t d. Temp. in Reaumur'schen Graden verstanden. Sollte dieser Werth von b, d. aus d. Hagen'schen Versuchen abgeleitet wird, d. aus [illegible] Werth von b nach Darcy [illegible] entsprechen, so müßte $t = 2,11°$ R. sein; nun sind d. Darcy'schen Versuche, welche mit d. [illegible] angestellt sind (u. diese Versuche [illegible] auf b [illegible]) angestellt worden in d. Monaten October u. Mai; [illegible] d. Temp. [illegible] ist, ist nicht angegeben worden, es läßt sich [illegible], daß [illegible] d. Temp. [illegible] 2,11° R.; setzt man aber in d. Hagen'schen Versuchen $t = 10°$, so ergibt sich d. [illegible] Werth:

$$b = 0,0000003936.$$

Diesen Werth von b setzt nun Hagen [illegible] d. Formel für B_1 ein, wonach folgt: $a = 0,0012017$. Dieser Werth von b ist [illegible] als d. [illegible] bestimmt, [illegible] ist d. Unterschied nur wenig größer als d. [illegible], d. [illegible] b [illegible], es ist nämlich d. Unterschied d. Werthe von $b = 0,0000014$ und d. [illegible] von b [illegible] ist: $= 0,0000010$. [illegible] ergibt sich also für d. Widerstand [illegible] B_1 d. [illegible] Ausdruck, wofür $a = 0,0012017$ ist aber b von d. Temp. abhängt [illegible] für $t = 10°$ R. $b = 0,0000003936$ ist.

In d. [illegible] rechnen wir nun d. Formel: $B_1 = \frac{\lambda}{d}\frac{u^2}{2g}$ brauchen, dann ist:

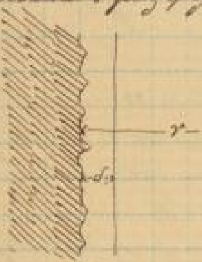
$$\lambda = 2g\left(a + \frac{b}{ud}\right) \text{ oder } = \alpha + \frac{\beta}{ud} \text{ worin:}$$

$$\alpha = 0,023577 \text{ und } \beta = 0,00011519 - 0,0000041\,91\,t + 0,0000000092\,29\,t^2.$$

worin nun aber t in Celsius'schen Graden zu verstehen ist; setzt man d. mittlere Temp. [illegible] $= 10°$ C. so wird d. mittlere Werth von β: $\beta = 0,0000251$.

[illegible] diese Formel aus d. Darcy'schen u. Hagen'schen Versuchen abgeleitet ist, [illegible] Röhren [illegible] nicht ganz [illegible] Werthe von λ [illegible]. Man muß also diesen Werth von λ etwa um 20 % vergrößern. [illegible] Vergrößerung, welche [illegible] in Rechnung bringen, daß man d. [illegible] in Rechnung stellt, [illegible] d. Anlage zu [illegible]. –

Es ist schon [illegible] worden, daß d. Ausdruck von B_1, also $a\frac{u^2}{d} + b\frac{u}{d^2}$ und also auch d. [illegible] Ausdruck $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{ud}$ sich [illegible] empfiehlt, daß d. Ausdruck mit einer einfachen [illegible] Vorstellung von d. Wesen d. Leitungswiderstandes in Zusammenhang gebracht werden kann. d. Widerstand kann nämlich als aus [illegible] Bestandtheilen bestehend betrachtet werden, indem derselbe herrührt theils von d. äusseren Reibung theils von d. inneren Reibung d. Wassers; demgemäss können wir setzen $B_1 = E_1 + J_1$, wo E_1 denjenigen Bestandtheil von B_1 bedeutet, d. von d. äusseren Reibung herrührt und J_1 d. von d. inneren Reibung herrührenden Bestandtheil von B_1. D. äussere Reibung, welche d. Bestandtheil E_1 entspricht, ist, insofern sie von d. inneren Reibung unabhängig ist, zurückzuführen auf gewisse wenn auch ganz schwache Hervorragungen und Vertiefungen; im stark vergrösserten Maassstabe wird



d. Rohrwand etwa wie nebenstehend aussehen. Wenn nun d. Wasser an d. Rohrwand entlang fliesst, so muss durch diese Hervorragungen eine plötzliche Änderung d. Geschw.-Grösse also auch d. Geschw.-Richtung stattfinden; stösst d. Wasser gegen eine solche Hervorragung, so wird es gewissermassen reflectirt gegen d. Innere hin. Wie genauer [illegible]. Da dieser thatsächliche Vorgang unmöglich näher untersucht werden kann, so kann man sich dadurch helfen, dass man d. Einfluss dieser äusseren Reibung zunächst als sich erstreckend betrachtet auf eine ringförmige Wasserschicht von sehr kleiner Dicke. Denken wir uns um d. Axe d. Röhre herum eine cylindrische Fl. beschrieben mit einem Radius, d. etwas kleiner ist als d. innere Radius d. Röhre, so dass zwischen dieser eine sehr dünne Wasserschicht übrig bleibt. Es fliesse hier d. Wasser mit einer mittleren Geschw. w', die Dicke dieser Schicht sei δ. Diese Dicke ist aber nicht constant, sie schwankt zwischen einem min. u. max. und es sei d. durchschnittliche min. $= \delta_1$ u. max. $= \delta_2$. An d. Stelle, wo d. Dicke dieser Schicht am kleinsten $= \delta_1$ ist, wird d. Geschw. d. Wassers am grössten $= w_1$ sein und dort wo d. Dicke am grössten $= \delta_2$ ist, wird d. Geschw. am kleinsten $= w_2$ sein. So oft nun d. max.-Geschw. w_1 plötzlich in d. min. Geschw. w_2 übergeht, wird ein Widerstand entstehen, welcher gemessen wird durch d. Widerstandshöhe $\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$. Bezeichnet man nun d. Widerstandscoeff. bezogen auf d. mittlere Geschw. w' mit ζ' so kann man setzen:

$$\zeta' \frac{w'^2}{2g} = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$$ so ist also $$\zeta' = \left(\frac{w_1}{w'} - \frac{w_2}{w'}\right)^2$$ ist.

od. da d. Geschw. sich umgekehrt wie d. Dicken d. Wasserschicht verhalten:

$$\zeta' = \left(\frac{\delta}{\delta_1} - \frac{\delta}{\delta_2}\right)^2.$$

Angenommen, es kommen auf d. Längeneinheit für irgend einen Wasserfaden, d. längs d. Röhre hinfliesst, eine plötzliche Querschnittsänderung n mal vor, so wird also d. Widerstandshöhe pro Meter Länge $= n \zeta' \frac{w'^2}{2g}$ sein, wo sich d. Factor von n auf eine einmalige plötzliche Geschw.-Änderung bezieht. Dieses stellt d. durchschnittlichen Verlust an Arbeit pro 1 Kgr. d. an d. Oberfl. fliessenden Wassers. Dieser Arbeitsverlust bleibt aber nicht beschränkt auf d. an d. Oberfl. fliessende Wasser, sondern es findet ein beständiger Austausch zwischen d. innerem und äusserem Wasser statt. Um nun diesen Verlust pro 1 Kgr. d. ganzen in d. Röhre fliessenden Wassers zu erhalten, muss dieser Arbeitsverlust multiplicirt werden mit d. Verhältniss derjenigen Wassermenge, welche gleichzeitig in dieser Oberfl.-Schicht und in d. ganzen Röhre sich strömend bewegt. Es ist aber d. Wasservolumen, welches durch einen Querschnitt nur dieser ebenen Oberfl.-Schicht hinfliesst $= 2\pi r \delta w'$, wenn r d. Radius d. Röhre ist. Dagegen ist d. derjenige Wasservolumen, welches pro Sek. durch einen Querschnitt d. ganzen Röhre hindurchfliesst = d. Product aus πr^2 und d. mittl. Geschw. u; es ist also d. Verlust an lebendiger Kraft pro 1 Kgr. d. ganzen in d. Röhre strömenden Wassers $= n \zeta' \frac{w'}{2g} \frac{2\pi r \delta w'^2}{\pi r^2 u}$ insoweit er von d. äusseren Reibung herrührt, also

$$E_1 = \frac{n \delta \zeta'}{g} \frac{w'^3}{r u}$$ od. wenn $\frac{w'}{u} = \varepsilon$ gesetzt wird und $r = \frac{d}{2}$

so folgt dieser Verlust: $$E_1 = \frac{2 n \delta \varepsilon^3 \zeta'}{g} \cdot \frac{u^2}{d}$$

Dieses ist ein Ausdruck von d. Form $a\frac{u^2}{d}$ also übereinstimmend mit d. ersten Ausdruck in d. Hagen'schen Formel, wenn

$$a = \frac{2 n \delta \varepsilon^3}{g} \left(\frac{\delta}{\delta_1} - \frac{\delta}{\delta_2}\right)^2$$ gesetzt wird. Aus einer Berechnung von a kann natürlich keine

[illegible]

$$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = w\,\frac{dw}{ds} \qquad \text{(Seite 22)}$$

[illegible] K_s [illegible] R_s [illegible] ds [illegible] $K_s = 0$ [illegible] w [illegible] $\frac{dw}{ds} = 0$ [illegible]

$$R_s = \frac{dp}{ds}.$$

[illegible] p [illegible] s [illegible]

$$R_s = \frac{dp}{ds}.$$

[illegible] $\gamma\,\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds}$; [illegible] $\frac{p}{\gamma}$ [illegible] $\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds}$ [illegible] $\div\,\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds}$ [illegible] J [illegible]

$$R_s = +\gamma\,\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds} = \div\,\gamma J.$$

[illegible] R_s [illegible]

$$R_s = \frac{R}{y}\,\frac{d}{dy}\left(y\,\frac{dw}{dy}\right) \qquad \text{(Seite 25)}$$

[illegible] R [illegible] w [illegible] y [illegible]

$$\frac{d}{dy}\left(y\,\frac{dw}{dy}\right) = \div\,\gamma\,\frac{J}{R}\,y$$

[illegible]

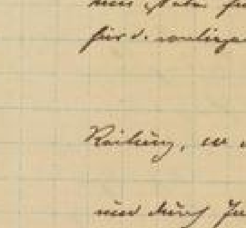
$$y\,\frac{dw}{dy} = \div\,\gamma\,\frac{J}{R}\,\frac{y^2}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{dw}{dy} = -\gamma\,\frac{J}{R}\,\frac{y}{2}$$

[illegible] $= 0$, [illegible] $y = 0$ [illegible] $\frac{dw}{dy} = 0$ [illegible] max [illegible]

$$w = \div\,\gamma\,\frac{J}{4R}\,y^2 + \text{Const.}$$

[illegible] $y = 0$ [illegible] w_0 [illegible]

$$w = w_0 - \gamma\,\frac{J}{4R}\,y^2 \qquad \text{(III)}$$



[illegible] w [illegible] $w_0 - w = \gamma\,\frac{J}{4R}\,y^2$. [illegible] $(w_0 - w)$ [illegible] y^2 [illegible] w' [illegible]

$$w' = w_0 - \gamma\,\frac{J}{4R}\,r^2$$

[illegible]

$$w - w' = \gamma\,\frac{J}{4R}\,(r^2 - y^2).$$

Es kommt nun aber auf eine Beziehung zwischen w und d. mittleren Geschw. u an. Diese wird gefunden, indem man d. Querschnitt in Elemente zerlegt denkt, d. eine ringförmige Gestalt haben, deren jedes mit seiner Geschw. w multipliziert und d. Summe dieser Produkte durch d. ganzen Querschnitt dividiert, also:

$$u = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi y\, dy\, w.$$

Nimmt man d. Konstanten heraus und setzt für w seinen Ausdruck, so folgt:

$$u = \frac{2}{r^2}\int_0^r \left[w' + \gamma\frac{J_1}{4R}(r^2-y^2)\right] y\,dy$$

dieses Integral ausgeführt, liefert:

$$u = \frac{2}{r^2}\left[w'\frac{r^2}{2} + \gamma\frac{J_1}{4R}\left(r^2\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\right] = w' + \gamma\frac{J_1}{8R}r^2 = w' + \frac{\gamma J_1}{32R}d^2$$

also

$$J_1 = \frac{32R}{\gamma}\cdot\frac{u-w'}{d^2} = \frac{32R(1-\varepsilon)}{\gamma}\,\frac{u}{d^2} = b\frac{u}{d^2}$$

wenn man wieder $\frac{w'}{u} = \varepsilon$ setzt und wenn $b = \frac{32R(1-\varepsilon)}{\gamma}$ bedeutet, womit sich nun [illegible] d. Form d. [illegible] Gesetzes ergibt. Auch kann man wieder nicht d. Werte [illegible] zu einer theoretischen Berechnung d. Koeff. b, denn sowohl R als auch ε entziehen sich für einen [illegible] Bestimmung, so daß b nur durch Versuche bestimmt werden kann. b ist natürlich von d. Temperatur [illegible] abhängig, da d. spez. Gew. γ von d. Temp. abhängig ist. —

In d. Praxis soll immer d. spez. Leitungswiderstandshöhe unter d. Form:

$$B_1 = \lambda\frac{1}{d}\frac{u^2}{2g}$$

gebracht werden, so daß $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{d}$ wird. Nun kann man feststellen, daß wenn u u. d innerhalb d. praktischen Grenzen liegen, d. Wert von λ nur wenig veränderlich ist, praktisch pflegt u zwischen d. Grenzen $0{,}5 - 2$ m zu liegen und d. Rohrweite d zwischen $0{,}05 - 0{,}5$ m, so daß also $u\,d$ etwa zwischen d. Grenzen $\frac{1}{40} - 1$ liegt. Berechnet man zwischen diesen Grenzen d. Werte von λ, indem man für β denjenigen Wert setzt, d. einer durchschnittlichen Temp. von 10° C. entsprechen, so bekommt man:

λ zwischen $0{,}027 - 0{,}024$.

so daß man [illegible] für viele Anwendungen damit begnügen darf, einen konstanten Mittelwert λ zu benutzen, um so mehr als man doch d. Sicherheit wegen bei d. [illegible] Gebrauch λ um einige Prozent größer nehmen muß. Nimmt man aber durchschnittlich λ um 20% größer, [illegible] dieser theoretischen Formel, so kann man durchschnittlich $\lambda = 0{,}03$ setzen.

Dies ist [illegible] Unterschiede, wie sie bei [illegible] ~~wenigen~~ [illegible] vollkommen glatten Röhren [illegible] auf nicht [illegible] Rechnung. [illegible] d. Abweichung von d. zylindrischen Form Rechnung. Um außerdem [illegible] Rechnung zu tragen ist es angemessen ϑ größer zu setzen, als es in d. ersten Zeit d. Anlage nötig wäre. —

Unter Umständen kommt es vor, daß d. Röhre einen unrunden Querschnitt hat. Für diesen Fall liegen spezielle Erfahrungen bezüglich d. Leitungswiderstandes nicht vor und es ist am angemessensten d. Leitungswiderstand eines solchen Rohres gleich zu setzen d. eines zylindrischen Rohres, dessen Durchmesser = d. mittleren Durchmesser d. [illegible] Rohres ist. ~~Man setzt~~ also dieser mittlere Durchmesser ist bekanntlich: $d = \frac{4F}{U}$, wenn F = Inhalt d. Querschnitts und U d. Umfang ist. —

Was nun d. Fundamentalformel betrifft, welche bei d. [illegible] auf d. [illegible] d. Wassers in Röhren [illegible] angewendet wird, so war dieselbe:

$$\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - B.$$

wo u d. Geschw. am Ende, u_0 d. mittlere Geschw. am Anfange einer Rohrstrecke bedeutet, H = wirksame Druckhöhe und B = gesammte Widerstandshöhe für diese Rohrstrecke. Beginnt man d. Gl. am Oberwasserspiegel bis zum Ende d. Abflußrohres, so kann $u_0 = 0$ gesetzt werden. Ferner besteht d. Widerstandshöhe B aus derjenigen Widerstandshöhe, die [illegible], an gewissen Stellen [illegible] auftretenden besonderen Widerständen entspricht und d.

d. Leitungswiderstandshöhe. Ist ζ d. Widerstandscoeff. für an besonderen Stellen auftretende Widerstände, so ist:

$$\mathfrak{B} = \zeta \frac{u^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{u^2}{2g}$$

setzt man dies ein, so erscheint d. Fundamentalgl. in d. Form:

$$\left(1 + \zeta + \lambda \frac{l}{d}\right) \frac{u^2}{2g} = H$$

wenn d. wirksame Druckhöhe d. Leitung ist: $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$, wenn wiederum p_0 d. äußerliche Druck auf d. freien Oberfl., p d. an d. Mündung ist, während h d. Höhe d. Wasserstandes im Ausflussgefäß über d. Mittelpunkt d. Mündung od. über d. Unterwasserspiegel bedeutet. —

Wenn d. ganze Gefäß in Zus. [illegible] kommt ein Ansatzrohr K hinzu, wenn jedoch abgesehen werden soll. Bei dieser Form ist vorausgesetzt, dass d. Wasser mit d. vollen Querschnitt d. zylindrischen Rohres abfließt. Unter Umständen kann es d. Fall sein, dass d. Wasser nicht mit einem vollen Querschnitt abfließt, sondern dass d. Rohr mit einem Mundstück versehen ist, dessen Größe dann mit A bezeichnet werden soll, während D d. vollen Querschnitt d. Rohres bedeutet. Ist dann d. Fall so sei α d. Contractions-Coeff., d. sich unter d. vorliegenden Umständen auf d. Ausfluss bezieht, ferner φ d. Geschw.-Coeff. bestehend d. durch diese Mündung selbst auftretenden Widerstand, also $\mu = \alpha\varphi$ = Ausflusscoeff. und $\frac{1}{\varphi^2} - 1$ = Widerstandscoeff., welcher dieser Mündung an und für sich entspricht, dann ist leicht einzusehen, wie in einem solchen Fall diese Fundamentalgl. zu modificieren ist. d. Gl. drückt aus, dass d. wirksame Druckhöhe aus 2 Theilen besteht, nämlich aus $\frac{u^2}{2g}$ als Ausflussgeschw.-Höhe, $\Sigma\zeta\frac{u^2}{2g}$ Widerstandshöhe, welche d. besonderen Widerständen entspricht und aus $\lambda \frac{l}{d}\frac{u^2}{2g}$ Leitungswiderstandshöhe für d. ganze Röhrenlänge l. —

Ist d. Rohr am Ende mit einem engen Mundstück versehen, so ist d. wirksame Druckhöhe zu verwenden, um nicht nur d. Geschw. in d. Rohre zu erzeugen, sondern auch d. größere Geschw., womit sie durch d. kleinsten Querschnitt d. contrahierten Strahls hindurchfließt; dieser Querschnitt ist αA und es ist also d. Geschw. in d. kleinsten Querschnitt d. contrahierten Strahls im Verhältnis $\frac{D}{\alpha A}$ größer als u, d.h. um d. Geschw.-Höhe $\frac{1}{2g}\left(\frac{D}{\alpha A}\right)^2 u^2$ zu erzeugen. Außerdem kann durch d. Mundstückung ein besonderer Widerstand verursacht werden entsprechend d. Widerstandscoeff. φ. dieser Widerstandscoeff. ist dann $= \frac{1}{\varphi^2} - 1$, es ist somit dann d. wirksame Druckhöhe H im Ganzen jetzt dazu zu verwenden, um außer diesen Widerstandshöhen auch zu erzeugen die Ausflussgeschw.-Höhe und d. Widerstandshöhe $\frac{1}{\varphi^2} - 1$ mal d. Ausflussgeschw.-Höhe. dieser Ausdruck tritt an d. Stelle von $1 \cdot \frac{u^2}{2g}$ also:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{D}{\alpha A}\right)^2 u^2 \left[1 + \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\right] = \left(\frac{D}{\alpha\varphi A}\right)^2 \frac{u^2}{2g} = \left(\frac{D}{\mu A}\right)^2 \frac{u^2}{2g}$$

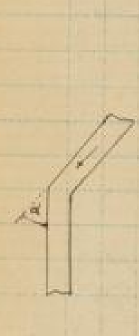
demnach ist nun d. allgemeine Fundamentalgl.:

$$H = \left[\left(\frac{D}{\mu A}\right)^2 + \zeta + \lambda \frac{l}{d}\right] \frac{u^2}{2g}.$$

Wenn $A = D$, so wird auch $\mu = 1$ und d. Gl. geht dann wieder in d. frühere Form über. —

Bevor wir diese Fundamentalformel zur Lösung einiger Aufgaben benutzen, sollen zunächst d. in solchen längeren Röhrenleitungen vorzugsweise auftretenden besonderen Widerstände besprochen werden, auf welche sich d. Summe ζ in d. Fundamentalgl. bezieht. Solche Widerstände werden verursacht durch plötzliche Richtungsänderung und plötzliche Querschnittsänderung.

Solche Richtungsänderungen werden namentlich verursacht durch Knieröhren und Bogenröhren. Unter einem Knierohr versteht man solches in einer Röhrenleitung eingeschaltetes Röhrenstück verstanden zu werden, in welchem d. Wasser eine Ablenkung durch einen scharfen Winkel erleidet. Es ist leicht begreiflich, dass dieser Widerstand nur durch Versuche ermittelt werden kann. In Betreff eines solchen Knierohres hat namentlich Weisbach Versuche angestellt, wobei d. Winkel α verschiedene Werte gegeben wurden. d. Resultate lassen sich in folgender Formel zusammenfassen:

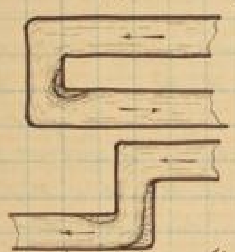


$$\zeta = 0{,}9457 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2{,}047 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$$

womit z. B. für: α = 20° 40° 60° 80° 90°
sich ergibt: ζ = 0,046 0,139 0,346 0,740 0,984

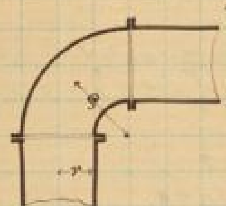
Es ist indessen wesentlich zu bemerken, daß diese Versuche sich bezogen auf $d = 0{,}03$ m, da d. Weite d. Röhre einen wesentlichen Einfluß ausübt. Bei größeren Weiten liegen indessen Versuche nicht vor, aber mit Röhren von $d = 0{,}01$ m ergab sich, daß ζ unter gleichen Verhältnissen wie d ungefähr $1\frac{1}{2}$ mal so groß war. Es läßt sich also erwarten, daß mit wachsender Weite d. Widerstandscoeff. kleiner wird als in dieser Form; jedenfalls kann man ganz aber sicher sehen, daß man d. Widerstand nicht zu klein veranschlagt, wenn man diese Formel für weitere Röhren verwendet.

Bemerkenswerthe Resultate ergeben sich für doppelte Knie. Hierfür stellte Weisbach Versuche an, wenn d. zickzackartige Ablenkung 90° beträgt; dann zeigte sich, daß d. resultierende Widerstandscoeff.



für diese ζ doppelte Knie nicht wesentlich größer war, als für ein einfaches Knie; wenn dagegen diese Richtungsänderung im entgegengesetzten Sinne stattfand, dann ergab sich d. resultierende Widerstandscoeff. ungefähr doppelt so groß wie für jedes einzelne Knie für sich. Werden d. Mittellinien senkrecht zu einander, so ergibt sich d. resultierende Widerstandscoeff. d. $1\frac{1}{2}$ fache wie für jedes einzelne Knie. Es ist schon früher hervorgehoben worden, daß dieser Widerstand wahrscheinlich zurückgeführt werden muß auf eine plötzliche Querschnittsänderung. Diese Vermuthung zu Grunde gelegt, läßt sich aus d. beiden erwähnten Ergebnissen schließen, daß d. Querschnittsänderung durch d. 2t Knie im ersten Fall nicht wesentlich vergrößert wird, so daß d. Weite d. Verengung an beiden Knien gleich ist, anders wird es sich im 2t Fall verhalten. Bei diesen Versuchen waren d. Widerstandscoeff. d. einzelnen Knie einander gleich. Ist aber d. Widerstandscoeff. im ersten Knie $= \zeta_1$ im 2ten $= \zeta_2$, so läßt sich erwarten, daß im ersten Fall $\zeta = \zeta_1$ ist, wenn ζ_1 d. größere d. beiden ist, im 2t Fall ist $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ und im Falle d. senkrechten Knies $\zeta = \zeta_1 + \frac{1}{2}\zeta_2$. Es bleibt noch fest zu stellen, wie lang d. Zwischenstück zwischen diesen beiden Röhren sein muß, da d. Länge desselben eine gewisse Grenze nicht überschreiten darf, denn sonst würden sich d. Knie ganz unabhängig von einander verhalten. –

Ein kleinerer Widerstand als durch eine solche Kniebiegung wird verursacht durch sogenannte Bogenröhren, d. h. durch in d. Röhren eingeschaltete Zwischenstücke von stetiger Krümmung, wodurch 2 gerade Rohrstrecken mit einander verbunden werden. Gewöhnlich ist ebenfalls d. Centriwinkel eines solchen Bogenrohrs ein Kreisbogen von 90°. Für solche Krümmer, wobei also d. Mittellinie ein Kreisbogen ist, hat Weisbach aus seinen eigenen Versuchen und aus Versuchen von Dubuat folgende Formel hergeleitet:



$$\zeta = 0{,}131 + 1{,}847\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{7}{2}}$$

wo r d. Radius d. Querschnitts und ρ d. Krümmungsradius d. Mittellinie d. Krümmers bedeutet. –

Weisbach hat auch Versuche angestellt bei Röhren mit rechteckigem Querschnitt. Wenn dabei mit r d. Breite d. Rechtecks bezeichnet wird, d. senkrecht d. Ebene d. Mittellinie d. Krümmers parallel ist, so war für diesen Fall zu setzen:

$$\zeta = 0{,}124 + 3{,}104\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{7}{2}}.$$

Für den ersten Fall d. Kreisquerschnitts ergibt sich z. B.:

für $\frac{r}{\rho}$ =	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
ζ =	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440.

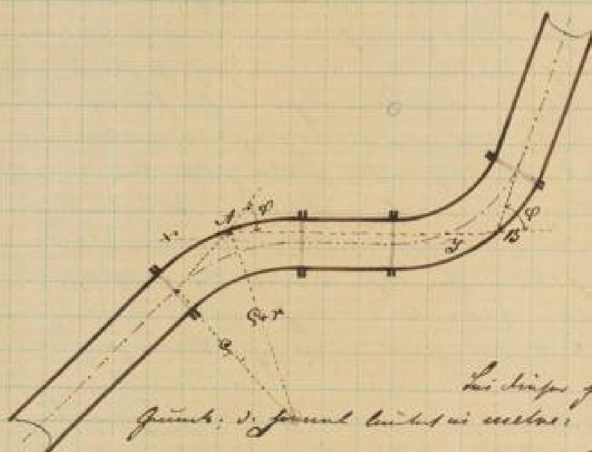
Eine große Zuverlässigkeit ist übrigens diesen Zahlen nicht zuzuschreiben, weil eine Untersuchung d. Versuchsresultate viel zu wünschen übrig läßt. Ist d. Mittellinie d. Krümmers ein kleinerer Bogen wie von 90°, so läßt sich wohl annehmen, daß ζ kleiner sein wird; im anderen Verhältnisse ist jedoch ungefähr ermittelt, daß d. Widerstandscoeff. d. Centriwinkel nicht einfach proportional gesetzt werden kann, es stellte sich heraus, daß wenn d. Centriwinkel = 180° gemacht wurde, d. Widerstands-coeff. nicht wesentlich größer war wie für einen Winkel von 90°; dagegen wenn 2 solche Krümmer im entgegengesetzten Sinne sich anschließen, so wird d. Widerstandscoeff. ungefähr doppelt so groß. Bei verschiedenen Ausführungen findet man gewöhnlich diese Krümmer mit einem solchen Radius gekrümmt, daß wenn man d. Mittellinien d. beiden geraden Strecken verlängert, dieselben sich in d. Oberfl. d. Krümmungsschenkel schneiden. Wird eine solche Krümmung zu Grunde gelegt, so ist:

$r = \varrho(\sqrt{2}-1)$ also $\frac{r}{\varrho} = 0,4142$. Setzt man diesen Werth in d. Weißbach'sche Formel ein, so folgt:

$$\zeta = 0,215. —$$

Außer solchen Richtungsänderungen einer Röhre, die sich auf kurze Rohrstrecken concentriren, kommt es auch vor, daß ein Leitungsrohr auf eine größere Strecke bogenförmig fortgeführt wird, wie z.B. ein spiralförmig gewundenes Rohr eines Kühlers etc. Diese Fälle können nicht mit d. Weißbach'schen Formel berechnet werden, denn es würde dann für $\frac{r}{\varrho} = 0$ $\zeta = 0,131$ werden; für diesen Fall liegt eine Dubois'sche Formel vor:

Ist so eine Leitungsröhre in irgend einer Weise gekrümmt und an beiden Enden schließen sich gerade Strecken an, denkt man sich d. Mittellinie d. geraden Rohrstrecke an einem Ende verlängert bis sie d. Rohrwand trifft, zieht von diesem Punkte eine Tangente an d. Mittellinie bis sie abermals d. Rohrwand trifft bis d. letzte Punkt wieder in d. andern Rohrmittellinie fällt, so erhält man eine Reihe von Ablenkungswinkeln φ. Kommt man bei dieser Zeichnung an einen Punkt A, von welchem aus es [illegible] wie man d. Tangente zieht, so zieht man d. Tangente xy an d. Stelle d. Mittellinie, wo d. Krümmungsradius $= \infty$ ist und zieht dann $AB \parallel xy$. Werden diese Winkel φ bestimmt so muß:



$$\mathfrak{B} = \frac{\Sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{3000}\, u^2 \text{ sein}$$

Bei dieser Formel von Dubois liegt indessen d. Fuß als Maß zu Grunde. d. Formel lautet in Metern:

$$\mathfrak{B} = 0,0123\, u^2\, \Sigma(\sin^2 \tfrac{\varphi}{2})$$

Setzt man diesen Widerstand gleich $= \zeta \frac{u^2}{2g}$, so folgt:

$$\zeta = 0,2413\, \Sigma(\sin^2 \tfrac{\varphi}{2}).$$

Ist d. Krümmungshalbmesser constant $= \varrho$, dann ist $\Sigma \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2}$, wenn α d. gesammte [illegible] Ablenkungswinkel ist, also $\frac{\alpha}{\varphi}$ d. Zahl d. Ablenkungswinkel. Außerdem ergibt sich $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\varrho}{\varrho+r}$ aus d. Zeichnung. Man z.B.:

$\frac{r}{\varrho} =$	0,05	0,1	0,15	0,2	
so ist $\zeta =$	0,0632	0,0850	0,0994	0,1099	mal $\frac{\alpha}{100}$
und für $\alpha = 90°$: $\zeta =$	0,057	0,076	0,089	0,099.	

Für $\alpha = 90°$ kann man diese Werthe vergleichen mit denen, die sich aus d. Weißbach'schen Formel $\zeta = 0,131 + 1,847(\frac{r}{\varrho})^{\frac{7}{2}}$ ergeben sollten, denn für $\frac{r}{\varrho} = 0,2$ .. $\zeta = 0,138$.
Nun wird man für alle Fälle sicher gehen, wenn man erst von d. Verhältniß $\frac{r}{\varrho} = 0,2$ sich d. Weißbach'schen Formel bedient und für kleinere Werthe von $\frac{r}{\varrho}$ d. Dubois'schen, nur muß man dann d. Coeff. von ζ so vergrößern, daß er d. Weißbach'schen Formel für $\alpha = 90°$: $\frac{r}{\varrho} = 0,2$ entspricht; dies ist d. Fall, wenn man setzt:

$$\zeta = 0,337 \sin^2 \tfrac{\varphi}{2}.$$

denn würde d. Coeff. von ζ größer und d. letzte $= 0,138$. Entsprechend für einen beliebigen Krümmungswinkel ist dann zu schreiben: $\zeta = 0,337\,\frac{\alpha}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2}$ wenn $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\varrho}{\varrho+r}$.

Hiernach ist z.B. für:

$\frac{r}{\varrho} =$	0,05	0,1	0,15	0,2	
$\zeta =$	0,0882	0,1188	0,1389	0,1534	mal $\frac{\alpha}{100}$.
und für $\alpha = 90°$ $\zeta =$	0,079	0,107	0,125	0,138	

Ist d. Verhältniß von $\frac{r}{\rho}$ sehr klein, so kann man sich auch eine direkte Formel für ζ entwickeln, namentlich welche d. Krümmungswiderstand ζ unmittelbar als Function dieses Verhältnisses $\frac{r}{\rho}$ entwickelt wird. Setzt man dieses sehr kleine Verhältniß $\frac{r}{\rho} = x$, so ist $\cos\frac{\varphi}{2} = (1+x)^{-1}$

$$\text{also } \sin^2\frac{\varphi}{2} = 1-(1+x)^{-2} = 2x\left(1-\tfrac{3}{2}x+\dots\right) \quad \text{also } \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2x}\left(1-\tfrac{3}{4}x+\dots\right)$$

$$\text{und demnach} \quad \frac{\varphi}{2} = \operatorname{arc\,sin}\sqrt{2x}\left(1-\tfrac{3}{4}x+\dots\right) = \sqrt{2x}\left(1-\tfrac{5}{12}x+\dots\right)$$

$$\text{demnach} \quad \frac{1}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{2x}{2\sqrt{2x}}\cdot\frac{1-\frac{3}{2}x+\dots}{1-\frac{5}{12}x+\dots} = \sqrt{\frac{x}{2}}\left(1-\tfrac{13}{12}x+\dots\right)$$

Wenn man nun d. für folgenden Glieder einfach dadurch berücksichtigt, daß man statt $-\frac{13}{12}x$ einfach x setzt, so ist:

$$\frac{1}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2} = (1-x)\sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$\text{also} \quad \zeta = \frac{0{,}337}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{180}\cdot\alpha(1-x)\sqrt{x} = 0{,}00416\,\alpha\left(1-\frac{r}{\rho}\right)\sqrt{\frac{r}{\rho}}.$$

Hierin erscheint α in Graden, aus welchem Grunde noch $\frac{\pi}{180}$ gesetzt wurde. Diese Formel gilt für $\frac{r}{\rho} < \frac{1}{20}$, wenn ferner also α d. ganze Ablenkungswinkel bedeutet und unter α angenommen ist, daß d. Ablenkung einer in demselben Sinne vor sich geht od. wirkt.

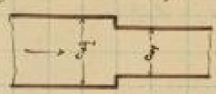
Ist $\frac{r}{\rho}$ sehr klein und α von mäßiger Größe, so wird dieser Widerstand so klein sein, daß man ihn kaum zu berücksichtigen braucht. Es kann aber sein, daß α bei kleinem $\frac{r}{\rho}$ sehr groß ist, wie namentlich bei spiralförmigen Röhren. —

Außer d. genannten Ablenkungswiderständen kommen verschiedene Widerstände vor, wie sie jede plötzliche Änderung d. Rohrquerschnitts oder solche Ausweitungen, d. mit einer örtlichen Trennung d. Wand von d. Wasserstrom verbunden sind, und somit mit einem (nach früheren Untersuchungen) entstehenden Widerstand behaftet sind, sollten möglichst vermieden werden; indessen gibt es Fälle, wo ein solcher Widerstand sich nicht vermeiden läßt oder wo ein solcher zu absichtlich hervorgerufen ist, insbesondere zur Regulierung od. zur gänzlichen vollständigen Hemmung d. Wasserstromes, wie dies geschehen kann durch Schieber, Klappen, Drosselklappen und Ventile. Wenn auf solche Weise d. Rohrquerschnitt an einer gewissen Stelle verengt ist, so sei d. kleinste Querschnitt d. Rohres an einer solchen Stelle bezeichnet mit A und F sei d. volle Querschnitt d. Rohres; damit ist dann aber noch nicht gesagt, daß A d. kleinste Querschnitt d. Wasserstromes selbst sei; es kann nämlich sein, daß, nachdem d. Wasser jene Verengungsstelle passiert, derselbe noch eine weitere Contraction erleidet etwa bis αA. Dieser kleinste Querschnitt αA erweitert sich nun sehr schnell wieder bis zum vollen Querschnitt d. Rohres. Wäre diese plötzliche Querschnittserweiterung des Wasserstromes von αA bis F d. einzige Widerstand, so wäre: $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A}-1\right)^2$; thatsächlich wird nun gerade diese plötzliche Vergrößerung d. Querschnitts d. Wasserstromes von αA bis F d. Hauptursache d. Widerstandes sein. Außerdem wird aber auch schon ein gewisser Widerstand verursacht durch d. parallelen Verengung d. Querschnitts von F bis αA; ferner können namentlich bei diesen Regulierungsvorrichtungen außer d. Querschnittsänderungen, auch verschiedene Ablenkungen d. Wasserstromes, plötzliche Richtungs- und Geschwindigkeitsänderungen ~~vorkommen~~ d. Querschnitts vorkommen. Weil aber d. plötzliche Erweiterung d. Querschnitts immerhin d. Hauptursache bleibt, so kann man auch in allen diesen Fällen diesen Ausdruck von ζ zu Grunde legen, wenn man dann mit α eine entsprechende zusammengesetzte Bedeutung beilegt und diesem Coeff. einen Werth beilegt, der nun sich herausstellt, für verschiedene Fälle zu ändern. —

Es ist indessen wünschenswerth jedenfalls d. Werthe von α zu kennen für einen fundamentalen Fall, bei welchem d. genannten unberechenbaren Umstände ausgeschlossen sind. Dies wird d. Fall einer cylindrischen Röhre, welche an einer gewissen Stelle eine ebene Scheidewand besitzt mit d. concentrischen Durchflußöffnung A, F sei d. volle Querschnitt d. Röhre und $\frac{A}{F} = n$. Es ist dann d. Werth von ζ von Weisbach durch Versuche bestimmt worden und damit dann auch d. Werth von α; so ergab sich:

für n =	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
ζ =	0	0,06	0,29	0,80	1,80	3,75	7,80	17,5	47,8	226
α =	1	0,892	0,813	0,755	0,712	0,681	0,659	0,643	0,632	0,624

Je kleiner n, desto vollkommener ist d. innere Contraction, desto kleiner also auch α. Wenn α bezüglich d. Begriff einer inneren Contraction bedeutet, so wäre α für sehr kleine Werthe von n = d. früher bestimmten durchschnittlichen Coeff. 0,64. Thatsächlich sinkt hier α noch mehr niedriger, weil dieser Coeff. hier nicht einen inneren Contractionscoeff. bedeutet, einigermaßen aber auch d. Wechsel in sich enthält, d. durch d. gewaltsame Zusammenziehung d. Querschnitts durch d. kleine Öffnung bedingt ist. Wenn d. centrale Durchflußöffnung A nach d. Scheidewand, in welcher sie sich befindet nicht in einer mit d. gleichen Querschnitt fortlaufenden Röhre eingesetzt ist, sondern wenn an d. Stelle dieser Scheidewand 2 Röhren von verschiedenen Weiten mit gemeinsamer Axe in einander übergehen, so muß man berücksichtigen, daß in dieser Formel für ζ = .. F d. Querschnitt d. Röhre hinter dieser Durchflußöffnung bedeutet, während d. Coeff. α abhängt von d. Verhältniß d. Durchflußöffnung A zum Querschnitt F' des anderen Röhrenstücks. Man hat also, wenn man d. Werth von α aus dieser Formel entnehmen will, $n = \frac{A}{F'}$ zu setzen.

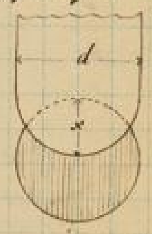


Hierbei sind folgende Fälle besonders bemerkenswerth:

1) Wenn $F' > F$ und $A = F$ sein; dann ist: $\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$
wobei d. Coeff. α gemäß d. Verhältniß $n = \frac{F}{F'}$ mit d. vorgefundenen Tabelle entnommen werden kann.

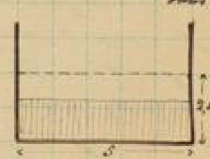
2) $F' < F$ und $A = F'$, daß also einfach an einer gewissen Stelle d. Querschnitt sich plötzlich erweitert; dann findet eine innere Contraction nicht statt, also $\alpha = 1$ und demnach: $\zeta = \left(\frac{F}{F'} - 1\right)^2$. —

Was nun d. Durchfluß d. Wassers durch Schieberöffnungen betrifft, so sind von Weisbach Versuche angestellt worden über d. 2 Fälle, daß d. Röhre entweder einen kreisförmigen od. einen rechteckigen Querschnitt hat. Wenn eine solche Röhre von kreisförmigem Querschnitt mit einem inneren Absperrungsschieber versehen ist, so bildet sich eine sichelförmige Durchflußöffnung.



Wenn d. Schieber um d. Stück x eingeschoben ist, und d. Röhrendurchmesser = d ist, so wird d. Widerstandscoeff. abhängig sein von $\frac{x}{d}$; je größer $\frac{x}{d}$ desto größer ζ. Bei diesen Versuchen hatte d. Röhre einen Durchmesser d = 4 Ctm. und es ergab sich hier:

$\frac{x}{d}$ =	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
ζ =	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,00	97,8.



Was d. Versuche mit d. rechteckigen Röhren betrifft, so wurde d. Schieber von d. größten Seite eingeschoben; d. Querschnitt hatte d. Dimensionen 5 Ctm. und 2,5 Ctm. Auch hier wurde für verschiedene Werthe von $\frac{A}{F}$, welches Verhältniß hier einfach = d. Verhältniß d. Höhe d. Durchflußöffnung zur Höhe d. Öffnung d. Röhre ist, d. Werthe von ζ bestimmt, und finden sich in *Weisbach's Mechanik*. Wenn man diese Werthe von ζ vergleicht mit denjenigen Werthen ζ, wie d. allgemeine Formel $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2$ für gleiche Werthe von $\frac{A}{F}$, so findet man, daß bei d. größeren Werthen von $\frac{A}{F}$ d. Widerstandscoeff. etwas größer sind, als in jenem Normalfall, dagegen für d. kleineren Werthe von $\frac{A}{F}$ etwas kleiner als im Normalfall. Dieses läßt sich leicht erklären: es ist nämlich ein doppelter Grund vorhanden, weshalb d. Werthe von α in dieser allgemeinen Formel hier etwas abweichende Werthe von denen von α im Normalfall haben: d. Umstand, daß d. verengte Durchflußöffnung A nicht eine centrale Lage und nicht eine gleiche Gestalt hat. d. Querschnittsänderung bedingt natürlich eine Vergrößerung d. Widerstands, also eine Verkleinerung von α, denn es ist mit d. Querschnittsänderung zugleich eine Richtungsänderung verbunden. Umgekehrt wird aber durch diese seitliche Lage d. Durchflußöffnung verursacht, daß d. innere Contraction nicht vollständig, sondern nur partiell ist; sie findet nur an einem Theil statt. Diese Contraction vergrößert α. Es sind also 2 Einflüsse vorhanden: d. eine verkleinert α und d. andere vergrößert α. Dieser letztere Einfluß wird sich namentlich in d. Fällen besonders geltend machen, wo $\frac{A}{F}$ klein ist.

Beispiel: Angenommen eine cylindrische Abflußröhre von $d = 0{,}1\,m$, welche mit einem solchen Regulierungsschieber versehen ist, liefere bei vollständig zurückgezogenem Schieber, also für $x = 0$, bei einer wirksamen Druckhöhe $H = 1{,}15\,m$, eine Wassermenge $V = 0{,}015$ cubm. pr. Sek.

Also $d = 0{,}1\,m$ $\quad H = 1{,}15\,m$ und für $x = 0$: $V = 0{,}015$.

Außer dem besonderen Widerstand, der durch diesen Regulierungsschieber herbeigeführt werden kann, sei nur außerdem ein Widerstand vorhanden, als für d. Einfluß d. Wassers in d. Röhre $\zeta = \frac{1}{2}$ gesetzt werden kann; d. Röhre sei also scharfkantig angesetzt. Im Übrigen sei kein besonderer Widerstand vorhanden. Es muß nun für einen anderen Grad d. Regulierungsschieber so weit vorgeschoben werden, daß d. Röhre nur halb so viel Wasser giebt. Wie weit muß d. Schieber vorgeschoben werden od. wie muß man x annehmen, damit $V' = \frac{V}{2}$ Wassermenge abfließe?

Zunächst ist nun: $\sqrt{2gH} = \sqrt{2.9{,}81.1{,}15} = 4{,}75$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}007854$$

Also d. Geschw. u für $x = 0$: $\quad u = \frac{V}{F} = 1{,}91\,m$ pr. Sek.

Bezeichnet man nun mit φ d. vollständigen Widerstandscoeff., so ist: $u = \varphi\sqrt{2gH}$ also: $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{2gH}}{u} = \frac{4{,}75}{1{,}91} = 2{,}487$.

Und demnach d. vollständige Widerstandscoeff. für $x = 0$:

$$\frac{1}{\varphi^2} - 1 = 5{,}185.$$

Von diesem vollständigen Widerstandscoeff. ist $\zeta = 0{,}5$ abzuziehen, um denjenigen Bestandtheil zu finden, d. auf Rechnung d. Leitungswiderstandes kommt; also d. Leitungswiderstandscoeff.:

$$\lambda\frac{l}{d} = 4{,}685.$$

Soll nun nur d. halbe Wasser ausfließen, so muß d. entsprechende Geschw. u' nur halb so groß als u sein, es muß also auch φ' nur $\frac{1}{2}$ so groß als φ sein d.h.: $\varphi' = \frac{\varphi}{2}$ sein, und somit:

$$\frac{1}{\varphi'^2} - 1 = \frac{4}{\varphi^2} - 1 = 4.\,6{,}185 - 1 = 23{,}74.$$

Zieht man hiervon ab erstens denjenigen Widerstand, welcher durch d. Einlauf bedingt wird $= 0{,}5$, ferner d. Leitungswiderstand $\lambda'\frac{l}{d}$, so ist d. verbleibende Rest d. Widerstandscoeff. d. durch d. Schieber bedingt wird, also:

$$\zeta = 23{,}24 - \frac{\lambda'}{\lambda}\,4{,}685$$

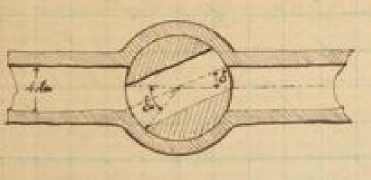
Nun ist aber $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{ud}$ und für $x = 0$: $\frac{1}{ud} = 5{,}2$ also: $\lambda = 0{,}0240$. $\Big\}$ also $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{61}{60}$.

ferner in unserem Zustand $\frac{1}{u'd} = 2.\frac{1}{ud} = 10{,}4$ also $\lambda' = 0{,}0244$.

demnach $\zeta = 18{,}48$.

Für $\zeta = 17$ findet sich in d. Tabelle $\frac{x}{d} = \frac{6}{8}$, so daß $\zeta = 18{,}5$ einem Werthe von x entspräche, d. wenig größer als $0{,}075\,m$ ist. — Eine solche ~~[illegible]~~ Rechnung wird man sich erlauben können, wenn man davon absieht, daß $\lambda' > \lambda$ ist, ohne dabei wesentliche Fehler zu begehen. ———

Was nun d. Widerstand beim Durchgang durch Schieberhähne betrifft, so ist auch dieser von Weisbach geprüft worden und zwar so, daß d. Hahn sich in einer cylindrischen od. parallelepipedischen Röhre befand. Für d. ersteren fand man d. Weite d. Durchschn. einer $d = 4$ cm. δ sei d. Winkel, welchen d. Axe d. Hahnbohrung mit d. Axe d. Röhre bildet. Es muß dann zur vollständigen Absperrung d. Hahnes gegeben sein, bei welchem Winkel δ d. Absperrung vollkommen ist, dieser Winkel sei $= \delta'$; bei d. Weisbach'schen Versuchen war $\delta' = 82°$. Offenbar ist dieser Winkel bedingt durch d u. D, wenn D d. Durchmesser d. Hahnkörpers ist und zwar ist:



$$\sin\frac{\delta'}{2} = \frac{d}{D}.$$

Unter diesen Umständen ergab sich nun für:

$\delta =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°
$\zeta =$	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68	17,3	31,2	52,6	106	206	486

Für alle übrigen wird ζ schon so groß, daß d. Versuche nicht mehr fortgesetzt werden und mit Sicherheit angezeigt werden können.

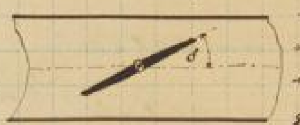
Es fragt sich nun, wie man mit Hilfe dieser Versuche d. Coeff. ζ beurtheilen kann für jeden einen anderen Schieber, für welchen d. Absperrungswinkel δ' einen anderen Werth hat als d. d. Versuchsschieber. Zu dem Ende kann man bemerken, daß hier d. resultirende Widerstand aus 2 Theilen besteht, nämlich eine plötzliche Querschnittsänderung und einer plötzlichen Richtungsänderung; erstere wird abhängig sein vom Verhältniß $\frac{\delta}{\delta'}$, letztere hängt jedoch nicht von d. verhältnißmäßigen Werthe von $\frac{\delta}{\delta'}$ ab, sondern von d. absoluten Werth von δ. Mit Rücksicht auf diese Erwägungen wird ein ζ nicht mit Hilfe dieser Zahlen auch für einen anderen Schieber, für welchen δ' einen anderen Werth hat, berechnet werden können. Zu dem Ende soll aber Tabelle nach d. Werthen von ζ_0 beigefügt werden, d. h. diejenigen Bestandtheile von ζ, d. nur von d. ersten Umstand herrühren; dieselben können nämlich berechnet werden aus d. Formel $\zeta_0 = \left(\frac{\delta}{\alpha A} - 1\right)^2$, wenn man für d. verschiedenen Wellwinkel d. Versuchsschiebers d. Werthe von $\frac{A}{\delta}$ berechnet, mit diesen Werthen d. Werthe von α bestimmt aus dem Contractionstabelle und dann ζ_0 berechnet. Es folgt für:

$\delta =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°
$\zeta_0 =$	0,02	0,15	0,39	0,85	1,62	2,89	5,05	8,72	15,4	27,9	53,9	113	276.

Handelt es sich darum, für einen Schieber in einem cylindrischen Rohr, dessen Absperrungswinkel $\delta' = 75°$ ist, d. Widerstandscoeff. ζ zu bestimmen, welcher d. Winkel $\delta = 50°$ entspricht, so kann man folgendermaßen schließen:

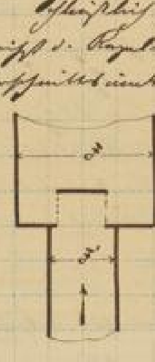
Es ist $\frac{\delta}{\delta'} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$. In d. Weisbach'schen Versuchsreihe würde diesem Verhältniß $\frac{2}{3}$ ein Werth δ entsprechen von $54\frac{2}{3}°$ und hierfür ist $\zeta_0 = 52$. D. andere Bestandtheil hängt aber nicht von d. Verhältniß $\frac{\delta}{\delta'}$ ab, sondern von dem absoluten Werthe von δ; für $\delta = 50°$ ist aber $\zeta - \zeta_0 = 52,6 - 27,9 = 25$ und somit kann für d. vorliegenden Schieber, welcher bei $\delta' = 75°$ vollkommen absperrt, entsprechend einem Wellwinkel von 50°: $\zeta = 52 + 25 = 77$ gesetzt werden. —

Es sind ferner von Weisbach Versuche angestellt worden über d. Widerstandscoeff. von Drosselklappen und zwar auch für ein cylindrisches und ein parallelepipedisches Rohr. Es wird auch hier d. Widerstand abhängig sein von d. Winkel δ, den d. Richtung d. Drosselklappe mit d. Rohrmittellinie bildet.



Vergleicht man d. hier gefundenen Werthe mit denjenigen, welche d. Contractionstabelle bei gleichen Werthen von $\frac{A}{\delta}$ entsprechen, so zeigt sich, daß für d. kleinen Werthe von α d. Widerstandscoeff. größer sind als d. aus Contractionstabelle einer vorhandenen Ausflußöffnung in einer ebenen Scheidewand, daß dagegen bei größeren Werthen von α d. Werthe kleiner werden als aus Contractionstabelle. Daß bei d. kleinen Werthen von δ d. Widerstandscoeff. größer ist, ist leicht begreiflich, da schon diese Drosselklappe an und für sich einen gewissen Widerstand verursacht, wenn auch $\delta = 0$ ist; wenn dagegen δ wächst, so muss sich d. Umstand geltend machen, daß hier d. Contraction nur eine sehr geringe ist, da am äußeren Rand gar keine seitliche Übergangsfläche stattfindet und diese Zuflüsse anzusehen von d. inneren Seite aus unvollkommen ist. —

Schließlich sind von Weisbach auch Versuche mit Ventilen angestellt. Betrachten wir zunächst d. Kegelventil: d. Öffnung d. Ventils befindet sich an einer solchen Stelle, wo zugleich eine Querschnittsänderung stattfindet, wie d. Druckrohr bei einem Pumpencylinder. Es sei δ d. Querschnitt d. ankommenden Wassers, also d. Rohrs vor d. Ventil und δ' d. Querschnitt d. abfließenden Wassers, also d. Rohrs hinter d. Ventil; dann sind 3 wichtige Querschnitte zu unterscheiden: 1) der d. Ventilöffnung A_1



2) d. ringförmige Querschnitt um d. Ventil herum $= A_2$

3) d. cylindrische Ausflußquerschnitt zwischen d. Ventil und seinem Sitze $= A_3$ also d. zeitliche Öffnung. Bei einem gegebenen Ventil sind nun A_1 und A_2 gegeben, dagegen A_3 von d. Hubhöhe d. Ventils abhängig. D. resultirende Widerstandscoeff. ζ ist nun abhängig von d. Verhältnissen zwischen A_1 A_2 A_3

und d. Querschnitt F. Ist d. Hubhöhe h sehr klein, dann wird d. entsprechende Widerstandscoeff. vorzugsweise von A_2 abhängig sein; wird d. Hubhöhe h und damit A_2 vergrößert, so nimmt d. Einfluß d. Hubhöhe h auf ζ mehr und mehr ab, bis zu einer Grenze, wo d. weitere Vergrößerung von h keinen Einfluß mehr auf ζ ausübt. Man wird annehmen dürfen, daß dieser Einfluß d. Durchflußöffnung A_2 auf ζ aufhöre ~~kann~~ merklich zu sein, sobald d. Querschnitt d. Wasserstrahls beim Durchgang durch A_2 nicht mehr kleiner als d. Öffnung A_1 im Ventilsitze ist. Wenn d. Hubhöhe h = d. Radius r d. Öffnung A_1 geworden ist, so ist $A_2 = 2\pi r \cdot r = 2\pi r^2 = 2A_1$, woraus man schließen kann, daß in diesem Zustand d. mittlere Winkel, unter dem d. Wasserteilchen diese Fl. A_2 schneiden, ungefähr 30° beträgt, denn dann ist d. Projektion von A_2 auf eine Ebene senkrecht zu d. Strahl = d. Hälfte von A_2; also für $h = r$ fällt d. Einfluß von A_2 heraus und es wird nun ζ hauptsächlich nur abhängig sein von d. Verhältnis d. Querschnitte A_1 A_2 zum Querschnitt F, so daß man setzen kann:

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2$$

wenn hier unter A verstanden wird d. kleinere d. beiden Querschnitte A_1 und A_2 und wenn man sich vorbehält, d. Coeff. α durch besondere Versuche zu bestimmen. Dieser Coeff. α bedeutet hier nicht nur einen bloßen Coeff. d. inneren Contraction, sondern er wird mit bestimmt sein durch d. [illegible] Richtungsänderung, d. das Wasser erleidet und zum Teil von d. Eigentümlichkeit d. Zuleitung u. Wiedervereinigung d. Wasserstrahls, außerdem von d. Verhältnis $\frac{A_1}{F}$ sowie von allen übrigen Umständen, welche d. Grad d. inneren Contraction beeinflussen; also von d. Construkt. d. Ventilsitzes etc. —; indessen haben sich auf d. Einfluß dieser Umstände d. bekanntesten Versuche nicht erstreckt, da es wahrscheinlich ist, daß diese letzteren Einflüsse auf d. Grad d. Contraction nicht bedeutend sein werden. — Es ist nun vorteilhafter A_2 etwas größer als A_1 zu machen, so daß erst d. contrahierte Querschnitt nach d. Durchgang durch A_2 etwas größer als A_1 wird.

Von Weisbach liegen Versuche vor mit einem Ventil, wo $F' = F$, in denen

$$\frac{A_1}{F} = 0{,}356 \quad \text{und} \quad \frac{A_2}{F} = 0{,}406.$$

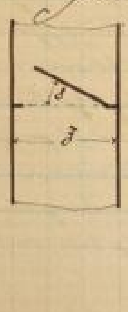
Unter diesen Umständen und während h mindestens $= r$ war, ergab sich: $\zeta = 11$. — Setzt man diesen Wert in d. obige Gl. und beachtet: $\frac{A}{F} = \frac{A_1}{F}$, so findet man: $\frac{1}{\alpha} = 1{,}537$ also $\alpha = 0{,}651$. Letzterer Wert ist fast derselbe, wie für d. Contractionscoeff. einer cirkelförmigen, centralen Öffnung in einer ebenen Wand. Für andere Verhältnisse eines solchen Teller- od. Kegelventils wird man bis auf Weiteres d. Widerstandscoeff. demnach setzen können:

$$\zeta = \left(1{,}537\,\frac{F}{A} - 1\right)^2.$$

wo unter A d. kleinere d. beiden Querschnitte A_1 u. A_2 zu verstehen ist, wobei vorteilhafterweise d. Verhältnisse so zu wählen sind, daß A_1 d. kleinere ist. Weisbach selbst stellt eine etwas andere Formel auf; er legt auch diese Formel zu Grunde, versteht aber unter A d. arithmetische Mittel von A_1 und A_2 und findet demnach:

Für d. zusammengesetzten Ventilarten liegen besondere Beobachtungen nicht vor, es bleibt also nichts anderes übrig als ζ nach Schätzungen zu ermessen.

Indessen hat Weisbach Versuche angestellt mit einem Klappenventil; dasselbe war auch in einer mit gleicher Weite fortlaufenden Röhre eingeschaltet und bestand aus einer Lederscheibe. D. Winkel, welchen d. geöffnete Klappe mit d. Ebene d. Ventilsitzes bildet, sei δ, ferner sei A d. Größe d. kreisförmigen Öffnung im Ventilsitz und F d. Querschnitt d. Rohrs. Bei d. Versuchsventil war $\frac{A}{F} = 0{,}535$. Die Größe von ζ ist wesentlich von diesem Verhältnis und von δ abhängig. Für verschiedene Werte von δ wurden dann d. Widerstandscoeff.



bedeutet. Setzt man auch hier: $\zeta = \left(x\frac{\delta}{A} - 1\right)^2$, so lassen sich aus den durch d. Versuch zusammengehörigen Werthe von x berechnen, also:

für σ =	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
x =	5,61	4,75	4,00	3,47	2,93	2,54	2,18	1,91	1,68	1,49	1,35	1,23

d. Coeff. x ist also in bedeutendem Grade von σ abhängig und zwar nicht nur, weil durch σ d. Grad d. plötzlichen seitlichen Ablenkung d. Wasserstroms bedingt wird, sondern auch d. kleinste Querschnitt d. Wasserstroms bedingt wird, namentlich bis σ eine gewisse Größe nicht erreicht. Betrachtet man x als eine Funktion von σ, so kann man auch diese Form auch ζ für ein anderes Klappenventil brauchen. Z. B.: es solle ζ berechnet werden für d. Ausfluss d. Wassers durch ein solches Ventil, während $\frac{A}{\delta} = 0,64$ ist und $\sigma = 50°$ ist. Aus d. Tabelle ist dann $x = 1,91$ und somit:

$$\zeta = \left(\frac{1,91}{0,64} - 1\right)^2 = 4.$$

Beispiele als Anwendungen d. vorgeführten Gesetze.

Aus einem Behälter, in welchem d. Wasserstand durch entsprechenden Zufluss auf constanter Höhe erhalten wird, werde d. Wasser unter gleich bleibenden Umständen abgeleitet durch eine Röhre von d. Länge l und d. gleichförmigen Weite $= d$, ohne dass diese Röhre etwa durch Seitenöffnungen oder abgezweigte kleine Seitenröhren einen anderen Zufluss oder Abfluss als am Anfang und Ende hätte. Unter diesen Umständen fließt also durch jeden Querschnitt d. Röhre d. gleiche Wasservolumen V mit d. mittleren Geschw. u entsprechend d. Continuitätsgesetz:

$$1)\qquad V = \frac{\pi d^2}{4} u$$

Ist ferner ζ d. resultierende Coeff. einiger besonderer Widerstände, welche außer dem allgemeinen Leitungswiderstand in d. Röhre vorkommen können, so hat man d. früheren zufolge:

$$2)\qquad \left(1 + \zeta + \lambda\frac{l}{d}\right)\frac{u^2}{2g} = H \qquad \text{(Seite 82)}$$

wenn $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist (Seite

wenn p_0 d. äußere Druck an d. Oberfl. d. Wassers im Ausflussgefäß und p d. an d. Mündung, wenn d. Ausfluss in d. freie Luft, oder p d. Druck auf d. Oberfl. in d. Gefäß, in welches d. Wasser hineinfließt; h bedeutet im ersten Fall d. Höhe über d. Schwerpunkt d. Mündung, im anderen Fall d. Höhenunterschied beider Gefäßwasserspiegel. Wenn kann man d. Fall, dass d. Wasser aus einem Gefäß in ein anderes fließt als d. allgemeineren Fall annehmen. Gewöhnlich ist nun $p_0 = p$ und damit $H = h$; im Allgemeinen gilt jedoch obige Gleichung. Wenn man zwischen obigen beiden Gl. d. mittlere Geschw. u eliminiert, so erhält man eine Beziehung zwischen l, d, H, V, durch welche Beziehung eine dieser Größen bestimmt werden kann, wenn d. anderen gegeben sind. Wenn es sich für einen solchen Fall nur um d. Ableitung d. Wassers handelt und eben nicht darum, d. lebendige Kraft d. Wassers zu verwerthen, so kommt d. mittlere Geschw. nur in sofern in Betracht, als von d. mittleren Geschw. und d. Röhrenweite d. Größe λ abhängt, indem:

$$\lambda = m\left(\alpha + \frac{\beta}{u d}\right)$$

ist, wo α u. β für verschiedene Werthe von u u. d bekannt sind und m ein Erfahrungscoeff. bedeutet, d. durchschnittlich $= 1,2$ gesetzt werden kann. Durch diesen Umstand, dass λ von u u. d abhängt, können d. verschiedenen hier sich darbietenden Aufgaben erschwert werden. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass d. Veränderlichkeit von λ mit u u. d innerhalb d. Grenzen, zwischen denen u u. d gewöhnlich liegen, nur eine mäßige ist, so dass es meistens genügt, entweder endgültig mit einem constanten Mittelwerthe λ d. Rechnung durchzuführen oder mit Hilfe eines vorläufigen Werthes von λ zu rechnen. — Im Allgemeinen können sich 4 verschiedene Aufgaben darbieten indem jede d. 4 Größen gesucht sein kann, wenn d. anderen gegeben sind; jedoch pflegt gewöhnlich l gegeben zu sein, sodaß nur noch 3 Aufgaben übrig bleiben, die dann folgendermaßen behandelt werden:

1) Gegeben d u. V.

Es wird also gesucht H d.h. d. Höhe, bei welcher eine gegebene Röhre ein gegebenes Wasservolumen pr. Sek. liefert. Diese Aufgabe löst sich direkt ohne Näherung wie folgt:
Zunächst findet man u mit d. Gl. 1); zu diesem u und d. gegebenen d findet man λ und mit diesem Coeff. λ und d. gegebenen Werthen l d ζ findet man H mit Gl. 2).

2) Gegeben d u. H; es wird also gesucht dasjenige Wasservolumen V, welches eine gegebene Röhre bei gegebener wirksamer Druckhöhe liefert. Hier muß man schon durch successive Näherung zu Werke gehen. Mit einem vorläufigen Näherungswerthe λ etwa $\lambda = 0.03$ findet man einen entsprechenden Näherungswerth u mit Gl. 2); zu diesem Näherungswerth u und d. gegebenen Durchm. d findet man dann einen corrigirten Werth von λ und mit diesem mit Gl. 2) einen corrigirten Werth von u und daraus V mit Gl. 1).

3) Gegeben V u. H. es wird gesucht derjenige Durchm. d, welchen eine Röhre gegeben werden muß, damit sie bei gegebener Länge und Druckhöhe ein gegebenes Wasservolumen pr. Sek. liefert. Dieses ist die am häufigsten vorkommende Aufgabe. Hier hat man aus beiden zwischen Gl. 1) u. 2) u zu eliminiren; multiplicirt man zu diesem Zweck Gl. 2) mit $2g$ und setzt für u seinen Werth aus Gl. 1, so folgt:

$$\left(1+\zeta+\lambda\frac{l}{d}\right)\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{d^4} = 2gH.$$

also $$d = \sqrt[5]{\frac{(1+\zeta)d+\lambda l}{2gH}\cdot\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2}$$

Indem man nun vorläufig d auf d. rechten Seite d. Gl. $= 0$ setzt und $\lambda = 0{,}03$, so findet man vermittelst dieses Ausdrucks einen Näherungswerth von d, zu diesem Näherungswerth von d findet man auch einen Näherungswerth von $u\,d = \frac{4V}{\pi d}$ und hiezu einen corrigirten Werth von λ und wenn man dann diesen corrigirten Werth von λ und d. Näherungswerth d einsetzt, endlich einen corrigirten Werth von d.

Beispiel: Es sei d. erforderliche Weite einer Röhre zu bestimmen, die bei $l = 50$ m und bei $H = 1{,}5$ m und unter d. Voraussetzung, daß sonst keine besonderen Widerstände in d. Röhre vorkommen als d. Einlaufcoeff. $\zeta = 0{,}5$, pr. Sek. $V = 0{,}03$ cubm. Wasser zu liefern hat.

Setzt man zu dem Ende in d. Formel für d auf d. rechten Seite $d = 0$ und $\lambda = 0{,}03$, so folgt:

$$d = \sqrt[5]{\frac{0.03\cdot 50}{2\cdot 9.81\cdot 1.5}\left(\frac{0.12}{\pi}\right)^2} = 0{,}149$$

demnach ist $\frac{1}{ud} = \frac{0.149\,\pi}{0.12} = 3.9$ also $\alpha + \frac{\beta}{ud} = 0{,}0239$ ($m = 1{,}2$ gesetzt) folglich:

$$\lambda = 0{,}0287.$$

Mit diesem corrigirten Werth und d. Näherungswerth von d findet man nun:

$$d = \sqrt[5]{\frac{1.5\cdot 0.149 + 0.0287\cdot 50}{2\cdot 9.81\cdot 1.5}\cdot\left(\frac{0.12}{\pi}\right)^2} = 0{,}152$$ ~~m~~, welcher Werth genau genug ist um weiter keiner Correction zu bedürfen.

Unter Umständen kann es auch nöthig sein, d. Pressung, d. in gewissen Querschnitten d. Röhre statt findet, zu ermitteln. Die Kenntniß dieser Pr. ist namentlich in sofern von Interesse, indem von derselben d. Wandstärke abhängt und indem sich in keinem Querschnitt d. Pr. d. Grenze 0 nähern darf. Hauptsächlich ist es schon nicht, wenn irgendwo d. Pr. kleiner wird als d. äußere atm. Druck, indem dann äußere atm. Luft in d. Leitung eindringen kann od. sich d. innern im Wasser enthaltene Luft ansammeln kann. Diesem Umstande kann vorgebeugt werden durch Windkessel, d. mit einem Hahn versehen sind, od. mit selbstthätigen Ventilen, die dieselben beim gesammelten Luftblasen entkommen. –

Um d. Druckhöhen in d. Rohrleitung zu bestimmen, will ich für eine Strecke, entsprechend Länge s, d. Mittellinie [illegible] Anfang d. Röhre entfernt, ~~unter~~ in d. Tiefe z unter d. Oberwasserspiegel d. Pr. mit p_s bezeichnen, wobei z auch negativ sein kann. ζ_s sei d. Coeff. etwaiger besonderer Widerstände für d. ganze Rohrstrecke von d. Länge s und $\bar z$ d. wirksame Druckhöhe, also:

$$\bar z = z + \frac{p_0 - p_s}{\gamma} \qquad \text{also} \qquad \frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - \bar z .$$

Für d. wirksame Druckhöhe $\bar z$ gilt nun ein ganz ähnlicher Ausdruck wie für $\mathfrak{H}$ (Seite 82)

also: $$\frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - \left(1 + \zeta_s + \lambda\frac{s}{d}\right)\frac{u^2}{2g}$$ oder wenn für $\frac{u^2}{2g}$ d. Wert aus Gl. 2 Seite 90 gesetzt wird:

$$\frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - \frac{(1+\zeta_s)d + \lambda s}{(1+\zeta)d + \lambda l}\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)$$

Gewöhnlich wird nun d. äußere Druck sowohl am Ober- wie am Unterwasserspiegel = d. atm. Luftdruck sein, also $p_0 = p$, u. so ist nun $\frac{p_0}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} = b$ = Wasserbarometerhöhe, welche ungefähr = 10 m ist, so hat man:

$$\frac{p_s}{\gamma} = b + z - \frac{(1+\zeta_s)d + \lambda s}{(1+\zeta)d + \lambda l}\,h.$$

Diese Druckhöhe soll größer sein als 0, widrigenfalls sich sonst d. Wasser von d. Rohrwand trennt. Daraus ergibt sich d. Bedingung für d. zulässige Erhebung einer Rohrstrecke über d. Oberwasserspiegel, also d. Größe $-z$, ~~[illegible]~~ es muß nämlich sein:

$$-z < b - \frac{(1+\zeta_s)d + \lambda s}{(1+\zeta)d + \lambda l}\,h.$$

Diese Erhebung über d. Oberwasserspiegel [illegible] Funktion von s, [illegible] d. Rohrleitung [illegible]. Sind d. Leitungswiderstände [illegible] besondere Widerstände nicht vorhanden, so wird sowohl im Zähler wie im Nenner d. Bruchs d. 2te Glied [illegible], so [illegible] erhält:

$$-z < b - \frac{s}{l}\,h.$$

Daraus ergeben sich d. Umstände, unter denen es möglich ist, durch eine [illegible] Röhre d. Wasser über eine Anhöhe zu leiten. [illegible] diese Erhebung kleiner sein als b, also kleiner als 10 mtr; [illegible] Anfang d. Rohrleitung [illegible] als gegen d. Ende sei. [illegible] zulässige [illegible] h, [illegible] Druckhöhe [illegible] Grenze, [illegible] d. Röhre [illegible] als d. Oberwasserspiegel zu legen, sobald nur $h > \frac{l}{s}\,b$ ist.

[illegible] Röhre [illegible] d. durch 2 Querschnitte [illegible] Wassermenge d. gleiche ist. [illegible] d. Weite d. Röhre [illegible] Gesetz [illegible] Wassersäulen V vom Anfang bis zum Ende d. Röhre sich stetig ändert. [illegible] Fall sein, [illegible] z. B. bei einer städtischen Wasserleitung, welche sich oft durch kleinere Zweigleitungen Wasser entzogen wird, [illegible] d. Wasser d. Zweigleitungsröhre. [illegible] d. Weite d. Röhre stetig [illegible] d. Aktionen V. [illegible] d. Leitungswiderstände [illegible] für verschiedene Stellen [illegible] sein. [illegible] d. Längenelement ds mit $\mathfrak{B}_1\,ds$ bezeichnen, [illegible] $\mathfrak{B}_1$ eine Funktion von s sein. d. [illegible] Weite d. Röhre sei $= y$ und d. mittlere Geschw. an dieser Stelle $= u$. [illegible] bei einer cylindrischen Röhre, auch hier d. allgemeine Formel [illegible] $\mathfrak{B}_1$ zu Grunde legen [illegible] d. Veränderlichkeit von V [illegible].

$$\text{also}\quad \mathfrak{B}_1 = a\frac{u^2}{y} + b\frac{u}{y} = \frac{\lambda}{y}\frac{u^2}{2g} \qquad \text{(Seite 78)}$$

$$\text{also}\quad \lambda = \alpha + \frac{\beta}{uy}$$

Nun ist es fraglich ob a u. b auch d. h. ß dieselben Werthe haben werden wie bei d. Leit. in einer gleichweiten Röhre, da d. Verhältnisse an d. Wandungen hier abweichend sind. Hier wird d. Geschwindigkeit nicht in allen Punkten gleich sein, da d. Querschnitte nicht eben sind; ferner enthalten d. Coeff. a u. b d. Verhältniß $\zeta = \frac{w'}{u}$ in sich, wo w' d. Strömung an d. Rohrwand (Seite 78) und u d. mittlere Geschw. ist. Dieses Verhältniß aber durch jene Untersuchungen ganz unbestimmt und es fragt sich, ob dieses Verhältniß ebenso groß sein wird für eine weitere Röhre. Da jedoch hierüber keine Versuche vorliegen, so bleibt nichts anderes übrig als für a u. b d. früheren Werthe zu nehmen. — Wird nun mit $\mathfrak{B}$ d. Leitungswiderstandshöhe für d. ganze Röhre bezeichnet, so ergibt sich:

$$\mathfrak{B} = \int_0^l \mathfrak{B}_1\, ds = \frac{1}{2g}\int_0^l \frac{\lambda}{y}\, u^2\, ds.$$

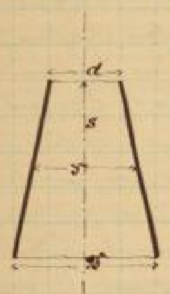
Hier wird es zulässig sein, d. Coeff. λ einen constanten Mittelwerth zu geben, so daß derselbe vor d. Integral herausfällt, also:

$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g}\int_0^l \frac{u^2}{y}\, ds.$$

In diesem allgemeinsten Ausdruck ist nun $u = \frac{4V}{\pi y^2}$, wo im Allgemeinen sowohl y als auch V Functionen von s sein können. Von besonderem Interesse sind indessen nur 2 einfachste Specialfälle, nämlich: 1) daß V constant und nur y veränderlich ist und zwar gleichförmig veränderlich und 2) daß y constant und V veränderlich ist.

Ist zunächst V constant, so folgt:

$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2\int_0^l \frac{ds}{y^5}$$



Ist hierin d d. Durchm. am engeren und D d. am weiteren Ende und y der an einer beliebigen Stelle in d. Entfernung s vom engeren Ende, dann ist

$$\frac{y-d}{D-d} = \frac{s}{l} \quad \text{also} \quad ds = \frac{l}{D-d}\, dy \quad \text{und daraus:}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \frac{l}{D-d}\;\frac{1}{4}\left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4}\right)$$

oder

$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2 \frac{l}{4}\,\frac{D^4-d^4}{(D-d)D^4} = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2 \frac{1}{4}\,\frac{l}{D}\left(1+\frac{d}{D}\right)\left(1+\frac{d^2}{D^2}\right).$$

Setzt man diese Leitungswiderstandshöhe $= \zeta\left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2 \frac{1}{2g}$, so bedeutet ζ nichts anderes als d. Widerstandscoeff. bezogen auf d. kleinsten Querschnitt, er wird also:

$$\zeta = \frac{\lambda}{4}\,\frac{l}{D}\left(1+\frac{d}{D}\right)\left(1+\frac{d^2}{D^2}\right). \text{ —}$$

D. andere Specialfall, daß d. Rohrweite y constant $= d$ ist, d. Wassermenge V aber stetig veränderlich ist, hat Interesse rücksichtlich d. einzelnen Leitungen einer städtischen Wasserleitung. Gewöhnlich findet d. Abgabe d. Wassers nicht stetig längs d. Röhre statt, auch ändert sich d. Verbrauch d. Häuser, welche Umstände jedoch nicht berücksichtigt werden sollen. — Wird dann nun in d. allgemeine Formel für d. Leitungswiderstandshöhe $u = \frac{4V}{\pi d^2}$ eingesetzt, so folgt:

$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{1}{d^5}\int_0^l V\, ds.$$

Ist nun V_0 das am Anfang einfließende Wasser und V_1 d. am Ende ausfließende Wasser und V d. durch d. in d. Entfernung s vom Anfang liegenden Querschnitt hindurchfließende Wasser, so ist offenbar:

$$\frac{V_0 - V}{V_0 - V_1} = \frac{s}{l} \quad \text{o. wenn} \quad \frac{V_1}{V_0} = \alpha \text{ gesetzt wird:} \quad \frac{V}{V_0} = 1 - \frac{1-\alpha}{l}\, s$$

und daraus

$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2 \frac{1}{d}\int_0^l \left[1 - 2\,\frac{1-\alpha}{l}\, s + \frac{(1-\alpha)^2}{l^2}\, s^2\right] ds.$$

Das Integral ergibt sich nun:

$$\int \ldots ds = l - (1-\alpha)\, l + \frac{1-2\alpha+\alpha^2}{3}\, l = \frac{l}{3}\left(3 - 3 + 3\alpha + 1 - 2\alpha + \alpha^2\right) = \frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}\, l$$

also

$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2 \frac{l}{d}\;\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}\,;$$

$\frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2$ wäre bekanntlich d. Widerstandshöhe wenn d. Wasserquantum constant bliebe und zwar vom Anfang bis zum Ende d. Röhre.

Beispiel: Eine zusammengesetzte Wasserleitung soll bedient werden von einem gemeinsamen Hochreservoir aus, d. h. d. Versorgungsgebiet bildet d. Wasser zunächst in ein festgelegtes Netz und von hier aus geht ein einziger Röhrenstrang, d. sich nach und nach verzweigt. Die erste gemeinschaftliche Hauptstrecke sei bezeichnet mit $A_0 A_1$, wo A_0 d. Anfangsquerschnitt d. ganzen Leitung ist, A_1 d. Querschnitt, wo zuerst eine Abzweigung stattfindet. Die Länge dieser Strecke $A_0 A_1$ sei $= l_1$. Den ursprünglichen Umständen gemäß sind d. Wassermengen gegeben, die von d. ersten Verzweigungsstelle A_1 in d. verschiedenen Rohrstrecken hindurch fließen sollen. Man kann also unter d. verschiedenen Zweigen, d. von A_1 abzweigen diejenige betrachten, durch welche d. größte Wassermenge hindurchfließt; diese Strecke sei $A_1 A_2$ mit d. Länge l_2; an d. Stelle A_2 findet eine abermalige Verzweigung statt; es soll dann wieder d. Strecke betrachtet werden, d. d. größte Wassermenge hinführt, nämlich $A_2 A_3$ von d. Länge l_3 u. s. w. — bis zur Strecke $A_{n-1} A_n$ von d. Länge l_n. — Von jedem d. Knotenpunkte aus kann man nun wieder d. abgezweigten Röhren in ähnlicher Weise verfolgen, worauf jedoch nicht weiter eingegangen werden soll. — D. Längen $l_1\ l_2 \ldots l_n$ sind natürlich als gegeben zu betrachten. Diese einzelnen Strecken sollen mit verschiedenen Durchmessern d. betreffenden Röhren ausgeführt werden, an jeder Knotenstelle kann jedoch eine Veränderung d. Rohrweite eintreten und es seien d. Durchmesser d. n Strecken d. Hauptstranges nämlich: $y_1\ y_2\ y_3 \ldots y_n$. Diese Größen sind aber nicht gegeben. D. Widerstandshöhe d. Wassers in d. ersten Strecke sei bezeichnet mit B_1, die d. folgenden mit $B_2\ B_3 \ldots B_n$. Diese Größen sind auch nicht gegeben, da sie wesentlich von d. betreffenden Durchmessern abhängen. An d. Stellen $A_0\ A_1\ A_2 \ldots A_n$ seien d. Druckhöhen im Innern d. Röhren $b_0\ b_1\ b_2 \ldots b_n$, welche also kürzere Bezeichnungen für $\frac{p_n}{\gamma}$ sind. Von diesen Druckhöhen sind d. erste und d. letzte gegeben und zwar b_0 durch d. Höhe d. Hochreservoirs und b_n dadurch, daß selbst am Ende d. Rohrleitung noch eine genügende Druckhöhe übrig bleiben soll, um d. Wasser in d. höchsten Stockwerke hinauf zu treiben; d. übrigen dazwischen liegenden Druckhöhen sind jedoch vorläufig noch nicht bekannt. — Was d. ganze Anordnung d. Röhrennetzes betrifft, so sind d. Umständen nach nicht nur d. einzelnen Längen d. verschiedenen Rohrstrecken gegeben, sondern auch d. Höhenlage d. einzelnen Knotenpunkte durch Nivellement d. Terrains. Es sei demnach h_1 d. Höhe von A_0 über A_1, h_2 d. von A_0 über A_2 .... h_n d. von A_0 über A_n. Analog d. früheren Bezeichnungen sei nun H_1 d. wirksame Druckhöhe für d. ganze Rohrstrecke $A_0 A_1$, H_2 d. für d. Strecke $A_1 A_2$, ... H_n d. von A_0 bis A_n. Diese wirksamen Druckhöhen sind natürlich von d. vorher gefundenen Höhen abhängig, nämlich: $H_m = h_m + b_0 - b_m$. —

D. Wasservolumen, welches pro Sek. in d. Rohrstrecke $A_0 A_1$ hineinfließt sei V_1; V_2 sei d. Wasservolumen, welches in d. folgende Strecke $A_1 A_2$ hineinfließt, während W_1 d. Wasservolumen ist, welches durch d. sonstigen hier in A_1 abgezweigten Rohrstränge abfließt. D. Größe V_1 kann schon unterwegs während d. Strecke $A_0 A_1$ kleine Abzweigungen erleiden durch kleinere Hausleitungen, so daß d. bei A_1 herausfließende Wasser $= \alpha_1 V_1$ geworden ist. Dieses Wasservolumen $\alpha_1 V_1$ verzweigt sich nun an d. Stelle A_1 in d. Volumen V_2 und in W_1; das auf d. Strecke $A_1 A_2$ hinausfließende Wasservolumen sei $= \alpha_2 V_2$; von diesem geht d. Wasservol. V_3 in d. 3te Strecke $A_2 A_3$ während W_2 in d. übrigen in A_2 sich abzweigenden Leitungen geht. u. s. w. — schließlich ist V_n d. Wasservolumen, welches in d. $n$te Strecke hineinfließt, W_n sei dasjenige Wasservolumen welches am Ende d. $n$ten Strecke noch übrig bleibt zu irgend einer späteren oder kommenden Verwendung. V_n geht bis gegen d. Ende d. Strecke l_n über in $\alpha_n V_n$. D. Größen α stehen natürl. in Beziehung zu d. gegebenen Größen V u. W, denn es ist: $\alpha_1 V_1 = W_1 + V_2$

also $\alpha_1 = \frac{W_1 + V_2}{V_1}$ $\quad \alpha_2 = \frac{W_2 + V_3}{V_2}$ .... $\alpha_n = \frac{W_n}{V_n}$

Es sind also:

	A_0A_1	A_1A_2	A_2A_3	………	$A_{n-1}A_n$	d. Strecken d. Hauptstränge
	l_1	l_2	l_3	………	l_n	d. Längen derselben.
	y_1	y_2	y_3	………	y_n	d. entsprechenden Durchmesser
	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}_2$	$\mathfrak{B}_3$	………	$\mathfrak{B}_n$	d. Widerstandshöhen
A_0	A_1	A_2	A_3	………	A_n	d. Knotenpunkte
b_0	b_1	b_2	b_3	………	b_n	d. Druckhöhen daselbst
	h_1	h_2	h_3	………	h_n	d. Höhenlagen über A_0
	H_1	H_2	H_3	………	H_n	d. entsprechenden Druckhöhen für A_0A_n
	V_1	V_2	V_3	………	V_n	d. in $A_{n-1}A_n$ einfließende Wasserquant.
	W_1	W_2	W_3	………	W_{n-1} W_n	das in A_n abgezweigte Wasserquant.
	α_1V_1	α_2V_2	α_3V_3	………	α_nV_n	das aus $A_{n-1}A_n$ ausfließende Wasserquant.

Dieses vorausgesetzt sollen nun d. Durchmesser y bestimmt werden und zwar so, daß d. Anlagekosten ein Minim. werden, wobei untergeordnete Widerstände unberücksichtigt bleiben sollen, also nur d. Leitungswiderstand betrachtet werden soll, indem man sich vorbehalten kann, d. Coeff. λ etwas größer zu veranschlagen. Es sind bei einer solchen Leitung in d. That andere Leitungswiderstände von sehr untergeordneter Art, so daß man dies wohl thun kann. Die Anlagekosten sind nun vorzugsweise bedingt durch d. [illegible] d. ganzen Röhrenleitung und dieser annähernd d. Gew. proportional sein. Für eine Strecke von d. Länge l, Weite y und Wandstärke δ ist d. Volumen proportional $ly\delta$ also d. Gew. d. ganzen Röhrenstrangs proportional $\Sigma\, ly\delta$. D. Wandstärke eines solchen Rohres wird gewöhnlich nach einer empirischen Formel bestimmt: $\delta = \alpha + \beta y$, wo α constant ist, β aber mit d. Pressung wächst. Im vorliegenden Fall sind d. Pressungen in d. einzelnen Theilen an d. verschiedenen Stellen d. ganzen Röhrenstrangs wenig genug verschieden, so daß auch β als Constante betrachtet werden kann, da auch am Ende d. ganzen Leitung d. Pressung noch so groß sein muß, daß d. Wasser in d. obersten Stockwerke hinaufdringt. Damit sind d. Anlagekosten proportional: $\Sigma\, ly(\alpha + \beta y)$. Behufs einer ersten Annäherung soll zunächst so gerechnet werden, als ob $\beta = 0$ wäre, indem d. Kosten nicht nur bedingt sind durch d. Kosten d. Röhrenstrangs selbst sondern auch durch d. Verlegungskosten, welche ein [illegible] Mittelgewicht haben könnte. Jedenfalls ist β nur sehr klein, es sei also behufs einer ersten Näherung gesetzt: $\Sigma\, ly = \text{min.}$ Soll dieses ein Minim bezüglich d. Veränderlichen y sein, so muß d. erste Differentialquotient $= 0$ sein, also:

$$\Sigma\, l\,dy = 0$$

d. n verschiedenen Differentiale $dy_1\ dy_2\ dy_3 \ldots$ stehen in einer gewissen Beziehung zu einander. Da keine andern Widerstände als d. Leitungswiderstand berücksichtigt sind und auch diese Leitungswiderstandshöhe viel größer als d. Geschw.-Höhe d. an irgend einer Stelle fließenden Wassers ist, so [illegible] d. Gl.: $\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}$, wo man d. Geschw.-Höhe links gegen d. viel größere Höhe $\mathfrak{B}$ vernachlässigen kann:

$$H = \mathfrak{B}.$$

Nach Seite 93 ist dann d. Widerstandshöhe irgend einer dieser n Strecken:

$$\mathfrak{B} = \frac{l\mathfrak{P}}{y^5} \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{P} = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \frac{1+\alpha+\alpha^2}{3} \text{ ist.}$$

Dieses $\mathfrak{P}$ hat für jede d. n Strecken einen besonderen Werth, der sich aber von vornherein berechnen läßt, wenn für λ vorläufig ein constanter Mittelwerth, etwa 0,03, gesetzt wird, man hat nur zu setzen in d. allgemeinen Formel: $V = V_1$ $\alpha = \alpha_1$ so findet man $\mathfrak{P}_1$ = d. Werth von $\mathfrak{P}$ für diese erste Rohrstrecke, dann ist $\mathfrak{B}_1 = \frac{l_1\mathfrak{P}_1}{y_1^5}$ u. s. w. — Nun ist aber d. Summe d. Widerstandshöhen aller n Strecken zusammengenommen $= \mathfrak{B} = \Sigma\,\frac{l\mathfrak{P}}{y^5}$ eine gegebene größte, denn es muß doch = H_n sein; wenn nun auch d. verschiedenen H_n unbekannt sind so ist doch H_n bekannt, nämlich:

$$H_n = h_n + b_0 - b_n .$$

Es sind also d. n Differentiale mit d. Bedingung gebunden, daß $\Sigma \frac{lP}{y^5} = const = H_n$ sein muß, d. Bedingung ist also:

$$\Sigma B = \Sigma \frac{lP}{y^5} = H_n = h_n + b_0 - b_n .$$

differentiirt giebt diese Gl.: $\Sigma \frac{lP}{y^6}\, dy = 0$.

Zwischen dieser Gl. und d. Gl. $\Sigma l dy = 0$ könnte man nun von d. n Differentialen $dy_1\ dy_2 \dots dy_n$ eins eliminiren, so daß eine Gl. entstünde, d. nur d. übrigen $n-1$ Differentiale enthielte; da diese $n-1$ übrig bleibenden Werthe von dy ganz unabhängig von einander sind, so müßte d. entstehende Gl. identisch erfüllt sein für alle Werthe von y, es müßte also d. Coeff. d. einzelnen y gleich sein. Dieses würde $n-1$ Gln. ergeben, welche zusammen mit d. Gl. für P d. erforderliche Zahl von n Gln. geben, woraus d. verschiedenen Durchmesser zu finden sind. Es ist aber zweckmäßiger dieses Eliminationsverfahren mit einem gewissen Coeff. auszuführen; zu dem Ende multipliciren wir d. Gl. mit μ^6 und addiren sie zu $\Sigma l dy = 0$, so erhalten wir d. Gl.:

$$\Sigma l \left(1 - \mu^6 \frac{P}{y^6}\right) dy = 0$$

Nun kann man μ so bestimmen, daß diese n Glieder d. Summe einzeln jedes für sich = 0 wird, also d. Gl. in n Partialgl. zerlegen, wobei nur μ gehörig bestimmt werden muß. Nimmt man d. Coeff. μ, d. dieser Bedingung entspricht, so ergibt sich $y = \mu P^{\frac{1}{6}}$. Man braucht dann nur noch d. Werthe $\mu P^{\frac{1}{6}}$ zu bilden, um d. verschiedenen n Durchmesser y zu finden. D. n verschiedenen Werthe von P sind aber bekannt für einen Mittelwerth von λ, so daß es sich nur um d. Bestimmung von μ handelt, dieses kann aber geschehen vermittelst d. Bedingung: $\Sigma \frac{lP}{y^5} = H_n$, dieses aber eingesetzt liefert:

$$\Sigma \frac{lP}{\mu^5 P^{\frac{5}{6}}} = H_n$$

Hierin sind bei P für d. n verschiedenen einzelnen Glieder verschieden, μ war aber ein für alle Glieder gemeinschaftlicher Coeff. so daß $\frac{1}{\mu^5}$ herausgeschrieben werden kann, also:

$$\mu = \left(\frac{\Sigma l P^{\frac{1}{6}}}{H_n}\right)^{\frac{1}{5}}$$

dieser Werth von μ ist dann nur zu multipliciren mit $P^{\frac{1}{6}}$, um y zu finden.

Jetzt kann man eine Correctionsrechnung in zweifacher Richtung anstellen, einmal insofern, als λ nicht immer = 0,03 ist und dann in so fern, als es nicht ganz d. Aufgabe entspricht, d. Summe d. Producte $l y$ zu einem min. zu machen, sondern daß

$$\Sigma l y (\alpha + \beta y) \text{ zu einem min. gemacht werden soll.}$$

Was zunächst λ betrifft, so kann man, da jetzt d. Durchmesser angenähert bestimmt sind, sowie auch d. Wassermengen, d. durch d. einzelnen Strecken hindurchfließen, so kennt man auch d. mittl. Geschw. in diesen Strecken, also kennt man auch u_y und es ist nun im Allgemeinen: $u_y = \frac{4V}{\pi y}$; V ist aber am Anfang = V und am Ende αV, so daß man setzen kann statt $4V$: $2V(1+\alpha)$ also:

$$u_y = \frac{2V(1+\alpha)}{\pi y}$$

Setzt man hierin d. Werthe von $V = V_1\ V_2 \dots$ $\alpha = \alpha_1\ \alpha_2 \dots$ $y = y_1\ y_2 \dots$, so kann man d. mittl. Werthe von u_y für d. einzelnen Strecken berechnen, damit findet man nun entsprechend d. corrigirten Werth von λ. War aber λ' d. vorläufig angenommene Mittelwerth von λ, so braucht man nur d. früher berechneten Werthe von P zu multipliciren mit $\frac{\lambda}{\lambda'}$ um d. corrigirten Werthe von P zu erhalten. Angenommen dieses sei geschehen, so daß nun unter P d. corrigirte Werth von P verstanden werde, dann soll d. Einfachheit wegen gesetzt werden:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m}{2}$$

Die Aufgabe ist dann: $\sum l y \left(1 + \frac{m y}{2}\right)$ = min zu machen. Zu dem Ende muss d. Differential bezüglich d. unabhängigen $y = 0$ sein, also:

$$\sum l(1+my)\,dy = 0$$

Wenn man wieder d. Bedingungsgl. $\sum \frac{lP}{y^6}\,dy = 0$ mit d. Coeff. μ^6 multipliziert und d. Gl. von dieser subtrahiert wird, so ergibt sich:

$$\sum l\left(1+my-\mu^6\frac{P}{y^6}\right)dy = 0.$$

Hier kann nun wieder μ so bestimmt werden, daß diese Gl. in n einzelne Gln. zerfällt. Wenn d. Coeff. μ so bestimmt, so würden sich d. n einzelnen Werthe von y ergeben aus dieser Gl. Dieses würde aber sehr zeitraubend sein, da diese Gln. durch Probiren aufzulösen sind, welches bei n Gln. vom 6ten Grad nicht so einfach ist. Wenn es sich aber nun wie hier um eine Correctionsrechnung handelt und m immer nur klein ist, so kann man in my dem y d. vorhin schon bestimmten Näherungswerth beilegen, welcher aber mit y' bezeichnet sei, also y' = Näherungswerth für d. Rohrdurchmesser. Dann ergibt sich, wenn μ bestimmt ist:

$$y = \mu\left(\frac{P}{1+my'}\right)^{\frac{1}{6}}$$

d. Werthe von $\frac{P}{1+my'}$ können für d. n Rohrstrecken berechnet werden, da d. n Werthe von P bekannt sind. Es handelt sich also nur noch um d. Bestimmung von μ. Dieser Coeff. ergibt sich aus: $\sum \frac{lP}{y^5} = H_n$; setzt man hier ein, so folgt:

$$\sum \frac{lP}{\mu^5\left(\frac{P}{1+my'}\right)^{\frac{5}{6}}} = H_n.$$

und daraus μ:

$$\mu = \left(\frac{\sum\left[l\left(\frac{P}{1+my'}\right)^{\frac{1}{6}}(1+my')^{\frac{5}{6}}\right]}{H_n}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Nachdem man nun so d. einzelnen variirten Weiten d. Strecken d. Hauptleitungen gefunden hat, kann zu d. Nebensträngen geschritten werden, d. sich an d. Knotenpunkten abzweigen. Um diese Nebenstränge nun genau so weiter behandeln zu können, ist weiter nichts nöthig, als zunächst d. Druckhöhen $b_1\, b_2 \ldots$ für d. n Knotenstellen zu berechnen, denn dann treten diese bezüglich d. Nebenstränge an Stelle von b_0 in d. Formel für d. Hauptstrang und kann dann genau so wie vorhin verfahren. Die Größen $b_1\, b_2 \ldots\ldots b_{n-1}$ können nun leicht gefunden werden, b_0 und b_n waren bekannt, b_1 bis b_{n-1} müssen berechnet werden. Es kann nun aber, nachdem d. Durchmesser y für d. sämtlichen n Strecken d. Hauptstranges bekannt sind, d. Größe B für d. n Strecken berechnet werden:

$$B_1 = \frac{l_1 P_1}{y_1^5} \quad \ldots\ldots \quad B_n = \frac{l_n P_n}{y_n^5}.$$

Ist dies geschehen, so ist d. Druckhöhe H_1 für A_0 bis $A_1 = B_1$, ferner $H_2 = B_1 + B_2$, $H_3 = B_1 + B_2 + B_3$ etc. – Es ist aber $H_1 = h_1 + b_0 - b_1$ und hieraus also b_1, da H_1 und b_0 bekannt sind. Ferner ist $H_2 = h_2 + b_0 - b_2$ woraus wiederum b_2 gefunden werden kann u. s. w. –

Nachdem nun also d. Druckhöhen an d. n Knotenpunkten bekannt sind, kann man d. Nebenstränge ebenso wie d. Hauptstrang berechnen. —

[illegible]