Wärmetheorie & Hydraulik

Pieper, Andreas

Karlruhe, 1872/73

Strömende Bewegungen von Flüssigkeiten in Canälen

urn:nbn:de:bsz:31-279864

Strömende Bewegungen von Flüssigkeiten in Canälen.

In d. meisten d. hier vorkommenden Fälle, kann mit ziemlicher Genauigkeit d. Richtung d. Laufens angenommen werden, namentlich um so genauer, je enger d. Canal od. d. Röhre ist. Wenn aber vorweg angenommen wird, daß d. Neigung zwischen Gr. [illegible] a priori gegeben sei, so kann diese Annahme doch nicht immer als zulässig betrachtet werden, namentlich dann nicht, wenn

Dadurch sind schon d. Schwierigkeiten gesteigert zur Bestimmung d. Bewegungsgesetzes betreffend d. Änderung d. Bewegungszustandes von Punkt zu Punkt. Aus diesem Grund muß man noch weitere vereinfachende Annahmen, indem man d. Änderungsgesetz d. inneren und äußeren Zustandes als einen mittleren Zustand in d. Richtung ansieht d.h. den Zustand in allen Punkten jedes Querschnitts als gleich voraussetzt. Was d. Gr. [illegible] betrifft, so ist diese Annahme um so weniger fehlerhaft, je weniger d. Querschnitt [illegible] ist und je weniger d. Linien gekrümmt sind in d. Punkten, wo sie d. Querschnitte durchsetzen, vorausgesetzt, daß auch noch [illegible] Gesetzen keine anderen Störungen vorhanden sind, indem dann von Punkt zu Punkt im Querschnitt d. [illegible] mit [illegible] fallen [illegible] Gesetzen sich ändert und zwar um so mehr je dichter d. strömende Flüssigkeit ist, denn natürlich wird d. Schwerkraft in diesem Sinn den bedeutendsten Einfluß haben. Diese Voraussetzung [illegible] in allen Querschnittspunkten gleichen Gr. hat nur wenig Bedenkliches an sich. — Anders verhält sich aber mit d. Voraussetzung, daß d. Geschw. nach in allen Querschnittspunkten gleich sei, denn diese ändert sich bekanntlich bedeutend mit Rücksicht auf d. inneren und äußeren Reibungen, indem d. Geschw. in d. Mitte einer Röhre immer größer ist als an d. Rändern. Vorläufig soll indessen von diesen Umständen abgesehen werden, indem vorausgesetzt wird, daß d. äußere und innere Zustand immer als mittlerer Zustand d. Querschnitts in Rechnung gestellt wird. Diese Annahme bezeichnet man d. Schichten[illegible] genauer noch als d. Schichtenannahme, indem dadurch dieselbe d. Flüssigkeit in Schichten geteilt wird, in welchen d. äußere und innere Zustand gleich ist. —

In einem solchen Querschnitt sei nun bezeichnet mit p d. spez. Pressung, v = spez. Volumen, τ = absolute Temperatur, U = spez. innere Arbeitsvermögen und u = Geschw. in allen Punkten d. Querschnitts F, welche eigentlich als Mittelwerthe sind. Unter Mittellinie soll d. geometrische Ort aller Schwerpunkte S d. Querschnitte d. in Röhren strömenden Körpers verstanden werden. s bezeichne einen Bogen d. Mittellinie S, gerechnet von einem Anfangspunkt S_0 aus, welcher d. Schwerpunkt eines als Anfangsquerschnitt gewählten Querschnitts F_0 ist. Alle angenommenen Größen $p\ v\ \tau\ U\ u$ sind demnach zu betrachten als Funktionen von s und d. Zeit t, wenigstens in d. Fällen wo nicht permanente strömende Bewegungen stattfinden, und es besteht unsere Aufgabe also darin diese Größen $p\ v\ \tau\ U\ u$ als Funktionen von s u. t auszudrücken. Ist dabei d. Beweg. nicht permanent, so ist sie doch in d. meisten technisch wichtigsten Fällen so kurzen vorübergehend, daß man eher betrachten [illegible] d. augenblicklichen Zustand gleich jenem Strom dem Zustand, welcher dann bei einer permanenten Beweg. stattfinden würde. Dementsprechend wird d. nicht permanente Beweg. auf d. permanente Beweg. zurückgeführt und welchem Grund es auch angemessen ist ~~d.~~ zunächst d. permanente strömende Beweg. näher zu untersuchen. Wenn man also nun zunächst permanente strömende Beweg. voraussetzt, so sind d. fraglichen Größen $p\ v\ \tau\ U\ u$

nur noch Functionen von s und nicht mehr Functionen d. Zeit t. Wird ferner die sekundl. mit G d. Gew. d. Flüssigkeit bezeichnet, welches in d. Zeiteinheit durch jeden Querschnitt hindurchströmt, so kann d. allgemeine Aufgabe, aus welcher durch Verknüpfung von gegebenen und gesuchten Größen sowie durch Specialisirung eine große Zahl verschiedener und besonderer Aufgaben abgeleitet werden kann, folgendermaßen ausgesprochen werden:

Es sollen d. Größen p v T U u als Functionen von s in jedem Querschnitt bestimmt werden, wenn sie für einen bestimmten Querschnitt gegeben sind, wenn ferner d. Art d. Flüssigkeit, die Constante g = Lage d. Schwere, d. Gestalt d. Röhre, die auf d. Flüssigkeit einwirkenden Massenkräfte, ferner d. Widerstand d. Leitung und d. Wärmemittheilung durch d. Rohrwand hindurch gegeben sind.

Um nun diese Aufgabe zu lösen, müssen 5 Beziehungen zwischen diesen 5 unbekannten Größen p v T U u und d. Variabeln s.

Die erste solche Gl. erhält man einfach dadurch, daß man den Weg durch den Querschnitt F pr. Zeiteinheit hindurchfließende Flüssigkeitsvolumen 2 mal ausdrückt. Dieses ist nämlich einmal $= Fu$ und andererseits auch = d. pr. Zeiteinheit durchfließenden Flüssigkeitsgew. mal d. Volumen pr. Gewichtseinheit also $= G.v$

Dementsprechend stellt man als erste Beziehung:

$$G.v = Fu.$$

Diese Gl. enthält offenbar d. Continuitätsbed., weshalb sie auch desshalb auch Continuitätsgl. genannt werden soll. —

2 andere Beziehungen bekommt man aus d. von d. mechanischen Wärmetheorie her bekannten sogenannten Gln. d. lebendigen Kraft, aus d. Wärmegl. und aus d. Gl. d. Arbeitsvermögens, von welchen jedoch nur d. beiden ersten unabhängig von einander sind, während d. 3te d. Folge d. beiden ersten ist. Bekanntlich heißen diese Gln.:

Gleichung d. lebendigen Kraft: $dL = dM + dP - dR - dS + dE$

die allgemeine Wärmegl.: $dU = WdQ + dR + dS - dE$ und aus diesen beiden durch Addition d. Gl. d. Arbeitsvermögens d. h. d. Summe d. äußeren und inneren Arbeitsvermögens: $d(L+U) = dM + dP + WdQ$.

Hierin bedeuten:
dL = Zuwachs d. lebendigen Kraft in irgend einem Zeitelement
dU = Zuwachs d. inneren Arbeitsvermögens " " "
dM = Arbeitssumme d. Massenkräfte " " "
dP = Arbeit d. auf d. Oberfl. wirkenden Drucke " " "
dR = Arbeit verloren gehend durch äußere Reibung " "
dS = " " " " inneren Widerstand " "
dE = Expansionsarbeit
WdQ = Arbeitswerth d. von Außen mitgetheilten Wärme dQ " "

Diese 3 Gl. sind nun nur noch etwas anders einzurichten um 2 von einander unabhängige Beziehungen zwischen d. 5 Größen u p T U u zu bekommen. Die Gl. sind bezogen auf d. Zustandsänderungen, welche d. im Zeitelement dt durch Querschnitt F hindurchfließende Flüssigkeitsmenge erleidet, während d. Schwerpunkt S d. Querschnitts d. Element ds d. Mittellinie durchläuft.

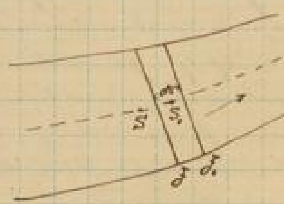
Das im Zeitelement dt durch Querschnitt F hindurchfließende Gew. d. Flüssigkeitsmenge ist offenbar $= G.dt$ und da d. Geschw. $= u$ ist, so folgt als Änderung d. lebendigen Kraft:

$$dL = G\frac{dt}{g}\, d\left(\frac{u^2}{2}\right) = G.dt.\frac{u\,du}{g}.$$

Was ferner d. im Zeitelement dt verrichtete Expansionsarbeit betrifft, so ist diese offenbar:

$$dE = G.dt\ p\,dv. —$$

Was d. Arbeit d. äußeren Drucks betrifft, so sei J ein Querschnitt und J_1 ein unendl. nahe benachbarter Querschnitt, deren Schwerpunkte S u. S_1 nicht genau in den Ebenen dieser Querschnitte zu liegen brauchen, indem dieselben bekanntlich krumme Fl. sein können. Offenbar ist nun:



$J p u\, dt$ = Arbeit d. Drucks, welchen d. nachfolgende Flüssigkeit auf d. Fläche J d. Schicht pro Zeitelement dt ausübt und ebenso d. auf d. Vorderseite J_1 d. Schicht entgegengestellte Druck, also im negativen Sinne d. Beweg., = d. vorigen vergrößert um sein Differential, also $= -[J p u + d(J p u)]\,dt$.

Außerdem wirkt aber noch ein äußerer Druck auf d. Wände d. Flüssigkeitsschicht, indem aber dieser Druck senkrecht gegen d. Richtung d. Beweg. gerichtet ist, so ist seine Arbeit im Sinne d. Beweg. $= 0$. Demnach ist zu setzen:

$$dP = J p u\, dt - [J p u + d(J p u)]\,dt = - d(J p u)\,dt$$

Nach d. vorher gefundenen Continuitätsbed. ist aber: $u = G\frac{v}{J}$ und demgemäß:

$$dP = - G\,dt\, d(pv). -$$

Setzt man diese Ausdrücke von dP, dL und dL in d. allgemeinen Gl. ein und dividirt diese dann durch $G\,dt$, so bezieht man dieselben dadurch offenbar auf d. Gewichtseinheit und Zeiteinheit, während sie vorher auf d. Gew. d. Flüssigkeitsschicht und Zeitelement dt bezogen waren. d. Größen dR, dS, dM und WdQ sollen aber so gewählt bleiben, daß sie dann auch auf Gewichtseinheit und Zeiteinheit bezogen sind. Aus d. Gl. d. lebendigen Kraft bekommt man nun:

$$\frac{u\,du}{g} = dM - d(pv) - dR - dS + p\,dv$$

α . . . oder: $\frac{u\,du}{g} + d(pv) - p\,dv = dM - dB$ wenn unter dB d.

$\therefore\ u\frac{du}{g} + v\,dp = dM - dB$. Summe d. Arbeiten d. inneren und äußeren Bewegungswiderstände verstanden wird $= dR + dS$.

Andererseits liefert d. Wärmegl.:

β . . . . $dU + p\,dv = WdQ + dB$

Und aus diesen beiden durch Addition:

γ . . . . $\frac{u\,du}{g} + dU + d(pv) = dM + WdQ$.

Von diesen 3 Gln. α β γ ist wie schon ersichtlich eine immer d. Folge d. beiden anderen, so daß man in diesen 3 Gln. demnach nur 2 unabhängige Beziehungen zwischen d. Größen u p v Q U hat. Im Ganzen haben wir also nun mit d. Continuitätsbed. 3 unabhängige Beziehungen. Wir suchen also noch 2. Diese bisher gefundenen Beziehungen waren allgemein gültig für jede Flüssigkeit in mittlerem Zustande, die beiden noch fehlenden Beziehungen können dagegen nicht so allgemein aufgestellt werden, indem dieselben von d. Art und Aggregatform d. betreffenden Flüssigkeit abhängen. Diese beiden Beziehungen sind nämlich d. aus d. Wärmetheorie her bekannte Zustandsgleichung und Gleichung d. inneren Arbeitsvermögens. Die Zustandsgl. drückt eine Beziehung zwischen d. Größen p v t und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens ist eine Gl. zwischen d. Größen v p t U, welche Beziehungen aber bekanntlich im Allgemeinen für jede verschiedene Flüssigkeit und jede verschiedene Aggregatform verschieden sein können. — Handelt es sich nun um eine nicht homogene Flüssigkeit, sondern um ein Gemisch gleichartiger Flüssigkeit in verschiedenen Aggregatformen, so kommt noch eine 6te unabhängige Veränderliche hinzu nämlich d. Mischungsverhältnis y. In diesem Fall ist aber auch noch eine 6te Beziehung vorhanden, indem bekanntlich für den in einem solchen Gemisch entsprechenden Grenzzustand d. Übergangs von einer Gleichgewichtsform in d. andere, zwischen d. Pressung p und d. Temperatur t [bei] d. Mischungsverhältnis γ eine besondere Beziehung stattfindet. Man kann also in einem solchen Falle mit d. Zustandsgl. und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens mit Hilfe dieser besonderen Beziehung zwischen $p\,t\,\gamma$, γ ~~aus~~ eliminieren, so daß man dann noch außer d. 3 schon vorher genannten allgemein gültigen noch 2 für besonderen Fall speziell aufgestellte eindeutige Beziehungen zwischen d. 5 Größen $p\,v\,t\,U\,u$ hat, im Ganzen also immer d. erforderlichen 5 Beziehungen zu Gebote stehen. Diese 5 Bestimmungsgln. sind freilich teils noch Differentialgln., deren Integration aber mit Rücksicht auf d. weiter gegebenen Bedingungen möglich ist. —

Wenn nun hiermit auch d. Lösbarkeit d. allgemeinen Aufgabe dargethan und ihre Elemente auch angegeben ist, so müssen doch noch einige Bemerkungen über einige Größen gemacht werden, nämlich über dM, dQ, dM und dB.

Wenn, wie gewöhnlich, Massenkräfte nur mit d. Schwerkraft und d. eigenen Beweg. d. Leitfläche herrühren, so gelten für d. Größe dM d.h. für d. Arbeitssumme d. Massenkräfte pr. Gewichtseinheit Rücksicht auf einem beliebigen endlichen Wege d. ~~früher~~ erhaltenen Ausdr., wenn man anstatt d. Elements ds d. Bahn nur d. fraglich endliche Wert $s\,s_0$ setzt. Indessen soll dM noch etwas ausgedrückt werden mit Rücksicht auf d. Annahme eines gleichen Mittelzustandes in allen Querschnittspunkten.

S = Schwerpunkt d. Querschnitts F sei ein Punkt d. Mittellinie, dessen Beweg. mit d. Geschw. u im Sinne d. Schritt gegen d. Leitfläche (Röhre, Kanal etc.) vor sich gehe. Diese Leitfl. habe nun eine eigene Beweg. so daß, wenn d. Punkt S fest mit d. Leitfl. verbunden wäre, dieser Punkt S eine Beschl. f erlange, deren Richtung mit d. Mittellinie d. Winkel φ bildet. Die Arbeit dM ist nun, was d. eigene Beweg. d. Leitfl. anbetrifft, nur von d. ersten Ergänzungskraft abhängig, indem d. 2te immer normal zur relativen Bahn gerichtet ist, also deren Arbeit im Sinne d. Beweg. $= 0$ ist. Nun ist aber d. von d. 1sten Ergänzungskraft herrührende Beschl. immer gerade ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet d. Beschl. d. Punktes, welche dieser haben würde wenn er mit d. Leitfl. fest verbunden wäre, d.h. diese Beschl. ist auch ~~f~~ gerichtet. Die Beschl. d. resultierenden Massenkraft ist demnach d. Resultante aus f und aus g d.h. aus d. Beschleunigungen d. ersten Ergänzungskraft d. relativen Beweg. und d. Schwerkraft.

Pro Masseneinheit ist nun d. Beschl. d. Schwerkraft effective $= \frac{g}{g} = 1$

. . . . d. ersten Ergänzungskraft $= \frac{f}{g}$

und demnach d. resultierende Beschl.: $= (1.\cos\psi - \frac{f}{g}\cos\varphi)$

also: $dM = (\cos\psi - \frac{f}{g}\cos\varphi)\,ds.$

Für d. Möglichkeit einer genannten Beweg. müssen nun bekanntlich d. Größen ψ f und φ eindeutige Functionen von d. Zeit t sein. Erfahrungsgemäß ist dies d. Fall, wenn d. Leitfl. um eine feste Axe rotiert mit constanter Winkelgeschw. und auch noch, wenn außerdem eine Translationsbeschl. f im Sinne d. festen Rotationsaxe stattfindet. Außerdem, wenn d. Winkelgeschw. $= 0$ d.h. d. Leitfl. keine Rotation besitzt, die Translationsbeschl. eine beliebige Richtung haben und wenn man ganz von d. Schwere, wie bei Gasen und Dämpfen absehen darf, so können d. Richtungen d. Rotationsaxe und d. Translationsbeweg. beliebig sein. Ferner kann man d. allgemeinen Ausdruck auch anwenden, wenn d. Größen ψ f u. φ periodische Functionen d. Zeit t sind, dann sind aber diese Größen nur als Mittelwerte zu betrachten, welche sich mit d. Beobachtungen während einer größeren Anzahl Zeitperioden ergeben.

Was d. Glied $d\Theta$ in d. allgemeinen Gl. betrifft, d. h. d. Wärmemittheilung durch d. Rohrwand, so kann diese zunächst positiv od. negativ sein, positiv gemeint d. Richtung d. Wärmemittheilung von Außen nach Innen. Diese Wärmeleitung ist namentlich wichtig, wenn dieselbe herrührt von einer Flüssigkeit, welche sich außerhalb d. Rohrwand befindet und ebenfalls in Beweg. ist. Es sei dann T_1 d. absolute Temperatur d. äußeren Flüssigkeit an demjenigen Ort d. Querschnitts, wo im Innern d. Rohrs in d. Flüssigkeit d. absolute Temperatur T herrscht. Es sei ferner dF_1 ein Element d. Rohrwandfläche, zwischen zwei unendl. nahe benachbarten Querschnitten, welche d. Element ds d. Mittellinie begrenzen; ferner sei k d. sogenannte Wärmedurchlässigkeitscoefficient d. h. diejenige Wärmemenge, welche durch 1 □m Wandfläche in 1 Sek. und für jeden Grad Temperaturdifferenz d. beiderseits angrenzenden Flüssigkeiten übertragen wird in d. Richtung von Außen nach Innen. Dann ist offenbar:

$$k(T_1 - T)\,dF_1 = $$ die pr. 1 Sek. durch dF_1 hindurch von Außen mitgetheilte Wärmemenge. Diese ist aber offenbar auch $= G \cdot d\Theta$ unter $d\Theta$ d. pr. Gewichtseinheit mitgetheilte Wärmemenge verstanden, denn diese Wärmemenge wird demjenigen Flüssigkeitselement vom Gew. G mitgetheilt, welches gerade in derselben Zeit an dem Flächenelement dF_1 vorbeiströmt. Folglich:

$$k(T_1 - T)\,dF_1 = G \cdot d\Theta.$$

Die Größe $d\Theta$ könnte man nun später mit Rücksicht auf diese Gl. zu bestimmen, vorausgesetzt, daß d. Wärmedurchlässigkeitscoefficienten k in genügend erforschtem Maße bekannt. Damit ein permanenter Zustand möglich wird, müssen natürlich d. Coefficienten u. betreffenden Größen wieder unabhängig von d. Zeit t sein. — Was d. Wärmedurchlässigkeitscoefficienten k betrifft, so ist ersichtlich, daß derselbe abhängig ist von d. Wärmeübergangscoefficienten an d. inneren und äußeren Rohrwandfl., welche wiederum abhängig sind von d. Oberfl.-Beschaffenheit d. Rohrwand, ferner von d. Wärmeleitungscoefficienten d. Materials d. Rohrwand, von d. Dicke und Krümmung d. Rohrwand und endlich auch noch von d. Temperaturdifferenz $T_1 - T$. — Außerdem kann später d. Fall vorkommen, daß d. äußere Flüssigkeit d. Rohr nicht ringsum gleichmäßig umspült, sondern daß nur an einem Theile d. Rohrwand eine solche Wärmedurchlässigkeit stattfindet, z. B. wenn man d. Heizkanal eines Dampfkessels durch d. zu verdampfende Wasser hindurchführt, so daß d. Flüssigkeit ringsum d. Kanal umspült, wenn aber d. Heizkanal äußerlich am Kessel vorbeiführt, so findet nur an einem Theile d. Kessels eine Wärmedurchlässigkeit statt, während an d. anderen Stellen nur wenig Wärme durchgelassen wird. —

Für unsere Betrachtung erfordert nun d. Glied dB, welches sich auf d. hydraulischen Widerstände bezieht, dieselben pflegen in d. hydraulischen Rechnung gedacht zu werden durch Vergleichung mit d. sogenannten sogenannten Widerstandshöhen. Unter d. Bewegungshöhe für d. Beweg. d. Flüssigkeit vom Querschnitt F_0 bis zum Querschnitt F versteht man diejenige Höhe, um welche 1 Kgr. Flüssigkeit niedersinken müßte, um vermöge seiner Schwere eine Arbeit = derjenigen Arbeit zu verrichten, welche auf d. Wege vom Querschnitt F_0 bis F pr. 1 Kgr. durch d. Bewegungs-Widerstände verbraucht werden. Die Arbeit, welche 1 Kgr. beim Niedersinken um eine gewisse Höhe vermöge d. Schwere verrichtet ist dann Zahlenmäßig = gleich dieser Höhe selbst, und es bedeutet also d. Größe B in d. allgemeinen Gl. nichts anders, als diese Widerstandshöhe für eine gewisse Strecke d. Rohrs von endlicher Länge, oder für ein Längenelement ds d. Rohrs. Gewöhnlich wird nun aber diese Widerstandshöhe wiederum auf einen anderen Begriff, auf d. sogenannten Widerstandscoefficienten zurückgeführt. Setzt man nämlich $B = \zeta \frac{u^2}{2g}$ unter u d. mittlere Geschwindigkeit verstanden, mit welcher d. Flüssigkeit durch d. Endquerschnitt F d. fraglichen Strecke $F_0 F$ hindurchfließt, so nennt man ζ d. Widerstandscoefficienten für $F_0 F$. Derselbe für eine gewisse Rohrstrecke bedeutet also d. Verhältniß d. Widerstandshöhe für diese Rohrstrecke zu derjenigen Geschw.-Höhe $\frac{u^2}{2g}$, die d. Mittelgeschw. u entspricht, vermöge welcher d. Flüssigkeit aus d. fraglichen Rohrstrecke durch den

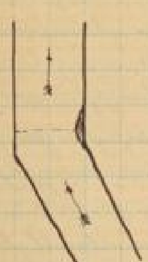
Endquerschnitt d. abfließt. Zuweilen wird auch noch d. Widerstandscoeff. auf d. mittlere Geschw. in irgend einem andern Querschnitt bezogen in d. Weise, daß wenn aber u' d. mittlere Geschw. in einem beliebigen andern Querschnitt bedeutet, dann d. betreffende hierauf bezogene Widerstandscoeff. ζ' durch d. Gl. bestimmt ist: $B = \zeta' \frac{u'^2}{2g}$; indessen wird, wenn in dieser Weise d. Widerstandscoeff. aufgestellt wird, immer ausdrücklich hinzugefügt werden, daß d. Widerstandscoeff. bezogen werden soll auf einen gewissen Querschnitt; wird aber schlechtweg von d. Widerstandscoeff. für eine gewisse Röhrenstrecke gesprochen, so soll er immer stillschweigend bezogen werden auf d. Endquerschnitt d. betreffenden Strecke, also auf d. mittlere Geschw. in demselben. —

Diejenigen Widerstände insbesondere, welche auf d. ganzen jeweils in Betracht gezogenen Weg einer Flüssigkeit hemmend wirken und welche verursachen, daß d. Endgeschw. auf diesem ganzen in Betracht gezogenen Weg kleiner ist als sie sein würde, wenn keine Leitungswiderstände vorhanden wären, dieser Widerstand wird häufig auch auf andere Weise, nämlich durch d. <u>Geschwindigkeitscoefficienten</u> in Rechnung gebracht, welcher mit φ bezeichnet werden soll. Zwischen ζ und φ besteht dann aber eine ganz bestimmte einfache Beziehung. Ist nämlich u' diejenige Endgeschw., welche unter sonst übrigens gleichen Umständen stattfinden würde, wenn kein Leitungswiderstand vorhanden wäre, so zerfällt d. Geschw.-Höhe $\frac{u'^2}{2g}$ in 2 Bestandtheile, nämlich d. effective Geschw.-Höhe und d. Widerstandshöhe, d. h. es ist: $\frac{u'^2}{2g} = (1+\zeta)\frac{u^2}{2g}$. Nun wird unter d. Geschw.coeff. φ d. Verhältniß $\frac{u}{u'}$ verstanden,

welches aber nach dieser Gl.: $= \frac{u}{u'} = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$

also umgekehrt: $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1$. —

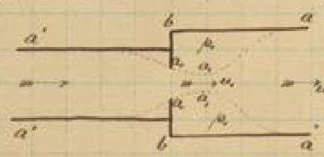
In Beziehung auf diese bedingenden Umstände können d. hydraulischen Leitungswiderstände unterschieden werden in solche, d. längs d. ganzen Leitung stetig einwirken und in solche die nur unter gewissen Umständen an gewissen Stellen vorkommen. D. ersteren sollen zusammengefaßt werden unter d. Bezeichnung d. allgemeinen Leitungswiderstandes; sie rühren von d. äußeren und inneren Reibung her. Die diesem allgemeinen Leitungswiderstand entsprechende Widerstandshöhe, wird später unter gewissen Voraussetzungen näher untersucht werden. Was aber d. eventuell an gewissen Stellen vorkommenden besonderen Widerstände betrifft, so werden diese veranlaßt durch plötzliche Änderung d. Querschnitts oder d. Änderung d. Richtung d. Mittellinie d. Röhre. Es kann nun d. Fall sein, daß solche plötzlichen Richtungsänderungen d. Leitröhre zugleich plötzliche Änderungen d. Querschnitts verursachen. Es sei aber untenstehend eine Leitröhre, welche an einer gewissen Stelle eine plötzliche Richtungsänderung erleidet.



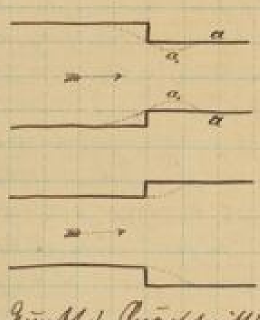
An d. Stelle wo diese plötzliche Richtungsänderung stattfindet, werden d. Bahnen d. Wasserfädchen plötzlich gekrümmt und zwar namentlich an d. inneren Seite mit einem sehr kleinen Krümmungshalbmesser. Dieser Umstand muß nothwendig zur Folge haben, daß d. Pressung in d. betreffenden Querschnitt in d. Richtung von innen nach außen beträchtlich zunimmt. Erinnern wir uns an d. allgemeinen Gl.: $Ky + \frac{1}{\mu}\left(Ky \pm \frac{dp}{dy}\right) = \frac{u^2}{\varrho}$, die bezogen war auf d. Geschw. d. Pressungsänderung in irgend einem Querschnitt im Sinne d. Krümmungsradius: wenn nun in d. Gl. d. Krümmungshalbmesser ϱ d. betreffenden Bahn sehr klein wird, also $\frac{u^2}{\varrho}$ sehr groß wird, so wird d. Änderung von p im Sinne von y, also gegen d. Krümmungsmittelpunkt hin vorzugsweise durch $\frac{u^2}{\varrho}$ bedingt sein, so daß man hat: $\frac{dp}{dy} = -\mu\frac{u^2}{\varrho}$; also je kleiner ϱ ist und je größer u ist, in desto stärkerem Grade muß d. Pr. im Querschnitt im Sinne gegen d. Krümmungsmittelpunkt hin bedeutend abnehmen, so daß sich an d. scharfkantigen Stelle gar keine strömende Masse befindet. Es findet also eine örtliche Änderung d. Flüssigkeitsstromes statt. Es handelt sich nun darum für d. besonderen Widerstand in allen solchen Fällen wenn möglich einen durch d. Erfahrung bestätigten allgemeinen einfachen Ausdruck zu gewinnen. Für d. Widerstandshöhe, durch welche ein solcher besonderer Widerstand gemessen wird, läßt sich ein solcher allgemeiner einfacher Ausdruck in d. That gewinnen für alle diejenigen Fälle, wo eine derartige plötzliche Querschnittsänderung d. Flüssigkeitsstromes verbunden ist mit einer Trennung d.

36

d. Flüssigkeitslauf an d. Rohrwand stattfindet. Dabei ist es vollkommen gleichgültig für d. Gültigkeit d. Formel, ob diese Änderung unmittelbar durch eine plötzliche Änderung d. Röhrenquerschnitts selbst hervorgerufen werde, oder ob durch eine plötzliche Richtungsänderung d. Rohrmittellinie. Von besonderem Werth ist d. Formel indessen nur in d. ersten Fall, während in solchen Fällen, wie d. oben erwähnten, nur ganz besondere Versuche zu einer annähernden Lösung führen. Es soll also ein solcher Fall vorausgesetzt werden, in welchem d. plötzliche Querschnittsänderung d. Flüssigkeitsstroms verursacht wird durch eine plötzliche Änderung d. Röhrenquerschnitts, während jetzt d. einzelnen Rohrstücke eine gemeinsame Axe haben. D. Querschnitt $a'a'$ ziehe sich zunächst plötzlich zusammen bis zu a^0a^0 und dehne sich dann plötzlich wieder aus bis zu $bb = aa$. Die Folge davon wird sein, daß an d. Stelle bereits in d. Röhre, in der d. Flüssigkeit ankommt, eine Ablösung derselben von d. Rohrwand stattfindet; nach dem Durchgange durch a_0a_0 kann eine fortgesetzte Zusammenziehung



d. Flüssigkeitsstroms stattfinden etwa bis zu a_1a_1 und erst dann dehnt er sich aus, so daß d. Curven $a'a_0$ a_1a d. Trennung darstellen. Der hier in d. Figur angenommene Fall ist nun ein allgemeiner Fall, derselbe kann verschiedene Modificationen erleiden. Wesentlich für den zu bestimmenden Widerstand ist nur d. plötzliche Erweiterung d. Querschnitts d. Flüssigkeitsstroms von a_1a_1 bis aa, dieselbe ist aber nicht nothwendig an d. Voraussetzung obiger Figur gebunden, es könnte auch eine weitere Röhre plötzlich in eine engere übergehen und umgekehrt. D. kleinste Querschnitt a_1a_1 sei bezeichnet mit F_1, d. volle Querschnitt aa mit F, so ist es im Wesentlichen diese plötzliche Querschnittsänderung von F_1 bis F, welche d. in Rede stehenden Widerstand verursacht; es fragt sich, wie d. allgemeine Ausdruck für d. entsprechende Widerstandshöhe gewonnen wird. Was d. Querschnitte F_1 und F betrifft, so können sie als eben vorausgesetzt werden, da an d. Stelle d. kleinsten Querschnitts d. Fasern parallel geworden sind, ebenso bei aa. In einem solchen Falle, wo ebene Querschnitte von parallelen und normalen geradlinigen Fasern geschnitten werden, ist d. Änderungsgesetz d. Pr. von Punkt zu Punkt d. Querschnitts nur von äußeren Massenkräften abhängig.



Wird nun hier von d. Wirkung d. Schwere abgesehen, so darf in d. ganzen Querschnitt F_1 eine gleichförmige Pressung $= p_1$ stattfindend vorausgesetzt werden, und ebenso im Querschnitt F eine gleichförmige Pr. $= p$. Die mittlere Geschw. im Querschnitt F_1 sei bezeichnet mit u_1, und die in F mit u. D. spec. Volumen d. Flüssigkeit in d. Zustande, in welchem sie F_1 durchströmt, sei bezeichnet mit v_1 und in F mit v. In d. ganzen Raume a_0a_1ab hat sich d. Flüssigkeitsstrom von d. Rohrwand getrennt, da d. hier befindliche Flüssigkeit nicht an d. Beweg. Theil nimmt. Ist dies d. Fall, so wird innerhalb dieses Raumes auch keine Ursache für eine erheblich veränderte Pr. stattfinden, man kann also annehmen, daß hier eine überall gleiche Pr. herrscht, da kein Grund zu einer andern Annahme vorhanden wäre. Diese Pr. kann aber keine andere sein als diejenige Pr. p_1, die im ganzen Querschnitt F_1 stattfindet, widrigenfalls hier eine Ausgleichung stattfinden würde. In d. übrigen Querschnitten zwischen F und F_1, welche aber nicht ebene Querschnitte sind, wird zwar an d. äußeren Th. d. Flüssigkeitsmasse gleichfalls d. Pr. p_1 stattfinden, aber es wird von Punkt zu Punkt in diesen gekrümmten Querschnitten eine ganz bedeutende Pr.-Änderung stattfinden. Offenbar ist nun $P = (p_1 - p)\,F$, d. Druck auf d. ganzen Abschnitt, deren Längsschnitt aa_1a_1a ist, herrscht, da wegen d. nämlichen nicht d. Flüssigkeitsmasse außer der P. d. davon herrührende resultirende Druck im Sinne d. Beweg. ist also p_1F; andererseits herrscht im d. ganzen Querschnitt F die nämliche Pr. $= p$ und zwar im entgegengesetzten Sinne, so daß d. resultirende Druck $P = (p_1 - p)\,F$ ist. Wesentlich anders würden d. Verhältnisse sein, wenn wir d. Querschnittsänderung d. Flüssigkeitsstroms von F_1 bis F nicht außer Berührung mit d. Rohrwand, sondern mit Berührung derselben stattfinden lassen, wenn also d. Röhre eine solche Querschnittsänderung erfährt; denn

wenn es d. Fall sein, daß d. Querschnittsänderung d. Stromes d. Querschnittsänderung d. Röhre vollständig folgt ohne sich von d. Rohrwand zu trennen, muß für einen δ_0 und δ also als eben zu betrachten und demgemäß p_0 und p als constant anzunehmen, aber d. gegenseitige Normaldruck d. jetzt hier an d. Krümmung Kraft d. Flüssigkeit stattfindet würde jetzt nicht mehr $= p_0$ sein. d. genauen Bestimmung dieser Pr. würde ganz wesentlich abhängig sein von d. Gesetz nach welchem sich d. Querschnitt d. Röhre ändert. Soviel ist gewiß, daß d. Mittelwerth dieses Pr. zwischen δ_0 u. δ welche $= p_1$ sei; jetzt größer als p_0 sein muß, denn durch d. Rohrwand wird d. Flüssigkeitsstrom veranlaßt sich mit zunehmender Länge zu einer in kreisförmiger Bewegung befindlichen Masse. Diese Bewegung kann nur dadurch erzielt werden, daß d. Pr. p_1 im Mittel größer ist, als es sein würde, wenn diese Erweiterung d. Stromes unbehindert stattfinden könnte, um wieviel $p_1 > p_0$ ist, hängt ab von d. Gesetz d. Querschnittsänderung d. Röhre. Aber man kann leicht sich begreifen, daß d. Unterschied zwischen p_1 und p_0 um so größer sein wird, je schneller diese Querschnittsänderung erfolgt bis $p_1 = p_0$ wird, wenn diese Änderung so schnell vor sich geht, daß eine Trennung von d. Rohrwand stattfindet. In einem solchen Fall ist also d. Pr. δ auf d. dazwischen befindliche Flüssigkeitsmasse $D = p_0\delta_0 - p_1(\delta-\delta_0) - p\delta = -(p'-p_0)\delta$, also ist D jedenfalls größer als p_0. Wenn auch in diesem zuletzt genannten Fall sich d. Bestimmung d. Widerstandshöhe ΔD d. Rechnung entzieht, so ist es doch immerhin d. allgemeinere Fall und d. ursprünglich vorausgesetzte ist nur ein zweiter Grenzfall. Es soll deshalb d. allgemeine Ausdruck vorausgesetzt werden, um dann zur Grenze überzugehen.

Zunächst handelt es sich nun darum, eine Beziehung zu finden zwischen p_0 u. p und u_0 u. u. Diese muß nach d. bekannten Princip d. Antriebes od. Impulses und d. Momentes bekannt sein. Danach ist bekanntlich für ein ganz beliebiges Massensystem d. Zuwachs an Bewegungsgröße nach einer gewissen Richtung in jedem einem Zeitmoment = d. genannten Antrieb d. resultierenden äußeren Kraft nach dieser Richtung. Unter d. Bewegungsgröße jenes eines Massensystems nach einer gewissen Richtung versteht man d. Summe d. Producte aus d. einzelnen Massenelementen in d. Geschw. Comp. nach d. fraglichen Richtung. Wenn also d. X Axe d. fragliche Richtung darstellt, und u_x d. Geschw. Comp. eines Massenelements m nach dieser Richtung ist, so ist d. Bewegungsgröße dieses Systems nach d. X Axe $= \Sigma m u_x$ und d. Zuwachs an Bewegungsgröße d. Systems im Sinne d. X Axe während d. Zeitelementes $dt = d\Sigma m u_x$. Dieser Zuwachs an Bewegungsgröße d. beliebigen Massensystems im Zeitelement dt ist nach d. fraglichen Gesetz d. Antriebes d. resultierenden äußeren Kraft nach derselben Richtung. d. resultierende äußere Kraft nach d. Richtung d. X Axe ist = d. Summe d. nach d. X Axe genommenen Comp. aller einzelnen äußeren Kräfte, die also auf d. Massensystem wirken $= \Sigma X dt$. Die inneren Kräfte womit d. einzelnen Massenelemente gegenseitig auf einander wirken kommen nicht in Betracht, indem sie paarweise gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, also sich gegenseitig aufheben. Man hat demnach:

$$d\,\Sigma m.u_x = \Sigma X\,dt.$$

Dieses Princip soll nun angewendet werden auf diejenige strömende Flüssigkeitsmasse, die sich augenblicklich zwischen δ_0 und δ befindet und auf ein unendl. kl. Zeitelement dt. Es handelt sich also um d. Zuwachs an Bewegungsgröße, den diese Flüssigkeitsmasse zwischen δ_0 und δ während d. Zeitelements dt erfährt. Derselbe ist mit Rücksicht auf d. vorausgesetzten Beharrungszustand d. Bewegung = d. Unterschied derjenigen Bewegungsgröße, womit eine unendl. dünne Flüssigkeitsschicht im Zeitelement dt durch d. Querschnitt δ geht über diejenige Bewegungsgröße, womit eine ebensolche Schicht durch δ_0 geht. d. Masse d. Flüssigkeitsschicht, d. im Zeitelement dt durch jeden einen Querschnitt hindurch geht ist $= Q\frac{dt}{g}$. Diese Flüssigkeitsmasse geht nun durch d. Querschnitt δ mit d. Geschw. u, sie geht dagegen durch d. Querschnitt δ_0 mit d. Geschw. u_0, also d. Unterschied d. einen über d. andern: $= Q\frac{dt}{g}(u-u_0)$. Dies ist nun nach d. Zuwachs d. Bewegungsgröße d. zwischen d. Querschnitten δ_0 u. δ befindlichen Flüssigkeit im Zeitelement dt. Dieser muß nun gleich sein d. Antriebe d. resultierenden äußeren Kraft, welche im Sinne d. strömenden Bewegung auf diese Flüssigkeitsmasse wirkt.

So kann richtiger Weise auf diese Flüssigkeitsmasse eine äußere Mechanische als Stoßkraft wirken, indessen kann nur d. Fortschritt derselben auf diesem kurzen Wege abgeschwächt werden, so daß nur d. Überdruck übrig bleibt. Dieser ist aber bezeichnet mit P und sein Antrieb im Zeitelement dt ist $= P \cdot dt$, für d. allgemeinen Fall ist $P = (p'-p)F$ also erhält man:

$$G\frac{dt}{g}(u-u_1) = P\cdot dt = (p'-p)F\,dt \quad \text{woraus folgt:} \quad p-p' = \frac{G}{gF}(u_1-u)$$

und mit Rücksicht auf d. Continuitätsgl. $G = F\frac{u}{v}$ auch:

$$p-p' = \frac{u(u_1-u)}{gv}.$$

Siehe 33, a)

Nun ist aber nach d. Gl. d. lebendigen Kraft (A) wenn sie integrirt wird vom Querschnitt F_1 bis zum Querschnitt F, die betreffende Widerstandshöhe B, die sich auf diesen besondern Vorgang bezieht:

$$B = \int_u^{u_1}\frac{u\,du}{g} - \int_{p_1}^{p} v\,dp.$$

die äußeren Mechanischen Arbeiten werden außer Acht gelassen, deren Integral ist $= \frac{u_1^2-u^2}{2g}$ und d. 2te $= vp - \int p\,dv$ also:

$$B = \frac{u_1^2-u^2}{2g} - (pv - p_1v_1) + \int_{v_1}^{v} p\,dv.$$

In diesem folgenden Falle betrachtet man aber so nicht d. besonders bestimmte Gl. im Querschnitt F, sondern eine veränderliche Gl., d. sich auf d. Änderung von v_1 bis v bezieht; während dieser Änderung ist d. F. d. Flüssigkeit zuerst stetig; also:

$$B = \frac{u_1^2-u^2}{2g} - (p-p')v - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v} p\,dv.$$

Setzen wir nun für $p-p'$ seinen Wert, so erhalten wir, wenn man außerdem noch bedenkt, daß d. Integral d. Expansionsarbeit pro 1 kg von F_1 bis F ist: f.

$$B = \frac{u_1^2-u^2}{2g} - \frac{2u(u_1-u)}{2g} - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v} p\,dv$$

$$= \frac{(u_1-u)^2}{2g} - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v} p\,dv.$$

Diese Gl. gilt allgemein für eine plötzliche Querschnittsänderung, also auch für d. Fall einer stetig stattfindenden Querschnittserweiterung, nur läßt sich in diesem letzten Fall d. Wert von p' nicht vorhanden bestimmen. Von wesentlichem Nutzen ist diese Formel nur in d. Grenzfall, daß eine so plötzliche Querschnittsänderung stattfindet, daß eine Trennung d. Flüssigkeitsstrahls von d. Wand eintritt, dann ist $p' = p_1$ und zwar ist p_1 ein min. von p' und somit d. Wert von B ein max. Für diesen Grenzfall ergibt sich dann:

$$B = \frac{(u_1-u)^2}{2g} + p_1(v_1-v) + \int_{v_1}^{v} p\,dv$$

D. Lösung dieses Integrals ist noch abhängig von besonderen Umständen; wenn diese Formel nun nur für solche Fälle in Anwendung gebracht werden soll, wo d. spez. Volumen so gut wie als konstant anzunehmen ist, so verschwindet für diesen Fall d. 2te und 3te Glied d. Gl.; für d. Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit ergibt sich demnach d. Widerstandshöhe:

$$B = \frac{(u_1-u)^2}{2g}. \text{ —}$$

Handelt es sich um d. strömende Bewegung eines Gases od. Dampfes od. Gasmischung, so kommen d. beiden letzten Glieder natürlich noch hinzu. Für d. wichtigsten besonderen Fall, ist $v_1 = v$ und also d. Widerstandshöhe $B = \frac{(u_1-u)^2}{2g}$

gesetzt werden kann, ist nun d. entsprechende Widerstandscoeff. ζ = d. Widerstandshöhe dividirt durch d. Geschw.-Höhe, d. d. Geschw. u entspricht, also:

$$\zeta = \left(\frac{u_1}{u} - 1\right)^2$$

od. da in diesem Fall d. mittleren Geschw. umgekehrt proportional d. Querschnitten sind, ist auch:

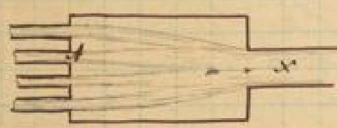
$$\zeta = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1\right)^2 . —$$

Vereinigung verschiedener Flüssigkeitsströme zu einem einfachen Strom.

Practische Anwendungen dieser Theorie sind d. Wasserstrahlpumpe, Wasserstrahlgebläse, Dampfstrahlapparate etc., welche betreffenden Vorrichtungen zu Kategorie d. Strahlapparate für Flüssigkeiten gehören.—

Es soll nun d. allgemeine Fall vorausgesetzt werden, daß an einer bestimmten Stelle verschiedene Ströme zusammenfließen und zwar unter folgenden Voraussetzungen:

1) die einzelnen Ströme fließen alle in derselben Richtung in d. Vereinigungskammer ein, in welcher sie vereinigt d. Raum verlassen. = A. x.
2) In d. kleinsten Querschnitten d. einzelnen Strahlen herrsche d. Dr. p' und ebenso sei auch $= p'$ d. Druck, d. auf d. Oberfl. d. gesammten strömenden Flüssigk. in d. Vereinigungskammer ausgeübt wird bis zum Querschnitt, durch welchen d. resultirende Strom abfließt, wogegen im Querschnitt σ d. Druck $= p$ sei. Diese Voraussetzung d. constanten Werthes von p' in d. kleinsten Querschnitten ist offenbar an d. Umstand gebunden, daß d. Vereinigungskammer hinreichend groß genug ist, um zu verhindern, daß d. strömende Flüssigkeit sich bis zur Wand ausbreitet.
3) Sei vorausgesetzt, daß außerdem d. Vereinigung d. einzelnen Ströme zu einem resultirenden Strom von d. Wirkung etwaiger Reibungskräfte od. einer etwaigen Strömungsablenkung durch d. Wand d. Raumes abstrahirt werden darf.—



Es sei nun G d. Gew. d. resultirenden Flüssigkeit, welche pr. Sek. durch d. Querschnitt σ hindurch aus d. Vereinigungskammer abfließt. Im Querschnitt σ sei d. Geschw. $= u$, d. resultirende Flüssigkeit habe hier d. spec. Volumen v u. d. Arbeitsvermögen U; es sei ferner G_m d. Gew., welches durch irgend einen d. beliebig vielen Ströme pr. Sek. d. Vereinigungskammer zugeführt wird, d. kleinste Querschnitt d. einzelnen Strahls, als welcher diese Flüssigkeit sich in d. Vereinigungskammer ergießt, sei σ_m, d. Geschw. $= u_m$, d. spec. Volumen $= v_m$ und d. spec. innere Arbeitsvermögen $= U_m$, dann hat man mit Rücksicht auf d. Beharrungszustand:

$$1)\quad G = \Sigma G_m \qquad G = \frac{\sigma u}{v} \quad \text{und} \quad G_m = \frac{\sigma_m u_m}{v_m}.$$

Ferner ist, wenn man diejenige Flüssigkeitsmenge ins Auge faßt, d. sich von d. sämmtlichen Querschnitten σ_m d. in d. Vereinigungskammer eintretenden einzelnen Strahlen erstreckt bis zum Querschnitt σ, d. resultirende äußere Druck, welcher im Sinne d. Bewegungsrichtung auf d. Oberfl. wirkt $= (p'-p)\sigma$, da von einer äußeren Reibungskraft abstrahirt wird. Dieselbe Kr. kann auch betrachtet werden als d. Antrieb dieser äußeren Kr. pr. Sek. Dieser Antrieb ist nun gleich d. Zuwachs an Bewegungsgröße d. fraglichen Masse nach d. Richtung Ax pr. Sek., indem aber pr. Sek. d. Flüssigkeit durch d. Endquerschnitt σ hindurchfließt mit d. Bewegungsgröße $\frac{G}{g}u$, wogegen d. einzelnen beliebig vielen Flüssigkeitsströme durch d. bet. Querschnitte σ_m zufließen mit d. Bewegungsgröße $\Sigma \frac{G_m}{g} u_m$. So ist d. Zuwachs an Bewegungsgröße pr. Sek.:

$$\frac{G}{g}u - \Sigma \frac{G_m}{g} u_m = (p'-p)\sigma = \frac{1}{g}\Sigma G_m (u - u_m)$$

da offenbar $\Sigma G_m u = u \Sigma G_m = u G$ ist.

Also

2) $$p - p' = \frac{1}{g\sigma} \sum G_m (u_m - u)$$

Eine 3te Gl. ergibt sich aus d. Gl. d. Arbeitsvermögens (Seite 32, γ); wenn man diese Gl. bezieht auf 1 kg Flüssigkeit eines einzigen Flüssigkeitsstromes, sie dann multiplicirt mit G_m und integrirt von σ_m bis σ, so setzt man nun sie für alle Ströme zusammen genommen summirt und dabei beachtet, daß sonst ein Wärmeaustausch durch d. Wand etc. auch an äußeren Wandflächen abgesehen werden soll, so ist also d. rechte Seite d. fraglichen Gl. dann $= 0$ wird:

$$\sum\left[G_m\left(\frac{u^2 - u_m^2}{2g} + U - U_m + pv - p'v_m\right)\right] = 0$$

Oder durch Multiplication mit $\div 1$:

$$\sum\left[G_m\left(\frac{u_m^2 - u^2}{2g} + U_m - U + p'v_m - pv\right)\right] = 0$$

Nun ist aber: $\frac{u_m^2 - u^2}{2g} = \frac{(u_m - u)^2}{2g} + \frac{u(u_m - u)}{g}$; ferner ist: $p'v_m - pv = p'(v_m - v) + (p' - p)v$

od. nach Gl. 2): $p'v_m - pv = p'(v_m - v) - \frac{v}{g\sigma} \sum G_m (u_m - u)$

und da: $\frac{v}{\sigma} = \frac{u}{G}$ ist:

$$p'v_m - pv = p'(v_m - v) - \frac{u}{g}\left(\frac{\sum G_m u_m}{G} - u\right);$$ demnach folgt:

$$\sum\left\{G_m\left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + U_m - U + \frac{u}{g}\left(u - \frac{\sum G_m u_m}{G}\right)\right]\right\} = 0$$

Nun ist aber: $\sum G_m\left[\frac{u}{g}\left(u - \frac{\sum G_m u_m}{G}\right)\right] = 0$, denn dies ist $= \frac{u}{g}\left[\sum G_m (u_m - u)\right] = 0$

Also hat man:

3) $$\sum\left\{G_m\left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + U_m - U\right]\right\} = 0.$$

Diese Gl. 1) 2) 3) in Verbindung mit d. Zustandsgl. und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens enthalten nun d. Lösungen aller Aufgaben, die mit solchen Zusammenfließen von verschiedenen Flüssigkeitsströmen zusammenhängen, sofern d. hier zu Grunde liegenden Voraussetzungen genügend erfüllt sind, d. h. solche, die berücksichtigt werden durch eine Abweichung von d. hier angenommenen Umständen, die dann je nach Umständen mehr oder weniger berücksichtigt werden müssen. Nachdem d. hier d. Gl. d. Arbeitsvermögens und d. mit d. Princip d. Arbeit bekannte Gl. zu Hilfe genommen sind, sind d. Gln. Seite 32, α u. β, umgangen worden und ist damit auch d. Größe $\mathfrak{B}$ umgangen worden. Indessen kann nun leicht nachträglich mit Hilfe d. einen od. anderen dieser beiden Gln. nachträglich ein Ausdruck festgestellt werden für diejenige Arbeit, die bei einem solchen Mischungsvorgang zu Grunde verloren, nämlich in Wärme verwandelt wird, ohne daß dadurch jedoch ein wesentlich neues Resultat gewonnen wird zur Beurtheilung dieses Vorganges. Zu dem Zwecke muß d. Wärmegl. dazu benutzt werden, also Gl. β Seite 32, welche für einen einzelnen Strom bewiesen wird. Wenn man diese Gl. mit G_m multiplicirt, sie dann integrirt über d. ganzen Mischungsvorgang hinweg und endlich summirt für d. einzelnen Flüssigkeitsströme zusammen genommen, so erhält man $\mathfrak{B}$, also d. zu Grunde stattfindenden Arbeitsverlust, indem d. dem Gesetz Wdl entsprechende Wärmeaustausch $= 0$ vorausgesetzt wird:

$$\mathfrak{B} = \sum\left\{G_m\left[U - U_m + \int_{v_m}^{v} p\,dv\right]\right\}$$

od. nach Gl. 3):

$$\mathfrak{B} = \sum\left\{G_m\left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + \int_{v_m}^{v} p\,dv\right]\right\}$$

worin aber d. p unter d. Integral nicht d. bestimmte Gr. im Querschnitt σ bedeutet, sondern d. veränderliche Gr., welche d. augenblicklichen Werth d. spec. Volumens beim Übergange von v_m bis v entspricht. Offenbar ist dieses Integral d. Expansionsarbeit. Natürlich muß different sein d. Arbeitsverlust auch d. Fall d. Wärmeaustausches in sich begreifen. Hat man es nicht mit d. Strömen beliebig vieler Ströme

[illegible]

$$\mathfrak{B} = \frac{(u_1-u)^2}{2g} + p'(v_1-v) + \int_v^{v_1} p\,dv\,,$$

[illegible] Seite 32 [illegible] —

Untersuchung d. permanenten strömenden Bewegung d. Wassers.

[illegible] $\sigma = const$ [illegible] $v = const$ [illegible] $u = const$ [illegible] $\sigma u = const$ [illegible]:

$$\sigma . u = \sigma_0 . u_0$$

[illegible] $= V$. —

[illegible] (Gl. 2 Seite 32) [illegible] σ_0 bis σ [illegible] $= \frac{1}{v} = \gamma$. [illegible]:

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B}\,,$$

[illegible] $\mathfrak{A}$ [illegible] $\mathfrak{B}$ [illegible] 1 kgr. [illegible] σ_0 bis σ [illegible].

[illegible] $\mathfrak{A}$ [illegible] h [illegible] S_0 über S [illegible] S_0 [illegible] σ_0 [illegible] S [illegible] σ [illegible] 1 kgr. [illegible] σ_0 bis σ $= h$; [illegible] $\mathfrak{A} = h + k$. [illegible] k [illegible] (Seite 33)

$$k = -\frac{1}{g}\int_0^s f \cos\beta\; ds$$

[illegible] $S_0 S$ [illegible] $\mathfrak{A}$ [illegible]:

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h + k - \mathfrak{B}.$$

[illegible] $u = 0$ und $u_0 = 0$, [illegible] $\mathfrak{B} = 0$, [illegible] σ [illegible] σ_0, [illegible] $\frac{p-p_0}{\gamma} = h + k$. [illegible] „hydrostatische Unterdruckhöhe" [illegible] σ_0 [illegible] „hydraulische Unterdruckhöhe" [illegible] σ [illegible] σ_0 [illegible] $\left(\frac{p-p_0}{\gamma}\right)$. [illegible] ergiebt, also $(p_0 - p_0) \div \frac{p - p_0}{\gamma}$ bleibt, od. was dasselbe ist, wenn man d. algebraische Summe bleibt $h + k - \frac{p - p_0}{\gamma}$, so soll diese Größe mit d. Buchstaben H bezeichnet werden und dieselbe d. wirksame Druckhöhe für d. Wasserfaden $\delta_0\delta$ genannt werden. Sie ist nämlich derjenige Theil d. hydrostatischen Druckhöhe, welcher auf d. Erhaltung d. strömenden Bewegung verwendet wird. Mit Hilfe dieser Bezeichnung kann nun d. Fundamentalgl. geschrieben werden:

$$\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}.$$

Ein Theil dieser wirksamen Druckhöhe setzt sich in Geschw. um, ein anderer Theil wird dazu gebraucht, um d. hydraulischen Bew.-Widerstände von δ_0 bis δ zu bewältigen. —

Ist nun ζ d. Widerstandscoeff. für d. Wasserfaden $\delta_0\delta$, dann kann mit Rücksicht auf d. früher festgestellten Entwicklungen einen solchen Widerstandscoeff. $\mathfrak{B} = \zeta \frac{u^2}{2g}$ geschrieben werden und man hat demnach: $\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - \zeta \frac{u^2}{2g}$. Hieraus folgt:

$$u = \sqrt{\frac{u_0^2 + 2gH}{1+\zeta}}$$

Ist φ d. entsprechende Geschw.-coeff. d. zu ζ in d. Beziehung steht: $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$, so ist auch:

$$u = \varphi\sqrt{u_0^2 + 2gH}$$

Die Continuitätsgl. $\delta u = \delta_0 u_0 = V$ in Verbindung mit d. Gl. d. lebendigen Kraft $\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}$ od. was auf dasselbe hinauskommt, d. Continuitätsgl. in Verbindung mit d. Gl. d. Geschw. $u = \sqrt{\frac{u_0^2 + 2gH}{1+\zeta}} = \varphi\sqrt{u_0^2 + 2gH}$ sind als d. Fundamentalgleichungen zu betrachten zur Beantwortung aller Fragen, die sich auf d. permanente Bewegung d. Wassers beziehen, wobei zu berücksichtigen ist $H = h + k + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist.

Diese verschiedenen Aufgaben nun, für deren Behandlung diese Gln. als d. Fundamentalgln. zu betrachten sind, beziehen sich theils auf d. Ausfluss d. Wassers aus Gefäßen, theils auf d. Bewegung d. Wassers in längeren Röhren. Es ist also:

1) $\delta u = \delta_0 u_0 = V$ — d. Continuitätsgl.

2) $\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}$ — d. Gl. d. lebendigen Kraft.

3) $u = \sqrt{\frac{u_0^2 + 2gH}{1+\zeta}} = \varphi\sqrt{u_0^2 + 2gH}$ — d. Geschw.-Gl.

wobei $H = h + k + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ und $k = -\frac{1}{g}\int_0^s f \cos\rho \, ds$ ist. —

Ausfluss d. Wassers aus Gefäßen. —

Denken wir uns in einem beliebig gestalteten Gefäß, Wasserspiegel [illegible] und d. in diesem Gefäß befindliche Wassermenge durch entsprechenden [illegible] Zufluss constant erhalten, während d. Wasser gleichzeitig durch eine Öffnung im Boden d. Gefäßes ausfließt, dann hat man es zu thun mit einer Bew., welche unter sich gleichbleibenden Umständen in gleichbleibender Weise stattfindet. Die Ausflussöffnung befindet sich in einem solchen Fall entweder als einfache Wandöffnung unmittelbar in d. Gefäßwand, od. sie befindet sich am Ende eines besonderen Mundstücks, welches aber [illegible] so kurz vorausgesetzt werden soll, daß von d. Reibungswiderständen in demselben abgesehen werden kann. In allen Fällen sei d. Flächeninhalt d. Mündung bezeichnet mit A. Diese Mündung $= A$ wird dabei angenommen als eine ebene Fl., begrenzt von d. inneren Wandfl. d. Gefäßes od. resp. d. Mundstücks. Diese ebene Mündung $= A$ ist also im Allgemeinen nicht ein Querschnitt d. strömenden Flüssigkeit in dem bis dahin ~~verbundenen~~ Sinne, daß d. Fäden d. Flüssigkeitstheilchen [illegible] durchaus nicht diese Mündung A normal zu durchschneiden, im Gegentheil, es wird im Allgemeinen dies nicht d. Fall sein. Denken wir uns

Z.B. in einem ebenen Boden eines Gefäßes befinde sich d. Mündung A, so fließen im Innern d. Gefäßes von verschiedenen Seiten d. Wasser dieser Mündung A zu; diese Fäden werden gegen d. Mitte hin d. Mündung A senkrecht schneiden können, gegen d. Rand hin werden d. Fäden mehr od. weniger schief gerichtet sein können. Mit dieser schiefen Richtung d. Fäden gegen d. Mündungsebene hin, nimmt auch d. Krümmung d. Fäden von d. Mitte nach d. Rand hin entsprechend zu. Diese nach d. Rand hin zunehmende Krümmung d. Fäden wird auch eine nach d. Rand hin abnehmende Pr. in d. Mündung A entsprechen und wird demnach nicht d. Pr. in allen Punkten d. Mündung A gleich groß sein, sondern sie wird in d. Mitte am größten sein. Ferner wird d. Folge dieses Umstands sein, daß d. Wasserstrahl, nachdem er d. Mündung A passirt hat, eine weitere Contraction seines Querschnitts erfährt, aber in d. Weise, daß d. kleinste Querschnitt dieses contrahirten Strahls erst in einer gewissen Entfernung von d. Mündungsebene erreicht sein wird. An d. Stelle dieser stärksten Zusammenziehung kann man d. Querschnitt d. flüssig. Wasserstrahls wieder als eben vorausgesetzt werden und somit kann auch in diesem kleinsten Querschnitt wieder eine gleichförmige Pr. vorausgesetzt werden und zwar wird diese gleichförmige Pr. gleich ~~derjenigen~~ zu setzen sein derjenigen Pr., welche in d. äußeren Raume an d. Mündung herrscht und die $= p$ sei. Was d. Wasserraum betrifft, d. sich von diesem kleinsten Querschnitt bis zur Mündung A erstreckt, so wird an dessen Oberfl. auch d. Pr. p herrschen, nach d. Mitte hin aber eine größere. D. kleinste Querschnitt dieses contrahirten Strahls sei mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet und d. Verhältniß dieses kleinsten Querschnitts zur Mündung A sei mit α bezeichnet, also $\alpha = \frac{\mathfrak{F}}{A}$, man nennt dieses Verhältniß d. Contractionscoefficienten. D. mittlere Geschw. u, welche im Querschnitte $\mathfrak{F}$ stattfindet soll kurzweg d. Ausflußgeschw. genannt werden. Unter p_0 werde wir d. Pr. verstehen, welche in d. freien Oberfl. d. Wassers im Gefäß stattfindet. $\mathfrak{F}_0$ sei d. Größe dieser Oberfl. und u_0 d. mittlere Geschw., womit in dieser freien Oberfl. d. Wassertheilchen sich bewegen. Es ist nun d. Wasservolumen V, welches pr. Sek. ausfließt $V = \mathfrak{F}.u$ od. mit Rücksicht auf d. Contractionscoeff.: $V = \alpha A u$, worin auch wieder: $u = \varphi\sqrt{u_0^2 + 2gH}$ ist, also:

$$V = \alpha\varphi A\sqrt{u_0^2 + 2gH}$$

worin $H = h + k + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist, unter h d. Höhe d. sogenannten freien Oberfl. d. Wassers über d. Schwerpunkt d. Querschnitts $\mathfrak{F}$ verstanden. D. Product aus d. Contractionscoeff. α und d. Geschw.coeff. φ pflegt häufig mit einem besonderen Buchstaben μ bezeichnet, als sog. Ausflußcoefficient in d. Folge in Rechnung eingeführt zu werden.

Es ist dann also auch: $V = \mu A\sqrt{u_0^2 + 2gH}$. Die Geschw. u_0 an d. freien Oberfl. ist nun im Allgemeinen nicht gegeben, sie bestimmt sich aus durch V, denn es ist $u_0 = \frac{V}{\mathfrak{F}_0}$; setzt man diesen Werth für u_0 ein, so folgt aus dieser Gl. wenn durch μA dividirt, dann d. Gl. quadrirt und u_0^2 auf d. linke Seite gebracht wird:

$$V^2\left(\frac{1}{(\mu A)^2} - \frac{1}{\mathfrak{F}_0^2}\right) = 2gH \quad \text{also} \quad V = \mu A\sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{\mu A}{\mathfrak{F}_0}\right)^2}}$$

nun ist aber $u = \frac{V}{\alpha A} = \frac{V}{\mathfrak{F}}$ also:

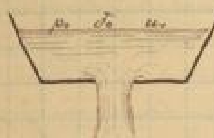
$$u = \varphi\sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{\mu A}{\mathfrak{F}_0}\right)^2}}$$

dies sind d. allgemeinen Formeln für d. Ausflußmenge und Ausflußgeschw. d. Wassers aus einem Gefäß. In d. meisten Fällen ist nun A im Vergleich zu $\mathfrak{F}_0$ klein genug um einfacher einfach schreiben zu dürfen:

$$V = \mu A\sqrt{2gH} \quad \text{und} \quad u = \varphi\sqrt{2gH} \qquad *$$

und zwar darf man diese einfachen Formeln immer dann unbedenklich anwenden, wenn $\frac{A}{\mathfrak{F}_0} < \frac{1}{10}$ ist, indem man dann nur einen Fehler begeht, d. weniger beträgt als $\frac{1}{2}\%$ d. wahren Werthes und weil man auch nur bis zu einer solchen Genauigkeit im Stande ist höchstens d. Werthe von μ und φ anzugeben.

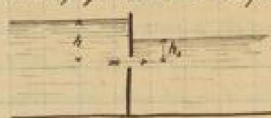
(Daß man keinen größeren Fehler begeht, ist leicht ersichtlich: Haben wir ferner $\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$ worin x ein kl. Bruch ist, so gibt bei Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung $= \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2$ und wenn man dieses ganze Größe $= 1$ setzt, so begeht man einen Fehler $= \frac{1}{2}x^2$ für jede Einheit, ist nun $x < \frac{1}{10}$ so ist dieser Fehler für jede Einheit $= \frac{1}{200}$ also $= \frac{1}{2}\%$.) —



Was d. wirksame Druckhöhe H betrifft, so soll, schon weil d. Gesamtheit [?] bemerkt werden, vorausgesetzt werden, daß sich d. Gefäß selbst in Ruhe od. höchstens in einer gleichförmigen Translationsbewegung befindet, so bewirkt dann d. Wasser eine horizontale freie Oberfl. im Gefäß bildet und somit d. Schwerpunktsabst. d. relativen Bew. nicht in Betracht kommen. Es ist dann H d. Bedeutung $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$. h bedeutet d. Höhe d. horizontalen freien Oberfl. im Gefäß über d. Schwerpunkt d. Querschnitts δ, während p_0 d. Druck d. äußeren Mediums an d. freien Oberfl. und p d. Druck an d. Mündung bedeutet. Wenn d. Gefäß ringsum von d. freien atmosph. Luft umgeben ist, demnach wenn d. spez. Gew. d. Luft an d. Stelle d. Gefäßes $= \lambda$ bezeichnet wird, $p - p_0$ d. Unterschied d. äußeren Luftdrucks an d. Stelle d. Mündung über d. äußeren Luftdruck in d. Höhe d. freien Oberfl. im Gefäße = d. Gew. einer Luftsäule von d. Grundfl. $= 1$ und d. Höhe h also $p - p_0 = h\lambda$ und folgl. $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = h\left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right)$. In d. Regel ist nun aber $\frac{\lambda}{\gamma}$ so klein, daß man diesen Bruch wieder gegen 1 vernachlässigen darf, jedenfalls mit Rücksicht auf d. beschränkten Grad d. Genauigkeit, womit man μ u. φ anzugeben vermag. Es ist dann:

* $$V = \mu A \sqrt{2gh} \quad \text{und} \quad u = \varphi \sqrt{2gh}$$

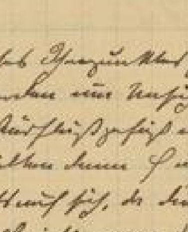
Wenn d. Wasser unter gleichen Voraussetzungen wie oben, durch eine Öffnung in d. Seitenwand ausfließt in ein anderes Gefäß, in welchem gleichfalls ein constanter Wasserstand erhalten wird, so kann d. auf d. freien Oberfl. wirkende spez. Druck in beiden Gefäßen ohne großen Fehler gleich und zwar $= p_0$ gesetzt werden.



Ist dann h d. Höhe d. Wasserspiegels im ersten und h_1 d. im 2ten über d. Schwerpunkt d. Querschnitts d. unterhalb Wasserspiegel, so ist offenbar $p = p_0 + \gamma h_1$, also $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = h - h_1$.

Nun müßte man eigentlich in jedem besonderen Fall d. Höhe dieses Schwerpunktes genau kennen, da dies aber nicht d. Fall ist, so pflegt es vorgezogen zu werden, um Unsicherheiten zu vermeiden, unter h d. Höhe d. freien Wasseroberfl. im Ausflußgefäß über d. Schwerpunkt d. Mündung A selbst zu verstehen, allerdings erhalten dann φ u. μ andere Bedeutungen. Diese modificierten Bedeutungen haben aber nicht viel für sich, da dieselben doch empirisch bestimmt werden müssen. Am meisten ändern sich φ u. μ, wenn d. Wasser aus einer großen Seitenöffnung ausfließt. Eine andere Erweiterung d. Formel kann in solchen Fällen notwendig erscheinen, wo d. Mündungsebene nicht horizontal ist und d. größte Vertikaldimension nicht sehr klein im Vergleich mit h ist.

Denken wir uns z. B. eine ebene Seitenwand eines Gefäßes, welche unter d. Winkel ψ gegen d. Horizont geneigt sein mag.



In derselben befinde sich eine große Öffnung, so können in einem solchen Fall d. Geschw. in verschiedenen Punkten d. Mündung A bedeutend verschieden sein und kann es auch schon ziemlich fehlerhaft sein, d. mittlere Geschw. = derjenigen zu setzen, welche im Schwerpunkte stattfindet.

Es fragt sich nun, ob unter ~~diesen~~ Umständen diese Beziehung sich verringern läßt. Zu dem Zweck sollen H, H_1 und H_2 d. Werte von $h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ für d. Schwerpunkt, d. tiefsten und d. höchsten Punkt d. Mündung bezeichnen, für einen beliebigen Punkt d. Mündung sei d. Größe $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ mit z bezeichnet. Nun denke ich mir d. ganze Mündungsebene durch horizontale Linien in unendl. schmale Flächenstreifen zerlegt. D. Entfernung eines solchen Streifens von d. durch d. Schwerpunkt d. Mündung gezogenen Horizontalen sei bezeichnet mit x, wobei x positiv od. negativ gesetzt werden soll, jenachdem d. Streifen höher od. tiefer liegt als d. Schwerpunkt d. Mündung. D. Länge dieses Streifens sei bezeichnet mit y, d. unendl. kl. Breite desselben ist $= dx$, also $y\,dx$ d. Inhalt eines solchen Streifens. Auf diesen beliebigen Streifen bezieht sich auch d. beliebige z. An Stelle d. Formel $V = \mu A \sqrt{2gH}$ wird nun streng genommen gesetzt

Formel zu bekommen haben: $V = \mu \int y\,dx\sqrt{2gz}$, wobei z d. Wasserhöhe über Stelle H für d. beliebigen Flächenstreifen bedeutet. D. Gl. kann auch geschrieben werden: $V = \mu\sqrt{2g}\int y\sqrt{z}\,dx$. Nun ist: $z = H + x.\sin\psi$ also $dx = \frac{dz}{\sin\psi}$ und $V = \frac{\mu\sqrt{2g}}{\sin\psi}\int y\sqrt{z}\,dz$.

Hat man hiernach je nach d. Form d. Mündung V bestimmt, so findet man d. Ausflußgeschw.:

$$u = \frac{V}{\alpha A}.$$

Ist z. B.: d. Ausflußöffnung ein Rechteck und zwar so gelegen, daß 2 Seiten desselben horizontal sind, dieselben seien $= b$ und d. beiden anderen $= a$. In diesem Falle ist also $y = \text{const} = b$ und somit $V = \frac{\mu b\sqrt{2g}}{\sin\psi}\,\frac{2}{3}\left(H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}\right)$. Die mittlere Ausflußgeschw. u ergibt sich hieraus durch Division mit αA; es ist aber $A = ba$ und auch $a = \frac{H_1 - H_2}{\sin\psi}$ und somit:

$$u = \frac{2}{3}\varphi\sqrt{g}\;\frac{H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}}{H_1 - H_2}.$$

Übrigens läßt sich auch leicht eine für alle Fälle ausreichende Näherungsformel durch Folgendes finden. Es ist nämlich:

$$\sqrt{z} = \sqrt{H + x.\sin\psi} = \sqrt{H}\sqrt{1 + \frac{x\sin\psi}{H}}.$$

D. Größe $\frac{x\sin\psi}{H}$ ist ein echter Bruch [illegible] und man kann daher mit Vernachlässigung d. Größen höherer Ordnung schreiben: $\sqrt{z} = \sqrt{H}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x\sin\psi}{H} - \frac{1}{8}\left(\frac{x.\sin\psi}{H}\right)^2\right)$. Wird dann wiederum d. Factor $\frac{1}{\sin\psi}$ unter d. Integral und für $\frac{dz}{\sin\psi}$ wieder dx geschrieben, so ist wieder $y\,dx$ nichts anderes als d. Inhalt eines Flächenstreifens, welcher auch mit dA bezeichnet werden kann; dann ist: $V = \mu\sqrt{2gH}\int dA\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x\sin\psi}{H} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{H^2}\sin^2\psi\right)$
Nun ist $\int dA = A$, ferner $\int x\,dA = 0$, da d. Inhalt dieser Flächenstreifen multipliziert mit ihrer Entfernung vom Schwerpunkt $= 0$ sein muß; d. dritte Glied enthält hier noch $\int x^2\,dA$. Diese Summe d. Produkte aus d. Inhalt d. Flächenstreifen in d. Quadrat ihrer Abstände von d. Schwerpunktsachse als d. Trägheitsmoment d. Mündungsfläche A in Bezug auf d. Schwerpunktsachse sei bezeichnet mit Ak^2. Dann wird:

$$V = \mu A\sqrt{2gH}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{k^2}{H^2}\sin^2\psi\right) \text{ und } u = \frac{V}{\alpha A}$$

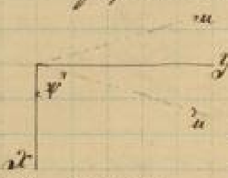
Wie man sieht unterscheidet sich diese verbesserte Formel für V u. u nur dadurch, daß dazu ein gewisser Correctionsfactor hinzugekommen ist und es fragt sich, unter welchen Umständen man bei Vernachlässigung dieses Factors nur einen Fehler von $\frac{1}{2}$ % begeht. Beispielsweise soll dieses durchgeführt werden für ein Rechteck und eine Ellipse:

Ist d. Mündung A ein Rechteck mit d. Seiten b u. a, wo b horizontal ist, so ist bekanntlich:
$Ak^2 = \frac{a^3b}{12}$ also $k^2 = \frac{a^2}{12}$. Bezeichnet man d. Correctionsausdr. mit $1 - f$, so ist also für diesen Fall: $f = \frac{1}{96}\left(\frac{a.\sin\psi}{H}\right)^2$ und durch d. Vernachlässigung dieses Coefficienten begeht man einen Fehler, d. weniger beträgt als $\frac{1}{2}$ %, wenn $f < \frac{1}{200}$ ist; man überzeugt sich leicht, daß dies d. Fall ist wenn $\frac{a.\sin\psi}{H} < 0{,}7$ ist. —

Für d. Fall einer Ellipse seien a u. b d. beiden Hauptdurchmesser, b sei horizontal, dann ist: $Ak^2 = \frac{\pi ab}{4}k^2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3\frac{b}{2}$ also $k^2 = \frac{a^2}{16}$ und somit
$f = \frac{1}{128}\left(\frac{a.\sin\psi}{H}\right)^2$. Diese Größe ist nun $< \frac{1}{200}$ wenn $\frac{a\sin\psi}{H} < \frac{8}{10}$ ist. Dies ist in d. meisten Fällen wirklich so; ist aber $\frac{a\sin\psi}{H}$ > als diese Zahlen, so pflegt man doch gewöhnlich d. alte Formel zu nehmen, da, wenn man auch diese corrigierten Formeln anwendet, sie ja doch abhängig sind von H u. d. Dimensionen d. Mündung, die nur durch ungewisse Versuche bestimmt werden können. Es würde also in d. Werthe von μ ja d. Werth hineingelegt werden müssen, daß d. Schwerpunkt d. [illegible] Rechtecks anders liegen kann und [illegible] erhalten dies nach d. Einfluß dieses vernachlässigten Correctionsfactors $1 - f$. —

Die Größe d. Contraction entzieht sich einer genauen theoretischen Bestimmung, jedoch läßt sich immer ein gewisser Grenzwerth angeben, unter welchen d. Contractionscoeff. α nicht sinken kann. Es läßt sich beweisen, daß α mindestens $= \frac{1}{2}$ sein muß, wenn an allen denjenigen Stellen d. Gefäßwand d. Geschw. d. entlang fließenden Wassers nicht unendl. kl. ist und d. entwickelte ... Normale mit einem spitzen Winkel mit d. Richtung d. Ausflußgeschw. bildet. Dieser Grenzwerth d. Contractionscoeff. $\alpha = \frac{1}{2}$ hängt zusammen mit einem ... zu besprechenden Druck d. Reaction d. aus einem Gefäß ausfließenden Wassers.

Es seien mit einem Gefäß 2 rechtwinklige Coord.-Axen X u. Y fest verbunden; sie seien angenommen in einer Verticalebene, welche parallel sein soll mit d. Richtung von u und zwar soll X vertical abwärts und Y horizontal in einem solchen Sinne, daß d. Richtung dieser positiven Y Axe einen spitzen Winkel mit d. Richtung von u bildet, also wie d. beiden Pfeile in d. Zeichnung zeigen. Derjenige Winkel, welchen d. Richtung d. Ausflußgeschw. mit d. X Axe bildet sei $= \psi$. —



Betrachten wir einen d. Wasserprismen, welche sich momentan in d. Ausflußgefäße befindet, welche genannt wird bei seinem kleinsten Querschnitt δ d. contrahirten Strahls. Das Zuwachs an Bewegungsgröße, den diese Wassermasse bezüglich im Sinne d. X und Y Axe in einem Zeitelement dt erfährt ist offenbar $= \gamma \frac{V}{g}(u \cos\psi - u_0)\, dt$ im Sinne d. X Axe und $\gamma \frac{V}{g} u \sin\psi\, dt$ im Sinne d. Y Axe, wenn u_0 d. mittlere vertical abwärts gerichtete Geschw. bedeutet, welche heißt an d. freien Oberfl. im Gefäß stattfindet. Dieser Zuwachs an Bewegungsgröße entspricht d. Unterschied derjenigen Bewg.-Größe, womit in Zeitelement dt d. Wasser im Querschnitt δ ausfließt über der, womit es im Querschnitt δ zufließt. Nun ist V d. Wasservolumen, welches in d. Zeiteinheit ausfließt, also γV d. ausfließende Gew. und $\gamma \frac{V}{g}$ d. in d. Zeiteinheit ausfließende Masse. Diese erfährt im Sinne d. X Axe einen Geschw.-Zuwachs $= u \cos\psi - u_0$ und im Y Sinne: $u \sin\psi$. Dieses sind also d. Größen, um welche sich d. Bew.-Größen während eines Zeitelements dt im Sinne d. Axen ändern. Nach d. Princip d. Antriebs muß d. erste Zuwachs an Bew.-Größe $= X\,dt$ und d. andere $= Y\,dt$ sein, wenn X u. Y d. im Sinne d. Axen genommenen Comp.-Summen d. äußeren Kräfte bedeuten, d. auf d. Wasserprisma wirken. Es ist also d. Größe d. resultirenden Kraft, welche auf d. Wassermasse im Gefäß im Sinne d. Axen ausgeübt wird:

$$X = \gamma \frac{V}{g}(u \cos\psi - u_0) \qquad Y = \gamma \frac{V}{g} u \sin\psi.$$

Mit ebenso großer Kraft aber genau umgekehrt wirkt d. Wasser an seine Oberfl. auf seine Umgebung zurück. Wenn d. Mündung, mit welcher d. Wasser ausfließt, geschlossen wäre u. d. Wasser im Gefäß in relativer Ruhe, so würde d. Wasser auf d. Gefäßwand keinen Anlaß für einen resultirenden Druck ausüben und es sind X u. Y diejenigen Größen, um welche d. Druck, d. d. Wasser auf d. Gefäß bezüglich seiner im Sinne d. Axen ausübt, durch den Zustand d. Bew. d. Wassers vermindert wird, oder umgekehrt: X u. Y sind diejenigen Kräfte, womit d. Wasser während d. Ausfließens entgegengesetzt im Sinne d. X u. Y Axe auf d. Gefäß zurückwirkt. Gewöhnlich kann diese kl. Geschw. u_0 im Vergleich mit $u \cos\psi$ vernachlässigt werden; geschieht dieses, also $u_0 = 0$, so ist d. resultirende Reaction d. ausfließenden Wassers auf d. Ausflußgefäß:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \gamma \frac{V}{g} u.$$

Es ist also bei Vernachlässigung dieser Geschw. u_0 d. Reaction einfach = derjenigen Bew.-Größe, womit d. Wasser pr. Sek. ausfließt und wie in diesem Falle d. Ausdrücke von X u. Y erkennen lassen, so ist diese Reaction R genau entgegengesetzt gerichtet im Sinne von u.

Setzt man $V = \delta u$, so kann man auch d. Ausdruck für d. Reactionsdruck schreiben:

$$R = 2\gamma \frac{\delta u^2}{2g}.$$

d. h. es ist diese Größe = Reactionsdruck = dem doppelten Gew. einer Wassersäule, deren Grundfl. $= \delta$ und deren Höhe = d. Ausflußgeschw.-Höhe ist. Setzt man ferner $\delta = \alpha A$ und $u = \varphi\sqrt{2gh}$

ausgeübten für d. Reactionsdruck $R' = 2\alpha\varphi^2\gamma A H$.
Dieser letzte Ausdruck kann uns dazu dienen, d. factischen Grenzwerth d. Contractionscoeff. $\alpha = \frac{1}{2}$ festzustellen, wenn in allen denjenigen Fällen, wo d. Wasser nicht mit einer entsprechenden gr. Geschw. vorbeifließt, d. Normale einen spitzen od. höchstens rechten Winkel mit ω bildet.
Zu dem Ende muss man bemerken, daß d. bewegte Wasser in zweifacher Weise auf d. Gefäßwand wirkt, theils durch d. Normaldruck theils durch d. Reibung an d. Wand. Jene Kraft R, womit d. ausfließende Wasser entgegengesetzt im Sinne von ω auf d. Ausflußgefäß zurückwirkt ist zu betrachten als d. Unterschied einer im entgegengesetzten Sinne von ω genommenen auf d. Gefäßwand ausgeübten Normaldruck über eine im Sinne von ω wirkende Reibung d. an d. Gefäßwand entlang fließenden Wassers. Es ist also R zu betrachten als $P - R'$, wenn P bedeutet d. entgegengesetzt im Sinne von ω genommenen Normaldruck, den d. Wasser normal auf d. Gefäßwand ausübt, und R' d. Kraft, womit umgekehrt d. Wasser auf d. Gefäßwand im Sinne von ω wirkt. Also $R = P - R'$.
Was diesen Normaldruck P betrifft, so denken wir uns zunächst einen einfachen Normalfall, daß d. Ausflußöffnung sich in einer ebenen Gefäßwand befindet z. B. im Boden. Das Wasser fließt hier von d. entfernteren Theilen d. Mündung zu und so wird d. Ausflußstrahl an einem gewissen Punkt contrahirt werden bis zum Querschnitt S. Wenn d. Mündung A geschlossen wäre und d. Wasser im Gefäß in Ruhe, so würde am Theile A d. Oberfl. d. Wassers ein Normaldruck stattfinden $= A(\gamma h + p_0)$ unter p_0 d. äusseren Druck auf d. Oberfl. d. Wassers im Gefäß verstanden. D. entsprechende Theil d. Oberfl. d. im Gefäß enthaltenen Wassers im jetzigen Zustande ist d. Fl. abba. An dieser ganzen Oberfl. herrscht d. nämliche Druck p = d. Druck in d. Raum, in welchen d. Ausfluß stattfindet, so daß d. resultirende Normaldruck, d. zwischen d. Cont. und d. Oberfl. herrscht von A u. S und zwar im Sinne von ω nicht mehr $= A(\gamma h - p_0)$ sondern $= Ap$ ist. Folglich ist an diesem Theile d. Wasseroberfl. d. Unterschied d. hydrostatischen Drucks über d. hydraulischen Druck = dieser Differenz, also =:

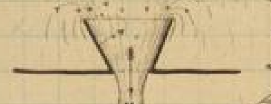
$$A(\gamma h + p_0) - Ap = \gamma A\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right) = \gamma A H$$

Um diesen Betrag wird also jedenfalls d. Druck, den d. Wasser im Sinne von ω auf d. Gefäß ausübt, vermindert od. umgekehrt d. Druck, den d. Wasser auf d. Gefäß entgegengesetzt im Sinne von ω vermehrt. Aber dieses ist nicht d. einzige Grund, um welchen dieser Druck P d. ausfließenden Wassers auf d. Gefäß entgegengesetzt im Sinne von ω größer wird im Zustand d. Beweg. als im Zustand d. Ruhe, nämlich an denjenigen Theilen d. Gefäßwand, welche d. Mündung unmittelbar umgeben, strömt d. Wasser zum Theil längs d. Gefäßwand hin d. Mündung zu. In größerer Entfernung von d. Mündung wird diese Geschw. so klein sein, daß man davon abstrahiren kann, aber unmittelbar an d. Mündung wird es dort nicht sein. Ist dies d. Fall, so wird an diesen Stellen d. innere Druck kleiner sein als d. hydrostatische um einen Betrag, d. der Geschw.-Höhe entspricht. Es ist also an diesen Stellen d. Normaldruck, den d. Wasser auf d. Gefäßwand ausübt, während d. Ausflusses kleiner als er bei geschlossener Mündung ist und deßhalb ist im Ganzen d. Größe P nicht nur $= \gamma A H$ sondern mehr od. weniger als größer als $\gamma A H$. d. h. $P = R + R' > \gamma A H$. Um wieviel dieser größer sein wird als $\gamma A H$ hängt ab von d. Gestaltung d. Gefäßes in d. Umgebung d. Mündung A. In d. Falle, wo d. Normaldruck d. Wassers auf d. Gefäßwand an dem d. Mündung unmittelbar umgebenden Theil wirkt, muß P erheblich größer sein als $\gamma A H$ und zwar wird dieß immer d. Fall sein, an dem Theile d. Gefäßwand, welche d. Mündung unmittelbar umgibt. D. Grenzfall, in welchem $P = \gamma A H$ wird, ist d. Fall eines genügend innern cylindrischen Ansatzrohrs von entsprechend. gr. Länge. Es wird allerdings auf diese cylindrische Wand d. Normaldruck kleiner sein im Zustand d. Bew. als im Zustand d. Ruhe, dies hat aber auf d. Druck im Sinne von ω keinen Einfluß, weil d. Normale rechtwinklig gegen ω gerichtet ist. Würde d. Wasser in a senkrecht gegen d. Rohr mit einer gewissen Geschw. fließen, so wäre $P > \gamma A H$; ist aber d. Ansatzrohr genügend lang, so wird man annehmen können, daß in einiger Entfernung vom obern Rande d. Rohrs

Sieht d. Länge derselben d. Wasser aus einer unbedeutenden Gefäss. fallen. Dann würde P um wenig grösser sein als $\gamma A H$, vorausgesetzt, dass d. Wand d. Ausflussöffnung nur sehr klein ist, also an d. Oberfl. nur einen sehr kl. Rand hat. Wären gar keine Widerstände vorhanden, so wäre d. Geschw.-Coeff. $\varphi = 1$. Es wäre dann d. Reactionsdruck R, welcher zu bezeichnen sei mit R_0.

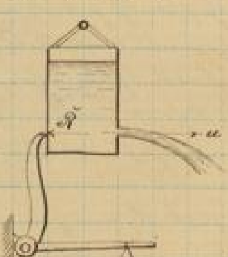
$$R_0 = 2\alpha\gamma A H$$

und d. Unterschied dieses idealen Werthes von R_0 über d. effectiven Werth d. Reactionsdrucks R'' ist d. Grösse d. äusseren Reibung zwischen d. Wasser und d. Gefässwand im Sinne normal gegen d. Mündung: $R_0 - R'' = R'$. Es ist dies allerdings nicht ganz unbedingt zutreffend, denn dieses ist nur d. Fall, wenn man von etwaigen wirbelförmigen Bew. absieht. Es ist also $R + R' = R_0 = 2\alpha\gamma A H$. Halten wir nun diese 2 Resultate zusammen ($R + R' = P$ und $P > \gamma A H$) so folgt: $2\alpha > 1$ also $\alpha > \frac{1}{2}$; d. kleinste Werth, den d. Contractionscoeff. α haben kann ist also $\frac{1}{2}$ unter d. Voraussetzung, dass an allen Stellen d. Gefässwand bei d. Mündung d. Normale eine spitze od. höchstens rechte Winkel mit d. Richtung von u bildet. Bildet sie stumpfe Winkel mit derselben, wenn d. innere Wasser sich nach aussen hin erweitert, so würde $P < \gamma A H$ sein also $\alpha < \frac{1}{2}$; indessen kommt ein solcher Fall fast nie vor.



Es handelt sich nun noch um d. Lage und Richtung von R. Was dieselbe betrifft so muss zurückgegangen werden auf d. verschiedenen Bestandtheile, aus welchen R besteht. Es war $R = P - R'$ unter P d. aufgezeichnete im Sinne von u zunehmende Normaldruck d. Wassers gegen d. Gefässwand verstanden und R' d. Reibung, womit d. fliessende Wasser an d. Gefässwand wirkt. Dieser Normaldruck P besteht aber selbst wieder aus 2 Theilen, deshalb nämlich der von d. Unterschied d. hydrostatischen und hydraulischen Druck auf d. Mündungsebene A selbst, besteht in demselben Druck auf die die Mündungsebene A umgebenden Theile d. Gefässwand. D. erste Bestandtheil von P war $= \gamma A H$, dieser Bestandtheil ist jedenfalls derart, dass er kann angenommen werden, dass d. Richtungslinie dieses Theils von P durch d. Schwerpunkt d. Mündungsebene A hindurchgeht. Was d. anderen Bestandtheil von P und d. Reibung R' betrifft, so kann man für dieses nicht ohne Weiteres behaupten, dass sie solche Kräfte geben, deren Richtungslinien durch d. Schwerpunkt d. Mündungsebene gehen. Dies ist nur dann d. Fall, wenn d. Wasser ringsum d. Mündung in gleicher Art und Weise zufliesst. d. Richtungslinie von R lässt sich also nur versuchsweise bestimmen, wenn nicht gerade von vornherein angenommen werden darf, dass d. Wasser ringsum d. Mündung in gleicher Weise zufliesst. d. praktischen Versuche lassen jedoch annehmen, dass eine solche Annahme zulässig ist, dass man also annehmen kann, das Wasser fliesse gleichmässig von allen Seiten d. Mündung zu. —

Die hierher gehörigen Versuche wurden von d. Engländer Ewart ausgeführt: Es wurde ein cylindrisches Gefäss, welches unten mit einer Öffnung versehen war, vermittelst eines Gehänges auf einer horizontalen Axe aufgehängt, welche Axe rechtwinklig und windschief gegen d. horizontale Ausflussgeschw. u gerichtet war. d. Wasserspiegel wurde immer in gleicher Höhe erhalten. Es zeigte sich dann, dass d. Gefäss sich neigt. Nun wurde d. Grösse d. Drucks R gemessen, indem man d. einen Arm eines Winkelhebels dort andrücken liess, wo d. Normale d. Schwerpunkts d. Mündung d. Wand trifft, den anderen



Arm entsprechend belastete und man konnte so d. Grösse dieser Kraft R messen. Ginge nun d. Richtungslinie d. Reactionsdrucks genau durch d. Schwerpunkt hindurch, so wäre d. gemessene Kraft auch = d. Reactionsdruck, während dies nicht d. Fall sein würde, wenn d. Richtungslinie d. Reactionsdrucks tiefer läge als d. Schwerpunkt d. Mündung A. Wenn also dieser so gefundene Druck $R = 2\alpha\varphi^2\gamma A H$ eingesetzt wird, wo $\gamma A H$ bekannte Grössen sind, so ergeben sich dabei Werthe von $\alpha\varphi^2$, welche übereinstimmten mit d. auf andere Weise gefundenen Werthen d. Coeff. $\alpha\varphi^2$. Daraus konnte man schliessen, dass d. Richtungslinie d. Reactionsdrucks nicht merklich vom Schwerpunkt d. Mündungsebene A abweicht.

Wenn man d. Versuche so einrichtet, daß man weiß, ob keinen d. Richtungslinien wenig an d. Richtung von R vorbei gehen, so erkennt man, daß man bedingt dazu gelangen kann, d. Werthe von ∂ zu bestimmen, so daß man jedenfalls den d. einen Werth finden kann, wenn man d. anderen kennt.

Bei d. zuletzt entwickelten Gesetzen ist vorausgesetzt worden, daß d. Ausflußgefäß sich nicht in Rot. befindet od. höchstens eine gleichförmige Translationsbewegung besitzt, so daß d. freie Oberfl. eine Horizontalebene bildet. Jetzt soll nun endlich vorausgesetzt werden, es sei d. Gefäß, mit welchem das Wasser ausfließt, in eigener Rot. begriffen, so daß d. Wasseroberfl. eine krumme Fläche sein kann. In einem solchen Fall scheinen d. Arbeiten d. Kräfte, welche d. Bew. d. Wassertheilchen von verschiedenen Stellen d. Oberfl. aus gegen d. Mündung hin bestimmen, so von einander verschieden, daß man förmlich bei d. Berechnung d. mittleren Ausflußgeschw. kaum eine mittlere Bew. zu Grunde legen zu dürfen. Es kann von vornherein möglich erscheinen, daß ein Wassertheilchen in d. Mündung A verschiedene Geschwindigkeiten annimmt, je nachdem es von verschiedenen Stellen d. Oberfl. herkommt. Dieses ist jedoch nicht d. Fall.

Ist nämlich A_0A irgend ein Stück einer beliebigen von einem Wassertheilchen durchlaufenen Bahn und zwar von A_0 gegen A hin, so findet d. früheren zufolge bekanntlich folgende allgemeine Gl. statt:

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma_0} + M + E + \int R_0\, ds$$

d. h. d. Summe aus d. Geschw.- und Druckhöhe d. Punktes A ist = d. analogen Summe für d. Punkt A_0 + d. Arbeit d. Massenkräfte, d. Expansionsarbeit u. d. Arbeit d. inneren Reibungen pr. 1 kgr. von A_0 bis A.
Im vorliegenden Falle, wo es sich immer d. Bew. einer tropfbaren Flüssigkeit handelt, kann von vornherein $\gamma = \gamma_0$ gesetzt werden und ferner kann auch d. Expansionsarbeit $= E = 0$ gesetzt werden, weil d. spec. Volumen gleich bleibt. Wenn man ferner von d. inneren Reibung vorläufig absieht, so kann im vorliegenden Fall d. Gl. geschrieben werden: $\frac{u^2}{2g} + \frac{p-p_0}{\gamma} = M$ wo nun aber jetzt diese Massenkraft nicht nur d. Schwerkraft sondern auch d. erste Ergänzungskraft d. relativen Bew. in sich schließt, entsprechend d. eigenen Rot. d. Gefäßes. Es könnte nun von vornherein möglich erscheinen, daß dieses M einen verschiedenen Werth hat, je nachdem A_0 einen verschiedenen Punkt in d. freien Oberfl. S_0 d. Flüssigkeit im Gefäß bedeutet und, daß somit sich für u verschiedene Werthe ergeben, jenachdem ein Punkt von d. verschiedenen Stellen d. Oberfl. kommt. Thatsächlich ist dies nicht d. Fall. Die Bew. d. Gefäßes kann nun bestehen in einer Rotation mit constanter Winkelgeschw. ω um eine vertikale Axe verbunden mit einer gleichzeitig stattfindenden Translation mit constanter Beschl. im Sinne dieser vertikalen Rotationsaxe od. es kann d. eigene Bew. d. Gefäßes bestehen in einer steten Translationsbew. mit d. constanten Beschl. f, die aber eine beliebige Richtung haben kann, denn nur unter diesen Bedingungen kann eine permanente Bew. statt d. Wassers im Gefäße möglich sein. Es handelt sich also nun darum, für diese beiden Fälle zu constatiren, daß auch diese Ausflußgeschw. u dieselbe ist, von welcher Stelle d. freien Oberfl. auch d. Wassertheilchen herkommen möge.

Alle von d. verschiedenen Punkten A_0 d. Oberfl. beginnenden Bahnen werden alle durch d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahles hindurch gehend gedacht werden können. Wie nun auch diese Bahnen gestaltet werden können, so ist doch immer d. Geschw. u dieselbe, womit ein Wassertheilchen in S anlangt, welcher Satz nun bewiesen werden soll.

1) d. Gefäß rotire mit const. Winkelgeschw. ω um eine vertikale Axe und habe außerdem eine Translation mit const. Beschl. f im Sinne d. Rotationsaxe, und zwar soll d. Beschl. f positiv gerechnet werden, wenn vertikal nach unten gerichtet.

Wenn d. Wasser sich in relativer Ruhe gegen d. selbst rotirende Gefäß befindet, so bildet d. freie Oberfl. d. Wassers im Gefäße bekanntlich ein Rotationsparaboloid. Wenn man d. Scheitel dieses Rotations-Paraboloids als Ursprung eines Coord.-Systems annimmt, d. Z Axe vertikal und positiv nach oben, dann ist bekanntlich d. Gl. dieses Rotations-Paraboloids: $x^2 + y^2 = 2\,\frac{g-f}{\omega^2}\,z$. In diesem Fall ist d. früheren zufolge d. Arbeit M d. Massenkräfte pr. 1 kgr: $M = \left(1 - \frac{f}{g}\right) h + \frac{\omega^2}{2g}\left(r^2 - r_0^2\right)$.

Für d. verschiedenen möglichen Fälle d. eigenen Bew. d. Gefäßes, während d. Wasser im Beharrungszustande ausfließt, nimmt d. Ausdruck für h festgestellt. Für d. Fall, daß ~~ein~~ das Gefäß um eine vertikale Axe rotiert und zugleich eine Translationsbeschl. hat, gilt für h d. letztere Ausdruck, dabei ist h d. Höhe d. Punktes A_0 also d. beliebigen Punktes d. freien Oberfl. über d. Schwerpunkt d. betreffenden Fläche, ebenso S, r und r_0

sind d. Perpendikellängen von S und A_0 auf d. Z Axe. Dabei ist, wenn entsprechend d. Höhe d. Scheitelpunktes über S mit h_0 bezeichnet sei:

$$h = h_0 + z$$

wo z d. Höhe d. Punktes A_0 über d. Coord.-Anfang bedeutet. Setzt man diesen Wert von h in d. Gl. für M_0 ein und setzt dann $h = \frac{u^2}{2g} + \frac{p-p_0}{\gamma}$, so folgt:

$$\frac{u^2}{2g} = \left(1-\frac{f}{g}\right)h_0 + \frac{p_0-p}{\gamma} + \left(1-\frac{f}{g}\right)z + \frac{\omega^2}{2g}(r^2-r_0^2);$$ setzt man: $\left(1-\frac{f}{g}\right)h_0 + \frac{p_0-p}{\gamma} = H_0$, so wird:

$$\frac{u^2}{2g} = H_0 + \frac{(r\omega)^2}{2g} + \frac{\omega^2}{2g}\left(2\frac{g-f}{\omega^2}z - r_0^2\right)$$

Hierin ist nun r_0 d. Perpendikel von A_0 auf d. Axe Z, also $r_0^2 = x^2 + y^2$, wenn x und y d. Coord. von A_0 sind. Nun wird man mit derselben Annäherung, womit man an d. Oberfl.-Geschw. vernachlässigen durfte, auch annehmen dürfen, daß d. freie Oberfl. dieselbe Form hat, welche sie haben würde, wenn d. Wasser ganz und gar in relativer Ruhe gegen d. Gefäß sich befände, denn in d. oberen Partien ist die d. Geschw. d. Wassers fast ganz genau in relativer Ruhe gegen d. Gefäß. Es wird also d. Gestalt d. freien Oberfl. fast ganz genau so sein, als wenn gar kein Wasser ausfließt, somit ist also: $r_0^2 = 2\frac{g-f}{\omega^2}z$

und folglich d. Endgeschw. $u = \sqrt{2gH_0 + (r\omega)^2}$ od. bezüglich [illegible] Correction wegen d. Ausflußcoefficienten:

$$u = \varphi\sqrt{2gH_0 + (r\omega)^2}.$$

Dieser Ausdruck ist ganz unabhängig von d. Lage d. Punktes A_0 in d. freien Oberfl., r bedeutet d. Entfernung d. Schwerpunktes S d. kleinsten Querschnitts d. austretenden Strahls von d. Rotationsaxe d. Gefäßes, also r u d. absolute Geschw. dieses Gefäßpunktes, welcher mit d. Schwerpunkt von A zusammenfällt. Wenn d. Gefäß ringsum von atm. Luft umgeben ist, so daß man ohne großen Fehler $p = p_0$ setzen kann, so ist:

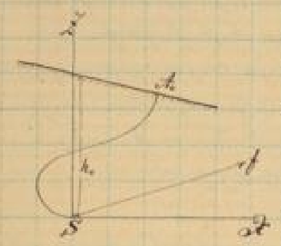
$$u = \varphi\sqrt{2(g-f)h_0 + (r\omega)^2}$$

Wäre d. Gefäß nicht in Rotation begriffen, sondern hätte dasselbe nur eine Translationsbew. mit einer vertical gerichteten Beschl., also $\omega = 0$, so ist: $u = \varphi\sqrt{2(g-f)}$ wo $h_0 = const = h$ ist.

Wenn z. B. d. Gefäß durch sein eigenes Gewicht frei fallen ließe und man müßte man für diesen Fall d. relative Geschw. angeben, mit welcher d. Wasser mit einer Öffnung in d. Öffnung d. Gefäßes heraus ausfließt, so wäre $f = g$ und also $u = 0$ daß es würde gar kein Wasser ausfließen. —

2) d. Gefäß sei in einer Translationsbew. begriffen mit d. Beschl. f, d. constante Richtung dieser Beschl. f bilde d. Winkel ψ mit d. Horizont, gerichtet nach schräge aufwärts und vorwärts. In diesem Fall kann wieder, wenn d. Gefäß hinreichend groß ist d. freie Oberfl. als Ebene betrachtet werden mit derjenigen, welche stattfinden würde, wenn d. Wasser ganz in relativer Ruhe gegen d. Gefäß sich befände, wenn also kein Ausfluß vorhanden wäre. Für diesen Fall bildet d. freie Wasseroberfl. eine geneigte Ebene. Mit d. Gefäß fest verbunden sei ein rechtwinkliges Axensystem angenommen, so daß d. Z Axe vertikal und gerichtet nach oben sei. In d. Horizontalebene durch d. Ursprung werde d. X Axe so angenommen, daß d. constante Richtung d. Beschl. f d. Gefäßes parallel d. XZ Ebene ist, sie bildet (nämlich) mit d. X Axe d. Winkel ψ; die Y Axe projiciert sich dann in S senkrecht zur Ebene d. Figur. Für den Fall, daß d. Wasser in relativer Ruhe gegen d. Gefäß ist, bildet nun d. freie Oberfl. eine geneigte Ebene, welche parallel d. Y Axe ist; d. Gl. ist d. Spuren gemäß:

$$z = -\frac{f\cos\psi}{g+f\sin\psi}x + h_0$$



Hierin bedeutet h_0 diejenige Höhe, welche von d. Z-Axe durch d. freie Oberfl. abgeschnitten wird. h_0 ist natürlich auch von d. Größe d. Beschleunig. abhängig. Wenn nun aber aus einem so bewegten Gefäß aus irgend einer Stelle Wasser ausfließt, während durch entsprechenden Zufluß d. Wassermenge constant erhalten wird, so ist:

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p-p_0}{\gamma} = M$$

d. Beziehung ist angenommen im Schwerpunkt S d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls, in welchem also d. Geschw. = d. mittleren Ausflußgeschw. u zu setzen ist. Nun können d. verschiedenen in S ausfließenden Wassertheilchen von ganz verschiedenen Stellen d. Oberfl. herkommen z. B. von A_0, d. d. Weg, den d. Wassertheilchen einschlägt ist ganz von d. Gestalt d. Gefäßes abhängig. Es kann hier einander von vornherein wichtig erscheinen, daß d. Geschw. u verschieden ist, von welchem Punkt A_0 d. Wassertheilchen herkommt. Für diesen Fall ist d. früheren zu setzen M = d. Höhe d. Punktes über S $+ \frac{f}{g} S'$ also:

$$M = z - \frac{f}{g} S'$$

wobei $-S'$ d. Projection d. Strecke $A_0 S$ auf d. Richtung von f vorstellen. Die Projection $-S'$ d. Richtung $S A_0$ auf f ist offenbar auch = d. Projection d. gebrochenen Linie $x\,y\,z$ auf f wobei $x\,y\,z$ d. Coord. von A_0 vorstellen, also: $-S' = x \cos\psi + z \sin\psi$.

Also $$M = \frac{f}{g}(x\cos\psi + z\sin\psi) + z.$$ Aus d. obigen Gl. für z ergibt sich wenn man sie mit $g + f\sin\psi$ multiplicirt: $f(x\cos\psi + z\sin\psi) = (g + f\sin\psi)h_0 - gz$

dieses in M eingesetzt giebt: $$M = \left(1 + \frac{f}{g}\sin\psi\right)h_0$$

Hieraus sind nun d. Coord. von A verschwunden, M hat also denselben Werth, wo auch d. Punkt A_0 in d. freien Oberfl. liegen mag. Setzt man diesen Ausdruck in d. Gl. für $\frac{u^2}{2g} \ldots$, so ergibt sich wenn durch Hinzufügung eines Geschw.-Coeff. auf d. Contr.-Widerstand Rücksicht genommen wird:

$$u = \varphi\sqrt{2gH_0} \quad \text{worin} \quad H_0 = \left(1 + \frac{f}{g}\sin\psi\right)h_0 + \frac{p_0 - p}{\gamma} \text{ ist.}$$

Hat man hieraus u gefunden, so ist schließlich d. pr. Sek. ausfließende Wasservolumen: $$V = \delta u = \alpha A u. \text{—}$$

Nun kommt es noch darauf an, die in diesen Formeln empirisch zu bestimmenden Erfahrungscoeff. näher zu besprechen. Dieselben sind: d. Contractionscoeff. α, d. Geschw.-Coeff. φ, d. Ausflußcoeff. μ und d. Widerstandscoeff. ζ. Diese 4 stehen bekanntlich in 2 Beziehungen zu einander:

$$\mu = \alpha\varphi \quad \text{und} \quad \varphi^2(1 + \zeta) = 1.$$

Hiernach braucht man nur 2 wirklich bestimmt zu haben, so kennt man auch d. beiden anderen. Allerdings können nicht beliebig 2 bestimmt werden, sondern es muß einer d. Coeff. μ u. α in Verbindung mit einem von φ u. ζ bestimmt werden. Man wird natürlich d. Versuche so einfach als irgend möglich einrichten. Zunächst wird man sich hierbei beschränken auf d. Fall, daß d. Gefäß sich in Ruhe befindet, daß also d. Wasser eine horizontale freie Oberfl. bildet. Ferner wird man d. Ausflußgefäß so wählen, daß d. Oberfl. d. Wassers im Gefäß sehr groß ist im Vergleich mit d. Mündungsfläche, so daß man dann u_0 im Vergleich zu u vernachlässigen kann. Endlich wird man d. Versuche so einrichten, daß d. ganze Versuchsapparat ringsum von d. atm. Luft umgeben ist, so daß $p_0 = p$ gesetzt werden kann. Damit kann dann auch für d. mittlere Ausflußgeschw. u und für d. pr. Sek. ausfließende Wasservolumen V d. folgenden Formeln zu Grunde gelegt werden:

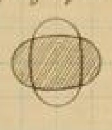
$$u = \varphi\sqrt{2gh} \quad \text{und} \quad V = \mu A\sqrt{2gh}.$$

wobei h im Falle d. Ausflusses in d. freie Luft d. Höhe d. horizontalen freien Oberfl. d. Wassers im Gefäß über d. Schwerpunkt d. Mündungsfläche vorstellen. — Im Falle d. Ausflusses in ein anderes Gefäß ist h die Höhendifferenz d. beiden Wasserspiegel in d. beiden Gefäßen. Immerhin sind φ und μ davon abhängig, daß möglicherweise d. Schwerpunkt d. Mündung A nicht in gleicher Höhe mit d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls liegt, ferner sind sie davon abhängig, daß d. Geschw. im kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls nicht identisch ist mit d. mittleren Geschw. d. Querschnitts δ. Geschwindigkeit d. Ausflusses unter Wasser, so

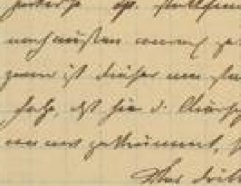
ist d. Differenz d. Höhen d. oberen u. unteren Wasserspiegels über jeden Punkt von F gleich groß, also nur wenn es sich um d. Ausfließen in d. freie Luft handelt, sondern es sind sie nicht diese Gesichtspunkte.
Am einfachsten ist nun diesen Coefficienten d. Ausflußcoeff. μ zu bestimmen. Dazu ist weiter nichts erforderlich, als dass man in einer gewissen Zeit ausgeflossene Wassermengen zu messen, indem dieselben durch d. entsprechenden Sekundenanzahl dividirt erhält man V und kann mit Hilfe d. Formel $V = \mu A\sqrt{2gh}$
od. $\mu = \dfrac{V}{A\sqrt{2gh}}$ d. Ausflußcoeff. μ, da d. anderen Größen A g h bekannt sind. —

Ungleich schwieriger ist schon d. Bestimmung d. Contractionscoeff. α. Dieser hat man für verschiedene Fälle gefunden durch directe Messungen. Es geschieht dies auf d. Weise, dass man d. Strahl durch einen Ring hindurchfließen ließ, welcher mit möglichst vielen spitzen Schrauben versehen war, die alle radial gerichtet, von allen verschiedenen Seiten durch d. Ring hindurch d. Strahl entgegen geschraubt werden konnten. Man schraubte nun alle Schrauben so lange vor, bis sie gerade d. Strahl berühren und konnte so dann d. Strahlenquerschnitt sehr genau bestimmen. Indem man diesen Ring verschiebt und gedreht findet man allmählig d. Größe und Gestalt und Ort d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls.

Es werden übrigens diese Versuche erschwert, wenn d. Mündung nicht kreisförmig ist durch d. Umstand, dass d. Querschnittsänderung d. Strahls nicht nur eine Änderung d. Größe sondern auch d. Gestalt mit in sich schließt. Der allgemeine Charakter dieser Gestaltänderung besteht in einer gewissermaßen umkehrenden solchen Veränderung, wobei an d. Stelle d. stärksten Krümmung d. Querschnittsbegrenzung d. Stelle d. schwächsten Krümmung tritt und umgekehrt. Also z. B.: wenn d. Querschnitt d. Form einer gedrückten Ellipse hat, so findet man, dass in einiger Entfernung von d. Mündung dieser Querschnitt sich gerade um 90° gedreht hat u. s. f. Wenn d. Querschnitt d. Quadratform hat, so findet man, dass Stellen, wo d. Ecken liegen in einiger Entfernung von d. Mündungsebene abgestumpft erscheinen durch gebogene Seiten u. in noch größerer Entfernung von d. Mündungsebene hat sich d. Gestalt umgedreht. Diese periodischen Gestaltänderungen entsprechen auch periodische Gestaltsänderungen bis schließlich d. ganze Wasserstrahl zerstäubt. Diese Erscheinungen lassen erkennen, dass d. gewissermaßen Lage d. Wassertheile bedingt wird von einer verschiedenen Lage. Dieselbe rührt zunächst ohne Zweifel her von d. seitlichen Zufluss d. Wassers innerhalb d. Gefäßes zur Mündung u. d. dadurch bedingten Geschwindigkeit u. Druck im Querschnitt. Jedenfalls spielen hierbei d. Molekularkräfte auch eine große Rolle. Bekanntlich ist d. Molekularbeschaffenheit d. Wassers im Innern eine wesentlich andere als an d. Oberfl. und zwar lassen sich d. betreffenden Molekularerscheinungen erkennen, wenn man annimmt, dass in d. Oberfl. eine gewisse Sp. stattfindet; wenn dieses d. Fall ist, so wird an einer solchen Stelle, wo d. Oberfl. d. Wassers nach außen convex gekrümmt ist durch diese Sp. ein einwärts gerichteter hydrostatischer Druck erzeugt und zwar ist dieser am stärksten dort, wo d. Oberfl. am stärksten gekrümmt ist, und dieser hat wesentlich zur Folge, dass sich d. Querschnitt zusammenziehen will. Ist an irgend einer Stelle d. Oberfl. nach außen concav gekrümmt, so ist d. hydrostatische Druck nach außen gerichtet. —



Was drittens d. Bestimmung d. Geschw.-Coeff. φ betrifft, so kann dieses geschehen durch Vergleichung d. gemessenen Ausflußgeschw. mit d. theoretischen. Von einer direct zu ermittelnden Messung kann hier nicht d. Rede sein. Dieselbe kann nur gemessen werden, wenn man d. Richtung von u kennt, außerdem ist man irgend ein Paar zusammengehöriger Coord. d. Mittellinie d. Wasserstrahls misst od. besser, wenn man d. Richtung nicht kennt, so findet man d. Größe und Richtung von u zugleich, indem man d. Coord. für 2 Punkte d. Wasserstrahls bestimmt. Wie mit solchen Messungen d. Geschw.-Coeff. gefunden werden kann ist leicht ersichtlich. Angenommen es sei S ein Punkt d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. untersuchten Strahls, durch diesen Punkt S seien 2 d. rechtwinklige Axen gelegt und zwar in derjenigen Verticalebene, in welcher d. Richtungslinie d. Ausflußgeschw. u liegt. d. X Axe sei horizontal, d. Y Axe sei vertical und d. Ausflußgeschw. $= u$, welche mit d. X Axe d. Winkel ψ bildet. Abweichend sind ferner, soweit u nach ψ bekannt sind, dieselben sollen einfach für einen bestimmten Fall gefunden werden.



Die Mittellinie d. ausfließenden Wasserstrahls bildet eine Curve, welche in d. Nähe von S' mit genügender Annäherung als Parabel betrachtet werden kann. Angenommen es seien x u. y d. zusammengehörigen Coord. eines beliebigen Punktes dieser Mittellinie und t d. Zeit in Sek., welche ein Wassertheilchen ~~braucht~~ um von S hierher zu gelangen, dann ist:

$$y = u \sin\psi\, t + g\frac{t^2}{2}$$ wo $u \sin\psi$ d. Vertikalcomp. d. Anfangsgeschw. in S' ist, ferner ist

$$x = u \cos\psi\, t$$ also $$t = \frac{x}{u\cos\psi}$$ und demnach $$y = x\, tg\,\psi + \frac{g}{2u^2}\,\frac{x^2}{\cos^2\psi}.$$

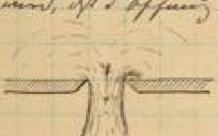
Vermittelst dieser Gl. kann man, wenn man 2 Paar zusammengehörige Werthe von Coord. [illegible] nicht aber $x_1\, y_1$ u. $x_2\, y_2$ sich 2 Gl. bilden um u und ψ zu bestimmen. Entwickelt man aus dieser Gl. u, so erhält man:

$$u = x\sqrt{\frac{g}{2}\,\frac{1+tg^2\psi}{y - x\, tg\,\psi}}$$ Es seien nun $x_1\, y_1$ und $x_2\, y_2$ d. zusammengehörigen Coord. zweier Punkte d. Mittellinie, d. durch Versuche bestimmt sind, so ist weiter:

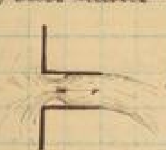
$$\frac{y_1 - x_1\, tg\,\psi}{y_2 - x_2\, tg\,\psi} = \frac{x_1^2}{x_2^2}$$ also $$tg\,\psi = \frac{x_2^2\, y_1 - x_1^2\, y_2}{x_1\, x_2\,(x_2 - x_1)}$$ Hat man nun so d. Winkel ψ gefunden, so kann man auch mit obiger Gl. u berechnen. Vergleicht man diesen Werth mit d. Gl.: $u = \varphi\sqrt{2gh}$, so findet man d. Geschw.-Coeff. φ. — Richtet man sich nun noch so ein, daß $\psi = 0$ ist, so ist einfach: $$u = x\sqrt{\frac{g}{2y}}$$ dann braucht man nur x u. y eines Punktes d. Mittellinie zu messen; indessen ist es vorzuziehen, sich auf diesen Werth von ψ nicht vollständig zu verlassen, sondern lieber 2 Punkte zu messen und daraus ψ berechnen und daraus u bestimmen und damit φ. —

Als durchschnittl. angegebenen Werthe gelten, wenn d. Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt ist, für d. Fall d. Ausflusses d. Wassers in d. freie Luft. —

Bei denjenigen Coeff. die sich auf d. Ausfluß aus Mündungen unmittelbar beziehen, also aus Öffnungen in d. Gefäßwand, ist ferner eine ebenwandige Mündung vorausgesetzt, welche derart festgestellt wird, daß d. Öffnung der Gefäßwand nach außen hin divergent abgeschrägt ist. z.B. wenn d. Boden eine [illegible] hat, so wird d. Rand d. Mündung wie nebenstehend abgeschrägt, so daß d. Wasserstrahl nur an d. scharfen ~~Kanten~~ vorbeifließt.



d. Ausflußcoeff. $\mu = \alpha\varphi$ ist, wenn es sich um d. Ausfluß aus Mündungen in ebenen Wänden handelt, bei denen vorwiegend bedingt durch d. Contractionscoeff. α, indem d. Geschw.-Coeff. φ fast immer d. Einheit sehr nahe kommt. Handelt es sich dagegen um d. Ausfluß aus Mundstücken, so kann d. Ausflußcoeff. μ vorwiegend durch d. Geschw.-Coeff. φ bestimmt sein, denn kann sogar $\alpha = 1$ und $\mu = \varphi$ sein, besonders im Falle eines zylindrischen Ansatzrohres. Wenn indessen in solchen Fällen d. Ausflußcoeff. merklich kleiner als 1 ist, so wird er merklich bedingt durch eine innere Contraction. Ist ein solches Mundstück [illegible], so erfährt d. Wasser im Innern eine Contraction, und derart ist dann d. früheren zufolge ein vermehrter Geschw.-Verlust d. Folge. d. Ausflußcoeff. ist dann also durch eine innere Contraction bedingt. In allen Fällen ist es also im Wesentlichen d. äußere und innere Contraction welche d. Ausflußcoeff. [illegible] bestimmt und man [illegible] gewisse Fälle zu unterscheiden.



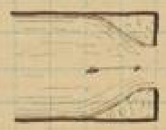
Es ist um so [illegible] der, daß d. Contraction eine so bedeutende ist, also α um so kleiner, je größer d. Winkel β ist, um welchen d. am Rande d. Mündung zufließenden Wassertheilchen von ihrer Bew.-Richtung abgelenkt werden müssen, um d. kleinsten Querschnitt [illegible] zu durchströmen. Ist z.B. d. Boden d. Gefäßes wie in Fig. I gestaltet, so wird d. Winkel, um welchen d. aus d. Nähe d. Randes kommenden Wassertheilchen abgelenkt werden müssen ein spitzer Winkel und in Fig. II ein stumpfer Winkel. Im ersten Fall wird offenbar eine beträchtlichere Contraction stattfinden als im 2ten Fall. —

I

II

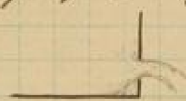
In dieser Beziehung ist derjenige Fall als ein mittlerer Normal zu betrachten, wo dieser Ablenkungswinkel $\beta = 90°$ beträgt. Für diesen Fall gilt [illegible] d. Contraction als

~~normale Contraction~~ d. normale Contraction bezeichnet werden. Ist umgekehrt aber φ kleiner od. größer als 90° ist, soll d. Contraction eine geschwächte od. verstärkte Contraction genannt werden. Eine Änderung d. Contraction kann auch dann stattfinden, wenn d. Mündung sich in einer ebenen Wand befindet, welche nicht sehr groß ist im Vergleich mit d. Mündung selbst. Ist z. B.

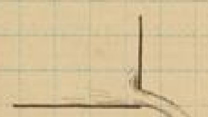


eine weite zylindrische Röhre eines Ausflußgefäßes vorn durch eine ebene Wand abgeschlossen, in welcher sich eine Öffnung befindet, die nicht sehr klein ist im Vergleich mit d. Größe d. Abschlußwand. Dann entsteht um diese Mündung herum ein gewisser ringförmiger Raum, in welchem d. Wasser nicht Theil nimmt an d. strömenden Bew., es verhält sich dann Alles gerade so, als ob d. ganze Gef. zwischen d. strömenden und in Winkel begrenzten Wassertheilchen d. Grenze d. Gefäßes wäre; also ist φ kleiner als 90°. Die Contraction nennt man in diesem Falle eine unvollkommene Contraction. D. Fall d. Normalcontraction, wobei d. Mündung sich in einer verhältnißmäßig großen Wand befindet, wird als vollkommene Contraction bezeichnet. —

Bei diesen Begriffsbestimmungen bezüglich d. Charakters d. Contractionen ist vorausgesetzt, daß d. Winkel φ, um den d. am Rand zufließenden Wasserfäden abgelenkt werden müssen, ringsum gleich groß sei, also nicht wesentlich verschieden sei, und welches φ d. Mittelwerth aller dieser Wasserfädchen ist. Es kann aber auch d. Fall sein, daß dieser Winkel φ an verschiedenen Stellen d. Mündungsumfangs bedeutend verschieden ist. Es kann unter Umständen an einem Theile d. Mündungsumfangs eine normale, an einem andern Theile eine merklich geschwächte od. verstärkte Contraction stattfinden, namentlich dann, wenn d. Mündung d. Rande d. betreffenden Wand, in d. sie sich befindet, sehr nahe liegt. Wenn z. B. in d. verticalen Seitenwand eines Ausflußreservoirs eine rechteckige



Mündung nahe über d. Boden sich befindet, während d. Wasser hoch über d. oberen Rande d. Mündung steht, so ist am oberen Rande d. Mündung d. Contraction als eine vollkommene normale zu bezeichnen, am unteren Rande findet jedoch eine geschwächte Contraction statt, da ein d. Theil d. Wassers sich in winkelförmiger Lage befindet. Hierbei ist namentlich d. Fall bemerkenswerth, daß an einem Theile d. Mündungsumfangs d. Contraction ganz und gar beseitigt ist, also φ = 0 ist. Dies findet dann statt, wenn d. rechteckige Mündung



sich unten ganz bis zum Boden erstreckt, d. untern Wassertheilchen fließen dann gerade normal d. Mündung zu. In einem solchen Falle, wo an einem Theile d. Mündung d. Contraction gänzlich aufgehoben ist, pflegt man d. Gesammtcontraction als eine partielle zu bezeichnen. —

Bevor wir nun zur Besprechung d. einzelnen Fälle übergehen, wollen wir vorher ein Paar allgemeine Gesetze betrachten, d. sich aus d. verschiedenen Versuchen ergeben haben. Es hat sich zunächst als ein ganz allgemein gültiges Gesetz gezeigt, daß wenn sie vorwiegend durch d. äußere od. innere Contraction bedingt ist, daß dann sie um so größer wird, je kleiner d. Mündung und ~~also~~ je kleiner d. wirksame Druckhöhe ist. — Ferner hat sich fast allgemein herausgestellt, daß bei Mündungen von engem Durchm., (die sich also unmittelbar in d. Gefäßwand befinden, wenn sie eine längliche Form haben, d. Ausflußcoeff. größer ist als unter übrigens gleichen Umständen d. h. für gleiche Werthe von A u. H für d. Fall solcher Mündungsformen, d. sich d. Kreisform nähern. Bei solchen länglichen Mündungen ist es gewissermaßen nur d. kleine Dimension, die den Ausflußcoeff. bedingt, denn mit dieser kleineren ~~Dimension~~ Dimension nimmt ja d. Ausflußcoeff. zu. Endlich hat sich auch d. allerdings verhältnißmäßig wenig zahlreichen Versuchen, d. namentlich von Weisbach für d. Ausfluß unter Wasser φ angestellt sind, ergeben, daß d. Ausflußcoeff. durch eine Mündung zwischen 2 Wasserreservoiren um etwas mehr als als 1% größer ist, als beim Ausfluß in d. freie Luft. —

Ausfluß d. Wassers aus Mündungen im engeren Sinn.

1) Kreisförmige Mündung. Offenbar läßt d. Ausfluß d. Wassers aus einer solchen kreisförmigen Mündung von vornherein d. einfachste und deutlichste Gesetzmäßigkeit erkennen und es haben sich daher auch mit Recht diesem Fall hauptsächlich d. Versuche zugewandt.

Es sei nun zunächst d. Contraction normal, also Mündung in einer ebenen Wand und ferner an einer mittleren Stelle so daß d. Wand viel größer als d. Mündung ist. Für diesen Fall ist wiederholt und übereinstimmend constatirt worden, daß d. Ausflußcoeff. um so größer ist, je kleiner d. Durchmesser d. Mündung und je kleiner d. wirksame Druckhöhe ist, entsprechend d. vorhin entwickelten allgemeinen Gesetz. So erhielt man Weisbach für:

	d =	0,01	0,02	0,03	0,04 metr
und $H = 0{,}25\,m$	μ =	0,637	0,629	0,622	0,614
u. $H = 0{,}6\,m$	μ =	0,628	0,621	0,614	0,607

ferner für $d = 0{,}01$ metr ergab sich:

für H =	0,02	0,101	0,909	13,57	103,58 metr.
μ =	0,711	0,665	0,641	0,632	0,600

Alle diese Weisbach'schen Versuchswerthe lassen sich ungefähr in d. folgenden empirischen Formel zusammenfassen, welche freilich d. letzte Versuchswerth nicht mehr mit d. ersten übereinstimmt. D. Formel lautet:

$$\mu = 0{,}6 + \frac{0{,}06}{0{,}5 + \sqrt{H}} - 0{,}7\,d \qquad (d \text{ u. } H \text{ in metr.})$$

Diese Versuche beziehen sich nur auf d. Ausflußcoeff. μ, welcher aber wesentlich von d. beiden anderen Coeff. α u. φ abhängt. Was nun d. Contraction des aus einer solchen kreisförmigen Öffnung ausfließenden Strahls betrifft, so haben wiederholte Strahlmessungen ergeben, daß derselbe seinen kleinsten Querschnitt in einer Entfernung von d. Mündungsebene = d. Halbmesser d. Mündung und es ergiebt sich speciell im Durchschnitt dieser kleinste Durchmesser = 0,8 d. Mündungsdurchmessers d, so daß somit d. entsprechende Contractionscoeff. ist:

$$\alpha = 0{,}64.$$

Was d. Geschw.-Coeff. φ betrifft, so zeigt derselbe sich weniger different für verschiedene Fälle; annähernd für mittlere Druckhöhen und Mündungsweiten ist:

$$\varphi = 0{,}97 \text{ bis } 0{,}98$$

und dementsprechend d. Widerstandscoeff.:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = 0{,}063 \text{ bis } 0{,}041.$$

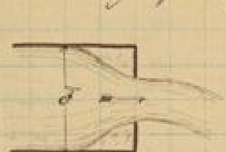
Es gehen also 4 bis 6 % d. lebendigen Kraft, womit d. Wasser ausfließt, durch d. hydraulischen Widerstände verloren. Was d. Art d. ganzen Veränderlichkeit dieses Coeff. φ betrifft, so hat sich diese in so fern aus d. Contractionsgesetz zu ergeben, als d. Geschw. μ um so größer wird, je größer H ist. Da aber d. Ausflußcoeff. μ mit wachsender Druckhöhe abnimmt, so muß man annehmen, daß d. Contractionscoeff. α mit wachsender Druckhöhe in noch stärkerem Grade abnimmt als d. Ausflußcoeff. μ. Was in diesem Fall einer kreisförmigen Mündung d. gestörte u. verstärkte Contraction betrifft, so sind darüber namentlich auch von Weisbach umfassende Versuche angestellt worden, bei denen d. Winkel ϑ zwischen 0° und 180° variirt wurde; indem d. innere Wand nach außen od. nach innen mit cylindrischen Ansätzen versehen wurde, welche jedoch nicht scharfkantig, sondern mit allmähligen Abrundungen in d. Gefäßwand übergeführt wurden, konnten störende Einflüsse abgehalten werden. Es wurde gefunden für $d = 0{,}01\,m$ ferner für $H = 0{,}2$ bis $3\,m$ und für $\vartheta = 0°$, 90° u. 180° entsprechend $\mu = 0{,}966$ 0,632 u. 0,541.

d. Werth von μ für $\vartheta = 90^\circ$ entspricht sehr nahe d. oben angeführten empirischen Formel, wenn man $\alpha = 0{,}02$ setzt, man bekommt dann genau $\mu = 0{,}632$ für $H = 0{,}9$ m. Dieses würde auch d. Mittelwerth zwischen 0,3 u. 3 m, d. beobachteten Versuchen entsprechend werden. Ist d. Winkel $\vartheta = 0$, so findet eine Contraction nicht statt, dann ist d. Ausflusscoeff. ein blosser Geschw.-Coeff. Nimmt man an, d. Coeff. sei in d. letzten 3 Fällen immer derselbe gewesen und zwar $= \mu = 0{,}966$, so würde für d. Fall einer inneren cylindrischen Ansatzröhre d. Contractionscoeff. $\alpha = \frac{0{,}541}{0{,}966} = 0{,}56$. Nach einer früheren Untersuchung hatte sich ergeben, daß wenigstens d. Contractionscoeff. $\alpha = \frac{1}{2}$ sein muß und, daß er sich dieser Grenze um so mehr nähert, je kleiner in einem solchen Fall d. Wanddicke ist. Dieses Resultat ist also mit d. theoretischen in ganz guter Übereinstimmung, da d. Wanddicke doch nicht unendl. klein ist und es liesse sich erwarten, daß man d. Grenze $\alpha = \frac{1}{2}$ noch näher kommen wird, wenn d. Druckhöhe grösser und d. Wanddicke kleiner ist. Es fand z. B. Borda für diesen Fall $\mu = 0{,}515$ und dementsprechend $\alpha = 0{,}53$. d. Geschw.-Coeff. zeigt sich übrigens abhängig von d. Druckhöhe und zwar in d. Weise, daß derselbe mit zunehmender Druckhöhe wächst. Bei d. hier erwähnten Versuchen bez. d. Druckhöhe zwischen mäßigen Grenzen, zwischen welchen μ im Falle $\vartheta = 0$, μ von 0,96 bis 0,98 variirt wurde; bei sehr bedeutenden Druckhöhen fand Weisbach d. Geschw.-Coeff. wachsen bis zu 0,99.

Entspricht μ_0 d. Werth $\vartheta = 90^\circ$, so ist nach Zeuner zu setzen:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 0{,}33214 \cos^3\vartheta + 0{,}16672 \cos^4\vartheta.$$

Was endlich für d. Fall einer kreisförmigen Mündung d. unvollkommenen Contraction betrifft, also für d. Fall, daß d. Mündung A sich in einer nicht sehr grossen ebenen Wand im [illegible] mit d. Mündung befindet, so ist auch darüber und namentlich von Weisbach eine Reihe Versuche angestellt worden. Es befand sich dabei d. Mündung in einer ebenen Wand am Ende eines cylindrisch gestalteten Gefässes; ist so $\frac{A}{F}$ d. Verhältniss d. Mündungsgrösse zur Grösse d. ebenen Wand $= v$, also $\frac{A}{F} = v$, so lassen sich d. Weisbach'schen Werthe zusammenfassen in d. Formel:

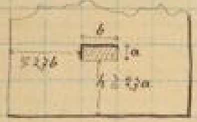


$$\mu = \mu_0\left(1 + 0{,}04564\left(14{,}821^{v} - 1\right)\right).$$

Bei diesen Versuchen war d. Wand, in d. sich d. kreisförmige Mündung befand, selbst kreisförmig und zwar befand sich d. Mündung genau in d. Mitte. Fällt d. Mündung etwa nicht mit d. Mitte zusammen, od. wenn d. Wand, in der d. Mündung sich befindet, nicht ganz kreisförmig ist, so werden d. Werthe von μ sich nicht bedeutend ändern, besonders nicht, [illegible] d. Mündung ganz dicht an d. Rand rückt. Über diesen besonderen Fall d. partiellen Contraction liegen noch einige Versuche vor, da dieselben aber kein sicheres Resultat ergeben haben, so soll hier auch davon abgesehen werden. —

2) **Rechteckige Mündung.** Was zunächst d. Ausfluss d. Wassers aus rechteckigen Mündungen in einer ebenen verticalen Wand eines Gefässes betrifft, d. h. wo d. Mündungsseiten horizontal und vertical sind, so sind darüber d. umfassendsten Versuche in Metz angestellt worden in d. Jahren 1828–29 von   und Lesbros und später von 1829–34 von Lesbros allein. d. ursprünglichen gemeinschaftlichen Versuche bezogen sich auf d. fundamentalen Fall, nämlich auf d. vollständigen und Normalcontraction in d. freien Luft. Es befand sich d. rechteckige Mündung in einer verticalen rechteckigen Seitenwand und zwar in einer mittleren Stelle, so daß also d. Fall einer vollständigen Contraction vorlag. Das Wasser floss von allen Seiten d. Mündung zu, um d. Mündungsebene normal zu passiren. Die rechteckigen Mündungen hatten durchweg eine gleiche Breite von 20 ctm und d. Höhen wurden variirt zwischen 1 bis 20 ctm. d. Überfallhöhen betrugen bis 1,8 m und zwar war d. ebene Wand d. rechteckigen Mündung [illegible]. d. später von Lesbros allein angestellten Versuche waren noch sehr viel umfangreicher und bezogen sich auf unvollkommene Contractionsfälle.

Was zunächst d. Fall d. unvollkommenen Contraction bei einer rechteckigen Mündung betrifft, so wurde constatirt, daß d. Contraction nicht vermindert werden kann, wenn nur d. Entfernung d. unteren Kante d. rechteckigen Mündung vom Boden ≥ 2,7 a unter a d. Höhe d. Mündung verstanden und wenn nur d. Entfernung d. beiden Seitenwände d. Mündung von d. Seitenwänden d. Wand ≥ 2,7 b unter b d. Breite d. Mündung verstanden. Wird diese Grenze erreicht, so hat eine weitere Vergrößerung dieser Entfernungen keinen weiteren Einfluß auf d. Ausflußcoeff. zur Folge. Die Tabellen über μ befinden sich in

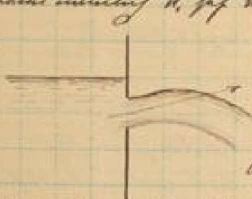


„Grashof's theoretische Maschinenlehre". Dieselbe ist geordnet in d. einen Richtung nach d. verschiedenen Werthen von a und zwar für a = 0,01, 0,02, 0,03, 0,05, 0,1 und 0,2 Meter, nach d. anderen Richtung ist sie geordnet nach d. Werthen von h_2, wo h_2 d. Höhe d. oberen Wasserspiegels über d. Oberkante d. Mündung ist. Dabei ist noch auf einen Umstand aufmerksam zu machen: Wenn d. Höhe h_2 nicht sehr groß ist, so senkt sich d. Wasserspiegel gegen d. betreffende Ausflußkante d. Gefäßes hin, eine merkliche Senkung, es ist deshalb nicht gleichgültig, an welcher Stelle h_2 gemessen wird. In d. Tabelle ist vorausgesetzt, daß h_2 dort gemessen ist, wo d. freie Oberfl. noch nicht eine merkliche Senkung erlitten hat. Würde diese Höhe h_2 bei d. Bemerkungen direct an d. Kante gemessen und dadurch entsprechend kleiner gefunden, so müßte d. Ausflußcoeff. entsprechend vergrößert werden, denn d. Werthe von μ, um die es sich handelt, beziehen sich alle auf d. Formel: $V = \mu A \sqrt{2gh}$ unter h d. Höhe d. Wasseroberfl. über d. Schwerpunkt d. Mündung verstanden, also $h = h_2 + \frac{a}{2}$. Würde nun dieses h direct bei d. Mündung gemessen, so müßte μ entsprechend größer sein. Dieser Umstand macht sich bemerklich in d. Verschiedenheiten von μ, so lange h_2 nicht größer als 0,2 m geworden ist; ist $h > 0,2$ so ist dies nicht mehr wesentlich. —

Wenn man d. fragliche Tabelle näher betrachtet, so findet man im Allgemeinen bestätigt d. früher Gesagte, daß d. Ausflußcoeff. um so größer wird, je kleiner d. Mündung und Druckhöhe ist. Es sind in d. Tabelle in d. Horizontalreihe d. Werthe von a von links nach rechts wachsend angeordnet, h_2 von oben nach unten wachsend; d. Werthe von h_2 gehen von 0,01 m bis zu 3 m., wobei d. Werthe von 0,0 1,8 bis 3 m nicht gemessen sondern geschätzt sind. Es sollten also d. größten Werthe von μ links oben und d. kleinsten rechts unten stehen, welches auch in d. That im Allgemeinen d. Fall ist. Nur wenn man für d. größeren Werthe von a d. Verticalspalte heruntergeht, so findet man keine stetige Abnahme von μ, sondern zunächst nimmt μ zu bis zu einem max und erst nachher nimmt es stetig ab. Die Ursache liegt jedenfalls darin, daß in d. Formel $V = \mu A \sqrt{2gh}$ d. Coeff. μ eine zusammengesetzte Bedeutung hat, da in μ auch d. früher besprochene Correctionsfactor $1-f$ enthalten ist, welcher bekanntlich für eine rechteckige Mündung in einer verticalen Wand d. Bedeutung hatte:

$$1-f = 1-\frac{1}{96}\left(\frac{a}{h}\right)^2 \text{ also hier: } = 1-\frac{1}{96}\left(\frac{a}{h_2+\frac{a}{2}}\right)^2$$

Dieser Correctionsfactor ist in μ mit hineingelegt worden und daher rühren dann auch d. obigen Abweichungen, denn es ist dieser Correctionsfactor um so mehr von d. Einheit verschieden, d. h. um so kleiner, je größer a und je kleiner h ist, es muß also namentlich bei d. großen Werthen von a und d. kleinen von h_2 dieser Correctionsfactor wirken, daß sich ein entsprechend kleinerer Werth von μ ergibt, als es d. Fall wäre, wenn dieser Correctionsfactor nicht mit eingerechnet würde. — Es kann auch noch ein anderer Umstand dabei in Betracht kommen; wenn nämlich h_2 sehr klein ist, so fließt d. Wasser d. rechteckigen Mündung im höheren Grade von d. unteren Kante als von d. oberen zu, es findet also an d. unteren Kante eine grössere Ablenkung d. seitlichen Wasserstroms als an d. oberen statt, d. Folge ist, daß d. ganze Wasserstrahl etwas nach oben abgelenkt wird; es kann also d. Fall sein, daß d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls etwas höher liegt, als d. Schwerpunkt d. Mündung A. In d. Ausflußformel müßte nun eigentlich h gleich gesetzt werden d. Höhe d. Oberfl. über d. Schwerpunkt von A, so daß hier also d. Höhe etwas zu groß gesetzt worden ist und μ etwas zu klein gefunden werden mußte.

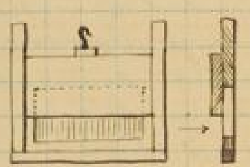


Nach d. Versuchen von Lesbros ist d. Ausflußcoeff. vorwiegend abhängig von d. kleineren Dimension d. rechteckigen Mündung, mag dies nun d. Breite od. d. Höhe sein, und zwar in d. Weise, daß bei gleichen Werthen von h und bei gleicher Größe dieser kleinen Dimension d. Mündung, d. Ausflußcoeff. sich nicht wesentlich ändert, wenn d. Verhältniß von Höhe u. Breite zwischen 1 u. 20 variirt. Mit Rücksicht auf diesen Umstand können also auch d. Zahlen d. erwähnten Tabelle, obgleich sie sich alle nur auf d. nämliche Breite d. Mündung beziehen, doch auch angewendet werden für andere Fälle, wo diese Breite erheblich größer ist, so ferne sie nur nicht mehr als d. 20fache d. Höhe beträgt. —

Was d. Geschw.-Coeff. betrifft, so ist auch dieser von Lesbros bei verschiedenen Versuchen ermittelt worden und es hat sich ergeben, daß derselbe wenig verschieden ist von d. Geschw.-Coeff. φ betreffend d. Ausfluß aus kreisförmigen Mündungen, es ergab sich nämlich:

$$\varphi = 0{,}97.$$

Bei diesen Fundamentalversuchen war immer sorgfältig d. Ausfluß in einer sogenannten dünnen Wand hergestellt, so daß d. innere Wand eine scharfe Kante bildete. Bei d. technischen Ausführungen findet nun im Allgemeinen ein solcher idealer Fall nicht statt, sondern es pflegen d. betreffenden seitlichen Mündungen vielfach in d. Gefäß eingeschnitten zu sein. Unter diesen Umständen findet d. Wasserstrahl Gelegenheit, sich an diese Umfassungsfläche d. Öffnung mehr od. weniger anzuschließen. Im Allgemeinen wird dadurch d. Widerstand zwar etwas vergrößert, also d. Geschw.-Coeff. etwas verkleinert, dagegen wird d. Contraction vermindert, also d. Contractions-coeff. vergrößert und zwar wird erfahrungsmäßig d. Contractions-Coeff. mehr vergrößert als d. Geschw.-Coeff. verkleinert, so daß d. Product aus beiden eine Vergrößerung erleidet. Dies ist hauptsächlich d. Fall beim Durchfluß d. Wassers durch seitliche Schützenöffnungen. Pflegt ein Schutzbrett mehr od. weniger aufgezogen zu sein, so daß d. Wasser nur durch d. seitliche Öffnung unter d. Schutzbrett fließt. Ein solches Brett muß nun sicher geführt werden durch Führungsleisten, welche eine gewisse Einfassung für diese seitliche Mündung bilden. Haben diese Führungsleisten etwas vorstehen, wird an d. beiden Seiten d. Contraction geschwächt; ebenso kann sich auch unten eine Leiste befinden, um d. Schutzbrett beim gänzlichen Niederlassen eine Stütze zu gewähren, so daß auch am unteren Rand d. Mündung eine solche Schwächung d. Contraction stattfindet. d. verschiedenen Modificationen von μ für diese Fälle sind namentlich von Lesbros speciell geprüft worden, dessen Resultate im Grashof zusammengestellt sind. —



Gehen wir nun über zu d. Fall einer unvollkommenen Contraction, d. h. also $n = \frac{A}{F}$ nicht sehr klein ist. Auch für diesen Fall hat Weisbach Versuche angestellt und folgende Formel gefunden:

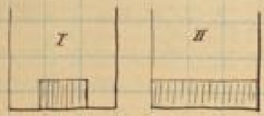
$$\mu = \mu_0 \left[1 + 0{,}076 (9^n - 1)\right]$$

wenn μ_0 d. Ausflußcoeff. unter übrigens gleichen Umständen im Falle einer vollkommenen Contraction bedeutet. Ferner ist bei d. Ausfluß d. Wassers aus rechteckigen Mündungen d. partielle Contraction bemerkenswerth. Solche Versuche wurden von Bidone mit quadratischen Mündungen und von Weisbach mit Mündungen, d. 0,1 m Höhe und 0,2 m Breite hatten, angestellt. Nach Weisbach war:

$$\mu = \mu_0 (1 + 0{,}155 p)$$

unter p d. verhältnißmäßige Größe desjenigen Theils d. Mündungsumfangs verstanden, in welchem keine Contraction stattfindet, zum ganzen Mündungsumfang. —

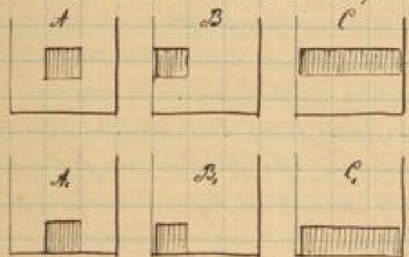
Meistens kommt d. unvollkommene Contraction so vor, daß d. seitliche Mündung nur mit d. unteren Rand am Boden d. Gefäßes liegt, od. daß sie sich auch bis zu den Seitenwänden erstreckt. Im ersten Fall ist d. Contraction nur am unteren Rand aufgehoben, im andern Fall auch



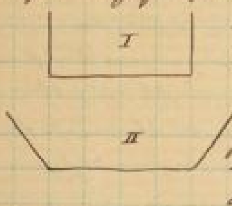
an d. Seitenwänden. Ist also a d. Höhe und b d. Breite d. Mündung, so ist im ersten Fall: $p = \frac{b}{2(a+b)}$

im 2ten Fall $p = \frac{2a+b}{2(a+b)}$.

Es sind über diesen Fall auch Versuche von Lesbros angestellt worden, und zwar mit solchen Mündungen, welche annähernd d. in d. Praxis vorkommenden Verhältnissen Rechnung tragen sollen; dabei ist zwar auch am untern Rand d. Contraction vollständig aufgehoben, an d. Seitenwänden jedoch gewöhnlich nicht ganz und gar, indem gewöhnlich d. Seitenwände d. Mündung sich nicht ganz bis zur Wand erstrecken, welche freilich auch durch Schutzbretter eingerammt werden können. Von Lesbros sind Versuche angestellt worden erstens für d. Fall d. vollständigen Contraction, 2tens für d. Fall, daß d. Mündung auf d. einen Seite bis nahe an d. Rand d. betreffenden verticalen ebenen Wand nicht bis zur Entfernung von 2 cm; 3tens für d. Fall, daß d. Mündung auf beiden Seiten bis auf 2 cm an d. Seitenwänden d. Wand entfernt liegt; zu allen diesen Fällen A B C wurde noch d. Änderung vorgenommen, daß d. Mündung bis auf d. Boden hinabgerückt wurde, so daß sich A' B' C' ergab. In diesen Fällen waren d. Seitenwände d. Ausflußgefäßes senkrecht gerichtet gegen diese Ausflußwand hin, so daß man aber zuweilen d. Gefäß wie untenstehend ausführt.



Es wurden aber auch, und zwar im Falle C u. C' Versuche angestellt mit d. Abänderung, daß d. beiden Seitenwände d. Gefäßes schräg gegen d. Mündungswand convergirten und zwar unter 45°, so daß sie gegen einander rechtwinklig gerichtet waren. Es zeigte sich, daß in einem solchen Fall d. Ausfluß-Coeff. sich gleich war denen in d. Fällen B u. B'. In allen diesen Fällen hatte nun d. Aufhebung d. Contraction am untern Rand einen etwas anderen Einfluß auf d. Vergrößerung von μ als d. Aufhebung d. Contraction an d. Seitenwänden, wie so auch als d. Contraction an d. Seitenwänden nicht vollkommen aufgehoben wurde. Man kann also d. Formel für alle diese Fälle dahin angeben, daß man setzt:



$$\mu = \mu_0 (1 + x\, p_a + y\, p_b)$$

unter p_a d. Werth von p verstanden, welcher sich auf d. partielle Contraction an d. Seitenwänden bezieht, p_b an d. untern Rande; es ist also im Falle A: $p_a = 0$ u. $p_b = 0$; im Falle A': $p_a = 0$ u. $p_b = \frac{b}{2(a+b)}$;

im Falle B: $p_a = \frac{a}{2(a+b)}$ u. $p_b = 0$; im Falle B': $p_a = \frac{a}{2(a+b)}$ u. $p_b = \frac{b}{2(a+b)}$

im Falle C: $p_a = \frac{a}{a+b}$ u. $p_b = 0$; im Falle C': $p_a = \frac{a}{a+b}$ u. $p_b = \frac{b}{2(a+b)}$.

Die Coeff. x u. y werden natürlich etwas verschieden, da d. Contraction an d. Seitenwänden nicht so vollkommen wie an dem untern Rand. d. Resultate von Lesbros liefern d. Formel:

$$\mu = \mu_0 (1 + 0{,}12\, p_a + 0{,}16\, p_b)$$ —

Endlich ist noch d. Fall bemerkenswerth, daß d. Wand mit d. Ausflußöffnung sich am Ende eines Gerinnes befindet, in d. Wasser schon mit einer namhaften Geschw. d. Mündung zufließt. Also in einem sich horizontalen Gerinne fließe d. Wasser einer verticalen Wand zu, in welcher sich d. rechteckige Ausflußmündung befindet.

Es sei d. Mündung A nicht sehr klein im Vergleich mit d. Querschnitt F_0 d. zufließenden Wassers. d. mittlere Geschw. d. fließenden Wassers sei im Gerinne u_0 und zwar ist diese offenbar:

$$u_0 = \frac{V}{F_0}$$

wo V wie man sehen kann d. Ausflußmenge:

$$V = \mu A \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{\mu A}{F_0}\right)^2}}$$

indem man unter d. mittleren Druckhöhe $H - h$ setzt (h d. Höhe d. Wasserstands im Gerinne über d. Schwerpunkt d. Mündung A). Bezeichnet man nun $\frac{A}{F_0} = n$, so ist:

$$V = \mu A \sqrt{\frac{2gh}{1 - (\mu n)^2}}$$

Allerdings bedeutet

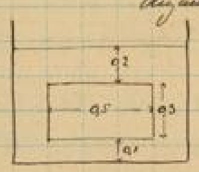
für d. Coeff. μ nicht einen ganz reinen Ausflusscoeff.; er enthält vielmehr noch einen andern Einfluss in sich. Es ist nämlich auch hier vorausgesetzt, daß d. Höhe h gemessen werde in einer solchen Entfernung von d. Ausflusswand, wo d. Wasserspiegel noch nicht merklich sich gegen d. Wand absenkt, gewöhnlich also etwa 1 m von d. Wand. Bei d. vorhergehenden Geschw. erfährt d. Wasser auf d. Strecke von 1 m Länge schon immer einen nicht ganz zu vernachlässigenden Widerstand, so daß d. Höhe h auch d. Widerstandshöhe im Gerinne von dieser Strecke bis zur Wand in sich enthält, und insofern kann es d. Fall sein, daß wenn man für μ d. Wert setzt, denselben Fall für d. Ausfluss d. Wassers aus einem Gefäss, daß man V aus μ zu groß findet. Es sind deshalb von Weisbach besondere Versuche angestellt worden über diesen Fall, wobei er folgende Formel aufstellte:

$$V = \mu' A\sqrt{2gh}$$

wobei nun d. Coeff. μ' mit d. Verhältnissen variabel wird. Dieser begreift dann verschiedene Einflüsse in sich: 1) d. der Contraction 2) d. d. Geschw.-Coeff. φ 3) d. d. Umstandes, daß d. Geschw. im Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls nicht genau gleich d. mittleren Geschw. ist 4) d. des Umstandes, daß d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls in anderer Höhe liegen kann als d. Schwerpunkt d. Mündung. 5) d. d. Zuflussgeschw. u. 6) d. d. Widerstandshöhe, die d. Wasser schon bei d. Lauf im Gerinne erfährt von d. Stelle an, wo h gemessen wird, bis zur Ausflusswand. Er fand, daß d. Coeff. μ' mit genügender Annäherung berechnet werden kann vermittelst folgender empirischen Formel:

$$\mu' = \mu_0 (1 + 0{,}641\, n^2)$$

, wenn gesetzt, daß d. Verhältniss $n < \frac{1}{2}$ ist u. ferner, daß d. Höhe h d. Wasserspiegels im Gerinne über d. Mittelpunkt d. Mündung A gemessen wird in d. Entfernung von 1 m von d. Wand. Würde d. Höhe h gemessen in größerer Entfernung, so würde diese eine noch größere Widerstandshöhe in sich schließen.
Aus demselben Umstand ist es zu erklären, daß d. aus diesen Versuchen entstandenen Werte von μ' kleiner sind als diejenigen Werte, welche μ' nach d. Formel für V haben müsste; es sollte μ' d. Ableitung haben $\mu' = \dfrac{\mu}{\sqrt{1-(\mu n)^2}}$, man findet aber im Allgemeinen μ' kleiner als dieser Wert und dies ist d. Einfluss d. Widerstandshöhe zuzuschreiben. Als Beispiel sei Folgendes zu berechnen:



Angenommen es fließe d. Wasser in einem Gerinne von 0,8 m Breite, welches rechteckigen Querschnitt hat. Angenommen man wolle d. Wassermenge messen, die in dieser Rinne im Beharrungszustand fließt. Zu d. Zweck wird d. Gerinne abgeschlossen durch eine verticale Wand, in welche eine Mündung eingeschnitten wird von $0{,}^m5$ breit und $0{,}^m3$ Höhe und zwar sei diese Mündung an einer solchen Stelle in d. Wand, daß d. untere Rand in einer Höhe $0{,}^m1$ über d. Boden liegt, während d. beiden Seitenränder gleich weit, also um $0{,}^m15$ von d. Seitenwänden d. Gerinnes abliegen. Nachdem dies geschehen ist, wird sich zunächst d. Wasserstand im Gerinne ändern und zwar regelt sich derselbe im Beharrungszustand $0{,}2^m$ über d. oberen Rand d. Mündung und gemessen in einer Entfernung = 1 m von d. Wand. Hieraus soll V berechnet werden.
Zu dem Zweck ist zunächst d. Coeff. μ_0 zu berechnen, welcher Ausflusscoeff. unter übrigens gleichen Umständen, bei vollkommener Contraction gelten würde für d. Ausfluss aus einer verhältnissmäßig großen Wand. In d. früheren Tabelle sind d. Werte von μ, d. hier mit μ_0 bezeichnet werden, nach Werten von a und h_1 geordnet. $a = 0{,}3$ kommt nun in jener Tabelle nicht vor; man muss also zunächst d. Wert von μ_0 aufsuchen für d. danebenliegenden Fall, also für $h_1 = 0{,}2$ und $a = 0{,}2$, wofür man findet $\mu_0 = 0{,}598$. Nun weiss man aber, daß d. Ausflusscoeff. um so kleiner ist, je größer d. kleinere Dimension ist. Es muss also für $a = 0{,}3$ d. Coeff. μ_0 etwas kleiner sein als für $a = 0{,}2$. Es ergibt nun Schätzung durch d. Tabelle $\mu_0 = 0{,}595$ sein. Ferner ist nun: $n = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}8 \cdot 0{,}6} = \dfrac{5}{16}$ also kleiner als $\frac{1}{2}$, so daß d. Weisbach'sche Formel angewendet werden kann. Mit Hilfe derselben ist: $\mu' = 0{,}595\left(1 + 0{,}641\left(\tfrac{5}{16}\right)^2\right) = 0{,}632$. und dann d. Ausflussmenge:

$$V = \mu' A\sqrt{2gh} = 0{,}632 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}35} = 0{,}2484 \text{ cubm.}$$

Es war hier bis vorausgesetzt, entsprechend d. Umständen, unter denen Weisbach diese empirische Formel abgeleitet hat, daß d. Contraction eine unvollkommene oder unvollständige sei. Hier ist eine seitliche Mündung vorausgesetzt, die irgend d. Gefäßwand [illegible] ist. Wäre nun aber d. Contraction gleichzeitig partiell indem z. B. d. Mündung derartig angebracht würde, daß sie sich mit d. unteren Rand bis zum Gerinneboden erstreckt, so würde sie jedenfalls größer ausfallen, aber daß genaue Versuche hierüber vorliegen. In einem solchen Fall kann man sich folgendermaßen helfen:
Es sei für diesen Fall d. Ausflußcoeff. mit μ'' bezeichnet, so wird derselbe größer sein als μ' unter übrigens gleichen Umständen, weil überhaupt bei d. partiellen Contraction d. Coeff. größer ist. Man wird setzen können: $\mu'' = (1+y)\,\mu'$. Diesen Vergrößerungscoeff. kennt man für d. vorliegenden Fall durch direkte Versuche nicht, sondern nur für d. Fall vollkommener Contraction und es sei für diesen Fall bezeichnet mit $1+x$. Dann ist, wenn d. Contraction eine partielle übrigens aber vollkommene wäre: $\mu'' = (1+x)\,\mu_0$, wo μ_0 für vollkommene Contraction gilt. Dieses x kennt man, es ist: $x = 0{,}12\,p_a + 0{,}16\,p_b$ nach Lesbros. D. Vergrößerungscoeff. $1+y$ wird jedenfalls kleiner sein als $1+x$, da d. Contractionscoeff. äußerstenfalls bis zur Einheit wachsen kann; es wäre also möglich, daß $\mu' > 1$ würde, was nicht sein kann; wäre $\mu' = \mu_0$, so wäre $y = x$. Die einfachste Formel, welche diesen Anforderungen entspricht, wäre $\mu'' = \left(1 + \frac{1-\mu'}{1-\mu_0}\,x\right)\mu'$.
Für $\mu' = \mu_0$ würde d. Vergrößerungscoeff. $= 1+x$, wäre aber μ' eine $= 1$, dann müßte μ'' ebenfalls $= 1$ sein; in d. That verschwindet d. ganze Summand, also $\mu'' = \mu'$. Es kann also μ'' nie über d. Einheit wachsen. Genau wird man nur d. entsprechenden Werth von μ'' durch Versuche bestimmen können, wenn bei diesen Versuchen betrifft d. Wassermenge V d. seitliche Mündung so angebracht wird, daß sie bis an d. Gerinneboden sich erstreckt.

Die Dimensionen d. Gerinnes seien unter diesen Umständen dieselben wie vorhin, jedoch würde sich freilich ein anderer Wasserstand herausstellen, es sei aber vorausgesetzt, es fließe eine andere Wassermenge in d. Gerinne, so daß auch in diesem Falle d. Wasserstand im Gerinne 1 m von d. Wand entfernt $= 0{,}6^m$ sei. Dann kann derselbe Werth von μ_0 hier zu Grunde gelegt werden, wie vorhin; es ist ja jetzt h_2 nicht $= 0{,}2$ sondern $= 0{,}3$ m. Wenn man aber d. Fundamentaltabelle von Poncelet-Lesbros ansieht, so bemerkt man, daß für diese kl. Änderung von h fast kein Unterschied eintritt, so daß $\mu_0 = 0{,}595$ gesetzt werden kann. μ' würde dann wie vorhin bestimmt $= 0{,}632$. Dieses wäre d. Ausfluß-Coeff. abgesehen davon, daß am unteren Rand d. Contraction aufgehoben ist. Man hat also nun μ'' nach d. Formel zu bestimmen. In derselben hat x auf Grund d. früher erwähnten Lesbros'schen Versuche d. Werth $x = 0{,}16\,\frac{0{,}5}{2{,}08} = 0{,}05$, und somit ergibt sich:

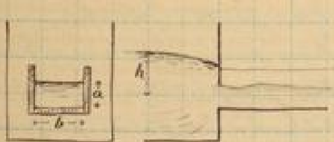
$$\mu'' = \left(1 + \frac{0{,}368}{0{,}405}\,0{,}05\right)0{,}632 = 0{,}661$$

und somit d. pro Sek. durchfließende Wassermenge:

$$V = \mu'' A \sqrt{2gh} = 0{,}661 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}45} = 0{,}2946 \text{ cubm.}$$

S

Bei diesen Fällen d. Ausfließens d. Wassers aus seitlichen Mündungen ist vorausgesetzt worden, daß d. Ausfluß in d. freie Luft erfolge, daß also d. ausfließende Wasserstrahl frei niederfalle.
Es kommt nun häufig d. Fall vor, daß dies nicht so ist, sondern daß sich an d. seitliche Mündung unmittelbar eine Zuflußrinne anschließt, so zwar, daß d. Boden derselben genau d. unteren Rand d. Mündung entspricht und die beiden verticalen Seitenwände d. Gerinnes d. beiden Seitenwänden d. Mündung entsprechen. Das Wasser, welches durch diese Mündung abfließt, kann zunächst eine gewisse Contraction erfahren, indem es sich dann aber wieder [illegible], kommt es mit d. Gerinnewänden in Berührung; dadurch wird ein gewisser Widerstand verursacht, theils in Folge d. Reibung d. Wassers an d. Gerinnewänden, theils weil durch dieses Gerinne d. Wasserstrahl verhindert ist, in parabolischer Bahn niederzufallen. Wenn man also auch für diesen Fall d. pro Sek. ausfließende Wasserquantum V berechnet nach d. Formel: $V = \mu A \sqrt{2gh} = \mu a b \sqrt{2gh}$, unter h d. Höhe d. Wasserspiegels im Gefäß über d. Mittelpunkt d. Mündung verstanden, so wird d. Coeff. μ



kleiner sein, als unter übrigens gleichen Umständen es d. Fall wäre, wenn d. Wasserstrahl frei niedersinkt. Dieser hemmende Einfluss d. Gerinnes bedingt hauptsächlich eine Vergrösserung d. Dr. [illegible] im kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls. Je stärker diese Vergrösserung sei, [illegible] gesetzt, dass d. Gerinneboden horizontal od. doch schwach abwärts geneigt sei oder dass ein besonderer Widerstand im Gerinne vorhanden sei. In solchem Falle wird d. Wasseroberfl. im Gerinne vom d. oberen Rand d. Mündung beginnen, in d. höchsten Punkten d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls d. wird d. Dr. = d. äussern Druck sein und umgekehrt je wird sie wachsen. Wenn man annehmen dürfte, dass im d. kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls d. Wasserfäden parallele gerade Linien bildeten, würde d. Dr. wachsen von oben nach unten entsprechend einfachen hydrostatischen Gesetzen; es würde dann d. Druckhöhe im tiefsten Punkt d. Strahls um d. Leitungsdicke d. Strahls grösser sein als d. obere Druckhöhe und man würde V finden, indem man statt von h setzt $h - \frac{a}{2}$, so dass dann je kleiner wäre als unter übrigens gleichen Umständen bei freiem Abfluss um d. Verhältnis $\sqrt{1-\frac{a}{2h}}$. In der That findet man auch, dass in solchen Fällen d. Ausfluss-Coefficient durch d. Ansatzgerinne gegenüber d. Fall d. freien Ausflusses umso mehr verkleinert wird, je kleiner d. Druckhöhe ist. Jene Voraussetzung, dass d. Linien d. Wasserfäden im d. kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls parallel durchsteigen, ist im Allgemeinen nicht zulässig. d. Theilung d. Wassers bei seinem Lauf im Abflussgerinne erfordert eine gewisse Unterschied an Druckhöhe; ist d. Abflussgerinne genügend stark abwärts geneigt, so kann es d. Fall sein, dass diese Neigung an und für sich hinreicht, um d. Widerstand zu überwinden, dass also d. Wasser mit constantem Querschnitt abfliesst; ist aber d. Gerinne sehr wenig geneigt, so kann diese Druckhöhe nur dadurch hergestellt werden, dass d. Wasser auf d. Contraction sich wieder anstaut und dann allmälig abnimmt. Dieses findet man wie in d. That. Ist dieses aber d. Fall, so sind auch im kleinsten Querschnitt d. Linien d. Wasserfäden merklich gekrümmt und zwar convergirend von oben nach unten, so dass mit einem Abnehmen [illegible] d. Dr. von oben nach unten wächst, so dass also je in noch höherem Grade kleiner ist als unter übrigens gleichen Umständen um $\sqrt{1-\frac{a}{2h}}$. Dieser Umstand wird offenbar in umso höherem Grade sich geltend machen, je länger d. Ansatzgerinne ist und je weniger geneigt es ist. Wenn diese Umstände nur ziemlich auf Verkleinerung von je, so können die Umstände im Gegentheil d. je zu vergrössern streben. Indem nämlich d. ausfliessende Wasserstrahl sich nachher wieder ausdehnt, wird d. Contraction vergrössert. Dabei war eine Voraussetzung gemacht: es war angenommen, dass d. Ansatzgerinne höchstens horizontal oder nur wenig abwärts geneigt sei und dass ein Widerstand durch einen Fehler oder nicht vorhanden sei. Es kann aber auch d. Fall sein, dass in einem solchen Ansatzgerinne noch ein besonderes Hinderniss angebracht worden ist, welches entweder durch eine Wehr od. durch schräge [illegible] Stellung d. Gerinnes gebildet sein kann. Dadurch kann ein so erheblicher Widerstand für d. Abfluss d. Wassers hergestellt werden, dass schon dicht an d. Mündung d. Wasser höher steht als d. obere Rand d. Mündung.

In einem solchen Fall ist es angemessen nicht nach d. Formel: $V = \mu A \sqrt{2gh}$ V zu berechnen, sondern nach d. Formel:

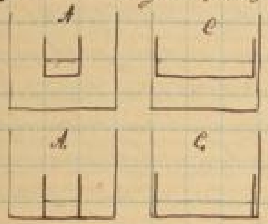
$$V = \mu a b \sqrt{2g(h-h')},$$

wo h' d. ähnliche Bedeutung wie vorher hat, h' aber d. Höhe d. Wasseroberfl. im Ansatzgerinne über d. Schwerpunkt d. Mündung und zwar an einer solchen Stelle gemessen, wo d. Wasser keine höhere Erhebung hat. Wäre h' gleich im Vergleich mit $\frac{a}{2}$, dann wäre d. freie Wasseroberfl. im Ansatzgerinne fast horizontal, es würde dann d. Fall d. Ausflusses unter Wasser stattfinden. In einem solchen Fall wäre nach einer früheren Bemerkung je sehr wenig kleiner als für d. Fall d. Ausflusses in d. freien Luft und zwar ungefähr um 1%. Dieses ist nun aber in d. meisten Fällen nicht so, denn gewöhnlich ist h' nicht sehr gross im Vergleich mit $\frac{a}{2}$; dann wird d. Abflussgeschwindigkeit d. Coefficient von d. verschiedenen Umständen wieder nur durch besondere Versuche einigermassen zuverlässig zu bestimmen sein. Zunächst sind d. betreffenden Versuche von Lesbros zu erwähnen, die sich beziehen auf d. Ausfluss d. Wassers aus einer seitlichen Mündung in einer verticalen ebenen Wand und zwar in einem Ansatzgerinne, welches unterhalb horizontal, d. Sohle [illegible] $\frac{1}{10}$ [illegible] ist, [illegible] Widerstände in diesem Gerinne nicht entstehen; d. Gerinne hatte eine Länge von 2,50 – 3,00. Es liegt also d. Voraussetzung d. Formel $V = \mu\, a\, b \sqrt{2gh}$ zu Grunde. Die Versuche beziehen sich namentlich auf folgende Spezialfälle: A) d. Mündung befindet sich an einer mittleren Stelle in d. verticalen Wand d. Gefäßes; A1) d. Mündung befindet sich in einer mittleren Stelle d. Bodens d. Gefäßes; C) und C1) wie Seite 59, nur mit Ansatzgerinne. Für diese Fälle sind d. Resultate im Anhang zusammengestellt. Es ist nun zu bemerken, daß d. Zahlen dieser Tabelle durchweg kleiner sind als d. Zahlenwerthe von μ bei d. früher besprochenen Lesbros'schen Versuchen, wo sich kein Ansatzgerinne an diese Mündungen anschloß. Daß aber diese Verkleinerung von μ durch d. Ansatzgerinne um so geringfügiger ist, je größer d. Druckhöhe h ist, [illegible] besonders im Falle A [illegible] bei d. [illegible] d. Coeff. μ für d. Fall d. Ausflußgerinnes [illegible] als für d. Fall d. Ausflusses in d. freien Luft. [illegible], daß im Falle A d. Ausflußcoeff. [illegible] Contraction bedingt ist, [illegible] d. Wasser von allen Seiten her d. Mündung zufließt. Diese Contraction wird aber durch d. Ansatzgerinne vermindert und [illegible] d. Ausflußcoeff. vergrößert, so daß für d. Fall [illegible], daß durch [illegible] von α d. Verkleinerung von μ vollständig aufgehoben werden kann. Unter anderen Umständen, als diejenigen, unter denen diese Lesbros'schen Versuche angestellt worden waren, können d. Werthe d. Lesbros'schen Tabelle wenigstens als Verhältnißzahlen benutzt werden, wie [illegible] folgendes Beispiel ersichtlich sein mag:

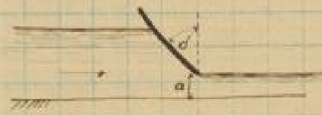
D. Gerinne habe 0,8 Breite, welches am Ende durch eine verticale Wand abgeschlossen wird. In derselben befindet sich eine rechteckige Öffnung von 0,5 m Breite und 0,3 m Höhe, welche sich bis auf d. Boden d. Gerinnes erstrecken soll, also wie in Seite 60–61. [illegible] d. Beharrungszustand [illegible] soll d. Wasserstand 1 m von d. Wand gemessen, [illegible] = 0,9 m über d. oberen Rand. Für diesen Fall wäre, wenn d. Wasser als ein freier Strahl ausfließt, d. Ausflußcoeff. berechnet worden $\mu = 0,661$. Jetzt sei vorausgesetzt, d. Wasser fließe nicht als ein freier Strahl aus dieser Mündung aus, sondern es schließe sich an diese Mündung ein Ansatzgerinne, wodurch d. Wasser abfließt [illegible]. Unmittelbare Versuche sind über einen solchen Fall von Lesbros nicht angestellt worden. D. Fall, welcher hier vorliegt, liegt [illegible] zwischen A1 u. C1; nun ist nach d. Lesbros'schen Tabelle in diesen beiden Fällen A1 u. C1 für d. Fall d. freien Ausflusses d. Ausflußcoeff. $= 0,621$ resp. $0,699$ daß für d. hier vorliegenden Werth von h und a. Für dieselben Fällen [illegible] d. Ausfluß durch ein Ansatzgerinne erfolgt, ist d. Ausflußcoeff. nach Lesbros resp. 0,575 u. 0,599. Da nun d. hier vorliegende Fall als zwischen A1 und C1 liegend angenommen werden kann, so wird man hier sagen dürfen, es wird d. Ausflußcoeff. durch d. Ansatzgerinne verkleinert ungefähr um

$$\frac{0{,}575 + 0{,}599}{0{,}621 + 0{,}699} = 0{,}9,$$

so daß d. Ausflußcoeff. wird: $\mu = 0{,}661 \cdot 0{,}9 = 0{,}595$. Hieraus sieht man wie d. einzelnen Zahlenwerthe auch als Verhältnißzahlen angewendet werden können. —



Von praktischem Interesse ist ferner d. Fall, daß d. rechteckige Mündung sich in einer schräg stehenden ebenen Wand befindet, welche mit einem in gleicher Breite fortlaufenden Gerinne unter einem gewissen Winkel gegen d. Verticale geneigt [illegible] ist; dieser Winkel sei $= \delta$. Unten dieser schrägen ebenen Wand befindet sich d. rechteckige Durchflußöffnung, die sich mit d. unteren Rande bis zum Boden erstreckt. Hier findet d. Contraction an Wasserfläche nur am oberen Rand statt und auch hier nur in einem geschwächten Maße. Dieser Fall ist namentlich von Interesse für d. Fall d. Wasserzuführung zu Wasserrädern, weil diese schräge Wand d. Zweck hat, d. Durchflußöffnung möglichst nahe an d. Rad anzubringen. Für diesen Fall



sind von Poncelet Versuche angestellt worden und dabei hat sich d. Ausflusscoeff. $\mu = 0{,}7 \quad 0{,}74 \quad 0{,}8$, ergeben gemessen $tg\,\delta = 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$ an. Diese Werthe von μ beziehen sich auf d. Formel für $V = \mu a b \sqrt{2gh}$, wo a d. Höhe d. Ausflussöffnung bedeutet, die aber senkrecht gemessen ist zum Boden d. Wand, b d. Breite d. Mündung und h d. Höhe d. Oberwasserspiegels über d. Mittelpunkt d. Mündung. D. Fall $tg\,\delta = 0$ würde dem einer verticalen Wand entsprechen, welchen Fall wir schon durchgenommen haben. Für diesen Fall ergeben sich freilich aus d. Lesbros'schen Versuchen merklich kleinere Werthe von μ als 0,7 nämlich 0,63 bis 0,65. Diese Differenz kann daher rühren, daß d. Poncelet'schen Mündungen erheblich breiter als d. Lesbros'schen waren. Ferner d. Contraction an d. Seiten werden nur sehr schwach sein, ... für sich geringer sein als bei d. Lesbros'schen Versuchen; ausserdem steht bei d. Poncelet'schen Versuchen d. Wasser d. Mündung mit einem ... Geschw. zu. Bei d. Poncelet'schen Versuchen war h gemessen dort, wo d. Wasser schon eine bedeutende Geschw. hatte, bei d. Lesbros'schen dort, wo es in Ruhe war. In solchen Fällen, wo unter übrigens gleichen Umständen $\mu = 0{,}7$ wäre, können diese Poncelet'schen Zahlen wenigstens als Verhältnisszahlen benutzt werden. D. Ausflusscoeff. ~~...~~ ... wird vergrössert um $\frac{0{,}75}{0{,}7}$, wenn d. Winkel δ vermindert wird, daß $tg\,\delta$ nicht $= 0$ sondern $= \frac{1}{2}$ ist. Für d. Fall, daß $tg\,\delta$ wenig grösser als 1 ist, kann man d. Vergrösserungscoeff. allgemein gleich setzen:

$$1 + \frac{6\,tg\,\delta + 4\,tg^2\delta}{70}$$

für $tg\,\delta = \frac{1}{2}$ geht dieser Ausdruck über in $\frac{74}{70}$ und für $tg\,\delta = 1$ in $\frac{8}{7}$. — Wenn man also d. Ausflusscoeff. für einen gewöhnlichen Fall bestimmt, so würde eine Neigung d. Wand um δ denselben um diese Grösse vergrössern. Für diese ... hat Poncelet ausserdem einen Geschw.-Coeff. φ ermittelt, d. durchschnittlich $= 0{,}93$ war. Diese Versuche beziehen sich also auf d. Fall, daß d. Abflussgerinne horizontal od. beinahe ... genommen war. Was nun aber d. anderen Fall betrifft, in welchem d. Gerinne, welches sich an d. rechteckige Mündung anschliesst, in d. Höhe gehoben ist, od. wenn ... so daß dann d. Oberfl. d. im Gerinne abfliessenden Wassers höher als d. Rand d. Mündung steht, so sind über diesen Fall in d. Jahren 1866 u. 67 besondere Versuche von Bornemann angestellt worden. Bei diesen Versuchen handelt es sich auch um ein ... Gerinne, welches d. Gerinne (Ansatz) ... d. Fortsetzung d. Zuflussgerinnes war. D. rechteckige Mündung befand sich in einer verticalen Wand und zwar unten i. Wand, so daß d. untere Rand d. Mündung bis an d. Boden d. Gerinnes reichte und d. Seitenwände d. Mündung ebenfalls bis an d. Seiten d. Gerinnes reichten. D. Gerinne hatte eine Breite von 1,135 m. An einer Stelle waren 2 Schützen eingesetzt, welche zwischen sich eine Durchflussöffnung frei liessen von 0,006 m Breite. Diese Schützen dienten als Widerlager für ein Schutzbrett, welches eine Dicke von 4 cm hatte. D. Versuche und zwar im Ganzen 15 bezogen sich auf verschiedene Werthe d. Oeffnungshöhe a und zwar für a = 0,034 m bis 0,174 m. Bezeichnet h d. Höhe d. Oberwasserspiegels bis zur Mündungsmitte, h_1 d. Höhe d. Unterwasserspiegels über denselben Punkt, wobei zu beachten ist, daß d. Höhe h_1 gemessen werden muss an d. Stelle, wo d. Unterwasser seine grösste Höhe hat und möglichst in Ruhe ist. So umfassten dann d. Versuche solche Werthe von $\frac{a}{h_1}$, welche zwischen d. Grenzen 0,17 — 0,85 lagen; d. Werthe von h_2 d. h. d. Höhe d. Oberwasserspiegels über d. oberen Rand d. Mündung, lagen zwischen d. Werthen 0,09 — 0,42 m. Natürlich ist es diesem Fall eine entsprechende ... Formel zu Grunde zu legen: $V = \mu a b \sqrt{2g(h-h_1)}$. Bornemann versuchte nun d. erhaltenen Werthe von μ, welche sich aus d. ... Versuchsergebnissen ... Formel ... darzustellen: $\mu = \alpha + \beta \frac{a}{h_1}$, wenn d. Coeff. α u. β bestimmt wurden mit Hilfe d. Methode d. kleinsten Quadrate: $\alpha = 0{,}63775$ und $\beta = 0{,}29995$. D. dieser Rechnung entsprechende wahrscheinliche grösste Fehler ist: 0,0109. —