Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Wärmetheorie & Hydraulik

Pieper, Andreas

Karlruhe, 1872/73

Untersuchung d. strömenden Bewegungen von Flüssigkeiten

urn:nbn:de:bsz:31-279864

Visual Library

Demnach ~~[illegible]~~ sind d. von d. ersten Schwungzugskraft d. relativen Bewegung herrührenden beschleunigenden Theile d. Beschl.-Componenten der gesammten Massenkräfte:

Im Sinne d. X Axe: $\omega^2 x + \frac{d\omega}{dt} y$ (kommt zu X hinzu)

" " Y Axe: $\omega^2 y \div \frac{d\omega}{dt} x$ (kommt zu Y hinzu). —

Die 2te Schwungzugskraft hängt bekanntlich ab von d. relativen Geschw. d. Punktes A gegen d. Coord.-System. Ist nämlich u_{xy} d. Projection d. relativen Geschw. des beliebigen materiellen Punktes A gegen d. Coord.-System auf die zur Rotationsachse OZ senkrechte XY Ebene, so ist d. durch d. 2te Schwungzugskraft bewirkte Beschleunigung bekanntlich $= 2\omega u_{xy}$ und zwar hat sie eine senkrechte Richtung zu Z Axe und d. Projection u_{xy} senkrechte Richtung, und zwar in solchem Sinne, daß eine Drehung von 90° um d. Z Axe im Sinne von ω diese letztere Beschl. in d. Richtung von u_{xy} versetzen würde. Ist nun α d. Winkel zwischen u_{xy} und d. X Axe, so sind d. Componenten d. Beschl. $2\omega u_{xy}$ offenbar:

Im Sinne d. X Axe: $= 2\omega u_{xy} \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = 2\omega u_{xy} \sin\alpha$

" " " Y Axe: $= 2\omega u_{xy} \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \div 2\omega u_{xy} \cos\alpha$.

Nun ist aber offenbar $u_{xy} \sin\alpha = u_y$ und $u_{xy} \cos\alpha = u_x$ die Componenten d. relativen Geschw. d. materiellen Punktes im Sinne d. Y und X Axe, so daß d. fraglichen Beschl.-Componenten herrührend von d. 2ten Schwungzugskraft auch sind: $= 2\omega u_y$ im Sinne d. X Axe und $\div 2\omega u_x$ im Sinne d. Y Axe. —

Demnach werden nun d. Componenten d. Beschl. d. Gesammtmassenkräfte:

$$\mathfrak{X} = g.\sin\vartheta.\cos\left[\int_0^t \omega\, dt\right] + \omega^2 x + \frac{d\omega}{dt} y + 2\omega u_y$$

$$\mathfrak{Y} = \div g.\sin\vartheta.\sin\left[\int_0^t \omega\, dt\right] + \omega^2 y \div \frac{d\omega}{dt} x \div 2\omega u_x$$

$$\mathfrak{Z} = g.\cos\vartheta$$

In den meisten Fällen vereinfachen sich diese Ausdrücke noch dadurch, daß d. Leitflächen und mit ihnen d. an denselben feste Coord.-System um d. feste Axe mit constanter Winkelgeschw. rotiren, wie bei d. Wasser welches durch eine Turbinenrinne fließt. Wenn aber $\omega = const.$ ist, so folgt: $\int_0^t \omega\, dt = \omega \int_0^t dt = \omega t$ und dementsprechend d. Ausdrücke für $\mathfrak{X}$ u. $\mathfrak{Y}$.

Untersuchung d. strömenden Bewegungen von Flüssigkeiten.

In den meisten Fällen, welche in d. Praxis vorkommen, ist d. strömende Bewegung d. Flüssigkeiten durch Leitflächen derartig eingeschränkt, daß man von vornherein d. Bahnen bestimmen kann, welche von d. verschiedenen materiellen Punkten durchlaufen werden, namentlich wenn man von stoßweisen und wirbelförmigen Bewegungen absieht, deren Einfluß später durch empirische Coefficienten in Rechnung bringt. Wenn z. B. Wasser in einer geraden cylindrischen Röhre strömt, so ist es offenbar anzunehmen, daß alle Wassertheilchen parallele Linien mit d. Mittellinie d. Cylinders durchlaufen. Ebenso werden auch ganz offenbar d. Bahnen aller Flüssigkeitstheilchen, welche einen kegelförmigen Canal durchfließen, in dessen Spitze [illegible] zusammentreffen. Ähnlich wird d. Bewegung bei vielen anderen Fällen sein. Dadurch wird natürlich von vornherein d. Aufgabe ganz wesentlich vereinfacht, indem d. Bewegungszustand ~~durch eine einzige~~ Größe vollkommen bestimmt ist. Also statt d. 3 unbekannten Geschw.-Componenten u_x u_y u_z bleibt hier nur d. Größe u zu jedem Orte und zu jeder Zeit hinzu[illegible]. Wenn ferner d. Verhältnisse derart sind, daß noch eine gewisse Beziehung zwischen

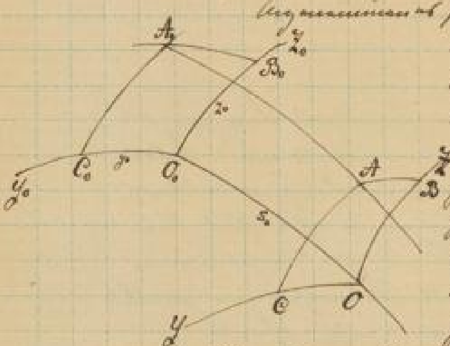
d. Dr. p und d. spec. Volumen v nach d. Zustandsgl. vernachlässigt werden darf, so sind es überhaupt nur 2 Größen, d. als Functionen d. Orts und d. Zeit bestimmt werden müssen, nämlich d. Geschw. u und d. Dr. p und es handelt sich darum, allgemeine G. aufzustellen, vermittelst deren namentlich diese beiden Größen u u. p bestimmt werden können, wenn d. Linien gegeben sind, d. von d. Flüssigkeitstheilchen durchlaufen werden.

Dabei ist es in d. Regel vortheilhaft das bisher vorausgesetzte rechtwinklige Coord.-System aufzugeben und es zu ersetzen durch ein anderes Coord.-System, welches sich unmittelbar anschließt an d. Stromlinien. Zu dem Ende mögen folgende Festsetzungen dienen.

Unter einem Querschnitt d. strömenden Flüssigkeit sei jede Fl. zu verstehen, welche d. ganze System von gegebenen Linien rechtwinklig schneidet. Ist d. gegebene Fläche an d. Oberfl. d. strömenden Flüssigkeit jedenfalls ein Theil dieser Linie in sich enthaltend, d. Oberfl. d. Flüssigkeit bildet begrenzt von dieser Fläche hindurch, so wird auch diese Fläche von d. Querschnitt rechtwinklig geschnitten. Z. B. im Falle einer weiten Röhre würde, wenn d. Linien alle in einem Punkte convergieren, d. System d. Querschnitte concentrische Kugelfl. sein. Durch ein solches System von in unendl. kl. Abständen sich befindenden Querschnitten kann man sich d. Flüssigkeit in unendl. dünne Schichten zerlegen; irgend ein solcher Querschnitt sei bezeichnet mit $\mathfrak{J}$. Um nun innerhalb eines solchen Querschnitts d. Ort eines Punktes zu fixieren, erscheint es angemessen, 2 Systeme von sich rechtwinklig schneidenden Curven in einem solchen Querschnitt anzunehmen. Ist so im Allgemeinen A irgend ein Punkt d. Querschnitts $\mathfrak{J}$, AS d. Linie, welche durch diesen Punkt hindurchgeht, welche also in A d. Querschnitt $\mathfrak{J}$ rechtwinklig schneidet. Diese im Allgemeinen doppelt gekrümmte Linie AS hat in A 2 ausgezeichnete Normalen, den Krümmungsradius und d. Binormale senkrecht zu d. ersteren; beide Normalen fallen natürlich in d. Berührungsebene d. Querschnitts $\mathfrak{J}$.

Stellen wir uns insbesondere d. Krümmungsradius d. Linie AS vor, wenn man im Querschnitt $\mathfrak{J}$ diesem Krümmungsradius um ein unendl. kl. Stück AA_1 folgt, so wird d. Querschnitt auch in A_1 rechtwinklig von A_1S_1 geschnitten. Nun denke man sich wieder ein unendl. kl. Linienelement gezogen für d. Krümmungsradius d. Linie A_1S_1, so erhält man eine Curve in d. Querschnittsfl., welche dadurch charakterisiert ist, dass ihre sämmtlichen Tangenten zusammenfallen mit d. Krümmungsradien d. Linien, welche durch d. betreffenden Punkte d. Querschnitts $\mathfrak{J}$ hindurchgehen.

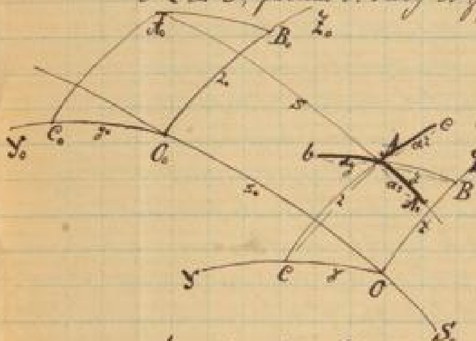
Diese Curven seien d. Krümmungscurven genannt. Denkt man nun ein solches System von Krümmungscurven in d. Querschnitt angenommen, so kann man sich dieses System von Krümmungscurven durch ein anderes Curvensystem rechtwinklig durchschnitten denken, welche d. Normalcurven genannt werden sollen und welche dadurch charakterisiert sind, dass deren Tangenten zusammenfallen mit d. Binormalen d. Linien, welche durch diese Punkte hindurchgehen. Hiernach lässt sich nun d. Lage irgend eines beliebigen Raumpunktes, in welchem d. strömende Bewegung d. Flüssigkeit stattfindet, durch 3 Coord. bestimmen.



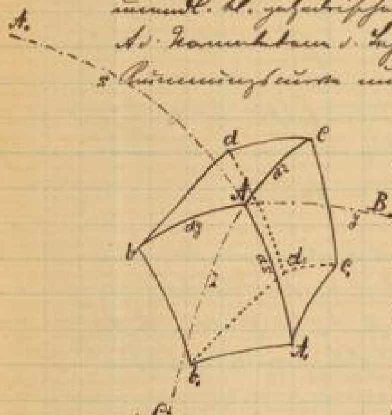
Angenommen es sei $\mathfrak{J}_0$ irgend ein bestimmter Querschnitt d. strömenden Flüssigkeit, von welchem ausgegangen wird; in diesem Querschnitt werde d. Punkt O_0 gewissermaßen als Ursprung eines curvenförmigen Coord.-Systems angenommen; es sei O_0Y_0 d. durch d. Punkt O_0 im Querschnitt $\mathfrak{J}_0$ gehende Krümmungscurve und O_0Z_0 sei d. durch d. Punkt O_0 gehende Normalcurve und endlich O_0S_0 sei d. durch O_0 gehende Linie. Um nun d. Lage irgend eines beliebigen Punktes A durch 3 Coord. zu bestimmen, kann man sich durch diesen Punkt A d. betreffenden Querschnitt $\mathfrak{J}$ gelegt denken, welcher von d. Linie O_0S_0 ein gewisses Stück $O_0O = S$ abschneiden wird; ist umgekehrt dieses Stück $O_0O = S$ gegeben, so ist damit d. Querschnitt $\mathfrak{J}$ gegeben. Um nun d. Lage d. Punktes A in d. Querschnitt $\mathfrak{J}$ zu bestimmen, kann man so verfahren, dass man sich d. Linie denkt, welche durch d. Punkt A hindurchgeht. Dieselbe schneidet d. Querschnitt $\mathfrak{J}_0$ in A_0; durch d. Punkt A_0 werde in d. Querschnitt $\mathfrak{J}_0$ erstens d. Krümmungscurve A_0B_0 und zweitens d. Normalcurve A_0C_0 gelegt, d. erstere schneidet O_0Z_0 in B_0 und d. letztere O_0Y_0 in C_0 und hiernach kann man d. 3 Größen $O_0O = S$, $O_0C_0 = y$ und $O_0B_0 = z$ als Coord. d. Punktes A betrachten. Durch diese 3 Größen ist d. Lage d. Punktes A bestimmt, denn durch d. Bogen $O_0C_0 = y$ ist d. Normalcurve C_0A_0 bestimmt, durch d. Bogen

$O_0 B_0 = z_0$ ist d. Krümmungslinie $B_0 A_0$ bestimmt und durch $O_0 O = s$ auch $A_0 A$.

Man kann auch d. Coord. d. Punktes A anders festsetzen. Zu dem Zweck denke man sich im Durchschnitt $\mathfrak{S}$ vom Punkt O aus gezogen d. betreffende Krümmungscurve OY gezogen, ebenso d. betreffende Normalencurve OZ, ferner d. durch d. Punkt A gehende Krümmungscurve im Durchschnitt $\mathfrak{S}$, diese schneidet d. Curve OZ in B, ferner d. durch A gehende Normalencurve, welche OY in C schneiden möge. Ist hier nun d. Länge $A_0 A$ d. durch A gehenden Linie = s, ferner d. Curvenbogen AB d. durch A gehenden Krümmungscurve = y, d. Bogen AC d. durch A gehenden Normalencurve = y. z. Zeichnen durch d. 3 vom Punkt O_0 auslaufenden Größen $s_0\ y_0\ z_0$ d. Lage d. Punktes A ... nach d. Lagen s y z bestimmt sind, so werden umgekehrt auch durch s y z, welche von A auslaufen, $s_0\ y_0\ z_0$ bestimmt sein, und es können auch diese 3 Größen s y z als Coord. von A betrachtet werden, welche gerechnet werden sollen s von A_0 gegen A, y von B gegen A und z von C gegen A. Ebenso als ob sie ein rechtwinkliges Coord.-System, so würden diese Coord. von A identisch sein,



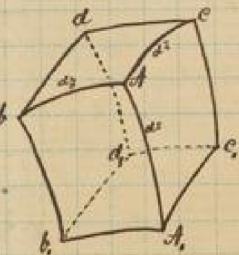
wenn wie $s = s_0$ $y = y_0$ und $z = z_0$, hier ist aber im Allgemeinen nicht d. Fall. Im Folgenden sollen immer s y z als Coord. d. Punktes A betrachtet werden. Ich denke mir nun von Punkt A aus auf d. hindurchgehenden Linie und zwar im Sinne, in welchem d. Bogen s wächst, ein unendl. kl. Bogenelement $AA_1 = ds$ abgetragen, ferner auf d. durch d. Punkt A gehenden Krümmungscurve von A aus und zwar im Sinne, in welchem d. Bogen BA = y wächst, ein unendl. kl. Bogenelement Ab = dy abgetragen und endlich in d. Richtung von C gegen A hin AC = dz abgetragen. Diese 3 von A ausgehenden unendl. kl. und deshalb auch als gerade Linien zu betrachtenden Bogenelemente bestimmen als Kanten ein unendl. kl. ... Raumelement, welches ... bilden ist: Man denke sich durch A_1 d. Normalebene d. Linie, welche bAC ist, ferner durch A_1 d. Normalebene $A_1 AC$ d. betreffenden Krümmungscurve und drittens d. Normalebene $A_1 Ab$ d. betreffenden Normalencurve gelegt.



Ferner denke ich mir durch A_1 d. Normalebene zur Linie, diese schneidet d. Ebene $A_1 Ab$ in $A_1 b$ und d. Ebene $A_1 AC$ in $A_1 C_1$, ferner denke ich mir durch b d. Normalebene d. Krümmungscurve Ab gelegt, sie schneidet bAA_1 in bb_1 und Ebene bAC in bd, also ist $b_1 bd$ d. Normalebene d. Krümmungscurve Ab für d. Punkt b. Endlich denke ich mir durch C d. Normalebene d. Normalencurve AC, sie ist $C_1 C d_1$. Durch diese 6 Ebenen wird ein geschlossenes Raumelement bestimmt, dessen übrige Kanten d. punktirten $b_1 d_1$ $C_1 d_1$ und dd_1 sind. Das Raumelement ist aber nicht parallelepipedisch, sondern Kanten und Flächenwinkel werden nur an d. Ecke A gebildet. D. durch d. Punkt A gehende zur Linie senkrechte Seitenfl. dieses geschlossenen Elements also bdc sei bezeichnet mit f_s, ferner d. durch A gehende zur Krümmungscurve senkrechte Seitenfl. also $A_1 Ac$ mit f_y und endlich $A_1 Ab$ mit f_z. Da diese von A auslaufenden Kanten AA_1, Ab und AC sich rechtwinklig schneiden, so können diese 3 Seitenfl. mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung einfach gleich gesetzt werden d. Producte je zweier von A auslaufenden Kanten, also:

$$f_s = dy\,dz \qquad f_y = ds\cdot dz \qquad f_z = ds\cdot dy.$$

Die Seitenfl., welche d. Seitenfl. f_s gegenüberliegt, also $b_1 A_1 c_1$ wird unendl. wenig von f_s verschieden sein und sie deshalb bezeichnet mit $f_s + df_s$; die Seitenfl., welche f_y gegenüberliegt, sei bezeichnet mit $f_y + df_y$ und d. Seitenfl., welche f_z gegenüberliegt, sei bezeichnet mit $f_z + df_z$. Mit demselben Recht, mit welchem man f_s = d. Product d. von A auslaufenden Seiten dy dz gesetzt hat, kann man auch $f_s + df_s$ also $b_1 d_1 c_1$ = d. Product d. von A_1 auslaufenden Seiten setzen $= A_1 b_1 \cdot A_1 C_1$, weil d. Winkel $b_1 A_1 C_1$ sich von einem R nur um eine unendl. kl. Größe d. 1ten Ordnung unterscheidet, es ist nämlich $b_1 A_1 C_1$ eine Ebene, welche mit d. Ebene bAC nur einen unendl. kl. Winkel bildet. — Ebenso schließt man, daß auch für d. Seitenebenen $f_y + df_y$ d. Winkel $b_1 b d$ nur unendl. wenig d. 1ten Ordnung von einem R verschieden ist, so daß auch: $f_y + df_y = bb_1 \cdot bd$; ist und ebenso $f_z + df_z = CC_1 \cdot Cd$. Es kommt also nur darauf an, diese Seitenlängen, um welche es sich hier handelt, auszudrücken. Zu dem Zweck verschafft man sich Folgendes:



[illegible] $A A_1$ [illegible] A [illegible] ρ [illegible] + [illegible] + y [illegible] $A_1 b$ [illegible] A [illegible] $b A$ [illegible] $C A$ [illegible] ρ' [illegible] Ab [illegible] ρ'' [illegible] AC [illegible] + [illegible] $A A_1$ [illegible] + [illegible] Ab [illegible] $A_1 b$ [illegible] A [illegible] $\frac{ds}{\rho}$, [illegible]: $bb_1 = ds(1 - \frac{dy}{\rho})$. [illegible] ρ' [illegible] Ab [illegible] + [illegible] AA_1 [illegible] bb_1 [illegible] $\frac{dy}{\rho'}$, [illegible] $A_1 b_1 = dy(1 - \frac{ds}{\rho'})$ [illegible] AC [illegible] AA_1 [illegible] ρ'' + [illegible] AA_1 [illegible] CC_1 [illegible] $\frac{dz}{\rho''}$ [illegible]: $A_1 C_1 = dz(1 - \frac{ds}{\rho''})$.

[illegible] bd [illegible] Cd [illegible] AC [illegible] bd [illegible] Ab [illegible] $\frac{dy}{r'}$, [illegible] r' [illegible] bd [illegible] AC [illegible]: $Cd = dy(1 + \frac{dz}{r'})$; [illegible] Ab [illegible] Cd [illegible] AC [illegible] $\frac{dz}{r''}$, [illegible] r'' [illegible]: $bd = dz(1 + \frac{dy}{r''})$. [illegible] A [illegible]:

$$f_s + df_s = b_1 A_1 c_1 d_1 = A_1 b_1 \cdot A_1 c_1 = dy\, dz\, (1 - \frac{ds}{\rho'})(1 - \frac{ds}{\rho''}) = f_s (1 - \frac{ds}{\rho'} - \frac{ds}{\rho''}).$$

$$f_y + df_y = b_1 b d d_1 = bb_1 \cdot bd = ds\, dz\, (1 - \frac{dy}{\rho})(1 + \frac{dy}{r''}) = f_y (1 - \frac{dy}{\rho} + \frac{dy}{r''})$$

$$f_z + df_z = c_1 c d d_1 = cc_1 \cdot cd = AA_1\, dy\, (1 + \frac{dz}{r'}) = f_z (1 + \frac{dz}{r'}).$$

[illegible] $cc_1 = AA_1$ [illegible] $b_1 A_1 c_1$ [illegible] A_1 [illegible] A_1 [illegible] $A_1 Ab$ [illegible] $b_1 A_1 c_1$ [illegible] $A_1 Ab$ [illegible] $C_1 A_1 A$ [illegible] $A_1 AC$ [illegible] $A_1 Ab$. [illegible] $A_1 Ab$ [illegible] AC [illegible] $A_1 C_1$ [illegible] AC, [illegible] $AA_1 = cc_1$. –

[illegible] dV, [illegible]: $dV = f_s ds = f_y dy = f_z dz$.
[illegible]:

$$df_s = -(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''})\, dV; \quad df_y = (\frac{1}{r''} - \frac{1}{\rho})\, dV \text{ und } df_z = \frac{1}{r'}\, dV.$$

[illegible] A [illegible] AX AY [illegible] AZ [illegible] $u\ v\ w$ [illegible] A [illegible] AX AY [illegible] AZ. [illegible] A [illegible] AZ [illegible] AX AY [illegible] von d. Ausdehnungen und Verschiebungen, die inneren Spannungen abhängig sind von d. relativen Geschw. von Punkt zu Punkt im Raume. Wenn man sich d. innere Spannung pr. Fl.einheit, welche im Punkt A d. Ebene YAZ stattfindet, in 3 Comp. zerlegt denkt, so sei d. erste bezeichnet mit σ_x und d. anderen mit τ_{xy} und τ_{xz}. So haben dann diese 3 Comp. d. spez. inneren Spannung in A d. Ebene YAZ folgende Ausdrücke:

$$\sigma_x = 2R\frac{du}{dx} \qquad \tau_{xy} = R\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \text{ und } \tau_{xz} = R\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right).$$

R bedeutet hierbei eine Constante, welche nur versuchsmäßig bestimmt werden kann, und für verschiedene Flüssigkeiten und verschiedene Zustände derselben Flüssigkeit verschieden ist. — Wendet man dies nun an, um im vorliegenden Fall für d. 6 Begrenzungsfl. d. zu betrachtenden Flüssigkeitselements d. inneren Spannungen zu erhalten. Was d. Vorzeichen betrifft, so ist hinzuzufügen, daß d. inneren Spannungscomp. vorausgesetzt sind als d. Resultat d. Einwirkung d. im Sinne d. positiven Axen gelegenen Flüssigkeitselemente auf jenes d. Ebene XYZ gelegenen. Wenden wir dies nun an, so erhalten wir:

1) d. Fl. $bAC = f_s$ betreffend. Hier ist an Stelle von AX, AA, zu setzen, folglich an Stelle d. X Axe für d. S Axe tritt. Unter dieser Voraussetzung ist hier u, was durch d. Geschw.-Comp. im Sinne d. X Axe bedeutete, für d. resultierende Geschw. d. Sohle S, wogegen d. anderen Geschw.-Comp. = 0 sind. Damit ergibt sich d. innere Spannung, welche in d. Fl. bAC stattfindet $= f_s$: 1) im Sinne $AA_1 = 2R\frac{du}{ds}f_s$, nach Richtung Ab; 2. Comp. d. inneren Spannung in dieser Richtung: $= R\frac{du}{dy}f_s$ und nach AC . . . . $= R\frac{du}{dz}f_s$, wobei aber berücksichtigt werden muß, daß d. hier in Betracht [illegible] Flüssigkeitstheilchen von d. Seitenfl. f_s nicht im Sinne d. positiven S liegend gelegen sind, sondern umgekehrt, sonst d. Zeichen $\div$ hinzuzufügen sind:

Also nach $AA_1 = \div 2R\frac{du}{ds}f_s$ $\quad$ nach Ab: $\div R\frac{du}{dy}f_s$ $\quad$ nach AC: $\div R\frac{du}{dz}f_s$

2) Was d. Seitenebene $AAC = f_y$ betrifft, so gelten hier ganz analoge Ausdrücke für d. betreffenden Comp. d. inneren Spannung. σ_y d. Normalcomp. d. inneren Spannung ist $= 0$, weil $v = 0$ ist, d. Comp. τ_{yz}, welche d. Factor $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$ enthält, ist auch $= 0$, weil $v = w = 0$ ist, es bleibt nur d. Spannung übrig, welche d. Richtung AA_1 hat und welche ist $= \div R\frac{du}{dy}f_y$, weil d. angrenzenden Flüssigkeitstheile im Sinne d. negativen Y Axe gelegen sind, demnach d. Componenten nach d. drei [illegible] Richtungen:

nach AA_1: $-R\frac{du}{dy}f_z$ $\quad$ nach Ab: 0 $\quad$ nach AC: 0.

3) Was d. dritte an A herantretende Seitenfl. $f_z = A_1Ab$ betrifft, so sind d. betreffenden Comp. d. spez. inneren Spannung hier zu bezeichnen mit σ_z, τ_{zs} und τ_{zy}; σ_z ist $= 0$ weil d. Geschw.-Comp. $w = 0$ ist, τ_{zy} ist $= 0$ weil auch d. Geschw. $v = 0$ ist; es bleibt also nur τ_{zs} übrig, eine innere Spannung nach Richtung AA_1, welche im Allgemeinen $= R\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{ds}\right)$ ist, also mit $w = 0$:

nach AA_1: $-R\frac{du}{dz}f_z$ $\quad$ nach Ab: 0 $\quad$ nach AC: 0

4) Gehen wir nun zur Seitenfl. $bA_1C_1 = f_s + \partial f_s$ über, um diejenige innere Spannung zu erhalten, welche in dieser Seitenfl. und zwar nach d. Richtung d. Tangente an d. Sohle im Punkte A_1 stattfindet, so haben wir nur nöthig an Stelle von f_s zu setzen $f_s + \partial f_s$ und zu $\frac{du}{ds}$ d. partielle Differential von $\frac{du}{ds}$ nach S hinzuzufügen und außerdem d. Vorzeichen umzukehren, weil hier d. angrenzenden Flüssigkeitstheile demnach im Sinne d. positiven S gelegen sind, also d. innere Spannung $= +2R\left(\frac{du}{ds} + \frac{d^2u}{ds^2}ds\right)\left(f_s + \partial f_s\right)$, ebenso erhält man d. Comp. d. inneren Spannung in dieser Seitenfl. nach d. Richtungen A_1b_1 und A_1C_1, wenn man d. Vorzeichen wechselt, zu $\frac{du}{dy}$ resp. $\frac{du}{dz}$ ihre partiellen Differentiale bezüglich S hinzufügt und an d. Stelle von f_s nimmt $f_s + \partial f_s$ setzt. Demnach hat man d. folgenden Componenten:

nach AA_1: $2R\left(\frac{du}{ds} + \frac{d^2u}{ds^2}ds\right)\left(f_s + \partial f_s\right)$ — nach A_1b_1: $R\left(\frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dy\,ds}ds\right)\left(f_s + \partial f_s\right)$; nach A_1C_1: $R\left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz\,ds}ds\right)f_s$

5) Was d. Seitenfl. $f_y + \partial f_y = b_1bd$ betrifft, so erhält man für diese d. darin stattfindende innere Spannung und zwar nach d. Richtung bb_1, wenn man d. Ausdruck unter Berücksichtigung [illegible] nimmt, zu $\frac{du}{dy}$ d. partielle Differential nach y hinzufügt und für f_y setzt $f_y + \partial f_y$. Also d. Componenten:

nach bb_1: $R\left(\frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dy^2}dy\right)\left(f_y + \partial f_y\right)$

6) Ebenso behandelt nach d. Richtung in d. Seitenfl. $f_z + df_z$, für d. nach CC_1: $\mathcal{R}\left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}dz\right)(f_z + df_z)$.

Dabei ist zu bemerken, daß während d. Kräfte unter 1) 2) u. 3) d. Richtungen AA_1, Ab und AC haben, d. Kräfte unter 4 5 u. 6 streng genommen nicht diese Richtungen haben, sondern etwas abweichende. Z.B. zunächst d. unter 4) stehenden. Die erste Kraft welche in $f_s + df_s$ nach d. Richtung d. Tangente an d. Linie im Punkte A_1 angreift, läßt sich zerlegen in 2 Comp. nach d. Richtungen AA_1 und Ab. Da d. Tangente d. Linie im Punkte A_1 mit d. Tangente d. Linie im Punkte A nur einen unendl. kl. Winkel bildet, dessen cos. also nur um eine unendl. kl. Größe 2ter Ordnung von d. Einheit verschieden ist, so kann d. Comp. dieser Kraft genommen nach d. Richtung AA_1 d. unter 4 stehenden Kraft gleich gesetzt werden. Es kommt jedoch noch eine unendl. kl. Comp. nach d. Richtung Ab hinzu, welche erhalten wird, wenn d. Größe dieser Kraft für den Punkt A_1 multiplicirt wird mit d. cos. d. Winkels, den ihre Richtung mit Ab bildet. Offenbar ist aber d. cos dieses Winkels = 1R + dem Contingenzwinkel d. Linie AA_1; Ab ist d. Richtung d. Krümmungshalbmessers d. Linie für d. Punkt A und d. Winkel, welchen d. Tangente d. Linie für d. Punkt A_1 mit d. Tangente im Punkte A an Ab bildet ist = R ÷ dem Winkel, den d. Tangente d. Linie in A_1 mit d. Tangente d. Linie in A bildet; dieser ist aber = d. sin desselben und da d. Contingenzwinkel unendl. kl. ist so genügt es, mit Vernachlässigung unendl. kl. Theile zu bemühen, so ist d. sin = d. Winkel selbst also = $\frac{ds}{\varrho}$; da dieser Multiplicator $\frac{ds}{\varrho}$ unendl. kl. ist, so genügt es nur d. Hauptbestandtheile zu beachten, also Glieder höherer Ordnung vernachlässigen. Demnach ist: $2\mathcal{R}\frac{du}{ds} f_s \frac{ds}{\varrho}$ d. Comp. d. ersten Kraft unter 4) nach d. Richtung Ab. — Was ferner in derselben Weise d. 2te Kraftcomp. nach d. Richtung A_1b_1 betrifft, so ist d. Comp. dieser nach A_1b_1 gerichteten Kraft, genommen im Sinne Ab, dieser Kraft wieder gleich zu setzen; aber diese Kraft nach d. Richtung A_1b_1 liefert noch eine unendl. kl. Comp. nach d. Richtung AA_1, welche erhalten wird, wenn man jene Kraftgröße multiplicirt mit d. cos d. Winkels, ~~dessen~~ den d. Richtung A_1b_1 mit AA_1 bildet. Dieser Winkel ist = 1R + d. Contingenzwinkel d. Linie AA_1; dessen cos ist aber = ÷ sin $\frac{ds}{\varrho}$ = ÷ $\frac{ds}{\varrho}$; es liefert also d. 2te Kraft unter 4) noch eine Comp. nach d. Richtung AA_1, welche erhalten wird, wenn man diese Kraft mit $-\frac{ds}{\varrho}$ multiplicirt, wobei es wieder genügt, nur d. Hauptbestandtheile zu berücksichtigen; diese Kraftcomponente nach d. Richtung AA_1 ist demnach: $-\mathcal{R}\frac{du}{dy}f_s\frac{ds}{\varrho}$.

Die 3te Kraft in d. Seitenfl. $f_s + df_s$ hat d. Richtung A_1C_1; diese Richtung ist aber parallel AC, wie früher bewiesen. Diese Kraft ist also ohne Weiteres = d. nach d. Richtung AC.

Was ferner d. Kraft 5) betrifft, die in d. Seitenfl. $f_y + df_y$ nach d. Richtung bb_1 wirkt, so liefert diese Kraft zunächst nach AA_1 eine ihr gleich zu setzende Kraft, sowie eine unendl. kl. Comp. nach d. Richtung Ab, welche erhalten wird, wenn man d. Kraft nach d. Richtung bb_1 multiplicirt mit d. cos d. Winkels, den d. Richtung bb_1 mit Ab bildet. Dieser ist = 1R + d. Contingenzwinkel d. Normalschnitts Ab d. Oberflächenschicht also = $90° + \frac{dy}{\varrho'}$, d. cos dieses ist aber = ÷ sin $\frac{dy}{\varrho'}$ = $\frac{dy}{\varrho'}$ und demnach d. Componente nach d. Richtung Ab: = $-\mathcal{R}\frac{du}{dy}f_y\frac{dy}{\varrho'}$.

Endlich bleibt noch d. Kraft 5) übrig; sie zerfällt in eine ihr selbst gleich zu setzende Kraft nach d. Richtung AA_1 und eine nach d. Richtung AC, welche erhalten wird analog d. früheren: Winkel ACC_1 = 1R + $\frac{dz}{\varrho''}$ also cos ACC_1 = ÷ sin $\frac{dz}{\varrho''}$ = ÷ $\frac{dz}{\varrho''}$ und schließlich d. Componente nach d. Richtung AC: = ÷ $\mathcal{R}\frac{du}{dz}f_z\frac{dz}{\varrho''}$.

Wenn nun d. sämtlichen Reibungskräfte nach d. Richtung AA_1 sowie d. nach d. Richtung Ab und nach AC für sich addirt werden, sodann jeder dieser Ausdrücke durch d. Volumenelement dV dividirt wird, so erhält man d. innere Reibung nach d. Richtungen AA_1, Ab und AC p. Volumeneinheit Flüssigkeit. Diese inneren Reibungen seien entsprechend ihren Richtungen bezeichnet mit $\mathcal{R}_s$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$; dieselben sind demnach mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung:

$$R_s = R\left[2\frac{d^2u}{ds^2} + 2\frac{df_s}{dV}\frac{du}{ds} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{df_y}{dV}\frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{df_z}{dV}\frac{du}{dz} - \frac{1}{\rho}\frac{du}{dy}\right]$$

$$R_y = R\left[\frac{d^2u}{ds\,dy} + \frac{df_s}{dV}\frac{du}{dy} + \frac{2}{\rho}\frac{du}{ds} - \frac{1}{\rho'}\frac{du}{dy}\right]$$

$$R_z = R\left[\frac{d^2u}{ds\,dz} + \frac{df_s}{dV}\frac{du}{dz} - \frac{1}{\rho''}\frac{du}{dz}\right].$$

Setzt man noch in diesen Gln. für d. Verhältnisse $\frac{df_s}{dV}$, $\frac{df_y}{dV}$ und $\frac{df_z}{dV}$ ihre Werte, so folgt:

$$R_s = R\left[2\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} - 2\left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right)\frac{du}{ds} + \left(\frac{1}{r''} - \frac{2}{\rho}\right)\frac{du}{dy} + \frac{1}{r'}\frac{du}{dz}\right]$$

$$R_y = R\left[\frac{d^2u}{ds\,dy} + \frac{2}{\rho}\frac{du}{ds} - \left(\frac{2}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right)\frac{du}{dy}\right]$$

$$R_z = R\left[\frac{d^2u}{ds\,dz} - \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{2}{\rho''}\right)\frac{du}{dz}\right].$$

Die Kräfte, welche überhaupt auf dieses gekrümmte Volumenelement wirken, sind zunächst 2erlei: theils äussere Massenkräfte, welche auf d. Masse d. Flüssigkeit wirken, theils Oberfl.-Kräfte, welche von d. angrenzenden Flüssigkeit herrühren; letztere sind theils innere Reibungen, theils Pressungen, erstere sind mit d. inneren Reibungen ausgedrückt worden und es handelt sich darum noch d. Ausdruck d. Pr. pr. Volumeneinheit nach denselben Richtungen, womit d. umgebende Flüssigkeit auf dieses gekrümmte Flüssigkeitselement pr. Volumeneinheit wirkt. Zu diesem Zweck würde es nicht nothwendig sein, d. Flüssigkeitselement gekrümmt abzugrenzen, sondern es würde hier am einfachsten sein, das Flüssigkeitselement sich als ein rechtwinkliges parallelepipedisches Element zu denken, da es bei d. Pr. ganz gleichgültig ist, von welcher Gestalt d. Flüssigkeitselement abgegrenzt wird. Theilt man dieses, so ist z. B. d. Pr. d. äusserlich angrenzenden Flüssigkeit auf d. Seitenfl. $bAC = p f_s$, wenn p d. spec. Pr. im Punkte A d. Flüssigkeit bedeutet. Für d. gegenüberliegende Seitenfl., die für sich auch $= f_s$ ist, ist d. spec. Pr. von p verschieden und zwar $= p + \frac{dp}{ds}ds$, also d. Pr. für d. ganze Seitenfl.: $= \left(p + \frac{dp}{ds}ds\right) f_s$. Was d. Vorzeichen betrifft, so ist zu bemerken, dass für diese durch A gehende Seitenfl. bAC d. angrenzende Flüssigkeit in d. positiven S. Richtung gelegen ist und also d. Pr., welche d. angrenzende Flüssigkeit auf d. Element ausübt, d. Richtung A_1A hat, so dass d. letztere Glied negativ ist, es ist also d. resultirende Zusammenwirkung d. angrenzenden Flüssigkeit auf d. parallelepipedische Element nach d. Richtung d. Achse: $= p f_s - \left(p + \frac{dp}{ds}ds\right) f_s$ und wenn man erhält d. spec. Pr. durch Division mit dV, so ergibt sich diese spec. Pr.: $= \frac{-\frac{dp}{ds}ds\,f_s}{dV} = -\frac{\frac{dp}{ds}ds\,f_s}{f_s\,ds} = -\frac{dp}{ds}$, so ist also d. Pressung, herrührend von d. äusseren angrenzenden Flüssigkeit im Sinne d. Achse bezogen auf d. Volumeneinheit = d. partiellen Ableitung von p nach s, ebenso ergibt sich für d. nach d. Richtung d. Krümmungsradius wirkende Pressung d. angrenzenden Flüssigkeit pr. Volumeneinheit $= -\frac{dp}{dy}$ und nach $AC = -\frac{dp}{dz}$. Hiernach ist nun also d. gesammte Oberfl.-Kraft, welche von d. umgebenden Flüssigkeit auf d. Oberfl. ausgeübt wird, bezogen auf d. Volumeneinheit und zwar erstens zunächst nach d. Richtung AA_1: $= R_s - \frac{dp}{ds}$, nach d. Richtung Ab: $= R_y - \frac{dp}{dy}$ und im Sinne d. drittens gehenden Normalen AC: $= R_z - \frac{dp}{dz}$. Multiplicirt man diese sämtlichen Kraft-Comp., welche sich auf d. Volumeneinheit beziehen, mit d. Volumen d. Masseneinheit, so erhält man d. betreffende Kraft-Comp. pr. Masseneinheit. Bezeichnet man so d. spec. Masse d. Flüssigkeit im Punkte A d. h. = Masse pr. Volumeneinheit, so ist $\frac{1}{\mu}$ offenbar d. Volumen pr. Masseneinheit. Wenn man also d. betreffenden Kräfte-Comp., welche sich auf d. Volumeneinheit beziehen, mit $\frac{1}{\mu}$ multiplicirt, so erhält man d. betreffenden Oberfl.-Kräfte im Punkte A pr. Masseneinheit. Diesen Oberfl.-Kräften pr. Masseneinheit sind d. äusseren Massenkräfte pr. Masseneinheit hinzuzufügen. Die Componenten derselben sollen mit K_s K_y K_z bezeichnet werden, also K_s d. spec. äussere Massenkraft im Sinne d. Achse etc. Fügt man diese hinzu, so folgt:

$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right)$ als d. resultierende Gesamtkraft, welche pr. Masseneinheit nach d. Richtung d. Bahn im Punkte A wirksam ist. Ebenso ist

$K_y + \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{dp}{dy}\right)$ d. Gesamtkraft im Sinne d. Krümmungsradius pr. Masseneinheit im Punkte A.

$K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{dp}{dz}\right)$ d. Gesamtkraft pr. Masseneinheit im Sinne d. Normalen AC für den Punkt A.

Diese 3 resultierenden Kraft-Comp. nach d. Richtungen AA_1, AB und AC müssen nun natürlich gleich sein d. Beschl.-Comp., welche nach AA_1, AB und AC stattfinden, denn diese Beschl., welche im Punkte A nach diesen Richtungen stattfinden, rühren her von den auf d. Masseneinheit bezogenen äusseren und inneren Kräften, welche in A auf d. Flüssigkeit wirken. Nun lässt sich aber d. Beschl. eines Flüssigkeitselements bei A, da dieses sich in d. Bahn AA_1 bewegt, bekanntlich zerlegen in eine Bahn- und eine Normalcomponente. d. Beschl. irgend eines materiellen Punktes lässt sich an jeder Stelle zerlegen in eine Comp. nach d. Tangente d. Bahn und in eine Centripetalbeschl. Die Bahnbeschl. nach d. Richtung d. Tangente ist = dem Differentialquotienten d. Geschw. nach d. Zeit t also hier = $\frac{du}{dt}$, wo dies d. vollständige Differential ist mit Rücksicht darauf, dass u eine Function d. 4 Veränderlichen t s y u. z ist. d. Centripetalbeschl. nach d. Richtung AB und zwar im Sinne gegen d. Krümmungsmittelpunkt hin ist $= \frac{u^2}{\varrho}$ und d. Beschl. Comp. nach d. Richtung AC also im Sinne d. Binormale d. Bahn ist = 0 folgt:

$$K_s = \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = \frac{du}{dt}\,;\quad K_y = \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{dp}{dy}\right) = \frac{u^2}{\varrho} \text{ und } K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{dp}{dz}\right) = 0.$$

Diese Tangential- od. Bahnbeschl. ist d. vollständige Ableitung von u nach d. Zeit t, welche nach folgender Form geschrieben werden kann: $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$, weil u erstens eine unmittelbare, zweitens eine mittelbare Function d. Zeit t, also auch u eine Function von s y u. z und diese Coord. selbst Functionen d. Zeit sind. In d. Ausdruck für $\frac{du}{dt}$ sind $\frac{ds}{dt}$ $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ nichts anderes als d. Geschw.-Comp., welche in A nach AA_1, AB und AC stattfinden. Da aber AA_1 d. Richtung d. Bahn ist, so sind d. Geschw. Comp. nach AB und AC = 0 und nach AA_1 = d. Geschw. selbst, es ist also: $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt} = 0$ und $\frac{ds}{dt} = u$, so dass:
$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}$ ist; d. 3 sogenannten Fundamentalgleichungen sind demnach:

$$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$K_y + \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{dp}{dy}\right) = \frac{u^2}{\varrho}$$

$$K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{dp}{dz}\right) = 0$$

Zu diesen 3 Fundamentalgl. kommt d. sogenannte Continuitätsbed., die hier nur eine etwas andere Form als früher erhalten wird, wo ein rechtwinkliges parallelepipedisches Massenelement zu Grunde gelegt wurde. Was diese Continuitätsbed. betrifft, so ist d. Flüssigkeitsmasse, welche zur Zeit t in diesem gekrümmten Raumelement befindet $= \mu\, dV$ unter μ d. spec. Masse verstanden, welche zur Zeit t im Punkte A stattfindet. Während d. nächst folgenden Zeitelementes dt ändert sich im Allgemeinen diese im selben Raumelement enthaltene spec. Masse und zwar um d. partielle Differential bezüglich d. Zeit, also um $\frac{d\mu}{dt}\, dt\, dV$. diesen selben Zuwachs an Masse innerhalb d. Raumelements dV kann man auch anders ausdrücken. Mit Rücksicht auf d. Art und Weise, wie hier dieses Raumelement abgegrenzt wurde, fliesst während d. Zeitelements dt Flüssigkeit nur ein und aus durch d. Fl. A b c und $A_1 b_1 c_1$, in d. angrenzenden Fl. fliesst nur Flüssigkeit vorbei, es muss also dieser Zuwachs an Masse auch gleich sein d. Ueberschuss derjenigen Flüssigkeitsmasse, welche während d. Zeitelements dt durch d. Fl. b A c einfliesst über die, welche durch $b_1 A_1 c_1$ ausfliesst.

Was nun d. Flüssigkeit betrifft, d. während d. Zeitelements dt durch bAC hineinfließt, so ist d. Volumen dieser Flüssigkeit = d. Product aus d. Größe f_s d. Schnittfl. bAC und $u.dt$, also: $= f_s\, u.dt$, denn $u\,dt$ ist d. Factor, welcher anzeigt, daß irgend ein Flüssigkeitstheilchen während d. Zeitelements dt vermöge d. Geschw. u durch d. Fl. f_s fließt. Das Flüssigkeitsvolumen, welches während d. Zeit dt in d. fraglichen Raum hineinfließt ist also $f_s\, u\,dt$, also d. entsprechende Flüssigkeitsmasse, welche während d. Zeit dt hineinfließt $= f_s\, \mu . u\,dt$. –

Nun erhält man ebenso diejenige Flüssigkeitsmasse, welche in derselben Zeit aus d. Raum dV herausfließt, wenn man einfach in diesem Ausdruck $f_s + df_s$ für f_s setzt und wenn man ferner $\mu . u$ um ihr partielles Differential nach s vergrößert, also ist dieselbe:

$$=(f_s + df_s)\left(\mu . u + \frac{d\mu u}{ds}ds\right)dt.$$

Wenn man dieses von d. hereinfließenden Masse abzieht, so erhält man diejenige Masse, welche während d. Zeitelements dt in d. Raum mehr hinein als herausfließt; dieser Zuwachs ist: $= \frac{d\mu}{dt}dt . dV$, also:

$$\frac{d\mu}{dt}dt\,dV = f_s\,\mu\,u\,dt - (f_s + df_s)\left(\mu u + \frac{d\mu u}{ds}ds\right)dt$$

Oder: $$\frac{d\mu}{dt}dV = -\frac{d\mu u}{ds}f_s\,ds - \mu\,u\,f_s$$ da d. letzte Product unendl. kl. höherer Ordnung ist.

Dividirt man durch dV, so folgt: $$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{d\mu u}{ds} + \mu u\left(\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}\right)$$

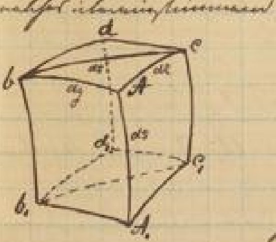
oder: $$\frac{d\mu}{dt} + \frac{d\mu u}{ds} = \mu u\left(\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}\right).$$ Dies ist d. sogenannte Continuitätsgleichung.

Diese Gl. vereinfacht sich wesentlich, wenn d. spec. Masse d. Flüssigkeit constant ist, wie dies namentlich mit bedeutender Annäherung bei d. Strömung einer tropfbaren Flüssigkeit vorausgesetzt werden kann, vorausgesetzt, daß d. Tangentialcomponente unwesentlich veränderlich ist, wie dies auch diesen allgemeinen Entwicklungen zu Grunde gelegt wurde. Ist dies d. Fall so ist d. spec. Volumen v auch ungefähr als constant zu setzen, also μ = const. folglich:

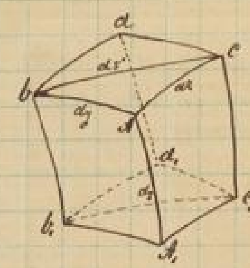
$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \quad \text{ferner:} \quad \frac{d\mu u}{ds} = \mu\frac{du}{ds} \quad \text{und demnach:}$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{ds} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}.$$ = Continuitätsgleichung einer tropfbaren Flüssigkeit bei constanter spec. Masse. –

Was d. Grenzbedingungen betrifft, so sind diese besonders abhängig von d. äußeren Reibungen, welche zwischen d. Oberfl. d. strömenden Flüssigkeit und d. festen Leitfl. stattfindet. Diese äußere Reibung, auf d. Flächeneinheit bezogen mit R' bezeichnet, ist natürlich immer d. relativen Bewegung d. Flüssigkeit längs d. Leitfl. gerade entgegen gerichtet (und ist übrigens eine (nur empirisch zu bestimmende) Function d. Geschw., ferner abhängig von d. Oberfl.-Beschaffenheit d. Wand ferner von d. Art und dem Zustand d. Flüssigkeit. Es sei nun mit ds' ein Bogenelement d. Curve bezeichnet, in welcher eine solche feste Leitfl. von einem Querschnitt geschnitten wird, unter Querschnitt d. zu allen Geschw. senkrechte Fläche verstanden. In d. nebenstehenden Figur, darstellend ein Flüssigkeitselement, welches ringsum begrenzt wird, sei bC ein solches Element ds'. Es



werde dann eine unendl. kleine Flüssigkeitsfaser betrachtet, welche längs d. Leitfl. bCC_1b_1 hinfließt. Diese Flüssigkeitsfaser hat einen rechtwinklig dreieckigen Querschnitt bAC, dessen Hypothenuse $= ds' = bC$ ist und dessen Katheten unendl. kl. Element d. durch d. Punkt A gehenden Krümmungs- und Normalebenen sind $= Ab = dy$ und $AC = dx$. Betrachtet man nun d. Gleichgew. d. Kräfte an einem unendl. kl. Stück eines solchen Fadens, welches herausgeschnitten wird durch 2 unendl. nahe benachbarte Querschnitte gehend durch d. beiden unendl. nahen Punkte A u. A_1 d. Faser, so muß insbesondere



Die algebraische Summe aller auf d. Element wirkenden Kräfte im Sinne d. Fortbewegung AA_1 = 0 sein. Was d. Gl. betrifft, welche auf d. Flächen $A_1b_1c_1$ und Abc wirksam werden, so reduciren sich diese offenbar auf unendl. kl. Größen 3ter Ordnung, wenn auf d. Richtung AA_1 bezogen. Ebenso verhalten sich d. Trägheitskräfte. Es müssen demnach d. Kräfte von unendl. kl. Größe 2ter Ordnung für sich = 0 sein. Die übrig bleibenden Kräfte sind aber d. äußere Reibung längs d. Fl. bcb_1c_1, und d. inneren Reibungen längs d. Flächen AA_1c_1c und AA_1b_1b.

D. Größe d. Fl. bb_1cc_1 ist nun mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung $= ds.ds'$ und demnach d. äußere Reibung in d. Seitenfl. bb_1cc_1 $= R'ds.ds'$; da diese aber immer d. entgegengesetzte Richtung d. Bewegung d. Elements gegen d. Leitfl. hat, ist sie $= -R'ds.ds'$ im Sinne d. Richtung AA_1.

Für d. Seitenfl. AA_1b_1b ist d. innere spec. Reibung $= R\frac{du}{dz}$ und also d. Gesammtreibung gemessen nach d. Richtung AA_1 $= -R\frac{du}{dz}ds.dy$.

Endlich ist d. spec. innere Reibung d. Seitenfl. A_1Acc_1 $= R\frac{du}{dy}$ und also d. Gesammtflächenreibung nach d. Richtung AA_1 $= -R\frac{du}{dy}ds.dz$.

Die algebraische Summe aller dieser Kräfte muss nun = 0 sein, man hat also d. Bedingung:

$$-R'ds.ds' - R\frac{du}{dz}ds.dy - R\frac{du}{dy}ds.dz = 0$$

, od. wenn man mit $-R\,ds.ds'$ dividirt:

$$\frac{R'}{R} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dy}{ds'} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dz}{ds'} = 0.$$

Diese allgemeine Oberfl.-Bedingung muss also stattfinden für alle diejenigen Punkte, in welchen d. Flüssigkeit in Berührung ist mit d. festen Leitfl. also dort, wo äußere Reibung stattfindet. Diese Gl. kann in besonderen Fällen dienen um d. Constanten zu bestimmen, welche sich bei d. Integration d. vorhin erhaltenen Differentialgleichungen ergeben. —

Es lässt sich nun leicht begreifen, dass d. Benützung d. vorhin gefundenen allgemeinen Gln. sich erschwert und für besondere [illegible] Fälle durch d. complicirten Ausdruck, namentlich durch diejenigen, welche sich für d. Reibungscomponenten R.. ergeben. Indessen vereinfachen sich diese in manchen Fällen außerordentlich, wo besondere Annahmen gemacht werden können.

Ist insbesondere $u = const.$ für jeden Punkt und alle Querschnitte als Ebenen anzusehen, so wird offenbar: $\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho''} = 0$, denn ρ' und ρ'' bedeuten d. Krümmungsradien d. Normalschnitte d. Querschnitts durch A, welche d. Krümmungslinien und Normalen berühren; da diese Schnitte aber unter d. Voraussetzung ebener Querschnitte auch eben sind, so sind ihre Krümmungsradien $= \infty$ also $\rho' = \rho'' = \infty$. Damit ergibt sich dann auch, dass d. Reibungscomponenten im Sinne senkrecht zur Achse = 0, also $R_z = R_y = 0$, weil mit $u = const$ d. Ableitungen von $\frac{u}{\rho'}$ = 0 werden. Ebenso wird sich auch auf d. Reibungscomponente im Sinne d. Achse vereinfachen. Wenn d. vereinfachende Voraussetzung auch nicht genau stattfindet, so kann man doch in vielen Fällen mit großer Annäherung beide ~~[illegible]~~ und demnach von d. Reibungscomponenten senkrecht zur Achse abstrahiren und zwar entsprechend ihrem betreffenden Gewicht, um so mehr, je weniger veränderlich d. Geschw. u ist und um so mehr d. Querschnitte sich ebenen Flächen nähern d.h. je mehr sich ρ' und ρ'' d. Unendlichkeit nähern. —

genau

In einem solchen Fall, in welchem d. Querschnitte Ebenen sind, sind alle Achsen offenbar geradlinige Curven. Bemerkenswerth ist dabei insbesondere d. Fall, dass <u>alle Querschnitte einer Geraden parallel</u> sind. Z.B. wenn es sich handelt um d. Bewegung von Wasser in einem Brunnen Schacht, dessen Querschnitte nur wenig verschieden sind. Man kann dann

d. Querschnitts als vertikale Ebenen ansehen, also parallel d. Richtung d. Achse, und ebenso d. Flächen als horizontale äquidistante Curven. Als Normalcurven und Krümmungscurven kann dann ein System von sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien angenommen werden, welche in obigem Beispiel eben so anzunehmen wären, daß d. Krümmungscurve eine horizontale Gerade und d. Normalcurve eine vertikale Gerade sei. In diesem Falle wird d. Seitenfl. d. Elements $= ACbd$ ein Rechteck und demnach $r' = r'' = \infty$, weil die Richtungen von AC u. bd sowie Ab u. Cd, welche d. unendl. kl. Winkel $\frac{dy}{r'}$ und $\frac{dz}{r''}$ miteinander bilden, nun parallel sind. Unter diesen Annahmen vereinfacht sich d. betreffende Ausdruck ungemein, denn mit $\rho' = \rho'' = \infty$, $\frac{du}{ds} = 0$ und $r' = r'' = \infty$ wird d. erste Reibungscomponente im Sinne d. Achse:

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{\rho}\frac{du}{dy}\right)$$ und natürlich wie vorhin $R_y = R_z = 0$.

Wenn endlich d. ebenen Querschnitte nicht nur einer Geraden parallel sind, sondern alle untereinander parallel sind, demnach alle Flächen parallele horizontale ~~[illegible]~~ Gerade sind, wie dies bei d. Bewegung von Wasser in Röhren und Canälen d. Fall ist, so wird:

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$ denn dann ist offenbar auch $\rho = \infty$ d.h. d. Krümmungsradius d. Fläche in d. fraglichen Punkte $= \infty$.

In einem solchen Fall wird es nun zuweilen vortheilhafter sein, statt d. Systems sich rechtwinklig schneidender gerader Linien ein anderes System von sich rechtwinklig schneidenden Linien als Coord.-System einzuführen. Z.B. kann man in nämlichem Fall als Krümmungscurven ein System von geraden Linien

annehmen, welche sich in einem Punkte schneiden und als Normalcurven concentrische Kreise um d. gemeinschaftlichen Schnittpunkt als Centrum betrachten. Dieses Coord.-System wird insbesondere von untergeordnetem sein, wenn es sich handelt um d. Bewegung von Wasser in einer geraden cylindrischen Röhre, wo dann d. Kreiscentrum zugleich d. Mittelpunkt d. Querschnitts ist. Für diesen Fall hat man dann in d. allgemeinen Formeln zu setzen: $\rho = \infty$ weil alle Flächen gerade Linien sind, ferner: $\rho' = \rho'' = \infty$ weil d. Normalschnitte d. Querschnitts gerade Linien werden. Was r' betrifft, so muß man offenbar wieder $r' = \infty$ setzen, denn betrachtet man d. Querschnitt eines [illegible]förmigen Elements $= Abcd$, so ist hier $bd \parallel Ac$ also ihr Neigungswinkel $= \frac{dy}{r'} = 0$ demnach $r' = \infty$ etc. Andererseits ist aber $r'' = r$ zu setzen, unter r d. Radius eines solchen concentrischen Kreises verstanden, denn es bedeutet bekanntlich $\frac{dz}{r''}$ den Neigungswinkel von Ab mit Cd; dieser ist aber nun $= \frac{dz}{r}$ und also $r'' = r$; endlich ist natürlich für dy — dr in d. Formeln einzuführen. Setzt man diese Werthe ein, so erhält man:

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

während d. Reibungscomponenten senkrecht zur Achse $= 0$ werden wie vorhin gezeigt.

Gewöhnlich wird man indessen in solchen Fällen noch weitere vereinfachende Voraussetzungen zu Grunde legen dürfen, z.B. die, daß in allen Punkten eines Parallelkreises d. Geschw. gleich groß ist und daß dieselbe nur von Parallelkreis zu Parallelkreis veränderlich ist. In diesem Falle ist also auch $\frac{\partial u}{\partial z}$ d.h. d. Ableitungen von Geschw. u nach z $= 0$ zu setzen, und demzufolge auch u nur als Function von r zu betrachten, so daß an Stelle d. partiellen Differentialquotienten (∂) nur d. vollständigen Differentiale (d) von u treten. Man hat dann:

$$R_s = R\left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right) = \frac{R}{r}\left(r\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr}\right) = \frac{R}{r}\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{du}{dr}\right).$$

Ist jedoch d. Geschw. u auch abhängig von d. Zeit t, so müssen natürlich d. partiellen Differentiale (∂) stehen bleiben. Von dieser Formel wird später Gebrauch gemacht bei d. Erörterung d. Widerstandes d. Bewegung von Flüssigkeiten in geraden cylindrischen Röhren.

Bis dahin wurde immer vorausgesetzt, daß d. Geschw. u nicht nur eine Function d. Coord. sondern auch eine Function d. Zeit t sei. Von großem technischem Interesse ist nun aber d. Fall, daß die Geschw. nicht abhängig von d. Zeit t ist, also eine sogenannte permanente Bewegung stattfindet. Man nennt nämlich einer permanente Bewegung eine solche, bei welcher sich d. Geschw. nur von Punkt zu Punkt, nicht aber im Verlaufe d. Zeit in demselben Punkte ändert. Wenn dies d. Fall ist, und besonders vorausgesetzt, daß d. äußerl. Kräfte und d. Grenzbedingungen unabhängig von d. Zeit gegeben sind, so werden d. Ableitungen nach d. Zeit $t = 0$, also:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0.$$

Wenn dabei noch weiter vorausgesetzt wird, daß d. spec. Masse μ als Function d. Dr. p gegeben ist, so kommt es nur darauf an d. Dr. p und d. Geschw. u als Function d. Coord. zu bestimmen. Hierzu dienen d. sogenannten 3 Fundamentalgleichungen und d. Continuitätsgl., welche sich aber im vorliegenden Falle noch vereinfachen indem mit $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ d. Continuitätsgl. folgt nach Seite 23:

$$\frac{d\mu u}{ds} = \mu u \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Unabhängig läßt sich diese noch einfacher schreiben, ~~und~~ ~~[illegible]~~ so daß sie für d. Gebrauch noch bequemer und angenehmer wird.

Es sei nämlich A ein Punkt d. Querschnitts σ und A_0 d. Durchschnittspunkt d. durch A gehenden Linie mit d. im entgegengesetzten Sinne d. Bewegung unendl. nahe benachbarten Querschnitt σ_0, so sei ein unendl. kl. Flächenelement in σ_0, welches d. Punkt A_0 in sich schließt. Durch alle Punkte d. Umfanges d. Flächenelements f_0 werden d. betreffenden Linien gelegt. Diese Linien bestimmen d. Mantelfl. eines fadenförmigen Raumes, welcher d. Querschnitt σ in d. Element f schneidet, das natürlich d. Punkt A in sich enthält. Das Querschnittsverhältniß d. Flüssigkeitsfadens, welcher durch 2 unendl. nahe benachbarte Querschnitte σ_0 und σ geschnitten wird, ist demnach $= \frac{f}{f_0} = \alpha$. Denken aber d. Ausdehnung d. Querschnitts gegeben ist, so ist auch dieses Querschnittsverhältniß fest als Function d. Coord. gegeben. Nun besagt bekanntlich d. Continuitätsgl. daraus, daß in irgend einer Zeit durch d. Querschnitt f ebensoviel Flüssigkeitsmasse hindurchströmen muß wie durch f_0, einer continuierlichen Raumerfüllung durch Massenelemente entsprechend. Ist nun u d. spec. Geschw. und μ d. spec. Masse d. durch d. Element f hindurchfließenden Flüssigkeit, so ist d. Masse dieser Flüssigkeit pro Zeiteinheit: $= \mu f u$; ist ebenso μ_0 d. spec. Masse und u_0 d. Geschw. d. durch f_0 hindurchfließenden Flüssigkeit, so ist deren Masse $= \mu_0 f_0 u_0$; beide Theile müssen aber gleich groß sein d. h. es muß:

$$\mu f u = \mu_0 f_0 u_0$$

also

$$\alpha \mu u = \mu_0 u_0 \quad \text{sein.}$$

Diese Gl. kann nun an Stelle d. Continuitätsgl. gesetzt werden, wobei d. Querschnittsverhältniß α als Function d. Coord. als gegeben zu betrachten ist. Dieses Verhältniß ist offenbar abhängig von d. Krümmungen d. Querschnitte in denjenigen Punkten, in welchen d. Querschnitte σ und σ_0 von d. Linie geschnitten werden. Diese Beziehung ist auch leicht mittelst oben gefundener Gl. abzuleiten, indem man sie nach s zu differentiiren braucht; man erhält dann nach einigen Umformungen:

$$\frac{1}{\mu u} \cdot \frac{d\mu u}{ds} + \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = 0$$

Oder da nach oben:

$$\frac{d\mu u}{ds} = \mu u \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \text{ ist, so folgt nun:} \quad \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{ds} + \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 0.$$

Statt d. Summe d. Krümmungsradien d. Normalschnitte, welche d. Krümmungslinien und Normallinien für d. betreffenden Punkt bezeichnen, kann man auch d. Summe d. Krümmungsradien zweier beliebiger zu einander senkrechter Normalschnitte d. Querschnitts genommen werden, indem diese bekanntlich immer einander gleich sind. —

Von d. 3 Fundamentalgl. ist insbesondere d. erstere wichtig, und mit Rücksicht auf spätere Benützung erscheint es geboten, derselben eine andere Form zu geben in welcher sie später mit Vorteil angewandt werden kann. Nach Seite .. hieß d. erste Fundamentalgl.:

$$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{ds}.$$

Diese Gl., bezogen auf d. Masseneinheit, soll nun mit $\frac{1}{g}$ (g = Beschl. d. Schwere) d.h. mit d. Masse d. Gewichtseinheit multipliziert werden, so ist nun d. Gl. dann auf d. Gewichtseinheit bezogen bekommen. Außerdem soll noch d. Gl. mit d. Bogenelement ds d. Linie multipliziert werden, wobei d. gebildeten Differentiale nach s d. Einfachheit wegen mit d bezeichnet werden sollen, also es ist zu setzen:

$$\frac{dp}{ds}ds = dp \quad \text{und} \quad \frac{du}{ds}ds = du$$

ferner sei d. Produkt $\mu \cdot g$ = spez. Gew. mit γ bezeichnet = Gew. pr. Volumeneinheit. Setzt man dies alles ein und berücksichtigt daß $\frac{du}{dt} = 0$ ist, so folgt:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{u\,du}{g} = \left(\frac{K_s}{g} + \frac{R_s}{\gamma}\right)ds.$$

Nun ist aber offenbar:

$$\frac{dp}{\gamma} = d\left(\frac{p}{\gamma}\right) - p\,d\left(\frac{1}{\gamma}\right) \quad \text{und ferner} \quad \frac{u\,du}{g} = d\left(\frac{u^2}{2g}\right)$$

so daß d. Gl. dann heißt:

$$d\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) = p\,d\left(\frac{1}{\gamma}\right) + \left(\frac{K_s}{g} + \frac{R_s}{\gamma}\right)ds.$$

Hierin bedeutet bekanntlich nun $\frac{p}{\gamma}$ die spez. Druckhöhe im Punkte A d.h. d. Höhe einer Flüssigkeitssäule vom Querschnitt $= 1$, deren Gew. $= p$ ist und deren spez. Gew. = d. spez. Gew. an d. betreffenden Punkt A d. Flüssigkeit ist.
Ferner ist $\frac{u^2}{2g}$ d. sogenannte Geschw.-Höhe im Punkte A.

Die oben gefundene Gl. drückt also d. Gesetz aus, nach welchem sich d. Summe d. Druckhöhe und Geschw.-Höhe von Punkt zu Punkt ändert. Integriert man diese Gl. längs d. Bogen A_0A d. Linie, so erhält man:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} - \left(\frac{p_0}{\gamma_0} + \frac{u_0^2}{2g}\right) = \mathfrak{E} + \mathfrak{M} + \int_0^s \frac{R_s}{\gamma}\,ds$$

unter p_0, γ_0 u. u_0 d. betreffenden Größen für d. Punkt A_0 verstanden und unter s d. Entfernung A_0A, gemessen auf d. Linie, verstanden. Ferner bedeutet hierin $\mathfrak{E}$ d. auf d. Weg von A_0 bis A verrichtete Expansionsarbeit, denn es ist gesetzt worden: $\mathfrak{E} = \int_0^s p\,d\left(\frac{1}{\gamma}\right)$, welcher Ausdruck aber bekanntlich d. Ausdruck für d. Expansionsarbeit pr. 1 kgr bedeutet.
Ferner bezeichnet $\mathfrak{M}$ d. Ausdruck: $\int_0^s \frac{K_s}{g}\,ds$; dies ist aber offenbar d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte pr. 1 kgr. Flüssigkeit, denn es wird mit K_s d. spez. äußere Massenkraft pr. Masseneinheit im Sinne d. Linie bezeichnet, so ist also $\frac{K_s}{g}$ d. äußere Massenkraft pr. Gewichtseinheit im Sinne d. Linie bezeichnet. Endlich bezeichnet d. Integral d. Arbeit d. inneren Reibung auf d. Weg von A_0 bis A, verrichtet d. nach d. Linie A_0A gerichteten Reibungskomponente R_s. Wenn also A_0A irgend ein Stück einer im Sinne A_0A durchlaufenen Linie ist, so ist d. Summe aus Druckhöhe und Geschw.-Höhe in d. Punkte A = d. entsprechenden Summe aus Druck- und Geschw.-Höhe ~~+ d. [illegible]~~ d. W. in d. Punkte A_0 + d. während d. Wegs A_0A ~~pro~~ pr. 1 kgr verrichteten Expansionsarbeit + d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte pr. 1 kgr + d. pr. 1 kgr Flüssigkeit verrichteten Arbeit d. inneren Reibung im Sinne d. Linie, od. auch man kann sagen: die Summen d. Druck- und Geschw.-Höhe in 2 verschiedenen Punkten A und A_0 unterscheiden sich durch die von A_0 bis A pr. 1 kgr verrichteten Expansionsarbeit + d. Arbeit d. äußeren Massenkraft + d. Arbeit d. inneren Reibung im Sinne d. Linienrichtung, alles bezogen auf d. Gewichtseinheit. In dieser Form soll nun d. erste Fundamentalgl. immer zur Anwendung kommen.

Die Geschwindigkeit läßt sich daher als Function von p und p_0 mit Rücksicht auf d. als gegeben vorausgesetzte Beziehung zwischen μ u. p bestimmen. Ebenso auch d. Querschnittsfläche. Die Gestalt d. inneren Reibung läßt sich in d. meisten Fällen [illegible] bestimmen und zwar als Function d. von A_0 bis A durchlaufenen Strecke. Angenommen dies sei alles geschehen, alsdann stellt d. oben gefundene Gl. eine Beziehung zwischen d. entsprechenden Größen $p\, p_0$ u. $\mu - \mu_0$ in d. beiden Punkten A u. A_0 dar, d. h. in 2 Punkten einer und derselben Linie. Eine 2te Beziehung zwischen denselben Größen wird durch d. vorhin gefundene Continuitätsgl.

$$\lambda \mu u = \mu_0 u_0$$

dargestellt, so daß man nun 2 Beziehungen zwischen 4 Größen hat, [illegible] und demzufolge wenn 2 Größen gegeben sind, die beiden anderen bestimmt werden können. ——

Die beiden anderen Fundamentalgl. stellen d. Gesetz dar, nach welchem sich d. Dr. p im Sinne d. y u. z Axe, also im Sinne d. Krümmungsr. u. Normalen von Punkt zu Punkt ändert. Was dieses Gesetz betrifft, nach welchem sich d. Dr. p von Punkt zu Punkt im Querschnitt ändert, so läßt sich folgendes bemerken: Je weniger d. Querschnitte gekrümmt sind (also je mehr ρ' und ρ'' $= \infty$ werden), je weniger verschieden d. Geschw. u von Punkt zu Punkt sich ändert und je weniger d. Linien gekrümmt sind durch welche d. Querschnitt durchsetzen (also je mehr $\rho = \infty$ wird) um so dichter [illegible] kann man annehmen, daß d. Dr. p sich nur nach hydrostatischen Gesetzen ändert. Denn wie schon früher gesehen, würde mit vollkommen ebenen Querschnitten ($\rho' = \rho'' = \infty$) und mit $\frac{du}{ds} = 0$

$R_y = R_z = 0$. Wenn ferner d. Linien sehr wenig gekrümmt sind, so kann mit $\rho = \infty$

$\frac{u^2}{\rho} = 0$ gesetzt werden, so daß d. beiden letzten Fundamentalgl. übergehen in:

$$\frac{dp}{dy} = \mu Y \qquad \text{und} \qquad \frac{dp}{dz} = \mu Z$$

also in Bedingungen, welche nur von d. äußeren Massenkräften beeinflußt werden, entsprechend d. Eigenschaft d. hydrostatischen Gesetze, so daß p also dann nur nach d. hydrostatischen Gesetzen von Punkt zu Punkt veränderlich ist in ein und demselben Querschnitt.

Wichtig ist es, dies [illegible] festzuhalten, indem man sich öfters nach solchen [illegible] Bedingungen umsehen muß.

Was d. äußeren Massenkräfte betrifft, so ist zur Ermöglichung einer permanenten Bewegung offenbar erforderlich, daß für jeden Punkt d. Gesch.-Bewg. als blosse Functionen d. Coord. gegeben sein müssen. Die Bewegung d. Flüssigkeit kann also nur eine permanente sein, wenn d. resultirende Massenkraft K für jeden Punkt $x\,y\,z$ eine unveränderliche Größe und Richtung gegen d. Coord.-Richtungen habe, daß also d. Massenkraft K in Bezug auf Größe und Richtung constant sei. Wenn dieses Coord.-System selbst in Bewegung begriffen ist, so muß, wenn man d. Schwerkraft als d. wichtigste Massenkraft betrachtet, die Resultante d. äußeren Massenkräfte $=$ d. beschleunigenden Schwerkraft $+$ d. beiden Ergänzungskräften d. relativen Bewegung sein. In diesem Fall kann sich jedenfalls nur eine permanente Bewegung ausbilden, wenn d. Schwerkraft und d. Ergänzungskräfte d. relativen Bewg. gegen d. Coord.-Axen eine constante Richtung haben. Wenn also z. B. d. feste Leitfläche und mit ihnen das an ihnen befestigte Coord.-System in Rotation begriffen ist, so muß diese Rotation immer um eine vertikale Axe mit constanter Winkelgeschw. stattfinden, denn nur dann bleibt d. Richtung d. Schwerkraft immer denselben Winkel mit d. Axen, ferner muß d. Winkelgeschw. ω constant sein, weil sonst d. Ergänzungskräfte als Functionen d. Zeit erscheinen und also d. Definition einer permanenten Bewg. widersprechen würde. Außerdem kann aber auch noch unabhängig d. permanenten Bewg. das um d. feste Axe rotirende System eine Translationsbewg. im Sinne d. festen Rotationsaxe [illegible] mit constanter Geschw. besitzen. Es fragt sich nun wie sich dadurch d. Gestalt d. äußeren Massenkräfte ausdrücken läßt?

Es wird also vorausgesetzt, daß mit d. Leitfl. fest verbundene Coord.-System habe eine eigene Bewg. und zwar eine Rotation um eine feste Axe mit d. constanten Winkelgeschw. ω und ferner eine Translationsbewegung im Sinne d. festen Rotationsaxe mit d. constanten Beschl. f welche letztere gerichtet von oben nach unten und ergibt von unten nach oben gemessen werden soll. Ferner sei h die Höhe d. Punktes A_0 über A und r_0 und r d. resp. Abstände d. Punkte A_0 und A von d. festen Rotationsaxe. Die Arbeit M d. äusseren Massenkräfte besteht dann aus mehreren Theilen. d. Schwerkraft nämlich verrichtet auf während d. Beweg. d. Flüssigkeit von A_0 nach A d. Arbeit $= 1 \cdot h$ pr. Gewichtseinheit; was ferner d. Ergänzungskräfte d. relativen Beweg. betrifft, so kommt d. 2te gar nicht weiter in Betracht, indem dieselbe immer senkrecht normal zu relativen Bahn d. Massenelements und demnach ihre Arbeit $= 0$ ist. Die erste Ergänzungskraft, welche bekanntlich d. System eine Beschl. ertheilt, welche gleich gross aber entgegengesetzt gerichtet ist d. Beschl. d. betreffenden Punktes, die dieser erhalten würde wenn er mit d. sich bewegenden Coord.-System fest verbunden wäre, kann man als aus 2 Theilen bestehend gedacht werden, nämlich herrührend von d. Rotation und Translation. Die Arbeit d. 1sten Ergänzungskraft im Sinne d. Translation ist nun offenbar $= \div \frac{f}{g} h$ pr. Gewichtseinheit indem jeweils ihre Beschl. im Sinne d. Translation $= \div f$ ist, ferner wird d. System von d. 2ten Ergänzungskraft im Sinne d. Rotation eine Beschl. $= \frac{\omega^2}{g} r$ ertheilt, die Arbeit pr. Element d. Abstandes von d. Rotationsaxe also $= \frac{\omega^2}{g} r\,dr$, und folglich d. Arbeit während d. Beweg. d. Flüssigkeit von A_0 nach A $= \int_{r_0}^{r} \frac{\omega^2}{g} r\,dr = \frac{\omega^2}{g} \int_{r_0}^{r} r\,dr = \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - r_0^2)$

Demnach ist d. resultirende Arbeit M d. äusseren Massenkräfte:

$$M = \left(1 - \frac{f}{g}\right) h + \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - r_0^2).$$

Wenn d. System eine Beschl. nur eine Translationsbewegung hat, dann kann diese offenbar derart beschaffen sein, daß ihre Beschl. f eine constante Grösse ~~nur~~ hat aber eine ganz beliebige Richtung habe, ohne daß d. permanente relative Beweg. d. Flüssigkeit durch diesen Umstand verändert würde. Dann ist d. Arbeit d. äusseren Massenkräfte: $M = h - \frac{f}{g} s'$ unter s' ist d. Projection d. Bogens $A_0 A$ d. Bahncurve auf d. Richtung d. Beschl. f. —

Wenn aber d. Flüssigkeit verhältnissmässig leicht ist (Gase, Dämpfe) und man demzufolge von d. Einwirkung d. Schwere abstrahiren kann, sodass nur d. Ergänzungskraft d. relativen Beweg. in Betracht kommt als äussere Massenkraft, so kann d. relative Beweg. d. Flüssigk. wieder in einer Rotation ω um eine zufällige Axe bestehen und in einer Translation im Sinne dieser Axe, und braucht diese Axe dann nicht mehr vertical gerichtet zu sein. In einem solchen Falle ist:

$$M = -\frac{f}{g} s' + \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - r_0^2)$$

wo r und r_0 dieselbe Bedeutung haben wie im ersten Fall und s' d. Bedeutung wie im 2ten Fall. —

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich immer allgemein auf d. permanente Beweg. von Flüssigkeit in irgend welchen Kanälen. Wir wollen nun zu den speciellen Fällen übergehen nämlich zu den Strömungen in Gefässen und Canälen d. h. in Kanälen, welche d. Flüssigkeit ganz einschliessen. Der Ausfluss von Flüssigkeiten aus Öffnungen kann dabei offenbar als Specialfall d. Strömung in Canälen angesehen werden. —