Wärmetheorie & Hydraulik

Pieper, Andreas

Karlruhe, 1872/73

Bewegung d. Flüssigkeiten

urn:nbn:de:bsz:31-279864

Bewegung d. Flüssigkeiten.

Die im folgenden zu untersuchenden Bewegungen von Flüssigkeiten sind theils strömende theils oscillirende Bewegungen, von denen d. letzteren insbesondere als Wellenbewegung d. Wassers besondere Wichtigkeit haben. Strömende Bewegungen d.h. solche, welche dauernd in gleichem Sinne stattfinden, können durch feste Wände begrenzt und hinsichtlich ihrer Gestalt bedingt zu werden, jedoch ist demgemäß je nach d. Art dieser Wände od. Leitflächen verschiedene Fälle zu unterscheiden. Bei d. Bewegung in Gefäßen und Röhren d.h. in solchen Leitungen durch welche d. Flüssigkeit ringsum umschlossen wird, so dass sie ohne freie Oberfl. (außer am Anfang und am Ende d. ganzen Leitung) sich strömend bewegt, kann dieselbe tropfbar od. luftförmig sein, und es sind daher namentlich d. beiden Fälle d. <u>Ausflusses ~~und~~ aus Gefäßmündungen</u> und d. <u>Bewegung in längeren Röhren</u> zu betrachten. Bei luftförmigen Flüssigkeiten beschränkt sich hierauf d. Untersuchung, da dieselben überhaupt nur durch umschließende Wände eine bestimmt begrenzte Bewegung erhalten; was aber d. tropfbaren Flüssigkeiten betrifft, so ist d. <u>Bewegung d. Wassers in Canälen</u> von nicht geringerer Wichtigkeit d.h. in oben offenen Leitungen, längs deren ganzer Länge somit d. Oberfl. d. strömenden Wassers theils frei, theils Wandoberfl. ist. Von beschränkterem technischen Interesse ist d. Bewegung freier Wasserstrahlen, namentlich in Beziehung auf d. Wurfhöhe eines in d. Luft vertical aufsteigenden, sog. springenden Strahls.

In allen Fällen strömender Bewegung ist d. Beharrungszustand od. d. permanente Bewegung von besonderer Wichtigkeit, charakterisirt durch d. Unveränderlichkeit d. äußeren und inneren d.h. d. Bewegungs- und Spannungszustandes in jedem bestimmten Punkt d. Raumes, sofern d. Zustand nur von Ort zu Ort, nicht aber an demselben Orte mit d. Zeit veränderlich ist, mit Rücksicht auf d. etwaige eigene Bewegung d. Gefäßes, d. Rohres, d. Canals überhaupt d. festen Leitung (bezüglich auf d. Erde) ist dabei unter einem bestimmten Punkt d. Raumes stets ein solcher zu verstehen, welcher eine bestimmte Lage gegen d. Leitung (bei freien Wasserstrahlen gegen d. Erde) besitzt, und welcher auch d. jeweilige System von Coordinatenaxen fest verbunden zu denken ist. —

Zu den Aufgaben d. Hydraulik gehört endlich d. Untersuchung d. gegenseitigen Druckes zwischen Flüssigkeiten und festen Körpern bei ihrer relativen Bewegung, bezüglich auf d. festen Körper kann derselbe theils als bewegender od. beschleunigender Druck, theils als hemmender Widerstand d. Mittels in Betracht kommen. Dabei sind wieder verschiedene Fälle je nach d. Begrenzung d. Flüssigkeit zu unterscheiden, welche entweder ein isolirter freier Strahl sein od. den festen Körper allseitig umschließen od. auch als tropfbare Flüssigkeit mit freier Oberfl. nur unterhalb derselben einen theilweise eingetauchten Körper umgeben kann. —

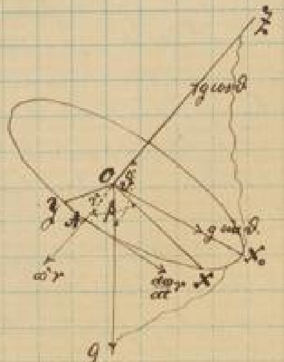
Zur Lösung dieser verschiedenen Aufgaben sind bekanntlich im Allgemeinen 7 Größen als Functionen d. Coordinaten x y z und d. Zeit t zu bestimmen; nämlich d. Geschwindigkeitscomponenten u_x u_y u_z, d. spec. Volumen v, d. Pressung p, die Temperatur und d. innere Arbeitsvermögen. Zur Verfügung sind dabei d. 3 Differentialgleichungen, welche d. Gleichgew. zwischen d. auf ein Massenelement wirkenden Massen- und Flächenkräften und d. Trägheitskräften gegen seine Beschl. entsprechen und welche d. <u>hydrodynamischen Grundgleichungen</u> heißen mögen, dann d. Continuitätsgl., eine Gl. bezüglich auf d. Wärmeleitung im Innern d. Flüssigkeit, die Zustandsgl. d. Flüssigkeit und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens. Die 5 ersten dieser Gl. sind partielle Differentialgl. und allgemein gültig, die beiden letzten sind für verschiedene Flüssigkeiten verschieden; in d. 4 ersten sind d. Temperatur und d. innere Arbeitsvermögen, in d. 3 letzten d. Geschw.-Componenten nicht enthalten. Die Integrationen müssten mit Rücksicht auf d. Grenzbedingungen bezüglich auf Zeit und Raum d.h. mit Rücksicht auf d. gegebenen Anfangszustand und auf d. Oberflächenbedingungen versucht werden. Letztere betreffen theils d. Gestalt d. Oberfl. theils d. äußeren Druck an derselben, theils d. etwaigen Wärmeaustausch zwischen Flüssigkeit und anderen Körpern. —

schließlich nach dieser allgemeinen Übersicht leicht einsehen, daß d. allgemeine Durchführung d. Aufgaben nicht möglich ist, wenigstens in zeitlich begrenzter Zukunft. Außerdem müßten dazu noch an d. festzuhaltenden Coordinaten angenommen werden, hinsichtlich erfahrungsmäßiger Coëfficienten, und mit Rücksicht auf d. Abweichungen d. dabei in Betracht kommenden Flüssigkeiten von dem in d. theoretischen Gl. vorausgesetzten idealen Zustande vollkommener Flüssigkeit und mit Rücksicht auf solche Bewegungswiderstände, welche in jenen Gl. und in d. mathematischen Grenzbedingungen nicht zum Ausdruck gebracht werden konnten. Aus diesem Grunde ist es daher notwendig, bei d. verschiedenen in d. Hydraulik vorkommenden technischen Aufgaben auf Grund specieller Voraussetzungen vorzugehen. –

Wenn zunächst keine bedeutende Mittheilung od. Entziehung von Wärme an d. Oberfl. und Wärmeentwicklung durch Bewegungswiderstände und deshalb auch nur unbedeutende Wärmeleitung im Inneren stattfindet, so kann eine Vereinfachung wesentlich dadurch herbeigeführt werden, daß eine gewisse Beziehg. zwischen d. Dr. p und d. spec. Volumen v von vornherein angenommen wird, insbesondere z. B. Gl.: $p v^m = \text{const.}$, unter m eine Constante verstanden, welche, wenn d. Zustandsänderung als bei constanter Temperatur stattfindend vorausgesetzt werden kann, für tropfbare Flüssigkeiten $= \infty$ (also $v = \text{const}$, p unabhängig von v), für Gase $= 1$ zu setzen ist, aber bei Zustandsänderungen ohne Mittheilung resp. Entziehung von Wärme für Gase $= \kappa$ d. h. = d. Verhältniß d. spec. Wärmen bei constantem Dr. und bei constantem Volumen, für Dämpfe und (wenigstens innerhalb gewisser Grenzen) für Gemische von Dampf und gleichartiger tropfbarer Flüssigkeit = einem unterschiedlichen constanten Werth zu setzen ist. Dadurch sind d. Temperatur und d. inneren Arbeitsmengen von d. Untersuchung ausgeschlossen, und sind d. 3 Geschwindigkeitscomponenten nebst d. Größen p u. v durch d. vorausgesetzte Beziehung zwischen d. letzteren und durch d. 4 ersten d. vorhergenannten 7 Gl. (durch d. 3 Fundamentalgl. und d. Continuitätsgl.) mit Rücksicht auf d. gegebenen Grenzbedingungen bestimmt. Zu leichterem Behandeln bzw. zur Entwicklung ihrer Ausdrücke in endlicher Form können weitere Vereinfachungen durch d. vorläufige Abstraction von d. inneren Reibungen (nämlich von d. Gliedern mit k in d. Gruppe d. allgemeinen Gl.) und durch gewisse Annahmen in Betreff d. Gesetzes, wonach sich d. Geschw.-Componenten mit d. Coord. ändern, herbeigeführt werden. Letzteres wird auch besonders dann nöthig, wenn wegen erheblicher Wärmeleitungen und Wärmeentwicklungen durch Bewegungswiderstände d. zuerst genannte Vereinfachung unzulässig ist, d. Geschwindigkeit d. Temperaturänderungen in d. Untersuchung mit einbezogen werden muß; eine willkürliche, wenn auch im Allgemeinen d. Verhältnissen angepaßte Annahme in Betreff d. Änderungsgesetzes d. Geschwindigkeiten ist dann zudem um so mehr gerechtfertigt, als dieses Gesetz durch d. Einfluß d. Wärme und d. Widerstände mittelbar od. unmittelbar in einer solchen Weise beeinflußt werden kann, welche sich d. mathematischen Untersuchung gänzlich entzieht. Was d. beschleunigenden Massenkräfte betrifft, welche bei d. technisch interessantesten Fällen in Betracht kommen, so reduciren sich diese auf d. Schwerkraft und 2 sogenannte Ergänzungskräfte d. relativen Bewegung. Indem die Dimensionen d. Systems von Theilchen immer nur gering gegen d. Dimensionen d. Erde ausfallen, so kann man d. Beschleunigung g d. Schwerkraft pr. Masseneinheit als gleich groß für jeden Ort und zu jeder Zeit voraussetzen. Die beiden Ergänzungskräfte spielen besonders dann eine wichtige Rolle, wenn es sich nicht nur um d. relative Bewegung d. Flüssigkeiten in d. Gefäß, sondern auch um d. Bewegung dieser Theilchen gegen d. Erde handelt. In diesen Fällen gehören außer d. Schwerkraft auch diese beiden Ergänzungskräfte zu d. beschleunigenden Massenkräften. Von Interesse ist es nun, diese beiden Ergänzungskräfte festzustellen für d. technisch wichtigsten Anwendungen, also insbesondere wenn d. Gefäß od. was dasselbe bedeutet, wenn das an dem Gefäße feste Coord.-System in Rotation um eine feste Axe begriffen ist.

Ist hier angenommen d. Coord.-System, auf welches d. relative Bewegung d. Flüssigkeit bezogen wird, bewege sich um eine feste Axe und zwar sei d. Z Axe als Rotationsaxe angenommen, um welche d. Rotation mit d. Winkelgeschw. ω erfolgt, welche im Allgemeinen im Laufe d. Zeit

... sein kann. ϑ sei d. constante Winkel d. Z Axe mit d. Richtung d. Schwerkraft $= Og$. Durch d. Ursprung O denkt man eine Ebene gelegt senkrecht zur festen Rotationsaxe OZ, welche von d. durch gOZ bestimmten Ebene in d. Geraden OX_0 geschnitten wird. Die Zeit t werde gerechnet von dem Augenblick an, in welchem d. X Axe, welche ebenso wie d. Y Axe immer in d. Ebene X_0OA bleibt, durch diese Gerade OX_0 geht; zur Zeit $t=0$ hat demnach d. X Axe d. Lage OX_0 und zur Zeit t habe sich d. Lage OX und d. Y Axe d. Lage OY. In d. Zeit t hat d. X Axe sich demnach gedreht um d. Winkel X_0OX, welcher offenbar gleich ist:



$$X_0OX = \int_0^t \omega\, dt.$$

Zerlegt man d. Beschl. g d. Schwerkraft in 2 Componenten nach d. Richtung OX_0 und OZ, so hat man in d. Richtung OZ d. Componente $g.\cos\vartheta$ und in d. Richtung OX_0 d. Componente: $g.\sin\vartheta$; letztere kann man wieder in 2 Componenten nach OX und OY zerlegen und erhält dann offenbar als d. Componenten d. Beschl. d. Schwerkraft nach d. 3 Axenrichtungen:

Nach d. Richtung OX od. im Sinne d. X Axe: $-g.\sin\vartheta.\cos X_0OX = g.\sin\vartheta.\cos[\int_0^t\omega dt]$

im Sinne d. Y Axe: $-g.\sin\vartheta.\cos X_0OY = \div g\sin\vartheta\sin\int_0^t\omega dt.$

im Sinne d. Z Axe: $= g.\cos\vartheta.$

Sind nun X Y Z d. im Sinne d. angewandten Coord.-axen genommenen Componenten d. gesammten beschleunigenden Massenkraft, so sind d. obigen Componenten diejenigen Bestandtheile dieser Beschleunigungscomponenten, welche von d. Schwerkraft herrühren. Hierzu kommen nun noch die von d. beiden Ergänzungskräften herrührenden Bestandtheile. — d. Beschl.

Was nun d. erste Ergänzungskraft d. relativen Bewegung betrifft, so ist dieselbe bekanntlich ebenso groß aber gerade entgegengesetzt gerichtet d. Beschl. eines mit d. Coord. System festverbundenen Punktes, in welchem sich d. betrachtete materielle Punkt augenblicklich befindet. Ist nun A irgend ein Punkt (hier ist er in d. XY Ebene liegend angenommen, was d. Sicherheit wegen geschieht und was sich auch nachher als vollkommen zulässig erweist, indem ... als d. Punkt A in d. XY Ebene selbst od. in einer mit ihr parallelen Ebene liegt) in dem Abstand r von d. Rotationsaxe fest mit d. Coord. verbunden, so beschreibt dieser Punkt einen Kreis vom Radius r (mit d. Winkelgeschw. ω) und seine Beschl. kann demnach zerlegt werden in eine Centripetalbeschl.: $\omega^2 r$ und eine Tangentialbeschl. $= \frac{d\omega}{dt} r$, welche nach d. Richtung AO resp. tangential an dem von A beschriebenen Kreis im Sinne d. Geschw. ω gerichtet sind. Da nun aber d. erste Ergänzungskraft gerade ebenso groß aber entgegengesetzt gerichtet ist d. Beschl. dieses Punktes A und demnach d. Componenten in derselben Beziehung zu einander stehen, so haben d. Componenten d. Beschl. d. ersten Ergänzungskraft d. Größen $\omega^2 r$ und $\frac{d\omega}{dt} r$ und d. Richtungen OA resp. AA_1. Diese beiden Componenten kann man nun wieder zerlegen in Componenten nach d. Axenrichtungen. Ist $A\hat{O}X = \beta$ so ist d. Componente im Sinne d. Z Axe natürlich $= 0$ (was sie offenbar nicht sein würde, wenn A nicht in d. Ebene XY liegend angenommen wäre), während d. Beschl. Comp.

im Sinne d. X Axe ist herrührend von d. Centripetalbeschl. $\omega^2 r$: $= \omega^2 r\cos\beta = \omega^2 x$

und im Sinne d. Y Axe " " " " : $= \omega^2 r\sin\beta = \omega^2 y.$

ferner im Sinne d. X Axe herrührend von d. Tangentialbeschl. $\frac{d\omega}{dt} r$: $= \frac{d\omega}{dt} r\cos(\beta - \frac{\pi}{2}) = \frac{d\omega}{dt} r\sin\beta = \frac{d\omega}{dt} y$

im Sinne d. Y Axe " " " " " " : $= \frac{d\omega}{dt} r\sin(\beta - \frac{\pi}{2}) = \div\frac{d\omega}{dt} r.\cos\beta = \div\frac{d\omega}{dt} x$

denn offenbar ist $r\cos\beta = x$ und $r.\sin\beta = y$ d. Coordinaten d. Punktes A.

Demnach ~~sind~~ sind d. von d. ersten Centrifugalkraft d. relativen Bewegung herrührenden Bestandtheile d. Beschl.-Componenten der Gesammten Massenkräfte:

Im Sinne d. X Axe: $\omega^2 x + \frac{d\omega}{dt} y$ (kommt zu X hinzu)

" " Y Axe: $\omega^2 y - \frac{d\omega}{dt} x$ (kommt zu Y hinzu). —

Die 2te Centrifugalkraft hängt bekanntlich ab von d. relativen Geschw. d. Punktes A gegen d. Coord.-System. Ist nämlich u_{xy} d. Projection d. relativen Geschw. des beliebigen materiellen Punktes A gegen d. Coord.-System auf die zur Rotationsachse OZ senkrechte XY Ebene, so ist d. durch d. 2te Centrifugalkraft bewirkte Beschleunigung bekanntlich $= 2\omega u_{xy}$ und zwar hat sie eine senkrechte Richtung zu Z Axe und d. Projection u_{xy} senkrechte Richtung, und zwar in solchem Sinne, daß eine Drehung von 90° um d. Z Axe im Sinne von ω diese letztere Beschl. in d. Richtung von u_{xy} versetzen würde. Ist nun α d. Winkel zwischen u_{xy} und d. X Axe, so sind d. Componenten d. Beschl. $2\omega u_{xy}$ offenbar:

Im Sinne d. X Axe: $= 2\omega u_{xy} \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = 2\omega u_{xy} \sin\alpha$

" " " Y Axe: $= 2\omega u_{xy} \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -2\omega u_{xy} \cos\alpha$.

Nun ist aber offenbar $u_{xy} \sin\alpha = u_y$ und $u_{xy} \cos\alpha = u_x$ die Componenten d. relativen Geschw. d. materiellen Punktes im Sinne d. Y und X Axe, so daß d. fraglichen Beschl.-Componenten herrührend von d. 2ten Centrifugalkraft nun sind: $= 2\omega u_y$ im Sinne d. X Axe und $-2\omega u_x$ im Sinne d. Y Axe. —

Demnach werden nun d. Componenten d. Beschl. d. Gesammtmassenkräfte:

$$X = g \sin\vartheta \cos\left[\int_0^t \omega\, dt\right] + \omega^2 x + \frac{d\omega}{dt} y + 2\omega u_y$$

$$Y = -g \sin\vartheta \sin\left[\int_0^t \omega\, dt\right] + \omega^2 y - \frac{d\omega}{dt} x - 2\omega u_x$$

$$Z = g \cos\vartheta$$

In den meisten Fällen vereinfachen sich diese Ausdrücke noch dadurch, daß d. Leitflächen und mit ihnen d. an denselben feste Coord.-System um d. feste Axe mit constanter Winkelgeschw. rotieren, wie bei d. Wasser welches durch eine Turbine fließt. Wenn aber $\omega = \text{const.}$ ist, so folgt: $\int_0^t \omega\, dt = \omega \int_0^t dt = \omega t$ und dementsprechend d. Ausdrücke für X u. Y.

Untersuchung d. strömenden Bewegungen von Flüssigkeiten.

In den meisten Fällen, welche in d. Praxis vorkommen, ist d. strömende Bewegung d. Flüssigkeiten durch Leitflächen derartig eingeschränkt, daß man von vornherein d. Bahnen bestimmen kann, welche von d. verschiedenen materiellen Punkten durchlaufen werden, insbesondere wenn man von stoßweisen und wirbelförmigen Bewegungen absieht, diese vielmehr später durch empirische Coefficienten in Rechnung bringt. Wenn z. B. Wasser in einer geraden cylindrischen Röhre strömt, so ist es offenbar anzunehmen, daß alle Wassertheilchen parallele Linien mit d. Mittellinie d. Cylinders durchlaufen. Ebenso werden auch ganz offenbar d. Bahnen aller Flüssigkeitstheilchen, welche einen kegelförmigen Canal durchfließen, in deren Spitze zusammentreffen. Ähnlich wird d. Bewegung bei vielen anderen Fällen sein. Dadurch wird natürlich von vornherein d. Aufgabe ganz wesentlich vereinfacht, indem d. Bewegungszustand ~~durch eine einzige~~ Größe vollkommen bestimmt ist. Also statt d. 3 unbekannten Geschw.-Componenten u_x u_y u_z bleibt hier nur d. Größe u zu jedem Ort und zu jeder Zeit übrig. Wenn ferner d. Verhältnisse derartig sind, daß noch eine gewisse Beziehung zwischen