Wärmetheorie & Hydraulik

Pieper, Andreas

Karlruhe, 1872/73

I. Gleichgewicht d. Wassers

urn:nbn:de:bsz:31-279864

Nun ist d. Gleichgew. dann als ein sicheres zu bezeichnen, wenn in Folge einer unendl. kl. Störung derselbe von selbst wieder hergestellt wird. Angenommen diese Störung werde dadurch herbeigeführt, daß in d. Raume d. Flüssigkeitselements eine unendl. kl. Flüssigkeitsmenge hineintrete, wodurch d. Flüssigkeitsdichte μ_2 sei, dann erhält man für diesen gestörten Zustand die resultierende Kraft, welche auf d. Flüssigkeitselement wirkt, indem man μ_2 an die Stelle von μ_1 in d. letzten Gl. setzt, also:

$$d\!f\,(\mu_2\, P\, dn - dp) = \text{d. resultierenden Kraft.}$$

Soll d. Gleichgew. sicher sein, so muß dieser Ausdruck positiv sein. Setzen wir für dp seinen Ausdruck $\mu_1 P\, dn$, so ist dieser Ausdruck positiv od. negativ je nachdem μ_2 größer od. kleiner als μ_1 ist, offenbar ist diese Bedingungsforderung gewiß gebunden (?) an d. Umstand, daß μ_1 u. μ_2 eine endl. Verschiedenheit haben.

Handelt es sich um d. relative Ruhe, so ist es ersichtlich, daß d. Massenkraft P in d. Componenten $X\,Y\,Z$ auch diejenige ergänzende Kraft in sich begreift, die durch d. eigene Bewegung d. Coordinatensystems erforderlich wird. Die Centrifugalkraft d. relativen Bewegung ist aber für diesen Fall = 0, es kommt also nur d. erste Kraft hinzu, die z. Massenelement ... ist, als d. entgegengesetzte Beschleunigung d. Punktes, wenn er mit d. Coordinatensystem fest verbunden ist. P ist also d. Resultante d. Schwerkraft und d. Kraft, welche hinzugefügt werden muß, um d. relative Ruhe wieder in absolute zu verwandeln. Die Ergänzungskraft ist gleich groß und gleich gerichtet mit d. Beschleunigung.

Natürlich kann durchaus nicht immer in einem solchen Fall d. relative Ruhe d. Flüssigkeit gegen d. Coordinatensystem möglich sein, nur bei ganz besonderen Bewegungsarten ist dies möglich; vor allen Dingen muß d. resultierende Massenkraft P durchaus unabhängig von d. Zeit sein, damit eine solche relative Ruhe dauernd bestehe, ferner ist erforderlich, daß d. translatorische Bewegung d. Coord.-Systems mit einer Beschleunigung von constanter Größe und Richtung gegen d. Coord.-System stattfindet und daß, wenn gleichzeitig d. Coord.-System in Rotation begriffen ist, dieselbe um eine Axe von fester Lage stattfindet. —

Je nach d. Art d. gegebenen gemeinsamen Massenkraft kann d. zulässige eigene Bewegung d. Coord.-Systems noch an andere Bedingungen geknüpft sein, d. festgesetzten allgemeinen Gesetze gelten übrigens allgemein, von welcher Art d. Flüssigkeit auch sein möge. —

I. Gleichgewicht d. Wassers.

Voraussetzungen.

Es befinde sich d. Wasser in einem Gefäße, dessen Dimensionen als klein genug im Vergleich mit d. Dimensionen d. Erde vorausgesetzt werden sollen, um d. beschleunigende Schwerkraft g in allen Punkten als gleich groß und gleich gerichtet voraussetzen zu dürfen; diese beschleunigende Schwerkraft g schließt d. Einfluß d. Erdrotation bereits in sich, diese ist bereits d. Resultat d. Zusammenwirkung d. Anziehungskraft und d. Rotation d. Erde, so daß eine Ergänzung d. auf d. Flüssigkeit wirkenden Kraft nur noch dann (?) erforderlich ist, wenn d. Gefäß eine eigene Bewegung bezüglich d. Erde besitzt, eine solche Bewegung soll daher hier (?) vorläufig (?) d. Bewegung d. Gefäßes genommen werden.

Ich setze ferner hinsichtlich dieses relativen Gleichgew. voraus, daß d. äußere Druck pro Flächeneinheit d. freien Oberfl. in allen Punkten gleich groß $= p_0$ sei; in d. Regel besteht dieser äußere Druck aus dem Atmosphärendruck und kann dann in d. That in allen Punkten als gleich groß vorausgesetzt werden. Die freie Oberfl. ist hiernach immer eine Niveaufl.

Bekanntlich ist auch d. vorhergehenden allgemeinen Erörterungen d. Stabilität d. Gleichgew. an d. Bedingung geknüpft, daß d. Dichtigkeit d. Flüssigkeit im Sinne d. Kraftrichtungen zunehmen, also in demselben Sinne wachse, in welchem P gerichtet ist, nun ist aber d. Dichtigkeit d. Wassers bekanntlich von d. Pressung in nur äußerst geringem Grade abhängig (als tropfbare Flüssigkeiten sind nur äußerst wenig zusammendrückbar) so daß eine Änderung d. Dichtigkeit nur von ~~einer übrigen~~ Temperaturverschiedenheit herrscht und deshalb kann d. Wasser sich nur dann im relativen Gleichgew. befinden, wenn d. Dr., in welchem Sinne d. wirkt, die Temperatur im Wasser von Schicht zu Schicht kleiner wird. Bei d. folgenden Betrachtungen will ich indess nur von solchen niedrigen Temperaturverschiedenheiten absehen, sodass d. spez. Masse als durchaus als constant vorausgesetzt werden darf, vorausgesetzt an allen solchen Punkten d. Flüssigkeit die von d. Oberfl. eine endl. Entfernung haben. Unmittelbar an d. Oberfl. d. Flüssigkeit kann nämlich allerdings durch d. Einfluss d. Molekularkräfte eine ganz wesentlich verschiedene Dichtigkeit stattfinden, überhaupt eine ganz andere Molekular[illegible] d. einzelnen Theile und es können dadurch d. Erscheinungen d. Gleichgew. besonders dann wesentlich modificiert werden, wenn d. Gleichgew. d. Flüssigkeit stattfindet, während dieselbe zwischen sehr nahen festen Wänden, also in kleinen Röhren sich befindet, weshalb diese Molekularkräfte unter d. Namen Capillarität zusammengefasst werden. Hiervon muss jedoch noch abgesehen werden. —— Die auf d. Flüssigkeit wirkenden Kräfte sind demnach: 1) die Schwerkraft und 2) eventuell d. erste Ergänzungskraft mit Rücksicht auf d. eigene Bewegung d. Gefässes. –

Was die im Allgemeinen hierbei mögliche Art d. eigenen Bewegung d. Gefässes betrifft, damit d. Wasser sich in relativer Ruhe gegen dasselbe befinden können, so ist hervorzuheben, dass dieselbe abgesehen von d. Massenkraft nicht d. Translationsgeschwindigkeit und einer Rotationsgeschwindigkeit besteht, im vorliegenden Fall, wobei ferner Bestandtheil d. resultierenden Massenkraft P d. Schwerkraft hinzukommt muss offenbar d. weitere Beschränkung hinzugefügt werden, dass d. Axe d. Gefässes, um welche dasselbe rotirt, durchaus vertical ist, widrigenfalls würden d. Componenten $X\,Y\,Z$ d. resultierenden Massenkraft d. Coordinatenaxen veränderlich werden gegen d. Richtung d. Schwerkraft, was nicht sein darf, wenn eine relative Ruhe d. Flüssigkeit gegen d. Gefäss bestehen soll.

a. Gleichgewicht d. Wassers ohne Rücksicht auf Molekularkräfte.

Niveauflächen und Druckhöhe in verschiedenen Fällen.

Die Coordinatenaxen seien zunächst fest verbunden mit d. Gefässe, d. Z Axe sei vertical und zwar positiv in d. Richtung von unten nach oben also z. B. d. Ursprung im Boden d. Gefässes. Es sei:

1) das Gefäss in Ruhe od. es habe höchstens eine geradlinige und gleichförmige Translationsbewegung nach irgend einer Richtung.

In diesem Fall ist d. Ergänzungskraft d. relativen Bewegung $= 0$ und man hat also:

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad \text{und} \quad Z = -g.$$

einfach als Componenten d. Massenkraft. Die Differentialgl. d. Niveaufl. ist:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

in diesem Fall also: $-g\,dz = 0$

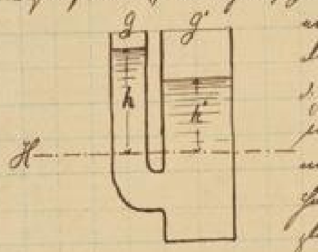
und demnach d. Gl. d. Niveaufl. in endl. Form: $z = \text{const.}$ d. h. d. Niveauflächen sind horizontale Ebenen, insbesondere ist also im Gleichgew.-zustande auch d. freie Oberfl. d. Wassers eine Horizontalebene.

Was d. Dr. p betrifft, die an irgend einer Stelle in d. im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit stattfindet, so ist allgemein: $dp = \mu(Xdx + Ydy + Zdz)$ also hier: $dp = -\mu g\,dz$

und also $p = -\mu g z + B$. —— Ist nun bezeichnet h d. Höhe d. freien Oberfl. d. Flüssigkeit über d. Ursprung d. Coord., so muss, wenn man in dieser Gl. $z = h$ setzt, $p = p_0$ werden, also = dem gegebenen äusseren Druck auf d. freie Oberfl., also $p_0 = -\mu g h + B$

oder: $p - p_0 = \mu g(h - z)$; nun ist μg d. Product aus spez. Masse und Beschleunigung d. Schwere und bedeutet also d. spez. Gew. d. Wassers, welches natürlich auch constant sein und mit γ bezeichnet werde. demnach d. Gl.: $\frac{p - p_0}{\gamma} = h - z$. Hiernach d. Quotient $\frac{p}{\gamma}$ bereits früher d. Druckhöhe in d. Punkte genannt, in welchem d. Dr. p stattfindet, ebenso $\frac{p_0}{\gamma}$ an d. fr. Oberfl., und mithin $\frac{p - p_0}{\gamma}$ = Unterschied d. Druckhöhe in d.

beliebigen Punkt über den in d. freien Oberfl.; dieser Unterschied sei genannt: die Unterdruckhöhe in dem Punkte, in welchem d. Pressung $= p$ ist, $h - z$ ist d. Tiefe dieses Punktes unter d. freien Oberfl. Diese Gl. drückt also aus, daß d. Unterdruckhöhe in irgend einem Punkte = der Tiefe dieses Punktes unter d. freien Oberfl. ist. Was d. Gesetz betrifft, daß in allen Punkten einer und derselben Horizontalebene ein gleicher Druck stattfindet, so ist dies Gesetz offenbar bedingt durch d. Voraussetzung, daß man von irgend einem Punkte d. Horizontalebene zu einem andern gelangen könne, indem man beständig innerhalb d. nämlichen Flüssigkeit von constanter Dichtigkeit bleibt. — Denken wir uns 2 communicirende Gefäße von irgend einer Form, in denselben mögen sich 2 verschiedene Flüssigkeiten befinden, die sich nicht miteinander mischen. Nach d. allgemeinen Gesetzen d. Flüssigkeiten kann d. Gleichgew. nur in d. Weise stattfinden, daß d. Ebene, in welcher sich d. Flüssigkeiten berühren eine horizontale sei. H sei diese Berührungsebene, die eine Flüssigkeit stehe in d. einen Schenkel bis zur Höhe h über



diese Ebene die andere bis zur Höhe h'. Damit d. Gleichgew. stabil sei muß d. Flüssigkeit im Gefäße G' die dichtere von beiden sein. Wenn ich also mit μ' die spec. Masse d. Flüssigkeit in G' bezeichne und mit μ d. spec. Masse d. andern, so muß $\mu' > \mu$ sein. Es wird in allen Punkten irgend einer Horizontalebene, die tiefer liegt als d. Berührungsebene H, eine durchweg gleiche Pressung stattfinden, denn kann also bei d. Fortzählung d. Gl. für Ws-z als vollständig constant betrachten, dagegen für eine Horizontalebene, die höher als H liegt, müßte man durch d. Masse μ' hindurchgehen, hier trifft d. Bedingung nicht zu, es oberhalb d. Höhe H in einer und derselben Ebene d. Pr. d. Flüssigkeiten gleich groß sei; bis zur Ebene H gilt dieses Gesetz in beiden Gefäßen zusammen, oberhalb nicht mehr. Es fragt sich nun, wie weit diese Ebene H hinaufreicht? Was dies betrifft, so kann man dieses Gesetz für jedes Gefäß für sich Anwendung bringen. Legt man also d. Ursprung d. Coord. in diese Horizontalebene H und versteht unter p_0 d. Pr. in irgend einem Punkte d. Ebene H, so erhält man mit Rücksicht auf d. erste Gefäß: $p - p_0 = \mu g h$. Für d. 2te Gefäß und zwar für alle Punkte, die oberhalb d. Ebene H liegen hat man: $p - p_0 = \mu' g h'$, wo in beiden Fällen $p - p_0$ denselben Werth hat, wenn ich d. äußeren Druck auf beide Gefäßoberfl. gleich groß setze; also muß im Gleichgewicht: $\mu h = \mu' h'$ sein; es verhalten sich also d. Höhen, bis zu welchen d. Flüssigkeiten in communicirenden Röhren hinaufreichen, umgekehrt wie d. spec. Gew. d. Flüssigkeiten.

2) Das Gefäß, in welchem d. Wasser in relativer Ruhe sei, befinde sich selbst in Bewegung.

Ich nehme wiederum d. Coord.-Axen fest verbunden mit d. Gefäße und zwar so, daß d. Z Axe vertical und positiv nach oben gerichtet ist. D. Gefäß kann, wie schon hervorgehoben allgemein eine solche Bewegung haben, daß es um eine verticale Axe mit constanter Winkelgeschwindigkeit rotirt und dabei zugleich eine translatorische Beschleunigung besitzt. —

Die Z Axe möge mit d. Rotationsaxe d. Gefäßes zusammenfallen, dann steht es uns frei, die beiden anderen Axen zweckmäßig zu wählen, es seien dieselben so gewählt, daß d. constante Richtung d. Translationsbeschl. d. Gefäßes beständig in d. XZ Ebene bleibt und also d. Componente im Sinne d. Y Axe $= 0$ ist. Dadurch sind d. Coord.-Axen in ganz bestimmter Weise angenommen bis auf d. willkürliche Lage d. Ursprungs. Die constante Winkelgeschwindigkeit d. Gefäßes um d. Z Axe sei $= \omega$. Die Componente d. Translationsbeschl. im Sinne d. X Axe sei $= ag$, wo a eine positive Constante ist, welche durch Annahme von X erreicht werden kann. D. Componente d. Translationsbeschl. im Sinne d. Y Axe ist $= 0$ und im Sinne d. Z Axe kann sie ~~nicht allgemein mit~~ $\pm Cg$ bezeichnet werden. Hier muß $\pm$ hinzugefügt werden, da über d. Sinn d. Z Axe schon verfügt war. Diese Componenten d. Translationsbeschl. d. Gefäßes bedingen entsprechende Scheinkräfte d. Kraftcomponenten $X\,Y\,Z$, welche dieser Beschl.-componenten gleich aber gerade entgegengesetzt gerichtet sind. Was d. Rotation d. Gefässes mit d. Winkelgeschw. ω betrifft, so bedingt diese eine Beschl., welche horizontal, senkrecht zu d. Z Axe gerichtet, den Componenten dieser Centrifugalbeschl. entsprechen. Diese sind $-\omega^2 x$ und $-\omega^2 y$ bezüglich beider Axen. Es sind diese 3 Componenten d. Beschl. d. Punktes $x\,y\,z$, welche er besitzt, wenn man ihn mit d. Gefäss fest verbunden denkt. Diese 2 Beschl. bedingen nun auch entsprechende Bestandtheile d. Kraftcomponenten $X\,Y\,Z$, welche diesen gleich aber gerade entgegengesetzt gerichtet sind; schliesslich hat man in diesem Fall für $X\,Y\,Z$ also für d. Componenten d. beschleunigenden Massenkraft folgende Ausdrücke:

$$X = -ag + \omega^2 x; \quad Y = \omega^2 y \quad \text{und} \quad Z = \mp cg - g$$

demnach lautet d. Differentialgl. d. Niveaufl.:

$$(-ag + \omega^2 x)\,dx + \omega^2 y\,dy - (1 \pm c)\,g\,dz = 0.$$

Wenn man d. Anfangspunkt d. Coord. im Sinne d. X Axe verlegt, so dass d. neue X Coord. $= x_1$ wird und zwar d. Art, dass $x = \frac{ag}{\omega^2} + x_1$, so ist $dx = dx_1$ und d. Gl. lautet:

$$\omega^2 (x_1\,dx_1 + y\,dy) - (1 \pm c)\,g\,dz = 0$$

Wenn man d. ganze Gl. durch $\frac{\omega^2}{2}$ dividirt, d. 2te Glied auf d. rechte Seite bringt und dann integrirt, so folgt:

$$x_1^2 + y^2 = \left(x - \frac{ag}{\omega^2}\right)^2 + y^2 = 2\frac{(1 \pm c)}{\omega^2}\,g\,(z - C). \quad \text{———} \quad \alpha$$

Die Gl. lässt sofort erkennen, dass d. Niveauflächen eine Gruppe congruenter Umdrehungsparaboloide sind, die d. Parameter $2\frac{(1 \pm c)}{\omega^2}g$ haben, deren gemeinschaftliche Axe in d. Entfernung $\frac{ag}{\omega^2}$ von d. Z Axe ist und es unterscheiden sich diese verschiedenen Niveaufl. nur dadurch, dass ihre Scheitelpunkte in verschiedenen Höhen über d. Ursprung d. Coordinaten liegen. Insbesondere stellt diese Gl. d. Gl. d. freien Oberfl. d. Flüssigkeit dar, wenn man d. Constante C nur so bestimmt, dass d. Volumen, welches durch d. betreffende Paraboloid von d. Gefässraum abgeschnitten wird, gleich d. gegebenen Flüssigkeitsvolumen. Es frägt sich ferner, welche Pressung unter solchen Umständen für eine gegebene Stelle stattfindet. Zu diesem Zweck will ich davon ausgehen, dass bekanntlich: $\frac{dp}{dz} = \mu Z$ ist und da: $Z = \mp cg - g$

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g (1 \pm c).$$

Hieraus folgt durch Integration: $p = -\mu g (1 \pm c) z + f(xy)$, wenn $f(xy)$ eine von z unabhängige Function bedeutet.

Diese Gl. liefert d. Pressung in einem Punkt A, dessen Coord. $x\,y\,z$ sind. Denkt man sich durch A eine verticale Linie gezogen und bezeichnet mit A_0 ihren Schnittpunkt mit d. freien Oberfl., so sei h d. Z Coord. d. freien Oberfl., also d. Höhe über d. Ursprung; da nun in jedem Punkt A_0 dieselbe gegebene Pr. p_0 herrscht, so muss unsere Gl. befriedigt werden für $z = h$ und $p = p_0$, während x u. y dieselben bleiben;

also: $\quad p_0 = -\mu g (1 \pm c) h + f(xy)$ und subtrahirt man beide Gl. von ~~einander~~ einander:

$p - p_0 = \mu g (1 \pm c)(h - z)$ oder wenn ich d. Product μg = spec. Gew. mit γ bezeichne:

$$\frac{p - p_0}{\gamma} = (1 \pm c)(h - z)$$

$\frac{p - p_0}{\gamma}$ ist wieder d. sog. Ueberdruckshöhe; dieselbe ist also proportional d. vertical gemessenen Tiefe d. Punktes unter d. freien Oberfl. Die Ueberdruckshöhe würde dieser Tiefe genau gleich sein, wenn $c = 0$ wäre, also wenn d. Gefäss keine Verticalbeschleunigung hätte. Auch diesem Gesetz ist d. Bestimmung d. Pr. in allen Punkten zurückgeführt auf d. Bestimmung d. freien Oberfl. — Was d. besonderen Fälle betrifft, die in d. hier vorausgesetzten allgemeinen Aufgabe enthalten sein können, so vorausgesetzt, es habe d. Gefäss nur eine Translationsbeschleunigung, also $\omega = 0$, so wird d. ganz oben stehende Gl. α unbrauchbar, indem die rechte Seite derselben für $\omega = 0$ unendl. wird. Man muss also zurückgehen auf d. Differentialgl., aus welcher diese Gl. entstanden ist, nämlich: $(-ag + \omega^2 x)\,dx + \omega^2 y\,dy - (1 \pm c)\,g\,dz = 0$. Setzt man hierin $\omega = 0$, so lautet d. Gl.: $-a\,dx - (1 \pm c)\,dz = 0$ und hieraus durch Integration:

$$z = -\frac{a}{1 \pm c}\,x + C.$$

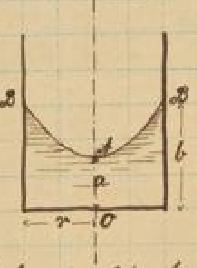
Die Niveaufl. sind also in diesem Falle parallele Ebenen, welche d. XZ Ebene rechtwinklig schneiden in solchen Geraden, die mit d. X Axe den Winkel φ bilden derart, dass: $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a}{1 \pm c}$ ist. Diese Ebenen wären horizontal, wenn $\operatorname{tg}\varphi = 0$ wäre, also wenn $a = 0$ wäre. Dies ist d. Fall, wenn d. Translationsbeschl. vertical ist. Bemerkenswerth ist hierbei noch d. Fall, dass d. Gefäss selbst vermöge d. Schwere frei fällt. Dann hat d. Gefäss eine Translationsbeweg. mit einer constanten Beschl., welche in diesem Fall = d. Beschleunigung g d. Schwere wäre. →

Dann ist: $a = 0$ und $\pm c = -1$. Hiernach würde folgen: $z = \frac{0}{0}x + C$. Dies ist offenbar von vornherein leicht begreiflich, in diesem Fall ist d. resultierende Kraft P für irgend ein Flüssigkeitselement $P = Z = 0$. Es wirkt hier d. primäre Beschl. d. Schwerkraft auf d. Masseneinheit pr. 1 kg. Hinzu kommt eine entgegengesetzte, die eigene Bewegung d. Gefäßes, d. eben so groß ist, also $P = 0$, es kann also in diesem Fall d. Wasser sich in jeder beliebigen Form gegen d. Gefäß im Gleichgew. befinden. —

Von größerem Interesse ist d. Fall, daß d. Gefäß nur um d. Z Axe rotirt, für diesen Fall erhält man d. Gl. d. Niveauflächen aus d. allgemeinen Gl. indem man $a = c = 0$ setzt, also:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - C).$$

Die vorgenannten paraboloidischen Umdrehungsflächen haben d. Z Axe selbst zur gemeinschaftlichen Axe. Hat d. Gestalt d. Gefäßes selbst beliebig, habe dasselbe d. Gestalt eines verticalen Kreiscylinders, der horizontale Querschnitt ist also ein Kreis vom Radius r. O sei d. Coordinatenursprung. D. Meridianschnitt d. freien Oberfl. ist eine Parabel, dieselbe sei DAD. Es sei d. Höhe d. Scheitelpunktes A über O also $AO = a$ und $BO = b$, dann besteht d. Aufgabe darin a u. b zu bestimmen, wenn r und d. Wasservolumen V im Gefäß gegeben ist. $V = \pi r^2 h$, also h d. Höhe, bis zu welcher diese Wassermenge im Gefäß reichen würde, wenn dasselbe nicht rotirt. Wenn nun ein solches Gefäß mit d. Radius r mit d. constanten Winkelgeschw. ω um seine geometrische Axe in Rotation versetzt wird, so fragt es sich, wie groß werden a u. b im Gleichgew.-Zustand sein.



Die entsprechende Gl. d. freien Oberfl. ergibt sich aus d. allgemeinen Gl., wenn man $C = a$ setzt, da C die Höhe d. Scheitelpunktes über d. Ursprung bedeutet, da für $C = z - C$, $x = y = 0$ wird; also:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - a)$$

Es ist nun bekanntlich d. Volumen eines Umdrehungsparaboloids = d. Hälfte eines Kreiscylinders von gleicher Grundfl. und Höhe, also d. Volumen, welches enthalten ist zwischen d. freien Oberfl. und d. Ebene BD, ist = d. Hälfte eines Cylinders von d. Grundfläche πr^2 und d. Höhe $b - a$, also ist nun dasjenige Wasservolumen, welches zwischen der durch d. Scheitelpunkt A und durch DD gehenden Horizontalebenen = d. Hälfte des zwischen diesen beiden Ebenen liegenden Cylinders vom Radius r. Also das über A befindliche Wasservolumen ist $= \frac{1}{2}\pi r^2 (b - a)$. Dieses Wasservolumen läßt sich noch anders ausdrücken: Im Ruhezustand d. Gefäßes hat dieses selbe Wasservolumen d. Gestalt eines Kreiscylinders von d. Grundfl. πr^2 und d. Höhe $h - a$. Also folgt: $b - a = 2(h - a)$ oder: $b + a = 2h$.

Wenn man andererseits in d. Gl. d. freien Oberfl. $z = b$ setzt, so wird $x^2 + y^2 = r^2$ und folglich erhält man aus dieser Gl.: $b - a = \frac{r^2\omega^2}{2g}$. Nun ist $r\omega$ offenbar d. Periphergeschwindigkeit, bezeichnet mit u und also: $b - a = \frac{u^2}{2g}$. Mit Hilfe dieser beiden Gl. sind a u. b bestimmt und man findet: $a = h - \frac{u^2}{4g}$ und $b = h + \frac{u^2}{4g}$.

Also wenn ein solches cylindrisches Gefäß ursprünglich ruht und das darin befindliche Wasser im Gleichgew. ist, und wenn dann d. Gefäß mit d. Winkelgeschw. ω um seine Axe gedreht wird, so wird d. Wasser in d. Mitte um ebensoviel herunter gedrückt, wie es am Rand in d. Höhe geht, nämlich um d. Hälfte d. Geschwindigkeitshöhe, welche d. Periphergeschw. d. Gefäßes entspricht.

Wenn d. Gefäß nun aber oben durch einen horizontalen Deckel geschlossen wäre, wodurch d. Emporsteigen bis über eine gewisse Grenze verhindert wird, so kann sich in dieser Weise d. Gleichgew. natürlich nicht ausbilden, es wird dann d. freie Oberfl. einen veränderten Verlauf haben. Dies ist ein Fall, der in Technik sehr oft vorkommt und es fragt sich, welches wird unter diesen Umständen die Höhe a sein? Es muß natürlich in diesem Fall die Höhe dieses oberen Randes über d. Ursprung $= H$ gegeben sein, welche Höhe größer als h vorausgesetzt ist, damit bei ruhendem Gefäß d. obere Fläche noch etwas tiefer als dieser Rand steht. Angenommen sei H kleiner als d. Höhe b, bis zu welcher

d. Randlinie steigen würde, wenn d. Deckel nicht vorhanden wäre, also: $b > H > h$.

Es fragt sich, wenn nun d. Rotation eintritt, bis zu welcher Tiefe sinkt nun a; es sei in diesem Fall d. Halbmesser d. Kreises, in welchem d. freie Oberfl. die obere Deckelebene trifft $= \varrho$, dann ist d. Volumen, welches zwischen dieser Deckelebene und d. freien Wasseroberfl. enthalten ist $= \frac{1}{2}\pi\varrho^2(H-a)$, dieses selbe Volumen ist aber $= \pi r^2(H-h)$, denn ursprünglich hatte dieses Luftvolumen d. Gestalt eines Cylinders von d. Grundfl. πr^2 und d. Höhe $H-h$. Wenn man in dieser Gl.:

$$\frac{1}{2}\pi\varrho^2(H-a) = \pi r^2(H-h)$$

für ϱ^2 seinen Werth setzt, welcher sich aus d. Gl. d. freien Oberfl. ergibt indem $z = H$ gesetzt wird, also wenn man setzt: $\varrho^2 = \frac{2g}{\omega^2}(H-a)$ so erhält man:

$$\frac{g}{\omega^2}(H-a)^2 = r^2(H-h)$$

und daraus ergibt sich, wenn man $r\omega = u$ setzt:

$$a = H - u\sqrt{\frac{H-h}{g}}.$$

Was d. Dr. betrifft, welcher in einem solchen Fall an irgend einer Stelle herrscht, so findet man diesen mit Rücksicht darauf, daß d. Überdruck an dieser Stelle gleich ist d. vertical gemessenen Tiefe dieses Punktes unter d. freien Oberfl., wobei man sich diese Oberfl. ergänzt denken muß bis über den Deckel hinaus. —

Hydrostatischer Druck auf ausgedehnte Flächen.

Wenn man in irgend einer Flüssigkeit d. Dr. so kennt, sowie d. Druck auf d. Oberfl., so kann man daraus den resultierenden Druck berechnen, den d. Wasser auf irgend eine Fläche ausübt. Es kommen dabei 2 Auffassungen in Betracht, entweder handelt es sich um jenen denjenigen Druck, den d. Wasser vermöge seiner Schwere ausübt oder um denjenigen, den es mit Rücksicht auf d. Schwere und den Druck auf d. freie Oberfl. ausübt. Diese Berechnung ist nur für den selteneren beschriebenen Zustand, wenn d. freie Oberfl. eine horizontale Ebene ist, welches hiermit vorausgesetzt sei. Dann kann d. Druck, der auf irgend eine Fl. ausgeübt wird, aufgefaßt werden als ausgeübt von d. Schwere, sowie auch von dem umgebenden Druck d. Atmosphäre. In d. ersten Auffassung kann d. Druck d. Überdruck und in d. 2ten d. Gesammtdruck genannt werden. Die Art und Weise d. Berechnung ist in beiden Fällen dieselbe: d. Gesammtdruck ist von d. gesammten Druckhöhe in den verschiedenen Punkten d. Fläche abhängig, ebenso d. Überdruckhöhe. Die Überdruckhöhe ist die Tiefe d. Punktes unter d. freien Oberfl., die gesammte Druckhöhe eine Höhe, die um $\frac{p_0}{\gamma}$ höher liegt als d. wirkliche freie Oberfl. Es sei deshalb im Folgenden die eine od. die andere bezügliche Druckhöhe bezeichnet und mit dem Buchstaben z bezeichnet und unter d. Wasseroberfl. sei entweder d. wirkliche Wasserfl. oder d. um $\frac{p_0}{\gamma}$ höhere Wasserfl. verstanden. —

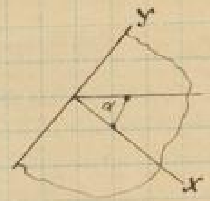
Zunächst sei vorausgesetzt, die gedrückte Fl. F sei eben, dann sind d. Dr. auf alle Elemente dieser Ebene parallel und ihre Resultante ist einfach = ihrer Summe. Gemäß d. Bedeutung d. Druckhöhe z ist dann insbesondere d. Druck auf d. Element dF d. gegebenen Fl. gleich dem Gew. einer Wassersäule von d. Grundfl. dF und d. Höhe z also $= \gamma z\, dF$ unter γ d. spec. Gew. d. Wassers verstanden. Der Gesammtdruck demnach:

$$P = \int \gamma z \, dF.$$

ausgedehnt über d. ganze Fl. Hier kann γ als constanter Factor herausgesetzt werden und wenn z_0 d. Druckhöhe für d. Schwerpunkt d. gegebenen Fl. bedeutet d. h. die Tiefe d. Schwerpunktes unter d. freien Oberfl., so ist:

$$P = \gamma z_0 F.$$

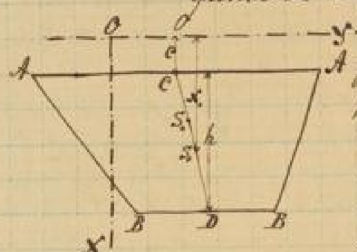
also = dem Gew. einer Wassersäule, deren Grundfl. = F und deren Höhe = d. Höhe d. Schwerpunktes unter d. freien Oberfl. ist. Dieser Druck ist nicht gleichmäßig vertheilt, sondern d. tieferen Elemente erleiden einen höheren Druck als d. oberen; die Richtungslinie von P geht also nicht durch d. Schwerpunkt, sondern durch einen Punkt S_1, der tiefer liegen muß als d. Schwerpunkt und welcher d. Mittelpunkt d. hydrostatischen Drucks genannt wird. Um diesen Punkt zu bestimmen werde angenommen, d. Fl. sei gegen d. Horizont geneigt unter d. Winkel α und werde d. Fl. F ausgedehnt bis zum Durchschnitt mit d. Oberfl. Diese Durchschnittslinie sei als Y Axe angenommen und eine Neigungslinie d. Ebene F als X Axe, so daß d. X Axe desselben den Winkel α mit dem Horizont bildet.



Für dieses Coord.-System seien nun x u. y d. Coord. eines beliebigen Punktes $d\mathfrak{F}$ d. getauchten Fläche, x_0 u. y_0 d. Coord. d. Schwerpunktes S_0 und x_1, y_1 d. gesuchten Coordinaten von S_1. die entsprechenden Abstände von d. Horizontalebene seien z, z_0 u. z_1. Nach d. bekannten Regel zur Bestimmung d. Mittelpunktes eines Systems paralleler Kräfte ist:
$$x_1 = \frac{1}{\mathfrak{F}}\int \gamma z\, d\mathfrak{F}\cdot x \quad\text{und}\quad y_1 = \frac{1}{\mathfrak{F}}\int \gamma z\, d\mathfrak{F}\cdot y.$$
Setzt man hierin für $\mathfrak{F}$ seinen Werth, so erhält man:
$$x_1 = \frac{1}{\mathfrak{F} z_0}\int x z\, d\mathfrak{F} \quad\text{und}\quad y_1 = \frac{1}{\mathfrak{F} z_0}\int y z\, d\mathfrak{F}\,;$$
übrigens ist: $\frac{z}{x} = \frac{z_0}{x_0} = \sin\alpha$, also auch $\frac{z}{z_0} = \frac{x}{x_0}$ und somit:
$$x_1 = \frac{1}{\mathfrak{F} x_0}\int x^2\, d\mathfrak{F} \quad\text{und}\quad y_1 = \frac{1}{\mathfrak{F} x_0}\int x y\, d\mathfrak{F}.$$
Nun ist bekanntlich $\int x^2 d\mathfrak{F}$ d. Trägheitsmoment d. getauchten Fl. in Beziehung auf ihre Durchschnittslinie mit d. Oberfl. Denkt man sich durch d. Schwerpunkt S_0 d. getauchten Fl. eine Gerade gezogen parallel d. Y Axe, so sei d. Trägheitsmoment d. Fl. $\mathfrak{F}$ in Beziehung auf diese Gerade bezeichnet mit $\mathfrak{F} k^2$. d. Trägheitsmoment d. Fl. $\mathfrak{F}$ in Beziehung auf d. Y Axe also $\int x^2 d\mathfrak{F}$ ist bekanntlich = diesem Trägheitsmomente + d. Product d. Fl. $\mathfrak{F}$ und d. Abstand von d. durch S_0 mit d. Y Axe parallelen Gerade also $= \mathfrak{F}(x_0^2 + k^2)$. Setzt man dieses oben ein, so erhält man:
$$x_1 = \frac{x_0^2 + k^2}{x_0} = x_0 + \frac{k^2}{x_0}.$$
Die Coord. y_1 würde = 0 sein, wenn die X Axe Symmetrieaxe wäre.

Von besonderen Fällen in dieser Beziehung sind folgende bemerkenswerth:

1) Es sei d. getauchte ebene Fläche ein Trapez, dessen beide parallele Seiten horizontal liegen, also AA und BB horizontal und parallel



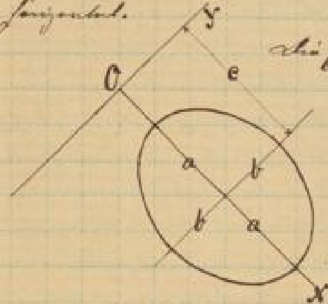
z. d. Y Axe. Es sei also d. Ebene d. Figur die unter d. Winkel α gegen d. Horizont geneigte Ebene $\mathfrak{F}$. Es sei $AA = a$ und $BB = b$, d. Höhe d. Trapezes sei $= h$ und d. Entfernung d. Seite AA von d. Y Axe sei $= c$. Jedenfalls liegt hier d. Schwerpunkt, sowie d. Druckmittelpunkt in d. Mittellinie d. Trapezes, also in d. Linie CD, wo C u. D d. Mitten zwischen AA resp. BB sind. Es sei aber S_1 d. Druckmittelpunkt, S_0 d. Schwerpunkt, x_1 d. Abstand d. Druckmittelpunktes von d. Y Axe, dann ist: $x_1 = c + \xi_1$, wenn mit ξ_1 die Entfernung d. Druckmittelpunktes S_1 von d. Seite AA bezeichnet wird. Um ξ_1 zu finden, kann man sich d. Trapez in Streifen zerlegt denken durch horizontale Linien, und es ist dann, wenn $d\mathfrak{F}$ d. Inhalt eines solchen Streifens bedeutet:
$$\xi_1 = \frac{1}{\gamma z_0 \mathfrak{F}}\int \gamma z\, d\mathfrak{F}\,\xi$$
unter ξ die Entfernung d. Streifenstreifens $d\mathfrak{F}$ von d. Seite AA verstanden, es ist also:
$$x_1 = c + \frac{1}{\mathfrak{F} x_0}\int x \xi\, d\mathfrak{F} = c + \frac{\int_0^h (c+\xi)\xi\left[a - \frac{\xi}{h}(a-b)\right]d\xi}{h\,\frac{a+b}{2}\cdot c + \frac{h}{3}\,\frac{a+2b}{a+b}}$$
da $x = c + \xi$ ist und da d. Länge eines solchen Flächenstreifens in d. Entfernung ξ von AA $= a - \frac{\xi}{h}(a-b)$ ist. Hiernach findet sich nun:
$$x_1 = c + \frac{h}{2}\,\frac{2c(a+2b) + h(a+3b)}{3c(a+b) + h(a+2b)}. \text{ —}$$

Wenn insbesondere d. horizontale Seite AA d. Trapezes mit d. Y Axe zusammenfällt, so ist $c = 0$ und es wird:
$$x_1 = \frac{h}{2}\,\frac{a+3b}{a+2b}.$$

Wird d. Trapez ein Dreieck, dessen AA in d. Y Axe fällt, während $BB = 0$ wird, so wird $c = b = 0$, also
$$x_1 = \frac{h}{2}.$$

Um von d. Fall eines Trapezes zu einem Parallelogramm überzugehen hat man $b = a$ zu setzen, so erhält man:
$$x_1 = c + \frac{h}{3}\,\frac{3c + 2h}{2c + h}$$
Wenn man d. Höhe $h = d - c$ setzt, also d d. Entfernung d. unteren Seite d. Parallelogrammes von d. Y Axe, so geht dieser Ausdruck über in:
$$x_1 = \frac{2}{3}\,\frac{d^3 - c^3}{d^2 - c^2}. \text{ —}$$

2) Es sei d. gedrückte Fläche eine Ellipse und zwar sei dieselbe so gelegen, daß d. eine Durchmesser = 2a in einer Neigungslinie liegt, also senkrecht zu d. X Axe und d. andere Durchmesser = 2b horizontal.



Die Entfernung d. Mittelpunktes d. Ellipse von d. Y Axe sei = c, natürlich liegt d. Druckmittelpunkt irgendwo im Durchmesser 2a und es handelt sich nur um d. Entfernung desselben von d. Y Axe. Dieselbe ist aus dem früher erhaltenen Ausdruck: $x_1 = x_0 + \frac{k^2}{x_0}$ zu berechnen.
Nun ist: $x_0 = c$. Was k^2 betrifft, so ist d. Trägheitsmoment d. Ellipse bezüglich d. Durchmessers 2b: $Jk^2 = \frac{\pi a^3 b}{4}$ also $k^2 = \frac{a^2}{4}$ und folglich: $x_1 = c + \frac{a^2}{4c}$ und $P = \gamma \pi a b c \sin\alpha$.
πab ist d. gedrückte Fl. und $c \sin\alpha$ d. Druckhöhe über d. Schwerpunkt.

Wenn d. gedrückte Fl. eine krumme Fl. ist, dann lassen sich d. Elementardrücke im Allgemeinen nicht zu einer Resultierenden zusammensetzen, es kann sich also nur handeln um d. hydrostatischen Druck, welchen dieselbe nach irgend einer gewissen Richtung AB auszuhalten hat. Dieser Druck auf eine gegebene krumme Fl. nach einer gegebenen Richtung AB ist folgendermaßen zu berechnen: Zunächst sei vorausgesetzt, d. krumme Fläche werde von irgend einer zu AB parallelen Geraden nur in einem Punkte geschnitten, dF sei irgend ein Element d. krummen Fl., z sei d. Druckhöhe für dieses Flächenelement. Ist nun α d. Winkel, unter welchem d. Normale (im Sinne dieses Normaldruckes verstanden) gegen d. Druckrichtung geneigt ist, so ist d. Componente dieses Druckes nach d. Richtung AB $= \gamma z\, dF \cos\alpha$. Also:

$$P = \int \gamma z\, dF \cos\alpha = \gamma \int z\, dF \cos\alpha.$$

Wenn man sich d. Fl. projiciert denkt auf irgend eine zu d. Linie AB senkrechten Projektionsebene, so sei dF' die Projection von dF, dann ist: $P = \gamma \int z \cdot dF'$.

Ist d. gegebene Fl. von solcher Art, daß sie von einer in d. Richtung AB gezogenen Geraden in mehr als einem Punkt geschnitten wird, so kann man d. Fl. so zerlegen, daß jeder Theil d. Fl. von d. Geraden AB nur in einem Punkte geschnitten wird; dann kann man jeden Theil für sich berechnen und schließlich daraus d. algebraische Summe ziehen, um so d. resultierenden Druck zu erhalten.

1) Ist d. Richtung AB, nach welcher sich dieser Druck P bezieht, horizontal, dann ist, wenn man noch d. Projektionsebene senkrecht zu AB annimmt, z zugleich d. Entfernung dieser Projection dF' von d. Wasseroberfl., es ist dann $\gamma z\, dF'$ d. hydrostatische Druck auf d. Element dF' in d. Ebene, in welche sich d. Element projiciert, man kann sagen es ist d. Horizontaldruck = demjenigen hydrostatischen Druck, welchen d. Projection dieser krummen Fl. auf irgend eine zur gegebenen horizontalen Richtung senkrechten Projektionsebene erfahren würde. Daraus ist insbesondere sofort ersichtlich, daß d. resultierende Horizontaldruck, den irgend ein eingetauchter Körper nach irgend einer Richtung auszuhalten hat = 0 ist. Es zerfällt immer d. resultierende Druck in solche Bestandtheile, die sich 2 u. 2 gegenseitig aufheben, weil immer d. ganze Oberfl. in solche Theile zerfällt, die sich gegenseitig decken.

2) Wenn insbesondere d. Richtung AB vertical ist, wenn es sich also um d. resultierenden Verticaldruck auf eine krumme Fl. F handelt, so ist $\gamma z\, dF'$ offenbar = d. Gew. eines verticalen Wasserfadens, der sich von d. Flächenelement dF erstreckt bis zur Wasseroberfl. und es ist also P d. resultierende Verticaldruck auf d. gegebene Fl. F = d. Gew. einer Wassermasse, welche begrenzt ist durch d. gedrückte Fl. F, durch d. horizontale Wasseroberfl. und durch eine verticale Cylinderfläche, und zwar ist d. resultierende Verticaldruck nicht nur d. Größe nach, sondern auch d. Richtungslinie nach übereinstimmend mit d. Gew. dieser Wassermasse. Daraus ergibt sich sofort, daß insbesondere d. Verticaldruck auf d. Oberfl. eines eingetauchten Körpers d. Größe und d. Richtungslinie nach übereinstimmt mit d. Schwerpunkt d. von diesem Körper verdrängten Wassers und da d. Horizontaldruck = 0 ist, so übt also immer d. im Gleichgew. befindliche Wasser auf d. Oberfl. d. eingetauchten Gegenstandes einen Auftrieb, welcher übereinstimmt mit d. Schwerkraft dieses eingetauchten Körpers. Dieses Gesetz ist bekannt unter d. Namen: Archimedisches Princip. Der Verticaldruck pflegt d. Auftrieb genannt zu werden.