Wärmetheorie & Hydraulik

Pieper, Andreas

Karlruhe, 1872/73

A. Gleichgewicht d. Flüssigkeiten (Hydrostatik)

urn:nbn:de:bsz:31-279864

Hydraulik.

A. Gleichgewicht d. Flüssigkeiten (Hydrostatik).

Allgemeine Gesetze; Niveauflächen.

Denken wir uns irgend eine relative Flüssigkeit in relativem Gleichgew. bezüglich auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem $x\,y\,z$. Die Flüssigkeit sei z. B. in einem Gefäße, sodaß, indem d. Flüssigkeit in relativem Gleichgew. bezüglich d. Gefäßes ist, dadurch auch d. Flüssigkeit sich in relativem Gleichgew. mit d. Coordinatensystem befindet, welches mit d. Gefäß fest verbunden ist.

Für irgend einen Punkt, dessen Coordinaten $x\,y\,z$ sind, seien d. Componenten d. beschleunigenden, also auf d. Masseneinheit wirkenden Massenkraft $X\,Y\,Z$ im Punkte $x\,y\,z$ d. Flüssigkeit, wo diese Massenkraft einerseits herrühren kann, nicht nur von d. gegebenen physischen Kräften als Schwerkräften, sondern auch von d. ergänzenden Kräften d. relativen Bewegung. Es sei ferner in demselben Punkte, dessen Coordinaten $x\,y\,z$ sind, d. Pressung d. Flüssigkeit bezeichnet mit p und die specifische Masse mit μ. Im Allgemeinen ist diese Masse als eine veränderliche Größe zu betrachten, indem hinsichtlich d. Art d. Flüssigkeit keine einschränkende Voraussetzung gemacht ist. Diese Größen $X\,Y\,Z\,p$ und μ sind im vorausgesetzten Gleichgewichtszustande d. Flüssigkeit natürlich unabhängig von d. Zeit t, also Functionen lediglich d. Coordinaten. Bezüglich d. X Achse ist (siehe Seite

$$X - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + \dots$$

Die Glieder d. rechten Seite enthalten d. Geschwindigkeitscomponenten $u\,v\,w$, diese sind aber im vorausgesetzten Fall $= 0$, da sich d. Flüssigkeit in relativer Ruhe bezüglich d. Achsen befindet, demnach ist d. rechte Seite $= 0$ und man erhält:

$$\frac{dp}{dx} = \mu X; \quad \frac{dp}{dy} = \mu Y \text{ und } \frac{dp}{dz} = \mu Z.$$

Wenn man diese 3 Gleichungen d. erste mit dx, d. 2te mit dy und d. 3te mit dz multipliciert und addiert, so erhält man links d. vollständige Differential von p, da p nur von $x\,y\,z$ abhängt.

Also: $$dp = \mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Diese Glch. lässt diejenige Änderung erkennen, welche d. Pressung d. Flüssigkeit erfährt, wenn man von irgend einem Punkte x zu einem unendlich nahen $x + dx$ etc. übergeht. Da nun d. linke Seite dieser Glch. das vollständige Differential einer gewissen Function d. Coordinaten ist, so muß dasselbe auch von d. rechten Seite gelten und dazu ist bekanntlich erforderlich, daß d. Größe μ folgenden Bedingungen entspricht:

$$\frac{d(\mu Y)}{dz} = \frac{d(\mu Z)}{dy}; \quad \frac{d(\mu Z)}{dx} = \frac{d(\mu X)}{dz} \text{ und } \frac{d(\mu X)}{dy} = \frac{d(\mu Y)}{dx}.$$

Angenommen es sei je nach den Umständen d. betreffenden Falls diese Function gefunden, von welcher $\mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ das vollständige Differential ist; diese Function sei bezeichnet mit $F(x\,y\,z)$, so folgt:

$$p = F(x\,y\,z) + B$$ unter B eine Constante verstanden, welche bestimmt sein wird durch d. Werth, welchen d. Pressung p in einem bestimmten Punkte besitzt, welcher notwendig gegeben sein muß. Durch diese Glch. findet man dann d. Pressung

in jedem beliebigen anderen Punkt und ebenso findet man, daß auch für jeden beliebigen Punkt d. im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit d. spec. Masse μ, denn dieselbe entspricht d. Gleichung:

$$\mu = \frac{1}{X}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \frac{1}{Y}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} = \frac{1}{Z}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}$$

Durch diese somit in allen Punkten d. im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit bekannten spec. Masse μ, kennt man auch d. spec. Gew. $\gamma = \mu g$ und somit auch d. Druckhöhe, worunter d. Quotient $\frac{p}{\gamma}$ zu verstehen ist, d. h. ist nichts anderes als d. Höhe einer Flüssigkeitssäule von d. Grundfläche 1, deren Gew. = d. Pressung p an d. betreffenden Stelle ist. Insbesondere findet man durch diese Glchg., durch welche p als Function von $x\,y\,z$ ausgedrückt ist, diejenige Pressung, die an verschiedenen Stellen d. Gefäßwandung stattfindet. Namentlich ist ferner durch diese Glchg., wenn d. äußere Druck gegeben ist, welcher auf d. freie Oberfläche wirkt, die Gestalt dieser freien Oberfläche bestimmt. —

Es ist nun ferner von Interesse, das Gesetz näher in Betracht zu ziehen, wonach sich d. Pressung von Punkt zu Punkt in d. Flüssigkeit ändert und dazu ist es am übersichtlichsten einen neuen Begriff, nämlich den d. Niveauflächen einzuführen. Unter Niveaufläche wird jede so beschaffene Fläche verstanden, daß d. resultierende Massenkraft $P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ in jedem Punkt normal zu derselben gerichtet ist. Es läßt sich leicht zeigen, welche d. allgemeine Differentialglchg. dieser so definierten Niveauflächen ist:

Versteht man unter den Coordinaten, die vorher beliebige Raumcoordinaten bedeuteten, nun d. Coordinaten einer solchen Niveaufläche, so wird offenbar d. Niveaufläche charakterisiert durch d. Glchg.: $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$, denn $X\,Y\,Z$ sind proportional den cos d. Winkel, unter welchen d. Kraft P gegen d. Axen geneigt ist, ebenso sind, wenn $x\,y\,z$ d. laufenden Coordinaten einer solchen Niveaufläche sind, $dx\;dy\;dz$ proportional den cos d. Winkel, welche irgend eine an d. gegebenen Punkt gezogene Tangente mit d. Axen bildet. Diese Glchg. drückt also aus, daß d. Winkel d. Richtung von P normal zu jeder Tangente, und damit normal zur Fläche sei und dieses ist d. festgestellte Eigenschaft d. Niveaufläche. Damit ergibt sich sofort eine andere, sehr natürliche Eigenschaft d. Niveaufläche, ~~denn~~ ~~wenn dieser~~ Ausdruck für jede Niveaufläche = 0 ist, so ist mit Rücksicht auf Gl. 2 für jede Niveaufläche $dp = 0$ also $p = const$, es haben also d. Niveauflächen d. Eigenschaft, daß in allen ihren Punkten d. Pressung constant ist. —

Was d. endliche Glchg. d. Niveauflächen betrifft, so muß man bemerken, daß im Allgemeinen $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ kein vollständiges Integral zu sein braucht, es wäre dazu erforderlich, daß $X\,Y\,Z$ solche Functionen d. Coordinaten seien, die d. Beziehungen entsprechen:

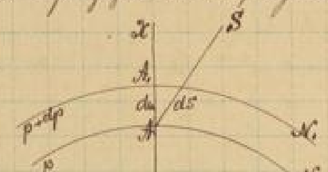
$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x},$$

dann ist aber μ ein Factor, welcher diese Function herstellt, als [illegible] allgemeinen vollständigen Integral. Um also d. Glchg. d. Niveaufläche zu integrieren, muß man sie mit μ multiplicieren und erhält dann

$$\mathfrak{F}(x\,y\,z) = C$$

unter $\mathfrak{F}$ diejenige Function verstanden, welche in Glchg. 4 vorkommend. Dabei ist d. Constante C, welche gleich p – $\mathfrak{F}$ einen verschiedenen Werth für verschiedene Niveauflächen und einen gleichen Werth für gleiche Niveauflächen hat, eine unbestimmte Constante. —

Es sei N eine solche Niveaufläche, in deren Punkten d. Pressung $= p$ ist, u. d. unendlich nahe gelegenen nächsten Niveaufläche N_1 herrsche d. Pressung $p + dp$, es sei A irgend ein Punkt d. Niveaufläche N und $AA_1 = dn$ sei ein unendlich kl. Element d. im Punkte A zur Fläche N errichteten Normale, die bis zum Schnitt mit d. Fläche N_1 geht. D. Coordinatenaxen sollen so angenommen werden, daß A den Anfangspunkt bildet, während AA_1 d. X-Axe ist. Die Componenten von d. 3 Richtungen d. Axen von dp sind:



$Y = Z = 0$ und $X = \pm P$; ferner ist $dx = dn$ und somit auch d. allgemeinen Gl. für dp: $\quad dp = \pm \mu P\,dn$

Wenn dp positiv ist, so kann in d. Gl. also + stattfinden, es ist dann: $\quad dp = \mu P\,dn$, d. h. daß offenbar, daß d. Kraft P von d. Richtung von A nach A_1 haben wenn und zwar auch für diese Richtung überall von einer zur anderen Niveaufläche [illegible], und zwar in dem Sinne, in welchem d. Pressung p wächst. Diese Entfernung $dn = AA_1$ wird an verschiedenen Stellen verschieden sein.

als dp für diese Niveauflächen überall d. gleichen Werth hat, so ist dn umgekehrt proportional dem Producte μ.P und da μ u. P endliche Werthe haben, so kann dn niemals = 0 sein. Denkt man sich jetzt ferner d. Flüssigkeit von Linien durchzogen, welche d. Niveauflächen senkrecht durchschneiden, so kann jede dieser Linien eine Linie größter Pressungsänderung genannt werden; also ist d. resultirende Kraft P in jedem Punkte einer im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit tangential an d. betreffenden Linie größter Pressungsänderung gerichtet und zwar in dem Sinne, in welchem d. Pr. wächst und d. Product aus P u. μ ist umgekehrt proportional d. Längenelement d. betreffenden Linie größter Pressungsänderung, welches zwischen 2 unendl. nahen Niveauflächen enthalten ist. Wenn d. Flüssigkeit eine tropfbare ist, so kann man bei ihr 2 Oberflächen unterscheiden: d. Wandoberfläche und d. freie Oberfläche. —

Ist bei einer im Gleichgew. befindlichen tropfbaren Flüssigkeit d. angrenzende Druck in allen Punkten d. freien Oberfl. gleich groß, so ist d. freie Oberfl. selbst eine Niveaufl. Wenn nun auch d. Ausdruck $X dx + Y dy + Z dz$ nicht d. vollständige Differential zu sein braucht, so ist auch d. Fall bemerkenswerth, in welchem schon ohne Multiplication mit μ das vollständige Differential hergestellt ist. Die Function d. Coordinaten, deren Differential d. Ausdruck ist, sei U; U wird später d. <u>Kraftfunction</u> genannt. Es geht dann d. Gleich. für dp über in: $dp = \mu . dU$ und d. endl. Gl. d. Niveaufl. ist in diesem Fall: $U = C$. Wenn man d. Ausdruck von $dp = \mu\, dU$ und andererseits $= \mu P dn$ gleich setzt, so folgt:

$$P = \frac{dU}{dn}.$$

Dieser Ausdruck gilt nicht nur allgemein für d. Richtung AA_1, wo AA_1 d. normale Richtung zur Niveaufl. ist, sondern auch für eine beliebige von A aus gezogene Richtung AS. ds sei ein unendl. kl. Theil nach d. Strecke AS, S d. Kraftcomponente von P in d. Richtung auf AS, so ist:

$$S = X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds},$$

wenn dx dy dz d. Projectionen von ds auf d. Axen bedeuten, also:

$$S = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

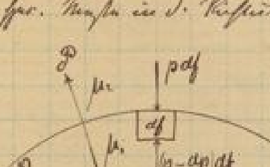
Diese Gl. ist nichts anderes als d. vollständige Differential von U, also:

$$S = \frac{dU}{ds}.$$

Ferner ist noch, da dp ein vollständiges Differential ist, μ dU auch ein vollständiges Differential, wenn aber μ eine Function von U ist, so ist U mit μ constant, also wenn U constant ist, so ist auch μ constant. —

Die Niveaufl. haben 3 Eigenschaften: 1) In allen Punkten ist d. resultirende Massenkraft normal zur Niveaufl. gerichtet.
2) Die Pressung in allen Punkten einer Niveaufläche ist constant
3) d. Wärmezustand ändert sich nur von einer zur anderen Niveaufl.

Handelt es sich um Flüssigkeiten, die gemischt sind, so finden diese Regeln nur statt, wenn in allen Punkten gleiches Mischungsverhältniß stattfindet. Wäre aber μ willkürlich gegeben, so könnte d. Ausdruck $\mu(X dx + Y dy + Z dz)$ nur dann ein vollständiges Differential sein, wenn schon d. Ausdruck in d. Klammern ein vollständiges Differential ist und dies kann bei Flüssigkeiten im Allgemeinen angenommen werden wegen ihrer geringen Zusammendrückbarkeit. Dasselbe ist auch dann d. Fall, wenn es sich um ein discontinuirliches Gemisch verschiedener Flüssigkeiten handelt. Es ist leicht zu erkennen, daß, wenn ~~[illegible]~~ in einem solchen Flüssigkeitsgemisch Gleichgew. herrscht, die spec. Masse in d. Richtung zunimmt, in welcher d. Richtung von P geht. Ist nämlich N eine solche Trennungsfläche, in welcher 2 Schichten von verschiedenen spec. Massen sich berühren, df ein unendl. kl. Theil dieser Fläche, die spec. Masse auf d. einen Seite = μ_1 und auf d. anderen μ_2 und zwar sei μ_2 d. spec. Masse auf d. Seite, nach welcher d. Pr. p zunimmt. Denkt man sich über df als Basis ein unendl. kl. Prisma abgegrenzt. Hierzu kommt [illegible] auf d. Masse wirkende Kraft = P und d. Masse d. Flüssigkeitselements, diese Masse ist aber $\mu_1 df . dn$, folglich die Massenkraft $= \mu_1 df . dn . P$ und mithin:



$$df(\mu_1 P dn - dp) = 0.$$