Wärmetheorie & Hydraulik

Pieper, Andreas

Karlruhe, 1872/73

Hydraulik

urn:nbn:de:bsz:31-279864

Hydraulik.

A. Gleichgewicht d. Flüssigkeiten (Hydrostatik).

Allgemeine Gesetze; Niveauflächen.

Denken wir uns irgend eine relative Flüssigkeit in relativem Gleichgew. bezüglich auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem x y z. Die Flüssigkeit sei z. B. in einem Gefässe, sodass, indem d. Flüssigkeit in relativem Gleichgew. bezüglich d. Gefässes ist, dadurch auch d. Flüssigkeit sich in relativem Gleichgew. mit d. Coordinatensystem befindet, welches mit d. Gefäss fest verbunden ist.

Für irgend einen Punkt, dessen Coordinaten x y z sind, seien nun d. Componenten d. beschleunigenden, also auf d. Masseneinheit wirkenden Massenkraft X Y Z im Punkte x y z d. Flüssigkeit, wo diese Massenkraft einerseits herrühren kann, nicht nur von d. gegebenen äusseren Kräften, als Schwerkräften, sondern auch von d. ergänzenden Kräften d. relativen Bewegung. Es sei ferner in demselben Punkte, dessen Coordinaten x y z sind, d. Pressung d. Flüssigkeit bezeichnet mit p und die specifische Masse mit μ. Im Allgemeinen ist diese Masse als eine veränderliche Grösse zu betrachten, indem hinsichtlich d. Art d. Flüssigkeit keine einschränkende Voraussetzung gemacht ist. Diese Grössen X Y Z p und μ sind im vorausgesetzten Gleichgewichtszustande d. Flüssigkeit natürlich unabhängig von d. Zeit t, also Functionen lediglich d. Coordinaten. Bezüglich d. X Achse ist (siehe Seite

$$X - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + \ldots$$

Die Glieder d. rechten Seite enthalten d. Geschwindigkeitscomponenten u v w, diese sind aber im vorausgesetzten Fall = 0, da sich d. Flüssigkeit in relativer Ruhe bezüglich d. Achsen befindet, demnach ist d. rechte Seite = 0 und wir haben:

$$\frac{dp}{dx} = \mu X; \quad \frac{dp}{dy} = \mu Y \text{ und } \frac{dp}{dz} = \mu Z.$$

Wenn man diese 3 Gleichungen d. erste mit dx, d. 2te mit dy und d. 3te mit dz multiplicirt und addirt, so erhält man links d. vollständige Differential von p, da p nur von x y z abhängt.

Also: $$dp = \mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Diese Glg. lehrt diejenige Änderung kennen, welche d. Pressung d. Flüssigkeit erleidet, wenn man von irgend einem Punkte x zu einem unendlich nahen x + dx übergeht. Da nun d. linke Seite dieser Glg. das vollständige Differential einer gewissen Function d. Coordinaten ist, so muss dasselbe auch von d. rechten Seite gelten und dazu ist bekanntlich erforderlich, dass d. Grösse μ folgenden Bedingungen entspricht:

$$\frac{d(\mu Y)}{dz} = \frac{d(\mu Z)}{dy}; \quad \frac{d(\mu Z)}{dx} = \frac{d(\mu X)}{dz} \text{ und } \frac{d(\mu X)}{dy} = \frac{d(\mu Y)}{dx}.$$

Angenommen es sei ja nach den Umständen d. betreffenden Falls diese Function gefunden, von welcher μ(X dx + Y dy + Z dz) das vollständige Differential ist; diese Function sei bezeichnet mit F(x y z), so folgt:

$$p = F(x\,y\,z) + B$$ unter B eine Constante verstanden, welche bestimmt sein wird durch d. Werth, welchen d. Pressung p in einem bestimmten Punkte besitzt, welcher notwendig gegeben sein muss. Durch diese Glg. findet man dann d. Pressung

in jedem beliebigen anderen Punkt und ebenso findet man sich auch für jeden beliebigen Punkt d. im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit d. spec. Masse μ, denn dieselbe entspricht d. Gleichung:

$$\mu = \frac{1}{X}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{Z}\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Durch diese somit in allen Punkten d. im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit bekannten spec. Masse μ, kennt man auch d. spec. Gew. $\gamma = \mu g$ und somit auch d. Druckhöhe, worunter d. Quotient $\frac{p}{\gamma}$ zu verstehen ist; diese ist nichts anderes als d. Höhe einer Flüssigkeitssäule von d. Grundfläche 1, deren Gew. = d. Pressung p an d. betreffenden Stelle ist. Insbesondere findet man durch diese Glch., durch welche p als Function von $x\,y\,z$ ausgedrückt ist, diejenige Pressung, die an verschiedenen Stellen d. Gefäßwandung stattfindet. Umgekehrt ist ferner durch diese Glch., wenn d. äußere Druck gegeben ist, welcher auf d. freie Oberfläche wirkt, die Gestalt dieser freien Oberfläche bestimmt. —

Es ist nun ferner von Interesse, das Gesetz näher in Betracht zu ziehen, nach welchem sich d. Pressung von Punkt zu Punkt in d. Flüssigkeit ändert und dazu ist es am übersichtlichsten einen neuen Begriff, nämlich den d. Niveauflächen einzuführen. Unter Niveaufläche wird jede so beschaffene Fläche verstanden, daß d. resultirende Kraftintensität $P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ in jedem Punkt normal zu derselben gerichtet ist. Es läßt sich leicht angeben welches d. allgemeine Differentialglch. dieser so definirten Niveaufläche ist:

Versteht man unter den Coordinaten, die vorher beliebige Raumcoordinaten bedeuteten, nun d. Coordinaten einer solchen Niveaufläche, so wird offenbar d. Niveaufläche charakterisirt durch d. Glch.:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

denn $X\,Y\,Z$ sind proportional den cos d. Winkel, unter welchen d. Kraft P gegen d. Axen geneigt ist; ebenso sind, wenn $x\,y\,z$ d. laufenden Coordinaten einer solchen Niveaufläche sind, $dx\,dy\,dz$ proportional den cos d. Winkel, welche irgend eine an d. gegebenen Punkt gezogene Tangente mit d. Axen bildet. Diese Glch. drückt also aus, daß d. Winkel d. Richtung von P normal zu jeder Tangente, und damit normal zur Fläche sei und dies ist d. festgestellte Eigenschaft d. Niveaufläche. Hieraus ergibt sich sofort eine andere, sehr natürliche Eigenschaft d. Niveaufläche, ~~denn, wenn dieser~~ Ausdruck für jede Niveaufläche = 0 ist, so ist mit Rücksicht auf Gl. 2 für jede Niveaufläche $dp = 0$ also $p = const$, es haben also d. Niveauflächen d. Eigenschaft, daß in allen ihren Punkten d. Pressung constant ist. —

Was d. endliche Glch. d. Niveauflächen betrifft, so muß man bemerken, daß im Allgemeinen $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ kein vollständiges Integral zu sein braucht, ob wir dazu erforderlich, daß $X\,Y\,Z$ solche Functionen d. Coordinaten seien, die d. Beziehung entsprechen:

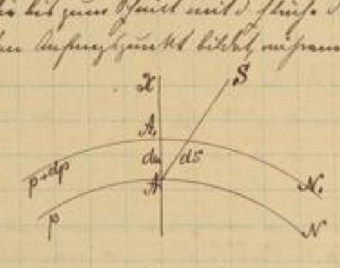
$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x},$$

dann ist aber μ ein Factor, welcher diese Function so stellt, daß d. allgemeine vollständige Integral. Um also d. Glch. d. Niveaufläche zu erhalten, muß man sie mit μ multipliciren und erhält dann

$$F(x\,y\,z) = C.$$

unter F diejenige Function verstanden, welche in Glch. 6 vorkommt. Dabei ist d. Constante C, welche gleich $p - B$ einen verschiedenen Werth für verschiedene Niveauflächen und einen gleichen Werth für gleiche Niveauflächen hat eine unbestimmte Constante. —

Es sei N eine solche Niveaufläche, in deren Punkten d. Pressung $= p$ ist, und d. unendlich nahe gelegenen nächsten Niveaufläche N_1 herrsche d. Pressung $p + dp$, es sei A irgend ein Punkt d. Niveaufläche N und $AA_1 = dn$ sei ein unendlich kl. Element d. im Punkte A zur Fläche N errichteten Normale, die bis zum Schnitt mit d. Fläche N_1 geht. d. Coordinatenaxen sollen so angenommen werden, daß A den Anfangspunkt bildet, während AA_1 d. X-Axe ist. Die Componenten und d. Richtungen d. Axen von dp sind



$Y = Z = 0$ und $X = \pm P$; ferner ist $dx = dn$ und somit auch d. allgemeinen Gl. für dp: $\quad dp = \pm \mu P\,dn$

Wenn dp positiv ist, so kann in d. Gl. bloß $+$ stattfinden, es ist dann: $\quad dp = \mu P\,dn$, dies heißt offenbar, daß d. Kraft P nur d. Richtung von A nach A_1 haben kann und zwar muß sie diese Richtung überall von einer zur anderen Niveaufläche besitzen, und zwar in dem Sinne, in welchem d. Pressung p wächst. Diese Entfernung $dn = AA_1$ wird an verschiedenen Stellen verschieden sein.

Da dp für diese Niveauflächen überall d. gleichen Werth hat, sich dn umgekehrt proportional dem Producte μ.P und da μ u. P endliche Werthe haben, so kann dn niemals = 0 sein. Denkt man sich jetzt ferner d. Flüssigkeit von Linien durchzogen, welche d. Niveauflächen senkrecht durchschneiden, so kann jede dieser Linien, eine Linie größter Druckzunahme genannt werden; es ist d. resultirende Kraft P in jedem Punkte einer im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit tangential an d. betreffenden Linie größter Druckzunahme gerichtet und zwar in dem Sinne, in welchem d. Dr. wächst und d. Product aus P u. μ ist umgekehrt proportional d. Längenelement d. betreffenden Linie größter Druckzunahme, welches zwischen 2 unendl. nahen Niveauflächen enthalten ist. Wenn d. Flüssigkeit eine tropfbare ist, so kann man bei ihr 2 Oberflächen unterscheiden: d. Wandoberfläche und d. freie Oberfläche. —

Ist bei einer im Gleichgew. befindlichen tropfbaren Flüssigkeit d. angrenzende Druck in allen Punkten d. freien Oberfl. gleich groß, so ist d. freie Oberfl. selbst eine Niveaufl. Wenn nun auch d. Ausdruck $X dx + Y dy + Z dz$ nicht d. vollständige Differential zu sein braucht, so ist doch d. Fall bemerkenswerth, in welchem schon ohne Multiplication mit μ das vollständige Differential hergestellt ist. Die Function d. Coordinaten, deren Differential d. Ausdruck ist, sei U; U wird später d. <u>Kraftfunction</u> genannt. So geht dann d. Gleich. für dp über in: $dp = \mu . dU$ und d. endl. Gl. d. Niveaufl. ist in diesem Fall: $U = C$. Wenn man d. Ausdruck von $dp = \mu\, dU$ und andererseits $= \mu P dn$ gleich setzt, so folgt:

$$P = \frac{dU}{dn}.$$

Dieser Ausdruck gilt nicht nur allgemein für d. Richtung AA_1 wo A_1 d. normale Richtung zur Niveaufl. ist, sondern auch für eine beliebige von A aus gezogene Richtung AS. ds sei ein unendl. kl. Stück auf d. Strecke AS, S d. Kraftcomponente von P in d. Richtung nach AS, so ist:

$$S = X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds},$$

wenn dx dy dz d. Projectionen von ds auf d. Axen bedeuten, also:

$$S = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

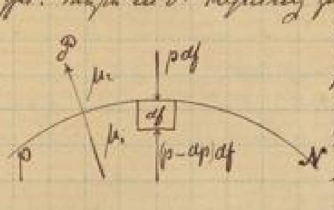
Diese Gl. ist nichts anderes als d. vollständige Differential von U, also:

$$S = \frac{dU}{ds}.$$

Ferner ist auch, da dp ein vollständiges Differential ist, μ dU auch ein vollständiges Differential, wenn aber μ eine Function von U ist, so ist U mit μ constant, also wenn U constant ist, so ist auch μ constant. —

Die Niveaufl. haben 3 Eigenschaften:
1) In allen Punkten ist d. resultirende Massenkraft normal zur Niveaufl. gerichtet.
2) Die Dichtigkeit in allen Punkten einer Niveaufläche ist constant
3) d. Wärmezustand ändert sich nur von einer zur anderen Niveaufl.

Handelt es sich um Flüssigkeiten, die gemischt sind, so finden diese Regeln nur statt, wenn in allen Punkten gleiches Mischungsverhältniss stattfindet. Wäre aber μ unwillkürlich gegeben, so könnte d. Ausdruck $\mu (X dx + Y dy + Z dz)$ nur dann ein vollständiges Differential sein, wenn schon d. Ausdruck in d. Klammern ein vollständiges Differential ist und dies kann bei Flüssigkeiten im Allgemeinen angenommen werden wegen ihrer geringen Zusammendrückbarkeit. Derselbe ist auch dann d. Fall, wenn es sich um ein discontinuirliches Gemisch verschiedener Flüssigkeiten handelt. Es ist leicht zu erkennen, daß, wenn ~~unter~~ in einem solchen Flüssigkeitsgemisch Gleichgew. herrscht, die spec. Masse in d. Richtung zunimmt, in welcher d. Richtung von P geht. Ist nämlich N eine solche Normalfläche, in welcher 2 Schichten von verschiedenen spec. Massen sich berühren, df ein unendl. kl. Stück dieser Fläche, die spec. Masse auf d. einen Seite $= \mu_1$ und auf d. anderen μ_2 und zwar sei μ_2 d. spec. Masse auf d. Seite nach welcher d. Dr. p zunimmt. Denkt man sich über df als Basis ein unendl. kl. Prisma abgegrenzt. Hierzu kommt ferner noch d. Masse wirkende Kraft = P und d. Masse d. Flüssigkeitselements, diese Masse ist also $\mu_1 . df . dn$, folglich die Massenkraft $= \mu_1 df . dn . P$ und es muss sein:



$$df (\mu_1 . P . dn - dp) = 0.$$

Nun ist d. Gleichgew. immer als ein sicheres zu bezeichnen, wenn in Folge einer unendl. kl. Störung dasselbe von selbst wieder hergestellt wird. Angenommen diese Störung werde dadurch herbeigeführt, daß in d. Raume d. Flüssigkeitselements eine unendl. kl. Flüssigkeitsmenge hineintrete, welche d. Flüssigkeitsdichte μ_2 hat, dann erhält man für diesen gestörten Zustand die resultirende Kraft, welche auf d. Flüssigkeitselement wirkt, indem man μ_2 an die Stelle von μ_1 in d. letzten Gl. setzt, also:

$$d\sigma(\mu_2 P\, dn - dp) = \text{d. resultirenden Kraft.}$$

Soll d. Gleichgew. sicher sein, so muß dieser Ausdruck positiv sein. Setzt man hier für dp seinen Ausdruck $\mu_1 P\, dn$, so ist dieser Ausdruck positiv od. negativ je nachdem μ_2 größer od. kleiner als μ_1 ist, offenbar ist diese Schlußfolgerung gewiß gebunden an d. Umstand, daß μ_1 u. μ_2 eine endl. Verschiedenheit haben.

Handelt es sich um d. relative Ruhe, so ist es erforderlich, daß d. Massenkraft P in d. Componenten $X\ Y\ Z$ auch diejenige angreifende Kraft in sich begreift, die durch d. eigene Bewegung d. Coordinatensystems hervorgerufen wird. Die 2te Ergänzungskraft d. relativen Bewegung ist aber für diesen Fall $= 0$, es kommt also nur d. erste Kraft hinzu, die pr. Masseneinheit nichts anderes ist, als d. entgegengesetzte Beschleunigung d. Punktes, wenn er mit d. Coordinatensystem fest verbunden ist. P ist also d. Resultante d. Schwerkraft und d. Kraft, welche hinzugefügt werden muß, um d. relative Ruhe wieder in absolute zu ~~verwandeln~~. Die Ergänzungskraft ist gleich groß und gleich gerichtet mit d. Beschleunigung.

Natürlich kann dieselbe nicht immer in einem solchen Fall d. relative Ruhe d. Flüssigkeit gegen d. Coordinatensystem möglich sein, nur bei ganz besonderen Bewegungsarten ist dies möglich; vor allen Dingen muß d. resultirende Massenkraft P durchaus unabhängig von d. Zeit sein, damit eine solche relative Ruhe dauernd bestehe, ferner ist erforderlich, daß d. Translationsbewegung d. Coord.-Systems mit einer Beschleunigung von constanter Größe und Richtung gegen d. Coord.-System stattfindet und daß, wenn gleichzeitig d. Coord.-System in Rotation begriffen ist, dieselbe um eine Axe von fester Lage stattfindet. —

Je nach d. Art d. gegebenen gemeinen Massenkraft kann d. zulässige eigene Bewegung d. Coord.-Systems auch an andere Bedingungen geknüpft sein, d. früheren allgemeinen Gesetze gelten übrigens allgemein, von welcher Art d. Flüssigkeit auch sein möge. —

I. Gleichgewicht d. Wassers.

Voraussetzungen.

Es befinde sich d. Wasser in einem Gefäße, dessen Dimensionen als klein genug im Vergleich mit d. Dimensionen d. Erde vorausgesetzt werden sollen, um d. beschleunigende Schwerkraft g in allen Punkten als gleich groß und gleich gerichtet voraussetzen zu dürfen; diese beschleunigende Schwerkraft g schließt d. Einfluß d. Erdrotation bereits in sich, diese ist bereits d. Resultat d. Zusammenwirkung d. Anziehungskraft und d. Rotation d. Erde, so daß eine Ergänzung d. auf d. Flüssigkeit wirkenden Kraft nur noch dann etwa erforderlich ist, wenn d. Gefäß eine eigene Bewegung bezüglich d. Erde besitzt, eine solche Bewegung soll aber hier schlechtweg d. Bewegung d. Gefäßes genannt werden.

Ich setze ferner hinsichtlich dieses relativen Gleichgew. voraus, daß d. äußere Druck pr. Flächeneinheit d. freien Oberfl. in allen Punkten gleich groß $= p_0$ sei; in d. Regel besteht dieser äußere Druck aus dem Atmosphärendruck und kann dann in d. That in allen Punkten als gleich groß vorausgesetzt werden. Die freie Oberfl. ist gewissermaßen eine Niveaufl.

Bekanntlich ist nach d. vorhergehenden allgemeinen Bedingungen d. Stabilität d. Gleichgew. an d. Bedingung geknüpft, daß d. Dichtigkeit d. Flüssigkeit im Sinne d. Kraftrichtungslinien, also in demselben Sinne wachse, in welchem P gerichtet ist, nimmt aber d. Dichtigkeit d. Wassers bekanntlich von d. Pressung in nur äußerst geringem Grade abhängig (als tropfbare Flüssigkeiten sind nur äußerst wenig zusammendrückbar) so daß eine Änderung d. Dichtigkeit nur von ~~einer übrigen~~ Temperaturverschiedenheit herrscht und deshalb kann d. Wasser sich nur dann im stabilen Gleichgew. befinden, wenn d. Dr., in welchem Sinne d. wirkt, die Tangentialkraft im Wasser von Schicht zu Schicht kleiner wird. Bei d. folgenden Untersuchungen will ich indess nur von solchen etwaigen Tangentialverschiebungen absehen, sodass d. spez. Masse so durchaus als constant vorausgesetzt werden darf, wenigstens an allen solchen Punkten d. Flüssigkeit die von d. Oberfl. eine endl. Entfernung haben. Unmittelbar an d. Oberfl. d. Flüssigkeit kann nämlich allerdings durch d. Einfluss d. Molekularkräfte eine ganz wesentlich verschiedene Dichtigkeit stattfinden, überhaupt eine ganz andere Molekularconstruction d. einzelnen Theile und es können dadurch d. Erscheinungen d. Gleichgew. besonders dann wesentlich modificirt werden, wenn d. Gleichgew. d. Flüssigkeit stattfindet, während dieselbe zwischen sehr nahen festen Wänden, also in kleinen Röhren sich befindet, weshalb diese Molekularkräfte unter d. Namen Capillarität zusammengefasst werden. Hiervon muss jedoch noch abgesehen werden. —— Die auf d. Flüssigkeit wirkenden Kräfte sind demnach: 1) die Schwerkraft und 2) eventuell d. sog. Ergänzungskraft mit Rücksicht auf d. eigene Bewegung d. Gefässes. –

Was die im Allgemeinen hierbei mögliche Art d. eigenen Bewegung d. Gefässes betrifft, damit d. Wasser sich in relativer Ruhe gegen dasselbe befinden können, so ist hervorzuheben, dass dieselbe abgesehen von d. Massenkraft aus d. Translationsgeschwindigkeit und einer Rotationsgeschwindigkeit besteht, im vorliegenden Fall, wenn ferner Bestandtheil d. resultirenden Massenkraft P d. Schwerkraft hinzukommt muss offenbar d. weitere Beschränkung hinzugefügt werden, dass d. Axe d. Gefässes, um welche dasselbe rotirt, durchaus vertical ist, widrigenfalls würden d. Componenten $X\,Y\,Z$ d. resultirenden Massenkraft d. Coordinatenaxen veränderlich werden gegen d. Richtung d. Schwerkraft, was nicht sein darf, wenn eine relative Ruhe d. Flüssigkeit gegen d. Gefäss bestehen soll.

a. Gleichgewicht d. Wassers ohne Rücksicht auf Molekularkräfte.

Niveauflächen und Druckhöhe in verschiedenen Fällen.

Die Coordinatenaxen seien zunächst fest verbunden mit d. Gefässe, d. Z Axe sei vertical und zwar positiv in d. Richtung von unten nach oben also z. B. d. Ursprung im Boden d. Gefässes. Es sei:

1) das Gefäss in Ruhe od. es habe dasselbe eine geradlinige und gleichförmige Translationsbewegung nach irgend einer Richtung.

In diesem Fall ist d. Ergänzungskraft d. relativen Bewegung $= 0$ und man hat also:

$$X = 0 \qquad Y = 0 \quad \text{und} \quad Z = \div g.$$

einfach als Componenten d. Massenkraft. Die Differentialgl. d. Niveaufl. ist:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$ in diesem Fall also: $\div g\,dz = 0$

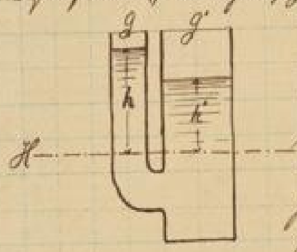
und demnach d. Gl. d. Niveaufl. in endl. Form: $Z = \text{const.}$ d. h. d. Niveauflächen sind horizontale Ebenen, insbesondere ist also im Gleichgew.-zustande auch d. freie Oberfl. d. Wassers eine Horizontalebene.

Was d. Dr. p betrifft, die an irgend einer Stelle in d. im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit stattfindet, so ist allgemein: $dp = \mu(X dx + Y dy + Z dz)$ also hier: $dp = \div \mu g\,dz$

und also $p = \div \mu g z + B$. — Ist nun besonders h d. Höhe d. freien Oberfl. d. Flüssigkeit über d. Ursprung d. Coord., so muss, wenn man in dieser Gl. $z = h$ setzt, $p = p_0$ werden, also = dem gegebenen äusseren Druck auf d. freie Oberfl., also $p_0 = -\mu g h + B$

oder $p - p_0 = \mu g (h - z)$; nun ist μg d. Product aus spez. Masse und Beschleunigung d. Schwere und als d. spez. Gew. d. Wassers, welches natürlich auch constant ist und mit γ bezeichnet werde, demnach d. Gl.: $\frac{p - p_0}{\gamma} = h - z$. Hier wurde d. Quotient $\frac{p}{\gamma}$ bereits früher d. Druckhöhe in d. Punkte genannt, in welchem d. Dr. p stattfindet, ebenso $\frac{p_0}{\gamma}$ an d. fr. Oberfl., und mithin $\frac{p - p_0}{\gamma}$ = Unterschied d. Druckhöhe in d.

beliebigen Punkt über den in d. freien Oberfl.; dieser Unterschied sei genannt: die Ueberdruckhöhe in dem Punkte, in welchem d. Pressung $= p$ ist, $h - z$ ist d. Tiefe dieses Punktes unter d. freien Oberfl. Diese Gl. drückt also aus in Worten, daß d. Ueberdruckhöhe in irgend einem Punkte = der Tiefe dieses Punktes unter d. freien Oberfl. ist. Was d. Gesetz betrifft, daß in allen Punkten einer und derselben Horizontalebene ein gleicher Druck stattfindet, so ist dies Gesetz offenbar bedingt durch d. Voraussetzung, daß man von irgend einem Punkte d. Horizontalebene zu einem andern gelangen könne, indem man beständig innerhalb d. nämlichen Flüssigkeit von constanter Dichtigkeit bleibt. — Denken wir uns 2 communicirende Gefäße von irgend einer Form, in denselben mögen sich 2 verschiedene Flüssigkeiten befinden, die sich nicht miteinander mischen. Nach d. allgemeinen Gesetzen d. Flüssigkeiten kann d. Gleichgew. nur in d. Weise stattfinden, daß d. Ebene, in welcher sich d. Flüssigkeiten berühren, eine horizontale sei. H sei diese Berührungsebene, die eine Flüssigkeit stehe in d. einen Schenkel bis zur Höhe h über



diese Ebene, die andere bis zur Höhe h'. Damit d. Gleichgew. stabil sei, muß d. Flüssigkeit im Gefäße G' die leichtere von beiden sein. Wenn ich also mit μ' die spez. Masse d. Flüssigkeit in G' bezeichne und mit μ d. spez. Masse d. andern, so muß $\mu > \mu'$ sein. Es wird in allen Punkten irgend einer Horizontalebene, die tiefer liegt als d. Berührungsebene H, eine durchweg gleiche Pressung stattfinden, denn man kann also bei d. Festsetzung d. Gl. für dies μ als vollständig constant betrachten; dagegen für eine Horizontalebene, die höher als H liegt, müßte man durch d. Masse μ' hindurchgehen, hier trifft d. Bedingung nicht zu, es erhält d. Höhe H in einer und derselben Ebene d. Pr. d. Flüssigkeiten gleich groß sei; bis zur Ebene H gilt dieses Gesetz in beiden Gefäßen zusammen, oberhalb nicht mehr. Es fragt sich nun, wie weit diese Ebene H hinaufreicht? Was dies betrifft, so kann man dieses Gesetz für jedes Gefäß für sich zur Anwendung bringen. Legt man also d. Ursprung d. Coord. in diese Horizontalebene H und versteht unter p_0 d. Pr. in irgend einem Punkte d. Ebene H, so erhält man mit Rücksicht auf d. erste Gefäß: $p - p_0 = \mu g h$. Für d. 2te Gefäß und zwar für alle Punkte, die oberhalb d. Ebene H liegen hat man: $p - p_0 = \mu' g h'$, wo in beiden Fällen $p - p_0$ denselben Werth hat, wenn ich d. äußeren Druck auf beide Gefäßoberfl. gleich groß setze; also muß im Gleichgewichte: $\mu h = \mu' h'$ sein; es verhalten sich also d. Höhen, bis zu welchen d. Flüssigkeiten in communicirenden Röhren hinaufreichen, umgekehrt wie d. spez. Gew. d. Flüssigkeiten.

2) Das Gefäß, in welchem d. Wasser in relativer Ruhe sei, befinde sich selbst in Bewegung.

Wir denken wiederum d. Coord.-Axen fest verbunden mit d. Gefäße und zwar so, daß d. Z Axe vertical und gerichtet nach oben gewählt ist. D. Gefäß kann, wie schon hervorgehoben, allgemein eine solche Bewegung haben, daß es um eine verticale Axe mit constanter Winkelgeschwindigkeit rotirt und dabei zugleich eine translatorische Beschleunigung besitzt. —

Die Z Axe möge mit d. Rotationsaxe d. Gefäßes zusammenfallen, dann steht es uns frei, die beiden andern Axen zweckmäßig zu wählen, es seien dieselben so gewählt, daß d. constante Richtung d. Translationsbeschl. d. Gefäßes beständig in d. XZ Ebene bleibt und also d. Componente im Sinne d. Y Axe $= 0$ ist. Dadurch sind d. Coord.-Axen in ganz bestimmter Weise angenommen bis auf d. willkürliche Lage d. Ursprungs. Die constante Winkelgeschwindigkeit d. Gefäßes um d. Z Axe sei $= \omega$. Die Componente d. Translationsbeschl. im Sinne d. X Axe sei $= ag$, wo a eine gegebene Constante ist, welche durch Annahme von X erreicht werden kann. D. Componente d. Translationsbeschl. im Sinne d. Y Axe ist $= 0$ und im Sinne d. Z Axe kann sie ~~nicht allgemein mit~~ $\pm cg$ bezeichnet werden. Hier muß $\pm$ hinzugefügt werden, da über d. Sinn d. Z Axe schon verfügt war. Diese Componenten d. Translationsbeschl. d. Gefäßes bedingen entsprechende Bestandtheile d. Kraftcomponenten $X\ Y\ Z$, welche dieser Beschl.-componenten gleich aber entgegengesetzt gerichtet sind. Was d. Rotation d. Gefäßes mit d. Winkelgeschw. ω betrifft, so bedingt diese eine Beschl., welche horizontal, senkrecht zu d. Z Axe gerichtet, den Componenten dieser Centrifugalbeschl. entsprechen. Diese sind $-\omega^2 x$ und $-\omega^2 y$ bezüglich beider Axen. Es sind dies d. Componenten d. Beschl. d. Punktes $x\,y\,z$, welche er besitzt, wenn man ihn mit d. Gefäß fest verbunden denkt. Diese 2 Beschl. bedingen nun auch entsprechende Bestandtheile d. Kraftcomponenten $X\,Y\,Z$, welche diesen gleich aber entgegengesetzt gerichtet sind; folglich hat man in diesem Fall für $X\,Y\,Z$ also für d. Componenten d. beschleunigenden Massenkraft folgende Ausdrücke:

$$X = -ag + \omega^2 x; \quad Y = \omega^2 y \quad \text{und} \quad Z = \mp cg - g$$

demnach lautet d. Differentialgl. d. Niveaufl.:

$$(-ag + \omega^2 x)\,dx + \omega^2 y\,dy - (1 \pm c)\,g\,dz = 0.$$

Wenn man d. Anfangspunkt d. Coord. im Sinne d. X Axe verlegt, so daß d. neue X Coord. $= x_1$ wird und zwar d. Art, daß $x = \frac{ag}{\omega^2} + x_1$, so ist $dx = dx_1$ und d. Gl. lautet:

$$\omega^2(x_1\,dx_1 + y\,dy) - (1 \pm c)\,g\,dz = 0$$

Wenn man d. ganze Gl. durch $\frac{\omega^2}{2}$ dividirt, d. 2te Glied auf d. rechte Seite bringt und dann integrirt, so folgt:

$$x_1^2 + y^2 = \left(x - \frac{ag}{\omega^2}\right)^2 + y^2 = 2\frac{(1 \pm c)}{\omega^2}\,g\,(z - C). \quad \text{— — —} \quad \alpha$$

Aus d. Gl. sieht [man] sofort erkennen, daß d. Niveauflächen eine Gruppe congruenter Umdrehungsparaboloide sind, die d. Parameter $2\frac{(1 \pm c)}{\omega^2}g$ haben, deren gemeinschaftliche Axe in d. Entfernung $\frac{ag}{\omega^2}$ von d. Z Axe ist und es unterscheiden sich diese verschiedenen Niveaufl. nur dadurch, daß ihre Scheitelpunkte in verschiedenen Höhen über d. Ursprung d. Coordinaten liegen. Insbesondere stellt diese Gl. d. Gl. d. freien Oberfl. d. Flüssigkeit dar, wenn man d. Constante C nur so bestimmt, daß d. Volumen, welches durch d. betreffende Paraboloid von d. Gefäßraum abgeschnitten wird, gleich ist d. gegebenen Wasservolumen. Es frägt sich ferner, welche Pressung unter solchen Umständen für eine gegebene Stelle stattfindet. Zu dem Ende will ich davon ausgehen, daß bekanntlich: $\frac{dp}{dz} = \mu Z$ ist u. da: $Z = \mp cg - g$

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g(1 \pm c).$$ Hieraus folgt durch Integration: $p = -\mu g(1 \pm c)z + f(x\,y)$, wenn $f(x\,y)$ eine von z unabhängige Function bedeutet.

Diese Gl. liefert d. Pressung in einem Punkte A, dessen Coord. $x\,y\,z$ sind. Denkt man sich durch A eine verticale Linie gezogen und bezeichnet mit A_0 ihren Schnittpunkt mit d. freien Oberfl., so sei h d. Z Coord. d. freien Oberfl., also d. Höhe über d. Ursprung; da nun in jedem Punkt A_0 dieselbe gegebene Pr. p_0 herrscht, so muß letztere Gl. befriedigt werden für $z = h$ und $p = p_0$ während x u. y dieselben bleiben;

also: $p_0 = -\mu g(1 \pm c)h + f(x\,y)$ und subtrahirt man beide Gl. von einander:

$p - p_0 = \mu g(1 \pm c)(h - z)$ oder wenn ich d. Product μg = spec. Gew. mit γ bezeichne:

$$\frac{p - p_0}{\gamma} = (1 \pm c)(h - z)$$

$\frac{p - p_0}{\gamma}$ ist wieder d. sog. Überdruckhöhe; dieselbe ist also proportional d. vertical gemessenen Tiefe d. Punktes von d. freien Oberfl. Die Überdruckhöhe würde dieser Tiefe geradezu gleich sein, wenn $c = 0$ wäre, also wenn d. Gefäß keine Verticalbeschleunigung hätte. Durch dieses Gesetz ist d. Bestimmung d. Pr. in allen Punkten zurückgeführt auf d. Bestimmung d. freien Oberfl. — Was d. besonderen Fälle betrifft, die in d. hier vorausgesetzten allgemeinen Aufgabe enthalten sein können, so vorausgesetzt, es habe d. Gefäß nur eine Translationsbeschleunigung, also $\omega = 0$, so wird d. ganz oben stehende Gl. α unbrauchbar, indem die rechte Seite derselben für $\omega = 0$ unendl. wird. Man muß also zurückgehen auf d. Differentialgl., aus welcher diese Gl. entstanden ist, nämlich: $(-ag + \omega^2 x)\,dx + \omega^2 y\,dy - (1 \pm c)\,g\,dz = 0$.

Setzt man hier $\omega = 0$, so lautet d. Gl.: $-a\,dx - (1 \pm c)\,dz = 0$ und hieraus durch Integration:

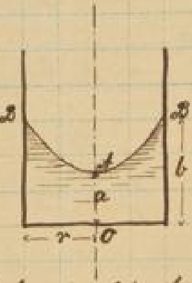
$$z = -\frac{a}{1 \pm c}\,x + C.$$ Die Niveaufl. sind also in diesem Falle parallele Ebenen, welche d. XZ Ebene rechtwinklig schneiden in solchen Geraden, die mit d. X Axe den Winkel φ bilden derart, daß: $tg\,\varphi = -\frac{a}{1 \pm c}$ ist. Diese Ebenen wären horizontal, wenn $tg\,\varphi = 0$ wäre, also wenn $a = 0$ wäre. Dies ist d. Fall, wenn d. Translationsbeschl. vertical ist. Bemerkenswerth ist hierbei noch d. Fall, daß d. Gefäß selbst vermöge d. Schwere frei fällt. Dann hat d. Gefäß eine Translationsbeschl. mit einer constanten Beschl., welche in diesem Fall = d. Beschleunigung g d. Schwere wäre. ⟶

Dann ist: $a = 0$ und $\pm c = -1$. Hieraus würde folgen: $z = \frac{0}{0}x + C$. Dies ist offenbar von vornherein nicht begreiflich, in diesem Fall ist d. resultierende Kraft P für irgend einen Flüssigkeitselement $P = z = 0$. Es wirkt hier d. gewisse Schwerkraft auf d. Masseneinheiten pr. 1 kgr. hinzu kommt eine entgegengesetzte durch die eigene Bewegung d. Gefäßes, d. aber so groß ist, also $P = 0$, es kann also in diesem Fall d. Wasser sich in jeder beliebigen Lage gegen d. Gefäß im Gleichgewicht befinden. —

Von größerem Interesse ist d. Fall, daß d. Gefäß nur um d. z Achse rotiert, für diesen Fall erhält man d. Gl. d. Niveauflächen aus d. allgemeinen Gl. indem man $a = c = 0$ setzt, also:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - C).$$

Die entsprechenden paraboloidischen Umdrehungsflächen haben d. z Achse selbst zur gemeinschaftlichen Achse. Was d. Gestalt d. Gefäßes selbst betrifft, habe dasselbe d. Gestalt eines vertikalen Kreiscylinders, der horizontale Querschnitt ist also ein Kreis vom Radius r. O sei d. Koordinatenursprung. d. Meridianschnitt d. freien Oberfl. ist eine Parabel, dieselbe sei DAD. Es sei d. Höhe d. Scheitelpunktes A über O also $AO = a$ und $BO = b$, dann handelt es sich darum a u. b zu bestimmen, wenn r und d. Wasservolumen V im Gefäß gegeben ist. $V = \pi r^2 h$. Also h d. Höhe, bis zu welcher diese Wassermenge im Gefäß reichen würde, wenn dasselbe nicht rotiert. Wenn nun ein solches Gefäß mit d. Radius r mit d. konstanten Winkelgeschw. ω um seine geometrische Achse in Rotation versetzt wird, so fragt es sich, wie groß werden a u. b im Gleichgew.-Zustand sein.



Die entsprechende Gl. d. freien Oberfl. erhält sich aus d. allgemeinen Gl., wenn man $C = a$ setzt, da C die Höhe d. Scheitelpunktes über d. Ursprung bedeutet, da für $C = z - C$, $x = y = 0$ wird; also:

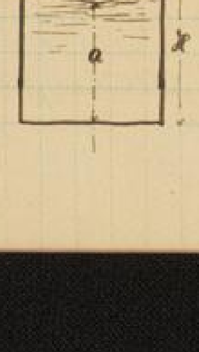
$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - a)$$

Es ist nun bekanntlich d. Volumen eines Umdrehungsparaboloids = d. Hälfte eines Kreiscylinders von gleicher Grundfl. und Höhe, also d. Volumen, welches enthalten ist zwischen d. freien Oberfl. und d. Ebene BD ist = d. Hälfte eines Cylinders von d. Grundfläche πr^2 und d. Höhe $b - a$, also ist nun derjenige Wasservolumen, welches zwischen der durch d. Scheitelpunkt A und durch DD gehenden Horizontalebenen = d. Hälfte des zwischen diesen beiden Ebenen liegenden Cylinders vom Radius r. Also das über A befindliche Wasservolumen ist $= \frac{1}{2}\pi r^2(b - a)$. Dieses Wasservolumen läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Im Ruhezustand d. Gefäßes hat dasselbe Wasservolumen d. Gestalt eines Kreiscylinders von d. Grundfl. πr^2 und d. Höhe $h - a$. Also folgt: $b - a = 2(h - a)$ oder: $b + a = 2h$.

Wenn man andererseits in d. Gl. d. freien Oberfl. $z = b$ setzt, so wird $x^2 + y^2 = r^2$ und folglich erhält man aus dieser Gl.: $b - a = \frac{r^2\omega^2}{2g}$. Nun ist $r\omega$ offenbar d. Peripheriegeschwindigkeit, bezeichnet mit u und also: $b - a = \frac{u^2}{2g}$. Mit Hilfe dieser beiden Gl. sind a u. b bestimmt und man findet: $a = h - \frac{u^2}{4g}$ und $b = h + \frac{u^2}{4g}$.

Also wenn ein solches zylindrisches Gefäß ursprünglich ruht und das darin befindliche Wasser im Gleichgew. ist, und wenn dann d. Gefäß mit d. Winkelgeschw. ω um seine Achse gedreht wird, so wird d. Wasser in d. Mitte um ebensoviel heruntergedrückt, wie es am Rand in d. Höhe geht, nämlich um d. Hälfte d. Geschwindigkeitshöhe, welche d. Peripheriegeschw. d. Gefäßes entspricht.

Wenn d. Gefäß nun aber oben durch einen horizontalen Deckel geschlossen wäre, wodurch d. Hervorsteigen bis über eine gewisse Grenze verhindert wird, so kann sich in dieser Weise d. Gleichgewicht natürlich nicht ausbilden, es wird dann d. freie Oberfl. einen ringförmigen [illegible]. Dies ist ein Fall, der in Technik sehr oft vorkommt und es fragt sich, welches wird unter diesen Umständen die Höhe a sein? Es muß natürlich in diesem Fall die Höhe dieses oberen Randes über d. Ursprung $= H$ gegeben sein, welche Höhe größer als h vorauszusetzen ist, damit bei ruhendem Gefäß d. obere Fläche noch etwas tiefer als dieser Rand steht. Angenommen sei H kleiner als d. Höhe b, bis zu welcher



d. Rinnlinie steigen würde, wenn d. Deckel nicht vorhanden wäre, also: $b > H > h$.

Es fragt sich, wenn nun d. Rotation eintritt, bis zu welcher Tiefe sinkt nun a; es sei in diesem Fall d. Halbmesser d. Kreises, in welchem d. freie Oberfl. die obere Deckelebene trifft $= \rho$, dann ist d. Volumen, welches zwischen dieser Deckelebene und d. freien Wasseroberfl. enthalten ist $= \frac{1}{2}\pi\rho^2(H-a)$, dieses selbe Volumen ist aber $= \pi r^2(H-h)$, denn ursprünglich hatte dieses Luftvolumen d. Gestalt eines Cylinders von d. Grundfl. πr^2 und d. Höhe $H-h$. Wenn man in dieser Gl.:

$$\frac{1}{2}\pi\rho^2(H-a) = \pi r^2(H-h)$$

für ρ^2 seinen Werth setzt, welcher sich aus d. Gl. d. freien Oberfl. ergibt indem $z = H$ gesetzt wird, also wenn man substituirt: $\rho^2 = \frac{2g}{\omega^2}(H-a)$ so erhält man:

$$\frac{g}{\omega^2}(H-a)^2 = r^2(H-h)$$

und daraus ergibt sich, wenn man $r\omega = u$ setzt:

$$a = H - u\sqrt{\frac{H-h}{g}}.$$

Was d. Dr. betrifft, welcher in einem solchen Fall an irgend einer Stelle herrscht, so findet man diesen mit Rücksicht darauf, daß d. Ueberdruck an dieser Stelle gleich ist d. vertical gemessenen Tiefe dieses Punktes unter d. freien Oberfl., wobei man sich diese Oberfl. ergänzt denken muß bis über den Deckel hinaus. —

Hydrostatischer Druck auf ausgedehnte Flächen.

Wenn man in irgend einer Flüssigkeit d. Dr. so kennt, sowie d. Druck auf d. Oberfl., so kann man daraus den resultirenden Druck berechnen, den d. Wasser auf irgend eine Fläche ausübt. Es kommen dabei 2 Auffassungen in Betracht, entweder handelt es sich um denjenigen Druck, den d. Wasser vermöge seiner Schwere ausübt oder um denjenigen, den es mit Rücksicht auf d. Schwere und den Druck auf d. freie Oberfl. ausübt. Diese Berechnung ist nur für den selteneren bestimmten Fall, wenn d. freie Oberfl. eine horizontale Ebene ist, welches hiermit vorausgesetzt sei. Dann kann d. Druck, der auf irgend eine Fl. ausgeübt wird, aufgefaßt werden als ausgeübt von d. Schwere, sowie auch von dem umgebenden Druck d. Atmosphäre. In d. ersten Auffassung kann d. Druck d. **Ueberdruck** und in d. 2ten d. **Gesammtdruck** genannt werden. Die Art und Weise d. Berechnung ist in beiden Fällen dieselbe; d. Gesammtdruck ist von d. gesammten Druckhöhe in den verschiedenen Punkten d. Fläche abhängig, ebenso d. Ueberdruckhöhe. Die Ueberdruckhöhe ist die Tiefe d. Punktes unter d. freien Oberfl., die gesammte Druckhöhe eine Höhe, die um $\frac{p_0}{\gamma}$ höher liegt als d. wirkliche freie Oberfl. Es sei deshalb im folgenden die eine od. die andere bezügliche Druckhöhe begriffen und mit dem Buchstaben z bezeichnet und unter d. Wasseroberfl. sei entweder d. wirkliche Wasserfl. oder d. um $\frac{p_0}{\gamma}$ höhere Wasserfl. verstanden. —

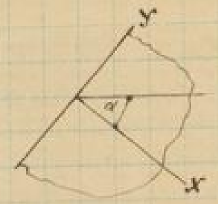
Zunächst sei vorausgesetzt, die gedrückte Fl. F sei eben, dann sind d. Dr. auf alle Elemente dieser Ebene parallel und ihre Resultante ist einfach = ihrer Summe. Gemäß d. Bedeutung d. Druckhöhe z ist dann insbesondere d. Druck auf d. Element dF d. gegebenen Fl. gleich dem Gew. einer Wassersäule von d. Grundfl. dF und d. Höhe z also $= \gamma z\, dF$ unter γ d. spec. Gew. d. Wassers verstanden. Der Gesammtdruck demnach:

$$P = \int \gamma z\, dF.$$

ausgedehnt über d. ganze Fl. Hier kann γ als constanter Factor herausgesetzt werden und wenn z_0 d. Druckhöhe für d. Schwerpunkt d. gegebenen Fl. bedeutet, d. h. die Tiefe d. Schwerpunktes unter d. freien Oberfl., so ist:

$$P = \gamma z_0 F.$$

also = dem Gew. einer Wassersäule, deren Grundfl. $= F$ und deren Höhe = d. Höhe d. Schwerpunktes unter d. freien Oberfl. ist. Dieser Druck ist nicht gleichmäßig vertheilt, sondern d. tieferen Elemente erleiden einen höheren Druck als d. oberen; die Richtungslinie von P geht also nicht durch d. Schwerpunkt, sondern durch einen Punkt S_1, der tiefer liegen muß als d. Schwerpunkt und welcher d. <u>Mittelpunkt d. hydrostatischen Drucks</u> genannt wird. Um diesen Punkt zu bestimmen werde angenommen, d. Fl. sei gegen d. Horizont geneigt unter d. Winkel α und werde d. Fl. F ausgedehnt bis zum Durchschnitt mit d. Oberfl. Diese Durchschnittslinie sei als Y Axe angenommen und eine Neigungslinie d. Ebene F als X Axe, so daß d. X Ax. dieselbe den Winkel α mit dem Horizont bildet.



Für dieses Koord.-System seien nun x u. y d. Koord. eines beliebigen Punktes dF d. gedrückten Fläche, x_0 u. y_0 d. Koord. d. Schwerpunktes S_0 und x_1 y_1 d. gesuchten Coordinaten von S_1, die entsprechenden Abstände von d. Horizontalebene seien z, z_0 u. z_1. Nach d. bekannten Regel zur Bestimmung d. Mittelpunktes eines Systems paralleler Kräfte ist: $x_1 = \frac{1}{P}\int \gamma z\, dF \cdot x$ und $y_1 = \frac{1}{P}\int \gamma z\, dF \cdot y$.

Setzt man hierin für P seinen Werth so erhält man:

$$x_1 = \frac{1}{F z_0}\int x z\, dF \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{1}{F z_0}\int y z\, dF;$$

übrigens ist: $\frac{z}{x} = \frac{z_0}{x_0} = \sin\alpha$ also auch $\frac{z}{z_0} = \frac{x}{x_0}$ und somit:

$$x_1 = \frac{1}{F x_0}\int x^2\, dF \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{1}{F x_0}\int x y\, dF.$$

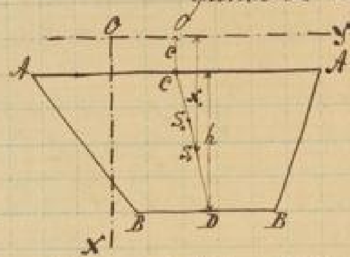
Nun ist bekanntlich $\int x^2 dF$ d. Trägheitsmoment d. gedrückten Fl. in Beziehung auf ihre Durchschnittslinie mit d. Oberfl. Denkt man sich durch d. Schwerpunkt S_0 d. gedrückten Fl. eine Gerade gezogen parallel d. Y Achse, so sei d. Trägheitsmoment d. Fl. F in Beziehung auf diese Gerade bezeichnet mit $F k^2$. d. Trägheitsmoment d. Fl. F in Beziehung auf d. Y Achse also $\int x^2 dF$ ist bekanntlich = diesem Trägheitsmomente + d. Produkt d. Fl. F und d. Abstand von d. durch S_0 mit d. Y Achse parallelen Gerade also $= F(x_0^2 + k^2)$. Setzt man dieses oben ein, so erhält man:

$$x_1 = \frac{x_0^2 + k^2}{x_0} = x_0 + \frac{k^2}{x_0}.$$

Die Koord. y_1 würde $= 0$ sein, wenn die X Achse Symmetrieachse wäre.

Von besonderen Fällen in dieser Beziehung sind folgende bemerkenswerth:

1) Es sei d. gedrückte ebene Fläche ein Trapez, dessen beide parallele Seiten horizontal liegen, also AA und BB horizontal und parallel d. Y Achse. Es sei also d. Ebene d. Figur die unter d. Winkel α gegen d. Horizont geneigte Ebene F. Es sei $AA = a$ und $BB = b$, d. Höhe d. Trapezes sei $= h$ und d. Entfernung d. Seite AA von d. Y Achse sei $= c$. Jedenfalls liegt hier d. Schwerpunkt, sowie d. Druckmittelpunkt in d. Mittellinie d. Trapezes, also in d. Linie CD, wo C u. D d. Mitten zwischen AA resp. BB sind. Es sei nun S_1 d. Druckmittelpunkt, S_0 d. Schwerpunkt, x_1 d. Abstand d. Druckmittelpunktes von d. Y Achse, dann ist: $x_1 = c + \xi_1$, wenn mit ξ_1 die Entfernung d. Druckmittelpunktes S_1 von d. Seite AA bezeichnet wird. Um ξ_1 zu finden, kann man sich d. Trapez in Streifen zerlegt denken durch horizontale Linien, und es ist dann, wenn dF d. Inhalt eines solchen Streifens bedeutet: $\xi_1 = \frac{1}{\gamma z_0 F}\int \gamma z\, dF\, \xi$ unter ξ die Entfernung d. Flächenstreifens dF von d. Seite AA verstanden, es folgt:



$$x_1 = c + \frac{1}{F x_0}\int x \xi\, dF = c + \frac{\int_0^h (c+\xi)\xi\left[a - \frac{\xi}{h}(a-b)\right]d\xi}{h\frac{a+b}{2}\cdot c + \frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}}$$

da $x = c + \xi$ ist und da d. Länge eines solchen Flächenstreifens in d. Entfernung ξ von $AA = a - \frac{\xi}{h}(a-b)$ ist. Hieraus findet sich nun:

$$x_1 = c + \frac{h}{2}\,\frac{2c(a+2b) + h(a+3b)}{3c(a+b) + h(a+2b)}. \text{ —}$$

Wenn insbesondere d. horizontale Seite AA d. Trapezes mit d. Y Achse zusammenfällt, so ist $c = 0$ und es wird:

$$x_1 = \frac{h}{2}\,\frac{a+3b}{a+2b}.$$

Wird d. Trapez ein Dreieck, dessen AA in d. Y Achse fällt, während $BB = 0$ wird, so wird $c = b = 0$, also

$$x_1 = \frac{h}{2}.$$

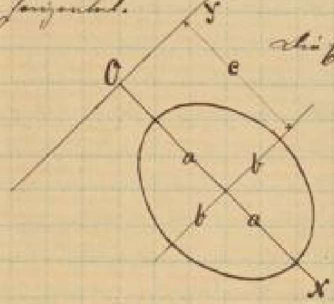
Um von d. Fall eines Trapezes zu einem Parallelogramm überzugehen hat man $b = a$ zu setzen, so erhält man:

$$x_1 = c + \frac{h}{3}\,\frac{3c+2h}{2c+h}.$$

Wenn man d. Höhe $h = d - c$ setzt, also d d. Entfernung d. unteren Seite d. Parallelogrammes von d. Y Achse, so geht dieser Ausdruck über in:

$$x_1 = \frac{2}{3}\,\frac{d^3 - c^3}{d^2 - c^2}. \text{ —}$$

2) Es sei d. gedrückte Fläche eine Ellipse und zwar sei dieselbe so gelegen, daß d. eine Durchmesser $= 2a$ in einer Neigungslinie liegt, also etwa in d. X Axe und d. andere Durchmesser $= 2b$ horizontal.



Die Entfernung d. Mittelpunktes d. Ellipse von d. Y Axe sei $= c$, natürlich liegt d. Druckmittelpunkt irgendwo in d. Durchmesser $2a$ und es handelt sich nur um d. Entfernung desselben von d. Y Axe. Dieselbe ist aus d. früheren allgem. Ausdruck: $x_1 = x_0 + \frac{k^2}{x_0}$ zu berechnen.
Nun ist: $x_0 = c$. Was k^2 betrifft, so ist d. Trägheitsmoment d. Ellipse bezüglich d. Durchmessers $2b$: $F k^2 = \frac{\pi a^3 b}{4}$ also $k^2 = \frac{a^2}{4}$ und folglich: $x_1 = c + \frac{a^2}{4c}$ und $P = \gamma \pi a b c \sin\alpha$.
$\pi a b$ ist d. gedrückte Fl. und $c \sin\alpha$ d. Druckhöhe über d. Schwerpunkt.

Wenn d. gedrückte Fl. eine krumme Fl. ist, dann lassen sich d. Elementardrücke im Allgemeinen nicht zu einer Resultanten zusammensetzen, es kann sich also nur handeln um d. hydrostatischen Druck, welchen dieselbe nach irgend einer gewissen Richtung AB auszuhalten hat. Dieser Druck auf eine gegebene krumme Fl. nach einer gegebenen Richtung AB ist folgendermaßen zu berechnen: Zunächst sei vorausgesetzt, d. krumme Fläche werde von irgend einer zu AB parallelen Geraden nur in einem Punkte geschnitten, dF sei irgend ein Element d. krummen Fl., z sei d. Druckhöhe für dieses Flächenelement. Ist nun α d. Winkel, unter welchem d. Normale (im Sinne dieses Normaldruckes gerechnet) gegen d. Druckrichtung geneigt ist, so ist d. Componente dieses Druckes nach d. Richtung AB $= \gamma z \, dF \cos\alpha$. Also:

$$P = \int \gamma z \, dF \cos\alpha = \gamma \int z \, dF \cos\alpha.$$

Wenn man sich d. Fl. projiciert denkt auf irgend eine zu d. Linie AB senkrechten Projektionsebene, so sei dF' d. Projection von dF, dann ist: $P = \gamma \int z \, dF'$.

Ist d. gegebene Fl. von solcher Art, daß sie von einer in d. Richtung AB gezogenen Geraden in mehr als einem Punkt geschnitten wird, so kann man d. Fl. so zerlegen, daß jeder Theil d. Fl. von d. Geraden AB nur in einem Punkte geschnitten wird, dann kann man jeden Theil für sich berechnen und schließlich daraus d. algebraische Summe ziehen, um so d. resultierenden Druck zu erhalten.

1) Ist d. Richtung AB, auf welche sich dieser Druck P bezieht, horizontal, dann ist, wenn man auf d. Projektionsebene senkrecht zu AB annehmen muß, z zugleich d. Entfernung dieser Projection dF' von d. Wasseroberfl., es ist dann $\gamma z \, dF'$ d. hydrostatische Druck auf d. Element dF' in d. Ebene, in welche sich d. Element projiciert, man kann sagen es ist d. Horizontaldruck = demjenigen hydrostatischen Druck, welchen d. Projection dieser krummen Fl. auf irgend eine zur gegebenen horizontalen Richtung senkrechten Projektionsebene erfahren würde. Daraus ist insbesondere sofort ersichtlich, daß d. resultierende Horizontaldruck, den irgend ein eingetauchter Körper nach irgend einer Richtung auszuhalten hat $= 0$ ist. Es zerfällt immer d. resultierende Druck in solche Bestandtheile, die sich 2 u. 2 gegenseitig aufheben, weil immer d. ganze Oberfl. in solche Theile zerfällt, die sich gegenseitig decken.

2) Wenn insbesondere d. Richtung AB vertical ist, wenn es sich also um d. resultierenden Verticaldruck auf eine krumme Fl. F handelt, so ist $\gamma z \, dF'$ offenbar = d. Gew. eines verticalen Wasserfadens, der sich von d. Flächenelement dF erstreckt bis zur Wasseroberfl. und es ist also P d. resultierende Verticaldruck auf d. gegebene Fl. F = d. Gew. einer Wassermasse, welche begrenzt ist durch d. gedrückte Fl. F, durch d. horizontale Wasseroberfl. und durch eine verticale Cylinderfläche, und zwar ist d. resultierende Verticaldruck nicht nur d. Größe nach, sondern auch d. Richtungslinie nach übereinstimmend mit d. Gew. dieser Wassermasse. Daraus ergibt sich sofort, daß insbesondere d. Verticaldruck auf d. Oberfl. eines eingetauchten Körpers d. Größe und d. Richtungslinie nach übereinstimmt mit d. Schwerpunkt d. von diesem Körper verdrängten Wassers und da d. Horizontaldruck $= 0$ ist, so hält also immer d. im Gleichgew. befindliche Wasser auf d. Oberfl. d. eingetauchten Gegenstandes einen Druck, welcher übereinstimmt mit d. Schwerkraft dieses eingetauchten Körpers. Dieses Gesetz ist bekannt unter d. Namen: Archimedisches Princip. Der Verticaldruck pflegt d. Auftrieb genannt zu werden.

Bewegung d. Flüssigkeiten.

Die im Folgenden zu untersuchenden Bewegungen von Flüssigkeiten sind theils strömende theils oscillirende Bewegungen, von denen d. letzteren jedoch nur als Wellenbewegung d. Wassers besondere Wichtigkeit haben. Strömende Bewegungen d.h. solche, welche dauernd in gleichem Sinne stattfinden, können durch feste Wände begrenzt und hinsichtlich ihrer Gesetze beliebig zu werden, jedoch es angemessen ist, je nach d. Art dieser Wände od. Leitflächen verschiedene Fälle zu unterscheiden. Bei d. Bewegung in Gefäßen und Röhren d.h. in solchen Leitungen durch welche d. Flüssigkeit ringsum umschlossen wird, so daß sie ohne freie Oberfl. (außer am Anfang und am Ende d. ganzen Leitung) sich strömend bewegt, kann dieselbe tropfbar od. luftförmig sein, und es sind daher namentlich d. beiden Fälle d. Ausfließens aus Gefäßmündungen und d. Bewegung in längeren Röhren zu betrachten. Bei luftförmigen Flüssigkeiten beschränkt sich hierauf d. Untersuchung, da dieselben überhaupt nur durch einschließende Wände eine bestimmt geregelte Bewegung erhalten; was aber d. tropfbaren Flüssigkeiten betrifft, so ist d. Bewegung d. Wassers in Canälen von nicht geringerer Wichtigkeit d.h. in oben offenen Leitungen, längs deren ganzer Länge somit d. Oberfl. d. strömenden Wassers theils frei, theils Wandoberfl. ist. Von beschränkterem technischen Interesse ist d. Bewegung freier Wasserstrahlen, namentlich in Beziehung auf d. Wurfhöhe eines in d. Luft vertical aufsteigenden, sog. springenden Strahls.

In allen Fällen strömender Bewegung ist d. Beharrungszustand od. d. permanente Bewegung von besonderer Wichtigkeit, charakterisirt durch d. Unveränderlichkeit d. äußeren und inneren d.h. d. Bewegungs- und Spannungszustandes in jedem bestimmten Punkte d. Raumes, sodaß d. Zustand nur von Ort zu Ort, nicht aber an demselben Orte mit d. Zeit veränderlich ist, mit Rücksicht auf dessen eigene Bewegung d. Gefäßes, d. Röhre, d. Canals überhaupt d. festen Leitung (bezüglich auf d. Erde) ist dabei unter einem bestimmten Punkt d. Raumes stets ein solcher zu verstehen, welcher eine bestimmte Lage gegen d. Leitung (bei freien Wasserstrahlen gegen d. Erde) besitzt, mit welcher auch d. zuweilige System von Coordinatenaxen festverbunden zu denken ist. —

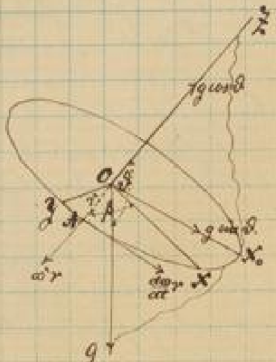
Zu den Aufgaben d. Hydraulik gehört endlich d. Untersuchung d. gegenseitigen Druckes zwischen Flüssigkeiten und festen Körpern bei ihrer relativen Bewegung, bezüglich auf d. festen Körper kann derselbe theils als bewegender od. beschleunigender Druck, theils als hemmender Widerstand d. Mittels in Betracht kommen. Dabei sind wieder verschiedene Fälle je nach d. Begrenzung d. Flüssigkeit zu unterscheiden, welche entweder ein isolirter freier Strahl sein od. den festen Körper allseitig umschließen od. auch als tropfbare Flüssigkeit mit freier Oberfl. nur unterhalb derselben einen theilweise eingetauchten Körper umgeben kann. —

Zur Lösung dieser verschiedenen Aufgaben sind bekanntlich im Allgemeinen 7 Größen als Functionen d. Coordinaten x y z und d. Zeit t zu bestimmen; nämlich d. Geschwindigkeitscomponenten u_x u_y u_z d. spec. Volumen v, d. Pressung p, die Temperatur und d. innere Arbeitsvermögen. Zur Bestimmung sind dabei d. 3 Differentialgleichungen, welche d. Gleichgew. zwischen d. auf ein Massenelement wirkenden Massen- und Flächenkräften und d. Trägheitskräften gegen seine Beschl. enthalten und welche d. hydrodynamischen Gleichungen heißen mögen, dann d. Continuitätsglchg., eine Gl. bezüglich auf d. Wärmeleitung im Innern d. Flüssigkeitsmasse, die Zustandsglchg. d. Flüssigkeit und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens. Die 5 ersten dieser Gl. sind partielle Differentialglchg. und allgemein gültig, die beiden letzten sind für verschiedene Flüssigkeiten verschieden; in d. 4 ersten sind d. Temperatur und d. innere Arbeitsvermögen, in d. 3 letzten d. Geschw.-Componenten nicht enthalten. Die Integrationen müssen mit Rücksicht auf d. Grenzbedingungen bezüglich auf Zeit und Raum d.h. mit Rücksicht auf d. gegebenen Anfangszustand und auf d. Oberflächenbedingungen vollzogen werden. Letztere betreffen theils d. Gestalt d. Oberfl. theils d. äußeren Druck an derselben, theils d. etwaigen Wärmeaustausch zwischen Flüssigkeit und anderen Körpern. —

Es läßt sich nach dieser allgemeinen Übersicht leicht einsehen, daß d. allgemeine Durchführung d. Aufgaben nicht möglich ist wenigstens in gänzlich befriedigender Hinsicht. Außerdem müssten doch auch an d. festgestellten Conditionen angenommen werden hinsichtlich erfahrungsmäßiger Coefficienten, auch mit Rücksicht auf d. Abweichungen d. dabei in Betracht kommenden Flüssigkeiten von dem in d. theoretischen Gl. vorausgesetzten idealen Zustande vollkommener Flüssigkeit und mit Rücksicht auf solche Bewegungswiderstände, welche in jenen Gl. und in d. analytischen Grenzbedingungen nicht zum Ausdruck gebracht werden konnten. Aus diesem Grunde ist es daher notwendig bei d. verschiedenen in d. Hydraulik vorkommenden technischen Aufgaben auf Grund specieller Voraussetzungen vorzugehen. –

Wenn zunächst keine bedeutende Mittheilung od. Entzieh. von Wärme an d. Flüss. und Wärmeentwicklung durch Bewegungswiderstände und deshalb auch nur unbedeutende Wärmeleitung im Innern stattfindet, so kann eine Vereinfachung wesentlich dadurch herbeigeführt werden, daß eine gewisse Beziehg. zwischen d. Dr. p und d. spec. Volumen v von vornherein angenommen wird, insbesondere z. B. Gl.: $p v^m = const.$, unter m eine Constante verstanden, welche, wenn d. Zustandsänderung als bei constanter Temperatur stattfindend vorausgesetzt werden kann, für tropfbare Flüssigkeiten $= \infty$ (also $v = const$, p unabhängig von v) für Gase $= 1$ zu setzen ist, aber bei Zustandsänderungen ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme für Gase $= n$ d. h. = d. Verhältniß d. spec. Wärmen bei constantem Dr. und bei constantem Volumen, für Dämpfe und (erfahrungsmäßig und innerhalb gewisser Grenzen) für Gemische von Dampf und gleichartiger tropfbarer Flüssigkeit = einem entsprechenden constanten Werth zu setzen ist. Dadurch sind d. Temperatur und d. inneren Arbeitsänderungen von d. Untersuchung ausgeschlossen, und sind d. 3 Geschwindigkeitscomponenten nebst d. Größen p u. v durch d. vorausgesetzte Beziehung zwischen d. letzteren und durch d. 4 ersten d. vorhin genannten 7 Gl. (durch 3 Grundgleichungen u. d. Continuitätsgl.) mit Rücksicht auf d. gegebenen Grenzbedingungen bestimmt. Zur leichteren Erhaltung bez. zur Entwicklung ihrer Ausdrücke in endlicher Form, können weitere Vereinfachungen durch d. vorläufige Abstraction von d. inneren Reibungen (…d. Glieder mit R in d. … d. allgemeinen Gl.) und durch gewisse Annahmen in Betreff d. Geschw., … d. Geschw.-componenten mit d. Coord. ändern, herbeigeführt werden. Letzteres wird auch besonders dann nöthig, wenn wegen erheblicher Wärmeleitungen und Wärmeentwicklungen durch Bewegungswiderstände d. zuerst genannte Vereinfachung unzulässig ist, d. Geschwindigkeit d. Temperaturänderungen … mituntersucht werden muß. … willkürlich, wenn nur im Allgemeinen d. Verhältnissen … Annahme in Betreff d. Änderungsgesetz d. Geschwindigkeiten ist dann zuletzt um so mehr gerechtfertigt, als dieses Gesetz durch d. Einfluß d. Wärme und d. Widerstände mittelbar od. unmittelbar in einer solchen Weise beeinflußt werden kann, welche sich d. analytischen Untersuchung gänzlich entzieht. Was d. beschleunigenden Massenkräfte betrifft, welche bei d. technisch interessanten Fällen in Betracht kommen, so reduciren sich diese auf d. Schwerkraft und 2 sogenannte Ergänzungskräfte d. relativen Bewegung. Indem die Dimensionen d. Systems von Flüssigkeiten immer nur gering gegen d. Dimensionen d. Erde ausfallen, so kann man d. Beschleunigung g d. Schwerkraft pr. Masseneinheit als gleich groß für jeden Ort und zu jeder Zeit voraussetzen. Die beiden Ergänzungskräfte spielen besonders dann eine wichtige Rolle, wenn es sich nicht nur um d. relative Bewegung d. Flüssigkeiten in d. Gefäß sondern auch um d. Bewegung dieser Gefäße gegen d. Erde handelt. In diesen Fällen gehören außer d. Schwerkraft auch diese beiden Ergänzungskräfte zu d. beschleunigenden Massenkräften. Von Interesse ist es nun diese beiden Ergänzungskräfte festzustellen für d. technisch wichtigsten Anwendungen also insbesondere wenn d. Gefäß od. was dasselbe bedeutet, wenn das an dem Gefäße feste Coord.-System in Rotation um eine feste Axe begriffen ist.

Es sei angenommen d. Coord.-System, auf welches d. relative Bewegung d. Flüssigkeit bezogen wird, bewege sich um eine feste Axe und zwar sei d. Z Axe als Rotationsaxe angenommen, um welche d. Rotation mit d. Winkelgeschw. ω erfolgt, welche im Allgemeinen im Laufe d. Zeit vernachlässigt sein kann. ϑ sei d. constante Winkel d. Z Axe mit d. Richtung d. Schwerkraft $= Og$.



Durch d. Ursprung O denkt man eine Ebene gelegt senkrecht zur festen Rotationsaxe OZ, welche von d. durch gOZ bestimmten Ebene in d. Geraden OX_0 geschnitten wird. Die Zeit t werde gerechnet von dem Augenblick an, in welchem d. X Axe, welche ebenso wie d. Y Axe immer in d. Ebene X_0OA bleibt, durch diese Gerade OX_0 geht; zur Zeit $t = 0$ hat demnach d. X Axe d. Lage OX_0 und zur Zeit t habe sie d. Lage OX und d. Y Axe d. Lage OY. In d. Zeit t hat d. X Axe sich demnach gedreht um d. Winkel X_0OX, welcher offenbar gleich ist:

$$X_0OX = \int_0^t \omega\, dt.$$

Zerlegt man d. Beschl. g d. Schwerkraft in 2 Componenten nach d. Richtung OX_0 und OZ, so hat man in d. Richtung OZ d. Componente $g.\cos\vartheta$ und in d. Richtung OX_0 d. Componente: $g.\sin\vartheta$; letztere kann man wieder in 2 Componenten nach OX und OY zerlegen und erhält dann offenbar als d. Componenten d. Beschl. d. Schwerkraft nach d. 3 Axenrichtungen:

Nach d. Richtung OX od. im Sinne d. X Axe: $= g.\sin\vartheta.\cos X_0OX = g.\sin\vartheta.\cos\left[\int_0^t \omega\, dt\right]$

im Sinne d. Y Axe: $= g.\sin\vartheta.\cos X_0OY = \mp g \sin\vartheta \sin\int_0^t \omega\, dt.$

im Sinne d. Z Axe: $= g.\cos\vartheta.$

Sind nun $X\ Y\ Z$ d. im Sinne d. angenommenen Coord.axen genommenen Componenten d. gesammten beschleunigenden Naturkraft, so sind d. obigen Componenten diejenigen Bestandtheile dieser Beschleunigungscomponenten, welche von d. Schwerkraft herrühren. Hierzu kommen nun noch die von d. beiden Ergänzungskräften herrührenden Bestandtheile. — d. Beschl.

Was nun d. erste Ergänzungskraft d. relativen Bewegung betrifft, so ist dieselbe bekanntlich ebenso gross aber gerade entgegengesetzt gerichtet d. Beschl. eines mit d. Coord. System fest verbundenen Punktes, in welchem sich d. betrachtete unter allen Punkten augenblicklich befindet. Ist nun A irgend ein Punkt (hier ist er in d. XY Ebene liegend angenommen, was d. Einfachheit wegen geschieht und was sich auch nachher als vollkommen zulässig erweist, indem ... hier werden als d. Punkt A in d. XY Ebene selbst od. in einer mit ihr parallelen Ebene liegt) in dem Abstand r von d. Rotationsaxe fest mit d. Coord. verbunden, so beschreibt dieser Punkt einen Kreis vom Radius r mit d. Winkelgeschw. ω und seine Beschl. kann demnach zerlegt werden in eine Centripetalbeschl. $\omega^2 r$ und eine Tangentialbeschl. $= \frac{d\omega}{dt} r$, welche nach d. Richtung AO resp. tangential an dem von A beschriebenen Kreis im Sinne d. Geschw. ω gerichtet sind. Da nun aber d. Beschl. d. ersten Ergänzungskraft gerade ebenso gross aber entgegengesetzt gerichtet ist d. Beschl. dieses Punktes A und demnach d. Componenten in derselben Beziehung zu einander stehen, so haben d. Componenten d. Beschl. d. ersten Ergänzungskraft d. Grössen $\omega^2 r$ und $\frac{d\omega}{dt} r$ und d. Richtungen OA resp. AA_1. Diese beiden Componenten kann man nun wieder zerlegen in Componenten nach d. Axenrichtungen. Ist $A\hat{O}X = \beta$ so ist d. Componente im Sinne d. Z Axe natürlich $= 0$ (was sie offenbar auch sein würde, wenn A nicht in d. Ebene xy liegend angenommen wäre), während d. Beschl. Comp. im Sinne d. X Axe ist herrührend von d. Centripetalbeschl. $\omega^2 r$: $= \omega^2 r \cos\beta = \omega^2 x$

und im Sinne d. Y Axe " " " " " ": $= \omega^2 r \sin\beta = \omega^2 y.$

ferner im Sinne d. X Axe herrührend von d. Tangentialbeschl. $\frac{d\omega}{dt} r$: $= \frac{d\omega}{dt} r \cos(\beta - \frac{\pi}{2}) = \frac{d\omega}{dt} r \sin\beta = \frac{d\omega}{dt} y$

im Sinne d. Y Axe " " " " " " " ": $= \frac{d\omega}{dt} r \sin(\beta - \frac{\pi}{2}) = \mp \frac{d\omega}{dt} r.\cos\beta = \mp \frac{d\omega}{dt} x$

denn offenbar ist $r\cos\beta = x$ und $r.\sin\beta = y$ d. Coordinaten d. Punktes A.

Demnach ~~[illegible]~~ sind d. von d. zweiten Centrifugalkraft d. relativen Bewegung herrührenden Bestandtheile d. Beschl.-Componenten der gesammten Massenkräfte:

Im Sinne d. X Axe: $\omega^2 x + \frac{d\omega}{dt} y$ (kommt zu X hinzu)

" " Y Axe: $\omega^2 y \div \frac{d\omega}{dt} x$ (kommt zu Y hinzu). —

Die 2te Centrifugalkraft hängt bekanntlich ab von d. relativen Geschw. d. Punktes A gegen d. Coord.-System. Ist nämlich u_{xy} d. Projection d. relativen Geschw. des beliebigen materiellen Punktes A gegen d. Coord.-System auf die zur Rotationsachse OZ senkrechte XY Ebene, so ist d. durch d. 2te Centrifugalkraft bewirkte Beschleunigung bekanntlich $= 2\omega u_{xy}$ und zwar hat sie eine senkrechte Richtung zu Z Axe und d. Projection u_{xy} senkrechte Richtung, und zwar in solchem Sinne, daß eine Drehung von 90° um d. Z Axe im Sinne von ω diese letztere Beschl. in d. Richtung von u_{xy} versetzen würde. Ist nun α d. Winkel zwischen u_{xy} und d. X Axe, so sind d. Componenten d. Beschl. $2\omega u_{xy}$ offenbar:

Im Sinne d. X Axe: $= 2\omega u_{xy} \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = 2\omega u_{xy} \sin\alpha$

" " " Y Axe: $= 2\omega u_{xy} \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \div 2\omega u_{xy} \cos\alpha$.

Nun ist aber offenbar $u_{xy}\sin\alpha = u_y$ und $u_{xy}\cos\alpha = u_x$ die Componenten d. relativen Geschw. d. materiellen Punktes im Sinne d. Y und X Axe, so daß d. fraglichen Beschl.-Componenten herrührend von d. 2ten Centrifugalkraft auch sind: $2\omega u_y$ im Sinne d. X Axe und $\div 2\omega u_x$ im Sinne d. Y Axe. —

Demnach werden nun d. Componenten d. Beschl. d. Gesammtmassenkräfte:

$$X = g.\sin\vartheta.\cos\left[\int_0^t \omega\, dt\right] + \omega^2 x + \frac{d\omega}{dt} y + 2\omega u_y$$

$$Y = \div g.\sin\vartheta.\sin\left[\int_0^t \omega\, dt\right] + \omega^2 y \div \frac{d\omega}{dt} x \div 2\omega u_x$$

$$Z = g.\cos\vartheta$$

In den meisten Fällen vereinfachen sich diese Ausdrücke noch dadurch, daß d. Leitflächen und mit ihnen d. an denselben feste Coord.-System um d. feste Axe mit constanter Winkelgeschw. rotiren, wie bei d. Wasser welches durch eine Turbine fließt. Wenn aber $\omega = const.$ ist, so folgt: $\int_0^t \omega\, dt = \omega \int_0^t dt = \omega t$ und dementsprechend d. Ausdrücke für X u. Y.

Untersuchung d. strömenden Bewegungen von Flüssigkeiten.

In den meisten Fällen, welche in d. Praxis vorkommen, ist d. strömende Bewegung d. Flüssigkeiten durch Leitflächen derartig eingeschränkt, daß man von vorneherein d. Bahnen bestimmen kann, welche von d. verschiedenen materiellen Punkten durchlaufen werden, insbesondere wenn man von stoßweisen und wirbelförmigen Bewegungen absieht, deren Einfluß später durch empirische Coefficienten in Rechnung bringt. Wenn z. B. Wasser in einer geraden cylindrischen Röhre strömt, so ist es offenbar anzunehmen, daß alle Wassertheilchen parallele Linien mit d. Mittellinie d. Röhre [illegible] durchlaufen. Ebenso werden wir ganz offenbar d. Bahnen aller Flüssigkeitstheilchen, welche einen kegelförmigen Canal durchfließen, in deren [illegible] zusammentreffen. Ähnlich wird d. Bewegung bei vielen andern Fällen sein. Dadurch wird natürlich von vorneherein d. Aufgabe ganz wesentlich vereinfacht, indem d. Bewegungszustand ~~durch eine einzige~~ Größe vollkommen bestimmt ist. Anstatt d. 3 unbekannten Geschw.-Componenten u_x u_y u_z hat man nur d. Größe u zu jedem Ort und zu jeder Zeit hinzu. Wenn ferner d. Verhältnisse derart sind, daß noch eine gewisse Beziehung zwischen

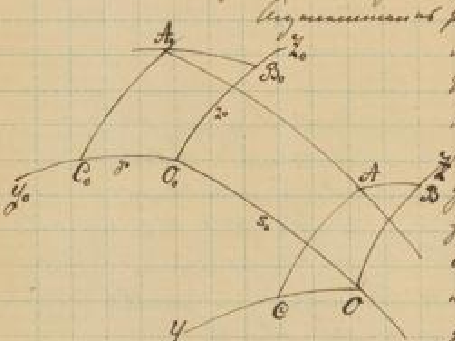
d. Dr. p und d. spec. Volumen v nach d. [illegible] vernachlässigt werden darf, so sind es überhaupt nur 2 Größen, d. als Funktionen d. Orts und d. Zeit bestimmt werden müssen, nämlich d. Geschw. u und d. Dr. p und es handelt sich darum, allgemeine Gl. aufzustellen, vermittelst deren namentlich diese beiden Größen u u. p bestimmt werden können, wenn d. Linien gegeben sind, d. von d. Flüssigkeitstheilchen durchlaufen werden.

Dabei ist es in d. Regel vortheilhaft das bisher angewendete rechtwinklige Coord.-System aufzugeben und es zu ersetzen durch ein anderes Coord.-System, welches sich unmittelbar genauer anschließt an d. Stromlinien. Zu dem Ende mögen folgende Festsetzungen dienen.

Unter einem Querschnitt d. strömenden Flüssigkeit sei jede Fl. zu verstehen, welche d. ganze System von gegebenen Linien rechtwinklig schneidet. Aus gegebenen Theilch. an d. Oberfl. d. strömenden Flüssigkeit jedenfalls ein Theil dieser Linie in sich enthalten, d. Oberfl. d. Flüssigkeit stets tangential an diesen Theilch. [illegible], so wird auch diese Theilch. von d. Querschnitt rechtwinklig geschnitten. Z. B. im Falle einer [illegible] würde, wenn d. Linien alle in einem Punkte convergiren, d. System d. Querschnitte concentrische Kugelfl. sein. Durch ein solches System von in unendl. kl. Abständen sich befindenden Querschnitten kann man sich d. Flüssigkeit in unendl. dünne Schichten zerlegen; irgend ein solcher Querschnitt sei bezeichnet mit σ. Um nun innerhalb eines solchen Querschnitts d. Ort eines Punktes zu fixiren, erscheint es angemessen, 2 Systeme von sich rechtwinklig schneidenden Curven in einem solchen Querschnitt anzunehmen. Ist so im Allgemeinen A irgend ein Punkt d. Querschnitts σ, A S d. Linie, welche durch diesen Punkt hindurchgeht, welche also in A d. Querschnitt σ rechtwinklig schneidet. Diese im Allgemeinen doppelt gekrümmte Linie A S hat in A 2 ausgezeichnete Normalen, den Krümmungsradius und d. Binormale senkrecht zu d. ersteren; beide Normalen fallen natürlich in d. Berührungsebene d. Querschnitts σ.

Wählen wir nun ins besondere d. Krümmungsradius d. Linie A S an, wenn man im Querschnitt σ diesem Krümmungsradius um ein unendl. kl. Stück AA_1 folgt, so wird d. Querschnitt auch in A_1 rechtwinklig von A_1S_1 geschnitten. Nun denkt man sich wieder ein unendl. kl. Linienelement gezogen für d. Krümmungsradius d. Linie A_1S_1, so erhält man eine Curve in d. Querschnittsfl., welche dadurch charakterisirt ist, daß ihre sämmtlichen Tangenten zusammenfallen mit d. Krümmungsradien d. Linien, welche durch d. betreffenden Punkte d. Querschnitts σ hindurchgehen.

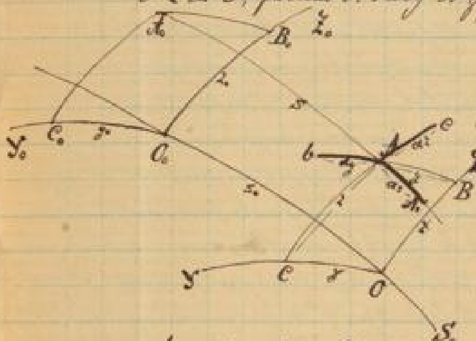
Diese Curven seien d. Krümmungscurven genannt. Denkt man nun ein solches System von Krümmungscurven in d. Querschnitt angenommen hat, kann man sich dieses System von Krümmungscurven durch ein anderes Curvensystem rechtwinklig durchschnitten denken, welche d. Normalcurven genannt werden sollen und welche dadurch charakterisirt sind, daß deren Tangenten zusammenfallen mit d. Binormalen d. Linien, welche durch diese Punkte hindurchgehen. Hiermit läßt sich nun d. Lage irgend eines beliebigen Raumpunktes, in welchem d. strömende Beweg. d. Flüssigkeit stattfindet, durch 3 Coord. bestimmen.



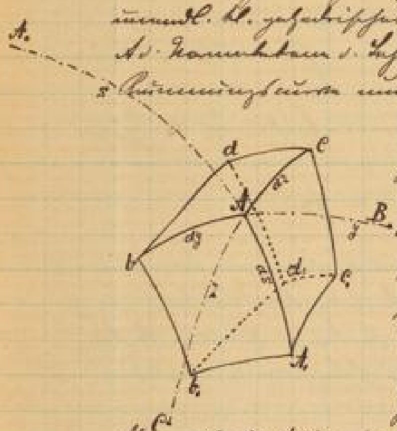
Angenommen es sei σ_0 irgend ein bestimmter Querschnitt d. strömenden Flüssigkeit, von welchem ausgegangen wird; in diesem Querschnitt werde d. Punkt O_0 gewissermaßen als Ursprung eines neuen einfachen Coord.-Systems angenommen, es sei O_0Y_0 d. durch d. Punkt O_0 im Querschnitt σ_0 gehende Krümmungscurve und O_0Z_0 sei d. durch d. Punkt O_0 gehende Normalcurve und endlich O_0S_0 sei d. durch O_0 gehende Linie. Um nun d. Lage irgend eines beliebigen Punktes A durch 3 Coord. zu bestimmen, kann man sich durch diesen Punkt A d. betreffenden Querschnitt σ gelegt denken, welcher von d. Linie O_0S_0 ein gewisses Stück $O_0O = s$ abschneidet; ist umgekehrt dieses Stück $O_0O = s$ gegeben, so ist damit d. Querschnitt σ gegeben. Um nun d. Lage d. Punktes A in d. Querschnitt σ zu bestimmen, kann man so verfahren, daß man sich d. Linie denkt, welche durch d. Punkt A hindurchgeht. Dieselbe schneidet d. Querschnitt σ_0 in A_0. Durch d. Punkt A_0 werde in d. Querschnitt σ_0 erstens d. Krümmungscurve A_0B_0 und zweitens d. Normalcurve A_0C_0 gelegt, d. ersten schneidet O_0Z_0 in B_0 und d. letzten O_0Y_0 in C_0 und so können dann nun d. 3 Größen $O_0O = s$, $O_0C_0 = y$ und $O_0B_0 = z$ als Coord. d. Punktes A betrachten. Durch diese 3 Größen ist d. Lage d. Punktes A bestimmt, denn durch d. Bogen $O_0C_0 = y$ ist d. Normalcurve C_0A_0 bestimmt, durch d. Bogen

$O_0B_0 = z_0$ ist d. Krümmungscurve B_0A_0 bestimmt und durch $O_0O = s$ auch A_0A.

Man kann auch d. Coord. d. Punktes A anders festsetzen. Zu dem Zweck denke man sich im Durchschnitt $\mathfrak{F}$ vom Punkt O aus zu erst d. betreffende Krümmungscurve OY gezogen, dann d. betreffende Normalcurve OZ, ferner d. durch d. Punkt A gehende Krümmungscurve im Durchschnitt $\mathfrak{F}$, diese schneidet d. Curve OZ in B, ferner d. durch A gehende Normalcurve, welche OY in C schneiden möge. Es sei nun d. Länge



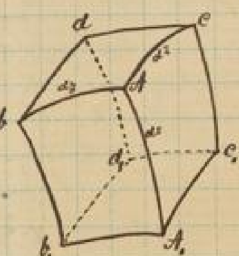
A_0A d. durch A gehenden Linie = s, ferner d. Curvenbogen AB d. durch A gehenden Krümmungscurve = y, d. Bogen AC d. durch A gehenden Normalcurve = y. z. Indem durch d. 3 vom Punkt O_0 auslaufenden Größen $s_0\ y_0\ z_0$ d. Lage d. Punktes A und dadurch auch d. Lagen s y z bestimmt sind, so werden umgekehrt auch durch s y z, welche von A auslaufen $s_0\ y_0\ z_0$ bestimmt sein, und es können auch diese 3 Größen s y z als Coord. von A betrachtet werden, welche gemessen werden sollen s von A_0 gegen A, y von B gegen A und z von C gegen A. Obwohl es sich um ein [illegible] rechtwinkliges Coord.-System handelt, so würden diese Coord. von A identisch sein, wenn $s = s_0$, $y = y_0$ und $z = z_0$, was jedoch im Allgemeinen nicht d. Fall. Im Folgenden sollen immer s y z als Coord. d. Punktes A betrachtet werden. Ich denke mir nun vom Punkt A aus nach d. durch ihn gehenden Linie und zwar im Sinne, in welchem d. Bogen s wächst ein unendl. kl. Bogenelement $AA_1 = ds$ abgetragen, ferner auch d. durch d. Punkt A gehenden Krümmungscurve von A aus und zwar im Sinne, in welchem d. Bogen $BA = y$ wächst, ein unendl. kl. Bogenelement $Ab = dy$ abgetragen und endlich in d. Richtung von C gegen A [illegible] $AC = dz$ abgetragen. Diese 3 von A ausgehenden unendl. kl. und deshalb auch als gerade Linien zu betrachtenden Bogenelemente bestimmen als Kanten ein unendl. kl. gekrümmtes Raumelement, welches folgendermaßen zu bilden ist: Man denke sich durch A_1 d. Normalebene d. Linie, welche bAC ist, ferner durch A_1 d. Normalebene A_1AC d. betreffenden Krümmungscurve und drittens d. Normalebene A_1Ab d. betreffenden Normalcurve gelegt.



Ferner denke ich mir durch A_1 d. Normalebene zur Linie, diese schneidet d. Ebene A_1Ab in A_1b_1 und d. Ebene A_1AC in A_1C_1, ferner denke ich mir durch b d. Normalebene d. Krümmungscurve Ab gelegt, sie schneidet bAA_1 in bb_1 und Ebene bAC in bd, also ist b_1bd d. Normalebene d. Krümmungscurve Ab für d. Punkt b. Endlich denke ich mir durch C d. Normalebene d. Normalcurve AC, so ist C_1Cd. Durch diese 6 Ebenen wird ein gekrümmtes Raumelement bestimmt, dessen übrige Kanten d. punktirten b_1d_1, C_1d_1 und dd_1 sind. Dies Raumelement ist aber nicht parallelepipedisch, rechte Kanten- und Flächenwinkel werden nur an d. Ecke A gebildet. D. durch d. Punkt A gehende zur Linie senkrechte Seitenfl. dieses gekrümmten Elements also bdc sei bezeichnet mit f_s, ferner d. durch A gehende zur Krümmungscurve senkrechte Seitenfl. also A_1Ac mit f_y und endlich A_1Ab mit f_z. Da diese von A auslaufenden Kanten AA_1, Ab und AC sich rechtwinklig schneiden, so können diese 3 Seitenfl. mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung einfach gleich gesetzt werden d. Producte je zweier von A auslaufenden Kanten, also:

$$f_s = dy\,dz \qquad f_y = ds\cdot dz \qquad f_z = ds\cdot dy.$$

Die Seitenfl., welche d. Seitenfl. f_s gegenüberliegt also $b_1A_1C_1$ wird unendl. wenig von f_s verschieden sein und sei deshalb bezeichnet mit $f_s + df_s$; die Seitenfl., welche f_y gegenüberliegt sei bezeichnet mit $f_y + df_y$ und d. Seitenfl., welche f_z gegenüberliegt sei bezeichnet mit $f_z + df_z$. Mit demselben Rechte, mit welchem man f_s = d. Producte d. von A auslaufenden Seiten $dy\,dz$ gesetzt hat, kann man auch $f_s + df_s$ also $b_1d_1c_1$ = d. Producte d. von A_1 auslaufenden Seiten setzen $= A_1b_1 \cdot A_1C_1$, weil d. Winkel $b_1A_1C_1$ sich von einem R nur um eine unendl. kl. Größe d. 2ten Ordnung unterscheidet, es ist nämlich $b_1A_1C_1$ eine Ebene, welche mit d. Ebene bAC nur einen unendl. kl. Winkel bildet. — Ebenso findet man, daß auch für d. Seitenebenen $f_y + df_y$ d. Winkel b_1bd nur unendl. wenig d. 2ten Ordnung von einem R verschieden ist, so daß auch: $f_y + df_y = bb_1 \cdot bd$ ist und ebenso $f_z + df_z = CC_1 \cdot Cd$. Es kommt also nur darauf an, diese Seitenlängen, um welche es sich hier handelt, auszudrücken. Zu dem Ende verschafft man sich folgendermaßen:



Es sei d. Krümmungshalbmesser d. Linie AA_1 für d. Punkt A bezeichnet mit ρ und zwar soll dieser Krümmungsradius + gesetzt werden für d. Fall, daß d. Linie [illegible] im Sinne d. + y Richtung also $A.b$ concav gekrümmt ist. Ferner denke man sich für d. Punkt A diejenigen beiden Normalschnitte d. Querschnittsfl. δ, welche resp. d. Krümmungslinien bA und d. Normallinie CA berühren, es sei ρ' d. Krümmungsradius d. erstgenannten Normalschnitts Ab d. Querschnittsfl. und ρ'' d. Krümmungsradius d. anderen Normalschnitts AC, diese beiden sollen + gesetzt werden, [illegible] im Sinne AA_1 concav [illegible], wie Figur zeigt. Es sei angenommen daß alle d. Krümmungsradien + seien wie in d. Figur, so werden also d. beiden Linienelemente Ab und A_1b_1 von A aus gerechnet gegen einander convergieren unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{ds}{\rho}$, demnach folgt: $bb_1 = ds(1-\frac{dy}{\rho})$. Da ferner d. Krümmungsradius ρ' d. Normalschnitts Ab d. Fl. δ + ist, so convergieren AA_1 und bb_1 von Ab aus gerechnet unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{dy}{\rho'}$, so daß $A_1b_1 = dy(1-\frac{ds}{\rho'})$ ist; ferner ebenso [illegible] d. Fall, daß auch d. Normalschnitt AC d. Fl. δ concav gekrümmt gegen AA_1 ist, also ρ'' + ist, so convergieren AA_1 und CC_1 unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{dz}{\rho''}$ und es ist also: $A_1C_1 = dz(1-\frac{ds}{\rho''})$.

Es bleibt nun noch übrig, d. Längen bd und Cd mitzubestimmen. Die beiden Linien AC und bd sind im Allgemeinen nicht parallel anzunehmen, sie divergieren von Ab aus unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{dy}{r'}$, wo ein negativer Werth von r' d. Fall entsprechen würde, daß bd und AC nicht divergieren sondern convergieren, dann ist: $Cd = dy(1+\frac{dz}{r'})$; endlich sei noch angenommen, daß auch Ab und Cd von AC aus gerechnet divergieren unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{dz}{r''}$, wo ein negativer Werth von r'' d. umgekehrten Fall entspricht, so ist: $bd = dz(1+\frac{dy}{r''})$. Nun kann man d. d. Punkte A gegenüberliegenden Flächen ausrechnen und es ist mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen 2ter Ordnung:

$$f_s + df_s = b_1A_1c_1d_1 = A_1b_1 \cdot A_1C_1 = dy\,dz\left(1-\frac{ds}{\rho'}\right)\left(1-\frac{ds}{\rho''}\right) = f_s\left(1-\frac{ds}{\rho'}-\frac{ds}{\rho''}\right).$$

$$f_y + df_y = b_1bdd_1 = bb_1 \cdot bd = ds\,dz\left(1-\frac{dy}{\rho}\right)\left(1+\frac{dy}{r''}\right) = f_y\left(1-\frac{dy}{\rho}+\frac{dy}{r''}\right)$$

$$f_z + df_z = c_1cdd_1 = cc_1 \cdot cd = \cancel{AA_1}\,dy\left(1+\frac{dz}{r'}\right) = f_z\left(1+\frac{dz}{r'}\right).$$

Daß $CC_1 = AA_1$ ist, sehen wir so ein: $b_1A_1C_1$ ist nach d. Annahme senkrecht zur Tangente in A_1, d. Linie dieser Tangente liegt in d. Schwingungsebene für d. Punkt A, also in A_1Ab, also ist $b_1A_1C_1$ senkrecht zu A_1Ab, andererseits auch zu C_1A_1A, weil sie zusammenfällt mit A_1AC senkrecht zu A_1Ab. Man hat also 2 Ebenen, d. gleichzeitig auf A_1Ab senkrecht stehen und d. sich in AC schneiden, folglich A_1C_1 senkrecht zu Schwingungsebene und parallel zu AC, also $AA_1 = CC_1$. –

Das Volumen dieses [illegible] Raumelements sei bezeichnet mit dV, welches bei Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung gesetzt werden kann: $dV = f_s ds = f_y dy = f_z dz$.

Demnach folgt aus obigen Gl.:

$$df_s = -\left(\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''}\right)dV; \quad df_y = \left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{\rho}\right)dV \text{ und } df_z = \frac{1}{r'}\,dV.$$

Gehen wir nun über zur Elementararbeit d. Verzerrung für diejenige Flüssigkeitsmenge, welche sich augenblicklich in diesem [illegible] Raumelement befindet, [illegible] zunächst [illegible] d. inneren Reibung mitzubestimmen, [illegible] Flüssigkeitsmenge, [illegible] auf d. Richtungen AA_1, Ab und AC. [illegible] d. inneren Reibung betrifft, so sei zunächst d. Gesetz in Erinnerung gebracht, welches in d. [illegible] entwickelt wurde.

Es sei A ein beliebiger Punkt im Innern einer in Bewegung befindlichen Flüssigkeit, AX AY und AZ 3 zu einander senkrechte Richtungen, u v w d. Comp. d. Geschw., welche augenblicklich in A stattfindet nach AX AY und AZ. Es findet dann in demselben Augenblick in A d. Ebene YAZ eine gewisse innere Reibung statt, welche sich im Allgemeinen in 3 Componenten zerlegen läßt nach AX AY u. AZ [illegible] von d. Ausdehnungen und Verschiebungen, die innere Reibungen abhängig sind von d. relativen Geschw. von Punkt zu Punkt im Raume. Wenn man sich d. innere Reibung pr. Flächeneinheit, welche im Punkt A d. Ebene yAz stattfindet in 3 Comp. zerlegt denkt, so sei d. erste bezeichnet mit σ_x und d. andern mit τ_{xy} und τ_{xz}. Es haben dann diese 3 Comp. d. spec. inneren Reibung in A d. Ebene yAz folgende Ausdrücke:

$$\sigma_x = 2R\frac{du}{dx} \qquad \tau_{xy} = R\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \text{ und } \tau_{xz} = R\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right).$$

R bedeutet hierbei eine Constante, welche nur erfahrungsmäßig bestimmt werden kann, und für verschiedene Flüssigkeiten und verschiedene Zustände derselben Flüssigkeit verschieden ist. — Wendet man dies nun an, um im vorliegenden Fall für d. 6 Begrenzungsfl. d. gedachten Flüssigkeitsteilchens d. inneren Reibungen zu erhalten. Was d. Vorzeichen betrifft, so ist hinzuzufügen, daß d. innere Reibungscomp. vorausgesetzt sind als d. Resultante d. Einwirkung d. im Sinne d. positiven Axen gelegenen Flüssigkeitsteilchen auf d. jenseits d. Ebene xyz gelegenen. Wenden wir dies nun an, so erhalten wir:

1) d. Fl. $bAc = f_s$ betreffend. Hier ist an Stelle von Ax, AA_1 zu setzen, sowie an Stelle d. x Axe für d. S Axe tritt. Unter dieser Voraussetzung ist hier u, was dort d. Geschw.-Comp. im Sinne d. x Axe bedeutete, für d. resultierende Geschw. d. Achse S, wogegen d. anderen Geschw.-Comp. $= 0$ sind. Damit ergibt sich d. innere Reibung, welche in d. Fl. bAc stattfindet $= f_s$: 1) im Sinne $AA_1 = 2R\frac{du}{ds} f_s$, nach Richtung Ab ist d. Comp. d. inneren Reibung in dieser Teilfl.: $= R\frac{du}{dy} f_s$ und

nach Ac . . . . $= R\frac{du}{dz} f_s$, wobei aber berücksichtigt werden muß, daß d. hier in Betracht angrenzenden Flüssigkeitsteilchen von d. Teilfl. f_s ausgehend nicht im Sinne d. positiven S Richtung gelegen sind, sondern umgekehrt, sodaß d. Zeichen $\div$ hinzuzufügen sind:

Also nach $AA_1 = \div 2R\frac{du}{ds} f_s$ nach Ab: $\div R\frac{du}{dy} f_s$ nach Ac: $\div R\frac{du}{dz} f_s$.

2) Was d. Teilebene $A_1 Ac = f_z$ betrifft, so gelten hier ganz analoge Ausdrücke für d. betreffenden Comp. d. inneren Reibung. σ_y d. Normalcomp. d. inneren Reibung ist $= 0$, weil $v = 0$ ist, d. Comp. τ_{yz}, welche d. Factor $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$ enthält, ist auch $= 0$, weil $v = w = 0$ ist, es bleibt nur d. Reibung übrig, welche d. Richtung AA_1 hat und welche ist $= \div R\frac{du}{dy} f_z$, weil d. angrenzenden Flüssigkeitsteile im Sinne d. negativen y Axe gelegen sind, demnach d. Componenten nach d. 3 entsprechenden Richtungen:

nach AA_1: $-R\frac{du}{dy} f_z$ nach Ab: 0 nach Ac: 0.

3) Was d. dritte nach A hin anliegende Teilfl. $f_z = A_1 Ab$ betrifft, so sind d. betreffenden Comp. d. spec. inneren Reibung hier zu bezeichnen mit $\sigma_z\ \tau_{zs}$ und τ_{zy}; σ_z ist $= 0$ weil d. Geschw.-Comp. $w = 0$ ist, τ_{zy} ist $= 0$ weil auch d. Geschw. $v = 0$ ist; es bleibt also nur τ_{zs} übrig, eine innere Reibung nach d. Richtung AA_1, welche im Allgemeinen $= R\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{ds}\right)$ ist, also mit $w = 0$:

nach AA_1: $-R\frac{du}{dz} f_z$ nach Ab: 0 nach Ac: 0

4) Gehen wir nun zur Teilfl. $b_1 A_1 c_1 = f_s + \Delta f_s$ über, um diejenige innere Reibung zu erhalten, welche in dieser Teilfl. und zwar nach d. Richtung d. Tangente an d. Achse im Punkte A_1 stattfindet, so haben wir nur nötig an Stelle von f_s zu setzen $f_s + \Delta f_s$ und zu $\frac{du}{ds}$ d. partielle Differential von $\frac{du}{ds}$ nach S hinzuzufügen und außerdem d. Vorzeichen umzukehren, weil hier d. angrenzenden Flüssigkeitsteilchen im Sinne d. positiven S gelegen sind, also d. innere Reibung $= + 2R\left(\frac{du}{ds} + \frac{d^2u}{ds^2}ds\right)\left(f_s + \Delta f_s\right)$; ebenso erhält man d. Comp. d. inneren Reibung in dieser Teilfl. nach d. Richtungen $A_1 b_1$ und $A_1 c_1$, wenn man d. Vorzeichen umkehrt, zu $\frac{du}{dy}$ resp. $\frac{du}{dz}$ ihre partiellen Differentiale bezüglich S hinzufügt und an d. Stelle von f_s immer $f_s + \Delta f_s$ setzt. Demnach hat man d. folgenden Componenten:

nach $A_1 A$: $2R\left(\frac{du}{ds} + \frac{d^2u}{ds^2}ds\right)\left(f_s + \Delta f_s\right)$ — nach $A_1 b_1$: $R\left(\frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dy\,ds}ds\right)\left(f_s + \Delta f_s\right)$; nach $A_1 c_1$: $R\left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz\,ds}ds\right) f_s$

5) Was d. Teilfl. $f_y + \Delta f_y = b_1 b d$ betrifft, so erhält man für diese d. darin stattfindende innere Reibung und zwar nach d. Richtung bb_1, wenn man d. Ausdruck unter Beachtung gesetzt nimmt, zu $\frac{du}{dy}$ d. partielle Differential nach y hinzufügt und für f_y setzt $f_y + \Delta f_y$. Also d. Componenten:

nach bb_1: $R\left(\frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dy^2}dy\right)\left(f_y + \Delta f_y\right)$ — — —

6) Ebenso behandelt nach d. Richtung in d. Seitenfl. $f_z + df_z$, für d. nach CC_1: $\mathfrak{R}\left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}dz\right)(f_z + df_z)$. — —

Dabei ist zu bemerken, daß während d. Kräfte unter 1) 2) u. 3) d. Richtungen AA_1, Ab und AC haben, d. Kräfte unter 4 5 u. 6 streng genommen nicht diese Richtungen haben, sondern etwas abweichende. Z. B. zunächst d. unter 4) stehenden. Die erste Kraft welche in $f_s + df_s$ nach d. Richtung d. Tangente an d. Kurve im Punkte A_1 gerichtet, läßt sich zerlegen in 2 Comp. nach d. Richtungen AA_1 und Ab. Da d. Tangente d. Kurve im Punkte A_1 mit d. Tangente d. Kurve im Punkte A nur einen unendl. kl. Winkel bildet, dessen cos. also nur um eine unendl. kl. Größe 2ter Ordnung von d. Einheit verschieden ist, so kann d. Comp. dieser Kraft genommen nach d. Richtung AA_1 d. unter 4 stehenden Kraft gleich gesetzt werden. Es kommt jedoch noch eine unendl. kl. Comp. nach d. Richtung Ab hinzu, welche erhalten wird, wenn d. Größe dieser Kraft für den Punkt A_1 multipliziert wird mit d. cos. d. Winkels, den ihre Richtung mit Ab bildet. Offenbar ist aber d. cos dieses Winkels $= 1R \div$ dem Contingenzwinkel d. Kurve AA_1; Ab ist d. Richtung d. Krümmungsradius d. Kurve für d. Punkt A und d. Winkel, welchen d. Tangente d. Kurve für d. Punkt A_1 mit d. Tangente im Punkte A an Ab bildet ist $= R \div$ dem Winkel, den d. Tangente d. Kurve in A_1 mit d. Tangente d. Kurve in A bildet; dieser ist aber = d. sin desselben und da d. Contingenzwinkel unendl. kl. ist so genügt es, ~~wieder hauptsächlichsten Bestandteil zu berücksichtigen~~ ist d. sin = d. Winkel selbst also $= \frac{ds}{\varrho}$; da dieser Multiplikator $\frac{ds}{\varrho}$ unendl. kl. ist, so genügt es nur d. hauptsächlichsten Bestandteile zu benutzen, also Glieder höherer Ordnung vernachlässigen, demnach ist: $2\mathfrak{R}\frac{du}{ds} f_s \frac{ds}{\varrho}$ d. Comp. d. ersten Kraft ad 4) nach d. Richtung Ab. — Was ferner in derselben Seitenfl. d. 2te Kraftcomp. nach d. Richtung A_1b_1 betrifft, so ist d. Comp. dieser nach A_1b_1 gerichteten Kraft, genommen im Sinne Ab, dieser Kraft wieder gleich zu setzen; aber diese Kraft nach d. Richtung A_1b_1 liefert noch eine unendl. kl. Comp. nach d. Richtung AA_1, welche erhalten wird, wenn man jene Kraftgröße multipliziert mit d. cos d. Winkels, ~~dessen~~ den d. Richtung A_1b_1 mit AA_1 bildet. dieser Winkel ist $= 1R +$ d. Contingenzwinkel d. Kurve AA_1; d. cos ist aber $= \div \sin\frac{ds}{\varrho} = \div\frac{ds}{\varrho}$; es liefert also d. 2te Kraft ad 4) noch eine Comp. nach d. Richtung AA_1, welche erhalten wird, wenn man diese Kraft mit $-\frac{ds}{\varrho}$ multipliziert, wobei es wieder genügt, nur d. Hauptbestandteile zu berücksichtigen; diese Kraftcomponente nach d. Richtung AA_1 ist demnach: $-\mathfrak{R}\frac{du}{dy} f_s \frac{ds}{\varrho}$.

Die 3te Kraft in d. Seitenfl. $f_s + df_s$ hat d. Richtung A_1C_1; diese Richtung ist aber parallel AC, wie früher bewiesen. Diese Kraft ist also ohne Weiteres = d. nach d. Richtung AC.

Was ferner d. Kraft 5) betrifft, die in d. Seitenfl. $f_y + df_y$ nach d. Richtung bb_1 wirkt, so liefert diese Kraft zunächst nach AA_1 eine ihr gleich zu setzende Kraft, sowie eine unendl. kl. Comp. nach d. Richtung Ab, welche erhalten wird, wenn man d. Kraft nach d. Richtung bb_1 multipliziert mit d. cos d. Winkels, den d. Richtung bb_1 mit Ab bildet. dieser ist $= 1R +$ d. Contingenzwinkel d. Normalschnitts Ab d. Oberflächenschicht ε also $= 90° + \frac{dy}{\varrho'}$, d. cos hiervon ist aber $= \div \sin\frac{dy}{\varrho'} = \frac{dy}{\varrho'}$ und demnach d. Componente nach d. Richtung Ab: $= -\mathfrak{R}\frac{du}{dy} f_y \frac{dy}{\varrho'}$.

Endlich bleibt noch d. Kraft 5) übrig; sie zerfällt in eine ihr selbst gleich zu setzende Kraft nach d. Richtung AA_1 und eine nach d. Richtung AC, welche erhalten wird unter d. früheren Winkel $ACC_1 = 1R + \frac{dz}{\varrho''}$ also $\cos ACC_1 = \div \sin\frac{dz}{\varrho''} = \div\frac{dz}{\varrho''}$ und folglich d. Componente nach d. Richtung AC: $= \div\mathfrak{R}\frac{du}{dz} f_z \frac{dz}{\varrho''}$.

Wenn nun d. sämtlichen Spannungskräfte nach d. Richtung AA_1 sowie d. nach d. Richtung Ab und nach AC für sich addiert werden, sodann jeder dieser Ausdrücke durch d. Volumenelement dV dividiert wird, so erhält man d. innere Spannung nach d. Richtungen AA_1, Ab und AC pr. Volumeinheit schließlich. Diese inneren Spannungen seien entsprechend ihren Richtungen bezeichnet mit $\mathfrak{R}_s$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$. Dieselben sind demnach mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung:

$$\mathfrak{R}_s = \mathfrak{R}\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2\frac{df_s}{dV}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{df_y}{dV}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{df_z}{dV}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$\mathfrak{R}_y = \mathfrak{R}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial y} + \frac{df_s}{dV}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{\rho'}\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$\mathfrak{R}_z = \mathfrak{R}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial z} + \frac{df_s}{dV}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho''}\frac{\partial u}{\partial z}\right].$$

Setzt man noch in diesen Gln. für d. Verhältnisse $\frac{df_s}{dV}$ $\frac{df_y}{dV}$ und $\frac{df_z}{dV}$ ihre Werthe, so folgt:

$$\mathfrak{R}_s = \mathfrak{R}\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right)\frac{\partial u}{\partial s} + \left(\frac{1}{r''} - \frac{2}{\rho}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{r'}\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

$$\mathfrak{R}_y = \mathfrak{R}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial y} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial s} - \left(\frac{2}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$\mathfrak{R}_z = \mathfrak{R}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial z} - \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{2}{\rho''}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right].$$

Die Kräfte, welche überhaupt auf dieses geradlinige Raumelement wirken, sind zweierlei Art: theils äußere Massenkräfte, welche auf d. Masse d. Flüssigkeit wirken, theils Oberfl.-Kräfte, welche von d. umgrenzenden Flüssigkeit herrühren; letztere sind theils innere Reibungen, theils Drucke; erstere sind nach d. inneren Reibungen ausgedrückt worden und es handelt sich demnach nur um d. Ausdruck d. Dr. pr. Volumeneinheit nach denselben Richtungen, womit d. umgebende Flüssigkeit auf dieses geradlinige Flüssigkeitselement pr. Volumeneinheit wirkt. Zu diesem Zweck würde es nicht nothwendig sein, d. Flüssigkeitselement geradlinig abzugrenzen, sondern es würde hier nur einfacher sein, das Flüssigkeitselement sich als ein rechtwinkliges parallelepipedisches Element zu denken, da es bei d. Dr. ganz gleichgültig ist, von welcher Gestalt d. Flüssigkeitselement abgegrenzt wird. Thut man dies, so ist z. B. d. Dr. d. äußerlich umgrenzenden Flüssigkeit auf d. Seitenfl. $bAC = p f_s$, wenn p d. spec. Dr. im Punkte A d. Flüssigkeit bedeutet. Für d. gegenüberliegende Seitenfl., die hier also auch $= f_s$ ist, ist d. spec. Dr. um p verschieden und zwar $= p + \frac{\partial p}{\partial s} ds$, also d. Dr. für d. ganze Seitenfl.: $= \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right) f_s$. Was d. Vorzeichen betrifft, so ist zu bemerken, dass für diese durch A_1 gehende Seitenfl. $b_1 A_1 C_1$ d. umgrenzende Flüssigkeit in d. positiven s. Richtung gelegen ist und also d. Dr., welche d. umgrenzende Flüssigkeit auf d. Element ausübt d. Richtung $A_1 A$ hat, so dass d. letztere Glied negativ ist. Es ist also d. resultirende Gesammtwirkung d. umgrenzenden Flüssigkeit auf d. parallelepipedische Element nach d. Richtung d. Achse: $= p f_s - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right) f_s$ und man erhält d. spec. Dr. durch Dividiren mit dV, womit sich ergibt diese spec. Dr.: $= \frac{-\frac{\partial p}{\partial s} ds\, f_s}{dV} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial s} ds\, f_s}{f_s\, ds} = -\frac{\partial p}{\partial s}$. So ist also d. Wirkung, herrührend von d. äußeren umgrenzenden Flüssigkeit im Sinne d. Achse bezogen auf d. Volumeneinheit = d. partiellen Ableitung von p nach s, ebenso ergibt sich für d. nach d. Richtung d. Krümmungsr. Ab wirkende Wirkung d. umgrenzenden Flüssigkeit pr. Volumeneinheit $= -\frac{\partial p}{\partial y}$ und nach $AC = -\frac{\partial p}{\partial z}$. Hiernach ist nun also d. gesammte Oberfl.-Kraft, welche von d. umgebenden Flüssigkeit auf d. Oberfl. ausgeübt wird, bezogen auf d. Volumeneinheit und zwar in zweifach nach d. Richtung AA_1: $= \mathfrak{R}_s - \frac{\partial p}{\partial s}$ nach d. Richtung Ab: $= \mathfrak{R}_y - \frac{\partial p}{\partial y}$ und im Sinne d. durch A gehenden Normalen AC: $= \mathfrak{R}_z - \frac{\partial p}{\partial z}$. Multiplicirt man diese Kraft-Comp., welche sich auf d. Volumeneinheit beziehen, mit d. Volumen d. Masseneinheit, so erhält man d. betreffende Kraft-Comp. pr. Masseneinheit. Bezeichnet man μ d. spec. Masse d. Flüssigkeit im Punkte A d. h. = Masse pr. Volumeneinheit, so ist $\frac{1}{\mu}$ offenbar d. Volumen pr. Masseneinheit. Wenn man also d. betreffenden Kräfte-Comp., welche sich auf d. Volumeneinheit beziehen, mit $\frac{1}{\mu}$ multiplicirt, so erhält man d. betreffenden Oberfl.-Kräfte im Punkte A pr. Masseneinheit. Diesen Oberfl.-Kräften pr. Masseneinheit sind d. äußeren Massenkräfte pr. Masseneinheit hinzuzufügen. Die Componenten derselben sollen mit K_s K_y K_z bezeichnet werden, also K_s d. spec. äußere Massenkraft im Sinne d. Achse etc. Fügt man diese hinzu, so folgt:

$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right)$ als d. resultierende Gesamtkraft, welche pr. Masseneinheit nach d. Richtung d. Bahn im Punkte A wirksam ist. Ebenso ist

$K_y + \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{dp}{dy}\right)$ d. Gesamtkraft im Sinne d. Krümmungsradius pr. Masseneinheit im Punkt A.

$K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{dp}{dz}\right)$ d. Gesamtkraft pr. Masseneinheit im Sinne d. Normalen AC für den Punkt A.

Diese 3 resultierenden Kraft-Comp. nach d. Richtungen AA_1, AB und AC müssen nun natürlich gleich sein d. Beschl.-Comp., welche nach AA_1, AB und AC stattfinden, denn diese Beschl., welche im Punkte A nach diesen Richtungen stattfinden, müssen sich von den auf d. Masseneinheit bezogenen äusseren und inneren Kräften, welche in A auf d. Flüssigkeit wirken. Nun lässt sich aber d. Beschl. eines Flüssigkeitselements bei A, da dasselbe sich in d. Bahn AA_1 bewegt, bekanntlich zerlegen in eine Tang.- und eine Normalcomponente. d. Beschl. irgend eines materiellen Punktes lässt sich an jeder Stelle zerlegen in eine Comp. nach d. Tangente d. Bahn und in eine Centripetalbeschl. Die Tangentialbeschl. nach d. Richtung d. Tangente ist = dem Differentialquotienten d. Geschw. nach d. Zeit t also hier = $\frac{du}{dt}$, wo dies d. vollständige Differential ist mit Rücksicht darauf, dass u eine Function d. 4 Veränderlichen t s y u. z ist. d. Centripetalbeschl. nach d. Richtung AB und zwar im Sinne gegen d. Krümmungsmittelpunkt hin ist $= \frac{u^2}{\rho}$ und d. Beschl. Comp. nach d. Richtung AC also im Sinne d. Binormale d. Bahn ist = 0 folgt:

$$K_s = \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = \frac{du}{dt}\,; \quad K_y = \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{dp}{dy}\right) = \frac{u^2}{\rho} \text{ und } K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{dp}{dz}\right) = 0.$$

Diese Tangential- od. Tangentialbeschl. ist d. vollständige Ableitung von u nach d. Zeit t, welche auch folgendermassen geschrieben werden kann: $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$, weil u theils eine unmittelbare, theils eine mittelbare Function d. Zeit t, also auch u eine Function von s y u. z und diese Coord. selbst Functionen d. Zeit sind. In d. Ausdruck für $\frac{du}{dt}$ sind $\frac{ds}{dt}$ $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ nichts anderes als d. Geschw.-Comp., welche in A nach AA_1, AB und AC stattfinden. Da aber AA_1 d. Richtung d. Bahn ist, so sind d. Geschw. Comp. nach AB und AC = 0 und nach AA_1 = d. Geschw. selbst, es ist also: $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt} = 0$ und $\frac{ds}{dt} = u$, so dass: $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}$ ist; d. 3 gesuchten Fundamentalgleichungen sind demnach:

$$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$K_y + \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{dp}{dy}\right) = \frac{u^2}{\rho}$$

$$K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{dp}{dz}\right) = 0$$

Zu diesen 3 Fundamentalgl. kommt d. sogenannte Continuitätsgl., die hier auch eine etwas andere Form als früher erhalten wird, wo ein rechtwinkliges parallelepipedisches Massenelement zu Grunde gelegt wurde. Was diese Continuitätsgl. betrifft, so ist d. Flüssigkeitsmasse, welche zur Zeit t in diesem gekrümmten Raumelement befindet $= \mu\, dV$ wenn μ d. spec. Masse bedeutet, welche zur Zeit t im Punkte A stattfindet. Während d. nächst folgenden Zeitelements dt ändert sich im Allgemeinen auch die in selbem Raumelement enthaltene spec. Masse und zwar um d. partielle Differential bezüglich d. Zeit, also um $\frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot dt \cdot dV$. diesen selben Zuwachs an Masse innerhalb d. Raumelements dV kann man auch anders ausdrücken. Mit Rücksicht auf d. Art und Weise, wie hier dieses Raumelement abgegrenzt wurde, fließt während d. Zeitelements dt Flüssigkeit nur ab- und zu durch d. Fl. A B C und $A_1 B_1 C_1$, in d. angrenzenden [illegible] fließt nie Flüssigkeit vorbei, es muss also dieser Zuwachs an Masse auch gleich sein d. Ueberschuss derjenigen Flüssigkeitsmasse, welche während d. Zeitelements dt durch d. Fl. b A C einfließt über die, welche durch $b_1 A_1 C_1$ herausfließt.

Was nun d. Flüssigkeitsvolumen betrifft, d. während d. Zeitelements dt durch bAc hineinfließt, so ist d. Volumen dieser Flüssigkeit = d. Product aus d. Größe f_s d. Schnittfl. bAc und $u.dt$, also:
$= f_s\, u.dt$, denn $u\,dt$ ist d. Factor, welcher anzeigt, daß irgend ein Flüssigkeitstheilchen während d. Zeitelements dt vermöge d. Geschw. u durch d. Fl. f_s fließt. Das Flüssigkeitsvolumen, welches während d. Zeit dt in d. fraglichen Raum hineinfließt ist also $f_s\, u\, dt$, also d. entsprechende Flüssigkeitsmenge, welche während d. Zeit dt hineinfließt $= f_s\, \mu .u\, dt$. –

Nun erhält andererseits diejenige Flüssigkeitsmenge, welche in derselben Zeit aus d. Raume dV herausfließt, wenn man einfach in diesem Ausdruck $f_s + df_s$ für f_s setzt und wenn man ferner $\mu.u$ um ihr partielles Differential nach s vermehrt, also ist dieselbe:

$$=(f_s + df_s)(\mu.u + \frac{d\mu u}{ds}ds)\,dt.$$

Wenn man dieses von d. hereinfließenden Menge abzieht, so erhält man diejenige Menge, welche während d. Zeitelements dt in d. Raume mehr hinein als herausfließt; dieser Zuwachs ist: $= \frac{d\mu}{dt}dt.dV$, also:

$$\frac{d\mu}{dt}dt\,dV = f_s\,\mu\,u\,dt - (f_s + df_s)(\mu u + \frac{d\mu u}{ds}ds)\,dt$$

Oder: $$\frac{d\mu}{dt}dV = -\frac{d\mu u}{ds}f_s\,ds - \mu\,u\,f_s$$ da d. letzte Product unendl. kl. höherer Ordnung ist.

Dividirt man durch dV, so folgt: $$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{d\mu u}{ds} + \mu\,u(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''})$$

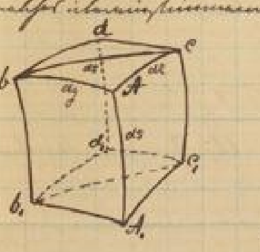
oder: $$\frac{d\mu}{dt} + \frac{d\mu u}{ds} = \mu\,u(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}).$$ Dies ist d. sogenannte Continuitätsgleichung.

Diese Gl. vereinfacht sich wesentlich, wenn d. spec. Masse d. Flüssigkeit constant ist, wie dies namentlich mit bedeutender Annäherung bei d. Strömung einer tropfbaren Flüssigkeit vorausgesetzt werden kann, vorausgesetzt, daß d. Temperatur eine unwesentlich veränderliche ist, wie dies auch diesen allgemeinen Entwickelungen zu Grunde gelegt wurde. Ist dies d. Fall so ist d. spec. Volumen v auch unabh. als constant zu setzen, also $\mu = const.$ folglich:

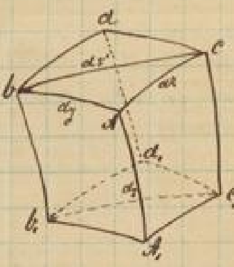
$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \text{ ferner: } \frac{d\mu u}{ds} = \mu\frac{du}{ds} \text{ und demnach:}$$

$$\frac{1}{u}\frac{d\mu}{ds} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}.$$ = Continuitätsgleichung einer tropfbaren Flüssigkeit bei constanter spec. Masse. —

Was d. Grenzbedingungen betrifft, so sind diese besonders abhängig von d. äußeren Reibungen, welche zwischen d. Oberfl. d. strömenden Flüssigkeit und d. festen Leitfl. stattfindet. Diese äußere Reibung, auf d. Flächeneinheit bezogen mit R' bezeichnet, ist natürlich immer d. relativen Beweg. d. Flüssigkeit längs d. Leitfl. gerade entgegengesetzt gerichtet. Sie ist übrigens eine (nur empirisch zu bestimmende) Function d. Geschw., ferner abhängig von d. Oberfl.-Beschaffenheit d. Wand ferner von d. Art und dem Zustand d. Flüssigkeit. Es sei nun mit ds' ein Bogenelement d. Curve bezeichnet, in welcher eine solche feste Leitfl. von einem Querschnitt geschnitten wird, unter Querschnitt d. zu allen Stromfäden senkrechte Fläche verstanden. In d. nebenstehenden Figur, darstellend ein Flüssigkeitselement, welches übereinstimmend d. ~~neuen~~ Coordinaten begrenzt wird, sei bc ein solches Element ds'. Es



werde dann eine unendl. dünne Flüssigkeitsschicht betrachtet, welche längs d. Leitfl. bcc_1b_1 hinfließt. Diese Flüssigkeitsschicht hat einen rechtwinklig dreiseitigen Querschnitt bAc, dessen Hypotenuse $= ds' = bc$ ist und dessen Katheten unendl. kl. Elemente d. durch d. Punkt A gehenden Krümmungs- und Normalcurven sind $= Ab = dy$ und $Ac = dz$. Betrachtet man nun d. Gleichgew. d. Kräfte an einem unendl. kl. Stück einer solchen Schicht, welches herausgeschnitten wird durch 2 unendl. nahe benachbarte Querschnitte gehend durch d. beiden unendl. nahen Punkte A u. A_1 d. Linie, so muß in d. betreffenden



Die algebraische Summe aller auf d. Element wirkenden Kräfte im Sinne d. Verschiebung AA_1 = 0 sein. Was d. Fl. betrifft, welche auf d. Fl. $A_1b_1c_1$ und Abc aufstehen, so reduciren sich diese offenbar auf unendl. kl. Größen 3ter Ordnung, wenn auf d. Richtung AA_1 bezogen. Ebenso verhalten sich d. Reibungskräfte. Es müssen demnach d. Kräfte von unendl. kl. Größe 2ter Ordnung für sich = 0 sein. Die übrig bleibenden Kräfte sind aber d. äußere Reibung längs d. Fl. bcb_1c_1, und d. inneren Reibungen längs d. Fl. AA_1c_1c und AA_1b_1b.

D. Größe d. Fl. bb_1cc_1 ist nun mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung = $ds.ds'$ und demnach d. äußere Reibung in d. Seitenfl. bb_1c_1c = $R'ds.ds'$; da diese aber immer d. entgegengesetzte Richtung d. Bewegung d. Elements gegen d. Leitfl. hat, ist sie = $-R'ds.ds'$ im Sinne d. Richtung AA_1.

Für d. Seitenfl. AA_1b_1b ist d. innere spec. Reibung = $R\frac{du}{dz}$ und also d. Gesammtreibung genommen nach d. Richtung AA_1 = $-R\frac{du}{dz}ds.dy$.

Endlich ist d. spec. Reibung d. Seitenfl. A_1Acc_1 = $R\frac{du}{dy}$ und also d. Gesammtflächenreibung nach d. Richtung AA_1 = $-R\frac{du}{dy}ds.dz$.

Die algebraische Summe aller dieser Kräfte muß nun = 0 sein, man hat also d. Bedingung:

$$-R'ds.ds' - R\frac{du}{dz}ds.dy - R\frac{du}{dy}ds.dz = 0$$

, od. wenn man mit $-R\,ds.ds'$ dividirt:

$$\frac{R'}{R} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dy}{ds'} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dz}{ds'} = 0.$$

Diese allgemeine Oberfl.-Bedingung muß also stattfinden für alle diejenigen Punkte, in welchen d. Flüssigkeit in Berührung ist mit fester Leitfl. also dort, wo äußere Reibung stattfindet. Diese Gl. kann im besonderen Fall dienen um d. Constanten zu bestimmen, welche sich bei d. Integration d. vorhin erhaltenen differentiellen Gleichungen ergeben. —

Es läßt sich nun leicht begreifen, daß d. Lösung d. vorhin gefundenen allgemeinen Gl. sich vereinfacht und für besondere beschaffenheitliche Fälle durch d. vereinfachten Ausdruck, namentlich durch diejenigen, welche sich für d. Reibungscomponenten R.. ergeben. Insbesondere vereinfachen sich diese in manchen Fällen außerordentlich, wo besondere Annahmen gemacht werden können.

Ist insbesondere u = const. für jeden Punkt und alle Querschnitte als Ebenen anzunehmen, so wird offenbar: $\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho''} = 0$, denn ρ' und ρ'' bedeuten d. Krümmungsradien d. Normalschnitte d. Querschnitts durch A, welche d. Krümmungslinien und Normalen berühren; da diese Schnitte aber unter d. Voraussetzung eines ebenen Querschnitts auch eben sind, so sind ihre Krümmungsradien = ∞ also $\rho' = \rho'' = \infty$. Demnach ergibt sich dann auch für d. Reibungscomponenten im Sinne senkrecht zur Achse = 0, also $R_z = R_y = 0$, weil mit u = const d. Ableitungen von $\frac{u}{\rho'}$ = 0 werden. Ebenso wird sich auch auf d. Reibungscomponenten im Sinne d. Achse vereinfachen. Wenn d. vereinfachende Voraussetzung auch nicht genau stattfindet, so kann man doch in vielen Fällen mit großer Annäherung d. Achse nennen und demnach von d. Reibungscomponenten senkrecht zur Achse abstrahiren und zwar entsprechend genauer, je weniger veränderlich d. Größe u ist und je mehr d. Querschnitte sich ebenen Flächen nähern d. h. je mehr sich ρ' und ρ'' d. Unendlichkeit nähern. —

genau

Ein ganz besonderer Fall, in welchem d. Querschnitte Ebenen sind, sind alle Ströme offenbar ungekrümmter Curven. Bemerkenswerth ist dabei insbesondere d. Fall, daß alle Querschnittslinien einer Geraden parallel sind. Z. B. wenn es sich handelt um d. Bewegung von Wasser in einem Kanal, dessen Querschnitte nur wenig verschieden sind. Man kann dann

d. Querschnitts als vertikale Ebenen ansehen, alle parallel d. Richtung d. Achse, und ebenso d. Schichten als horizontaläquidistante Curven. Als Normalcurven und Krümmungscurven kann dann ein System von sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien angenommen werden, welche in obigem Beispiel ebenso so anzunehmen wären, dass d. Krümmungscurve eine horizontale Gerade und d. Normalcurve eine vertikale Gerade sei. In diesem Falle wird d. Querschnitt d. Flächenelements $= ACbd$ ein Rechteck und demnach $r' = r'' = \infty$, weil die Richtungen von AC u. bd sowie Ab u. Cd, welche d. unendl. kl. Winkel $\frac{dy}{r'}$ und $\frac{dz}{r''}$ miteinander bilden, nun parallel sind. Unter dieser Annahme vereinfacht sich d. betreffende Ausdruck wesentlich, denn mit $\rho' = \rho'' = \infty$, $\frac{du}{ds} = 0$ und $r' = r'' = \infty$ wird d. erste Reibungscomponente im Sinne d. Achse:

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{\rho}\frac{du}{dy}\right)$$ und natürlich wie vorhin $R_y = R_z = 0$.

Wenn endlich d. ebenen Querschnitte nicht nur einer Geraden parallel sind, sondern alle untereinander parallel sind, demnach alle Schichten parallele horizontale ~~...~~ Gerade sind, wie dies bei d. Bewegung von Wasser in Kanälen und Flüssen d. Fall ist, so wird:

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$ denn dann ist offenbar auch $\rho = \infty$ d.h. d. Krümmungsradius d. Schicht in d. fraglichen Punkte $= \infty$.

In einem solchen Fall wird es nun zweckmäßiger sein, statt d. Systems sich rechtwinklig schneidender gerader Linien ein anderes System von sich rechtwinklig schneidenden Linien als Coord.-system einzuführen. Z.B. kann man in nebenstehendem Fall als Krümmungscurven ein System von geraden Linien annehmen, welche sich in einem Punkte schneiden und als Normalcurven concentrische Kreise um d. gemeinschaftlichen Schnittpunkt als Centrum.

Besonders dieses Coord.-System wird insbesondere von untergeordnetem Werte sein, wenn es sich handelt um d. Bewegung von Wasser in einer geraden cylindrischen Röhre, wo dann d. Kreiscentrum zugleich d. Mittelpunkt d. Querschnitts ist. Für diesen Fall hat man dann in d. allgemeinen Formeln zu setzen: $\rho = \infty$ weil alle Schichten gerade Linien sind, ferner: $\rho' = \rho'' = \infty$ weil d. Normalschnitte d. Querschnitts gerade Linien werden. Was r' betrifft, so muss man offenbar wieder $r' = \infty$ setzen, denn betrachtet man d. Querschnitt eines sektorförmigen Elements $= Abcd$, so ist hier $bd \parallel Ac$ also ihr Neigungswinkel $= \frac{dy}{r'} = 0$ demnach $r' = \infty$ ist. Andererseits ist aber $r'' = r$ zu setzen, unter r d. Radius eines solchen concentrischen Kreises verstanden, denn es bedeutet bekanntlich $\frac{dz}{r''}$ den Neigungswinkel von Ab mit Cd, dieser ist aber nun $= \frac{dz}{r}$ und also $r'' = r$; endlich ist natürlich für dy — dr in d. Formeln einzuführen. Setzt man diese Werte ein, so erhält man:

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

während d. Reibungscomponenten senkrecht zur Achse $= 0$ werden wie vorhin gezeigt.

Gewöhnlich wird man indessen in solchen Fällen noch weitere vereinfachende Voraussetzungen zu Grunde legen dürfen, z.B. die, dass in allen Punkten eines Parallelkreises d. Geschw. gleich groß ist und dass dieselbe nur von Parallelkreis zu Parallelkreis veränderlich ist. In diesem Falle ist also auch $\frac{\partial u}{\partial z}$ d.h. d. Ableitungen von Geschw. u nach z $= 0$ zu setzen, und demgemäß auch u nur als Function von r zu betrachten, so dass an Stelle d. partiellen Differentialquotienten (∂) nur d. vollständigen Differentiale (d) von u treten. Man hat dann:

$$R_s = R\left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right) - \frac{R}{r}\left(r\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr}\right) = \frac{R}{r}\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{du}{dr}\right).$$

Ist jedoch d. Geschw. u noch abhängig von d. Zeit t, so müssen natürlich d. partiellen Differentiale (∂) stehen bleiben. Von dieser Formel wird später Gebrauch gemacht bei d. Lösung d. Widerstandes d. Bewegung von Flüssigkeiten in geraden cylindrischen Röhren.

Bis hierher wurde immer vorausgesetzt, daß d. Geschw. u nicht nur eine Function d. Coord. sondern auch eine Function d. Zeit t sei. Von großem technischen Interesse ist nun aber d. Fall, daß die Geschw. nicht abhängig von d. Zeit t ist, also eine sogenannte permanente Bewegung stattfindet. Man nennt nämlich eine permanente Bewegung eine solche, bei welcher sich d. Geschw. nur von Punkt zu Punkt nicht aber im Verlaufe d. Zeit in demselben Punkte ändert. Wenn dies d. Fall ist, und besonders vorausgesetzt, daß d. Oberfl. Kräfte und d. Grenzbedingungen unabhängig von d. Zeit gegeben sind, so werden d. Ableitungen nach d. Zeit $t = 0$, also:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 .$$

Wenn daher nun weiter vorausgesetzt wird, daß d. spec. Masse μ als Function d. Dr. p gegeben ist, so kommt es nur darauf an, Dr. p und d. Geschw. u als Function d. Coord. zu bestimmen. Hierzu dienen d. sogenannten 3 Fundamentalgleichungen und d. Continuitätsgl., welche sich aber im vorliegenden Falle noch vereinfachen, indem mit $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ d. Continuitätsgl. sich nach Seite 23:

$$\frac{d\mu u}{ds} = \mu u\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Übrigens läßt sich diese noch in einfacher Gestalt, ~~und~~ ~~[illegible]~~ so daß sie für d. Gebrauch noch bequemer und angemessener wird.

Es sei nämlich A ein Punkt d. Querschnitts σ und A_0 d. Durchschnittspunkt d. durch A gezogenen Linie mit d. im entgegengesetzten Sinne d. Bewegung unendl. nahe benachbarten Querschnitt σ_0, f_0 sei ein unendl. kl. Flächenelement in σ_0, welches d. Punkt A_0 in sich schließt. Durch alle Punkte d. Umfanges d. Flächenelements f_0 werden d. betreffenden Linien gelegt. Diese Linien bestimmen d. Mantelfl. eines fadenförmigen Raumes, welcher d. Querschnitt σ in d. Element f schneidet, das natürlich d. Punkt A in sich enthält. Das Querschnittsverhältniß d. Flüssigkeitsfadens, welcher durch 2 unendl. nahe benachbarte Querschnitte σ_0 und σ geschnitten wird, ist dann noch $= \frac{f}{f_0} = \alpha$. Denken aber d. Änderung d. Querschnitts gegeben ist, so ist auch dieses Querschnittsverhältniß stets als Function d. Coord. gegeben. Nun verlangt bekanntlich d. Continuitätsgl. dann noch, daß in irgend einer Zeit durch d. Querschnitt f ebensoviel Flüssigkeitsmasse hindurchströmen muß wie durch f_0, einer continuirlichen Raumerfüllung durch Massenelemente entsprechend. Ist nun u d. spec. Geschw. und μ d. spec. Masse d. durch d. Element f hindurchfließenden Flüssigkeit, so ist d. Masse dieser Flüssigkeit in Zeiteinheit: $= \mu f u$; ist ebenso μ_0 d. spec. Masse und u_0 d. Geschw. d. durch f_0 hindurchfließenden Flüssigkeit, so ist deren Masse $= \mu_0 f_0 u_0$; beide Theile müssen aber gleich groß sein d. h. es muß: $\mu f u = \mu_0 f_0 u_0$

also $\alpha \mu u = \mu_0 u_0$ sein. Diese Gl. kann nun an Stelle d. Continuitätsgl. gesetzt werden, wobei d. Querschnittsverhältniß α als Function d. Coord. als gegeben zu betrachten ist. Dieses Verhältniß ist offenbar abhängig von d. Krümmungen d. Querschnitte in denjenigen Punkten, in welchen d. Querschnitte σ und σ_0 von d. Linie geschnitten werden. Diese Beziehung ist auch leicht aus der oben gefundenen Gl. abzuleiten, indem man sie nach s zu differentiiren braucht; man erhält dann nach einigen Umformungen:

$$\frac{1}{\mu u} \cdot \frac{d\mu u}{ds} + \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{ds} = 0$$

Setzt man noch oben: $\frac{d\mu u}{ds} = \mu u\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$ ist, so erhält man: $\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{ds} + \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 0$.

Statt d. Summe d. Krümmungsradien d. Normalschnitte, welche d. Krümmungslinien und Normalcurven für d. betreffenden Punkt begrenzen, kann man auch d. Summe d. Krümmungsradien zweier beliebiger zu einander senkrechter Normalschnitte d. Querschnitts zugrunde legen, indem diese bekanntlich immer einander gleich sind. –

Von d. 3 Fundamentalgl. ist insbesondere d. erstere wichtig, und mit Rücksicht auf spätere Benützung erscheint es zweckmäßig, derselben eine andere Form zu geben in welcher sie später mit Vorteil angewendet werden kann. Nach Seite 22 hieß d. erste Fundamentalgl.:

$$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{\partial p}{\partial s}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}.$$

Diese Gl., bezogen auf d. Masseneinheit, soll nun mit $\frac{1}{g}$ (g = Beschl. d. Schwere) d. h. mit d. Masse d. Gewichtseinheit multipliziert werden, so ist nun d. Gl. dann auf d. Gewichtseinheit bezogen bekommen. Außerdem soll noch d. Gl. mit d. Bogenelement ds d. Linie multipliziert werden, wobei d. erhaltenen Differentiale nach s d. Einfachheit wegen mit d bezeichnet werden sollen, also es ist zu setzen:

$$\frac{\partial p}{\partial s}\,ds = dp \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial s}\,ds = du$$

Ferner sei d. Produkt $\mu \cdot g$ = spez. Gew. mit γ bezeichnet = Gew. d. Volumeneinheit. Setzt man dies alles ein und berücksichtigt daß $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ist, so folgt:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{u\,du}{g} = \left(\frac{K_s}{g} + \frac{R_s}{\gamma}\right) ds.$$

Nun ist aber offenbar:

$$\frac{dp}{\gamma} = d\left(\frac{p}{\gamma}\right) - p\,d\left(\frac{1}{\gamma}\right) \quad \text{und ferner} \quad \frac{u\,du}{g} = d\left(\frac{u^2}{2g}\right)$$

so daß d. Gl. dann heißt:

$$d\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) = p\,d\left(\frac{1}{\gamma}\right) + \left(\frac{K_s}{g} + \frac{R_s}{\gamma}\right) ds.$$

Hierin bedeutet bekanntlich nun $\frac{p}{\gamma}$ die spez. Druckhöhe im Punkt A d. h. d. Höhe einer Flüssigkeitssäule vom Querschnitt = 1, deren Gew. = p ist und deren spez. Gew. = d. spez. Gew. in d. betreffenden Punkt A d. Flüssigkeit ist.
Ferner ist $\frac{u^2}{2g}$ d. sogenannte Geschw.-Höhe im Punkt A.

Die eben gefundene Gl. drückt also d. Gesetz aus, nach welchem sich d. Summe d. Druckhöhe und Geschw.-Höhe von Punkt zu Punkt ändert. Integriert man diese Gl. längs d. Bogen A_0A d. Linie, so erhält man:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} - \left(\frac{p_0}{\gamma_0} + \frac{u_0^2}{2g}\right) = E + M + \int_0^s \frac{R_s}{\gamma}\,ds$$

unter p_0, γ_0 u. u_0 d. betreffenden Größen für d. Punkt A_0 verstanden und unter s d. Entfernung A_0A, gemessen auf d. Linie, verstanden. Ferner bedeutet hierin E d. auf d. Weg von A_0 bis A verrichtete Expansionsarbeit, denn es ist gesetzt worden: $E = \int_0^s p\,d\left(\frac{1}{\gamma}\right)$, welcher Ausdruck aber bekanntlich d. Ausdruck für d. Expansionsarbeit pr. 1 kgr bedeutet.
Ferner bezeichnet M d. Ausdruck: $\int_0^s \frac{K_s}{g}\,ds$; dies ist aber offenbar d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte pr. 1 kgr. Flüssigkeit, denn es wird mit K_s d. spez. äußere Massenkraft pr. Masseneinheit im Sinne d. Linie bezeichnet, so ist also $\frac{K_s}{g}$ d. äußere Massenkraft pr. Gewichtseinheit im Sinne d. Linie bezeichnet. Endlich bezeichnet d. Integral d. Arbeit d. inneren Reibung auf d. Weg von A_0 bis A, verursacht d. Arbeit d. nach d. Linie A_0A gerichteten Reibungskomponente R_s. Wenn also A_0A irgend eine Strecke einer im Sinne A_0A durchlaufenen Linie ist, so ist d. Summe aus Druckhöhe und Geschw.-Höhe in d. Punkt A = d. entsprechenden Summe aus Druck- und Geschw.-Höhe ~~+ d. Zustand~~ d. M in d. Punkt A_0 + d. während d. Wegs A_0A ~~pro~~ 1 kgr verrichteten Expansionsarbeit + d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte pr. 1 kgr + d. pr. 1 kgr Flüssigkeit verrichteten Arbeit d. inneren Reibung im Sinne d. Linie, od. auch man kann sagen: die Summe d. Druck- und Geschw.-Höhe in 2 verschiedenen Punkten A und A_0 unterscheiden sich durch die von A_0 bis A pr. 1 kgr verrichtete Expansionsarbeit + d. Arbeit d. äußeren Massenkraft + d. Arbeit d. inneren Reibung im Sinne d. Linienrichtung, alles bezogen auf d. Gewichtseinheit. In dieser Form soll nun d. erste Fundamentalgl. immer zur Anwendung kommen.

Die Geschwindigkeit läßt sich daher als Function von p und p₀ mit Rücksicht auf d. als gegeben vorausgesetzte Beziehungsgleichung zwischen μ u. p bestimmen. Ebenso auch d. Geschwindigkeitsarbeit. Die Arbeit d. inneren Reibung läßt sich in d. meisten Fällen freilich nur angenähert bestimmen und zwar als Function d. von A₀ bis A durchlaufenen Strecke. Angenommen dies sei alles geschehen, alsdann stellt d. oben gefundene Gl. eine Beziehung zwischen d. entsprechenden Größen p p₀ u. μ – μ₀ in d. beiden Punkten A u. A₀ dar, d. h. in 2 Punkten eines und derselben Linie. Eine 2te Beziehung zwischen denselben Größen wird durch d. vorhin gefundene Continuitätsgl.

$$\Delta \mu u = \mu_0 u_0$$

dargestellt, so daß man nun 2 Beziehungen zwischen 4 Größen hat, ~~sodaß~~ und demzufolge wenn 2 Größen gegeben sind, die beiden anderen bestimmt werden können. —

Die beiden anderen Fundamentalgl. Seite 22 stellen d. Gesetz dar, nach welchem sich d. Dr. p im Sinne d. y u. z Axe, also im Sinne d. Querschnitts, von Punkt zu Punkt ändert. ~~wird~~ Was dieses Gesetz betrifft, nach welchem sich d. Dr. p von Punkt zu Punkt im Querschnitt ändert, so läßt sich Folgendes bemerken: Je weniger d. Querschnitte gekrümmt sind (also je mehr ρ' und ρ'' = ∞ werden), je weniger verschieden d. Geschw. u von Punkt zu Punkt sich ändert und je weniger d. Linien gekrümmt sind dort wo sie d. Querschnitt durchsetzen (also um so mehr ρ = ∞ wird) um so desto genauer kann man annehmen, daß d. Dr. p sich nur nach hydrostatischen Gesetzen ändert. Denn wie schon früher gesehen, würden mit vollkommen ebenen Querschnitten ($\rho' = \rho'' = \infty$) und mit $\frac{dy}{ds} = 0$ $\delta_y = \delta_z = 0$. Wenn ferner d. Linien sehr wenig gekrümmt sind, so kann mit $\rho = \infty$ $\frac{u^2}{\rho} = 0$ gesetzt werden, so daß d. beiden letzten Fundamentalgl. übergehen in:

$$\frac{dp}{dy} = \mu Y \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dz} = \mu Z$$

also in Bedingungen, welche nur von d. äußeren Massenkräften beeinflußt werden, entsprechend d. Eigenschaft d. hydrostatischen Gesetze, so daß p also dann nur nach d. hydrostatischen Gesetzen von Punkt zu Punkt veränderlich ist in ein und demselben Querschnitt.

Wichtig ist es, dies von vornherein festzuhalten, indem man sich öfters mit solchen vereinfachenden Bedingungen annehmen muß.

Was d. äußeren Massenkräfte betrifft, so ist zur Ermöglichung einer permanenten Beweg. offenbar erforderlich daß für jeden Punkt d. Geschw.-Beweg. als bloße Functionen d. Coord. gegeben sein müssen. Die Bewegung d. Flüssigkeit kann also nur eine permanente sein, wenn d. resultierende Massenkraft K für jeden Punkt x y z eine unveränderliche Größe und Richtung gegen d. Coord.-Richtungen habe, daß also d. Massenkraft K in Bezug auf Größe und Richtung constant sei. Wenn dieses Coord.-System selbst in Beweg. begriffen ist, so muß, wenn man d. Schwerkraft als d. wichtigste Massenkraft betrachtet, die Resultante K d. äußeren Massenkräfte = d. beschleunigenden Schwerkraft + d. beiden Ergänzungskräften d. relativen Bewegung sein. In diesem Fall kann sich jedenfalls nur eine permanente Beweg. ausbilden, wenn d. Schwerkraft und d. Ergänzungskräfte d. relativen Beweg. gegen d. Coord.-Axen eine dieselbe Richtung haben. Wenn also z. B. d. festen Leitflächen und mit ihnen das an ihnen befestigte Coord.-System in Rotation begriffen ist, so muß diese Rotation immer um eine vertikale Axe mit constanter Winkelgeschw. stattfinden, denn nur dann bildet d. Richtung d. Schwerkraft immer denselben Winkel mit d. Axen; ferner muß d. Winkelgeschw. ω constant sein, weil sonst d. Ergänzungskräfte als Functionen d. Zeit erscheinen und aber d. Definition einer permanenten Beweg. widersprechen würde. Außerdem kann aber auch nach Unterschied d. permanenten Beweg. das um d. feste Axe rotierende System eine translatorische Beweg. im Sinne d. festen Rotationsaxe ~~-~~ mit constanter Geschw. besitzen. Es fragt sich nun wie sich als d. h. d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte ausdrücken läßt?

Es wird also vorausgesetzt, daß mit d. Leitfl. fest verbundene Coord.-System habe eine eigene Beweg. und zwar eine Rotation um eine feste Axe mit d. constanten Winkelgeschw. ω und ferner eine Translationsbewegung im Sinne d. festen Rotationsaxe mit d. constanten Beschl. f welch letztere gerichtet von oben nach unten und entgegen unten nach oben genommen werden soll. Ferner sei h die Höhe d. Punktes A_0 über A und r_0 und r d. resp. Abstände d. Punkte A_0 und A von d. festen Rotationsaxe. Die Arbeit M d. äußeren Massenkräfte besteht dann aus mehreren Theilen. d. Schwerkraft nämlich verrichtet während d. Beweg. d. Flüssigkeit von A_0 nach A d. Arbeit $= 1 \cdot h$ pr. Gewichtseinheit; was ferner d. Trägheitskräfte d. relativen Beweg. betrifft, so kommt d. letzte gar nicht weiter in Betracht, indem dieselbe immer bekanntlich normal zur relativen Bahn d. Massenelements und demnach ihre Arbeit $= 0$ ist. Die erste Trägheitskraft, welche bekanntlich d. System eine Beschl. ertheilt, welche gleich groß aber entgegengesetzt gerichtet ist d. Beschl. d. betreffenden Punktes, die dieser erhalten würde wenn er mit d. sich bewegenden Coord.-System fest verbunden wäre, kann man als aus 2 Theilen bestehend gedacht werden, nämlich herrührend von d. Rotation und Translation. Die Arbeit d. 1sten Trägheitskraft im Sinne d. Translation ist nun offenbar $= \div \frac{f}{g} h$ pr. Gewichtseinheit indem ja ihre Beschl. im Sinne d. Translation $= \div f$ ist. Ferner wird d. System von d. 2ten Trägheitskraft im Sinne d. Rotation eine Beschl. $= \frac{\omega^2}{g} r$ ertheilt, die Arbeit pr. Element d. Abstandes von d. Rotationsaxe also $= \frac{\omega^2}{g} r \, dr$, und folglich d. Arbeit während d. Beweg. d. Flüssigkeit von A_0 nach A $= \int_{r_0}^{r} \frac{\omega^2}{g} r \, dr = \frac{\omega^2}{g} \int_{r_0}^{r} r \, dr = \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - r_0^2)$ Demnach ist d. resultirende Arbeit M d. äußeren Massenkräfte:

$$M = \left(1 - \frac{f}{g}\right) h + \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - r_0^2).$$

Wenn d. System nur eine Translationsbeweg. hat, dann kann diese offenbar derart beschaffen sein, daß ihre Beschl. f eine constante Größe ~~nur~~ jedoch eine ganz beliebige Richtung habe, ohne daß d. genannte relative Beweg. d. Flüssigkeit durch diesen Kanal verändert würde. Dann ist d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte: $M = h - \frac{f}{g} s'$ unter s' jetzt d. Projection d. Bogens $A_0 A$ d. Flüssigkeitsfadens auf d. Richtung d. Beschl. f. —

Wenn aber d. Flüssigkeit verhältnißmäßig leicht ist (Gase, Dämpfe) und man demgemäß von d. Einwirkung d. Schwere abstrahiren kann, so daß nur d. Trägheitskraft d. relativen Beweg. in Betracht kommt als äußere Massenkraft, so kann d. relative Beweg. d. Flüss. wieder in einer Rotation ω um eine gewisse Axe bestehen und in einer Translation im Sinne dieser Axe, nur braucht diese Axe dann nicht mehr vertical gerichtet zu sein. In einem solchen Falle ist:

$$M = -\frac{f}{g} s' + \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - r_0^2)$$

wo r und r_0 dieselbe Bedeutung haben wie im ersten Fall und s' d. Bedeutung wie im 2ten Fall. —

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich immer allgemein auf d. stationäre Beweg. von Flüssigkeit in irgend welchen Kanälen. Wir wollen nun zu den speciellen Fällen übergehen nämlich zu den Strömungen in Gefäßen und Canälen d. h. in Kanälen, welche d. Flüssigkeit ganz einschließen. Der Ausfluß von Flüssigkeiten aus Öffnungen kann dabei offenbar als Specialfall d. Strömung in Canälen angesehen werden. —

Strömende Bewegungen von Flüssigkeiten in Canälen.

In d. meisten d. hier vorkommenden Fälle kann mit ziemlicher Genauigkeit d. Richtung d. Curven angenommen werden, namentlich um so genauer, je enger d. Canal u. d. Röhre ist. Wenn aber vorher angenommen wird, daß d. Neigung gewisser Gr. p und ihre Werthe p_e à priori gegeben sein, so kann diese Annahme doch nicht immer als zulässig betrachtet werden, namentlich dann nicht, wenn

Dadurch sind schon d. Schwierigkeiten gesteigert zur Bestimmung d. Änderungsgesetzes betreffend d. Änderung d. Bewegungszustandes von Punkt zu Punkt. Aus diesem Grunde macht man noch weitere vereinfachende Annahmen, indem man d. Änderungsgesetz d. inneren und äußeren Zustandes als einen mittleren Zustand in d. Rechnung ansieht, d. h. den Zustand in allen Punkten jedes Querschnitts als gleich voraussetzt. Was d. Gr. p betrifft, so ist diese Annahme um so weniger fehlerhaft, je weniger d. Querschnitt gekrümmt ist und je weniger d. Curven gekrümmt sind in d. Punkten, wo sie d. Querschnitte durchsetzen, vorausgesetzt, daß auch nach hydrostatischen Gesetzen keine anderen Störungen vorhanden sind, indem dann von Punkt zu Punkt im Querschnitt d. Gr. p mit veränderl. ... fallen nur nach hydrostatischen Gesetzen sich ändert und zwar um so mehr je dichter d. strömende Flüssigkeit ist, denn natürlich wird d. Schwerkraft in diesem Bezug den bedeutendsten Einfluß haben. Diese Voraussetzung einer in allen Querschnittspunkten gleichen Gr. hat nur wenig Bedenkliches an sich. — Anders verhält es sich aber mit d. Voraussetzung, daß d. Geschw. auch in allen Querschnittspunkten gleich sei, denn diese ändert sich bekanntlich bedeutend mit Rücksicht auf d. inneren und äußeren Reibungen, indem d. Geschw. in d. Mitte eines Rohrs immer größer ist als an d. Rändern. Vorläufig soll indessen von diesen Umständen abgesehen werden, indem vorausgesetzt wird, daß d. äußere und innere Zustand immer als mittlerer Zustand d. Querschnitts in Rechnung gestellt wird. Diese Annahme bezeichnet man d. Definition gemäß auch wohl als d. Schichtenannahme, indem dadurch dieselbe d. Flüssigkeit in Schichten getheilt wird, in welchen d. äußere und innere Zustand gleich ist. —

In einem solchen Querschnitt sei nun bezeichnet mit p d. spec. Pressung, v = spec. Volumen, T = absolute Temperatur, U = spec. inneres Arbeitsvermögen und u = Geschw. in allen Punkten d. Querschnitts F, welche erforderlichenfalls nur Mittelwerthe sind. Unter Mittellinie soll d. geometrische Ort aller Schwerpunkte S d. Querschnitte d. in Röhren strömenden Wassers verstanden werden. s bezeichne einen Bogen d. Mittellinie S, gemessen von einem Anfangspunkt S_0 aus, welcher d. Schwerpunkt eines als Anfangsquerschnitt gewählten Querschnitts F_0 ist. Die angenommenen Größen $p\ v\ T\ U\ u$ sind dann noch zu betrachten als Functionen von s und d. Zeit t, namentlich in d. Fällen wo nicht permanente strömende Bewegungen stattfinden, und es besteht unsere Aufgabe also darin diese Größen $p\ v\ T\ U\ u$ als Functionen von v u. t auszudrücken. Ist dabei d. Beweg. nicht permanent, so ist sie doch in d. meisten technisch wichtigen Fällen so langsam veränderlich, daß man ohne bedenklichen Fehler d. augenblicklichen Zustand gleich setzen kann dem Zustand, welcher dann bei einer permanenten Beweg. stattfinden würde. Demgemäß wird d. nicht permanente Beweg. auf d. permanente Beweg. zurückgeführt und aus diesem Grunde auch angemessen ist ~~d~~ zunächst d. permanente strömende Beweg. näher zu untersuchen. Wenn man also nun zunächst permanente strömende Beweg. voraussetzt, so sind d. fraglichen Größen $p\ v\ T\ U\ u$

nur noch Functionen von s und nicht mehr Functionen d. Zeit t. Wird ferner mit G d. Gew. d. Flüssigkeit bezeichnet, welche in d. Zeiteinheit durch jeden Querschnitt hindurchströmt, so kann d. allgemeine Aufgabe, aus welcher durch Vernachlässigung von gegebenen und gesuchten Größen sowie durch Specialisirung eine große Zahl anderer und besonderer Aufgaben abgeleitet werden kann, folgendermaßen ausgesprochen werden:

Es sollen d. Größen p v T U u als Functionen von s in jedem Querschnitt bestimmt werden, wenn sie für einen bestimmten Querschnitt gegeben sind, wenn ferner d. Art d. Flüssigkeit, die Constante g = Beschl. d. Schwere, d. Gestalt d. Röhre, d. auf d. Flüssigkeit wirkenden Massenkräfte, ferner d. Widerstand d. Leitung und d. Wärmemittheilung durch d. Rohrwand hindurch gegeben sind.

Um nun diese Aufgabe zu lösen, müssen 5 Beziehungen zwischen diesen 5 unbekannten Größen p v T U u und d. Veränderlichen s.

Eine erste solche Gl. erhält man einfach dadurch, daß man das durch den Querschnitt F pro Zeiteinheit hindurchfließende Flüssigkeitsvolumen 2 mal ausdrückt. Dasselbe ist nämlich einmal $= F u$ und andererseits auch = d. pro Zeiteinheit durchfließenden Flüssigkeitsgew. mal d. Volumen pro Gewichtseinheit also $= G.v$

Dementsprechend hätte man als erste Beziehung:

$$G.v = F u.$$

Diese Gl. enthält offenbar d. Continuitätsbed., welche für uns deshalb auch Continuitätsgl. genannt werden soll. —

2 andere Beziehungen bekommt man mit d. aus d. mechanischen Wärmetheorie her bekannten sogenannten Gln. d. lebendigen Kraft, mit d. Wärmegl. und mit d. Gl. d. Arbeitsvermögens, von welchen jedoch nur d. beiden ersten unabhängig von einander sind, während d. 3te d. Folge d. beiden ersten ist. Bekanntlich heißen diese Gln.:

Gleichung d. lebendigen Kraft: $dL = dM + dP - dR - dS + dE$

die allgemeine Wärmegl.: $dU = W dQ + dR + dS - dE$ und mit diesen beiden durch Addition d. Gl. d. Arbeitsvermögens d. h. d. Summe d. äußeren und inneren Arbeitsvermögens: $d(L + U) = dM + dP + W dQ$.

Hierin bedeutete:
dL = Zuwachs d. lebendigen Kraft in irgend einem Zeitelement
dU = Zuwachs d. inneren Arbeitsvermögens " " "
dM = Arbeitssumme d. Massenkräfte " " "
dP = Arbeit d. auf d. Oberfl. wirkenden Drucks " " "
dR = Arbeit verloren gehend durch äußere Reibung " " "
dS = " " " " innere Widerstände " "
dE = Expansionsarbeit
$W dQ$ = Arbeitswerth d. von Außen mitgetheilten Wärme dQ " " "

Diese 3 Gl. sind nun nur noch etwas anders umzugestalten um 2 von einander unabhängige Beziehungen zwischen d. 5 Größen u p T U u zu bekommen. Die Gl. sind bezogen auf d. Zustandsänderungen, welche d. im Zeitelement dt durch Querschnitt F hindurchfließende Flüssigkeitsschicht erfährt, während d. Schwerpunkt S d. Querschnitts d. Element ds d. Mittellinie durchläuft.

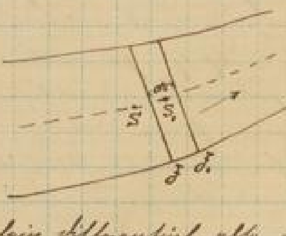
Das im Zeitelement dt durch Querschnitt F hindurchfließende Gew. d. Flüssigkeitsmenge ist offenbar $= G.dt$ und da d. Geschw. $= u$ ist, so folgt als Änderung d. lebendigen Kraft:

$$dL = G \frac{dt}{g} d\left(\frac{u^2}{2}\right) = G.dt. \frac{u\,du}{g}.$$

Was ferner d. im Zeitelement dt verrichtete Expansionsarbeit betrifft, so ist diese offenbar:

$$dE = G.dt\, p\, dv. —$$

Was d. Arbeit d. äußeren Drucks betrifft, so sei δ ein Querschnitt und δ_1 ein unendl. nahe benachbarter Querschnitt, deren Schwerpunkte S u. S_1 nicht genau in den Ebenen dieser Querschnitte zu liegen brauchen, indem dieselben bekanntlich krumme Fl. sein können. Offenbar ist nun:



$\delta p u\,dt$ = Arbeit d. Drucks, welchen d. nachfolgende Flüssigkeit auf d. Hinterfl. δ d. Schicht pr. Zeitelement dt ausübt und ebenso d. auf d. Vorderseite δ_1 d. Schicht entgegengestellte Druck, also im negativen Sinne d. Beweg., = d. vorigen vermehrt um sein Differential, also $= \div[\delta p u + d(\delta p u)]\,dt$.
Außerdem wirkt aber noch ein äußerer Druck auf d. Wände d. Flüssigkeitsschicht, indem aber dieser Druck senkrecht gegen d. Richtung d. Beweg. gerichtet ist, so ist seine Arbeit im Sinne d. Beweg. $= 0$.
Demnach ist zu setzen:

$$dP = \delta p u\,dt \div [\delta p u + d(\delta p u)]\,dt = \div d(\delta p u).dt$$

Nach d. vor oben gefundenen Continuitätsgesetz ist aber: $u = G\frac{v}{\delta}$ und demgemäß:

$$dP = \div G.dt\, d(pv). —$$

Setzt man diese Ausdrücke von dP, dL und dL in d. allgemeinen Gl. ein und dividirt dieselbe durch $G.dt$, so bezieht man dieselben dadurch offenbar auf d. Gewichtseinheit und Zeiteinheit, während sie vorher auf d. Gew. d. Flüssigkeitsschicht und Zeitelement dt bezogen waren. D. Größen dR, dS, dM und WdQ sollen aber so gesetzt bleiben, so daß sie dann auch auf Gewichtseinheit und Zeiteinheit bezogen sind. Aus d. Gl. d. lebendigen Kraft bekommt man nun:

$$\frac{u\,du}{g} = dM - d(pv) - dR - dS + p\,dv$$

α . . . oder: $\frac{u\,du}{g} + d(pv) - p\,dv = dM - dB$ wenn unter dB d.

$\therefore\ u\frac{du}{g} + v.dp = dM - dB.$ Summe d. Arbeiten d. inneren und äußeren Bewegungswiderstände verstanden wird $= dR + dS$.

Andererseits liefert d. Wärmegl.:

β . . . . $dU + p\,dv = WdQ + dB$

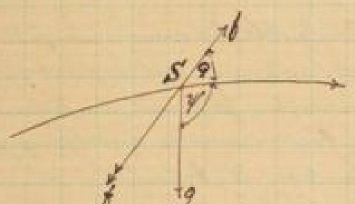
Und aus diesen beiden durch Addition:

γ . . . . $\frac{u\,du}{g} + dU + d(pv) = dM + WdQ.$

Von diesen 3 Gl. $d(pv)$ ist wie schon ersichtlich eine immer d. Folge d. beiden anderen, so daß man in diesen 3 Gl. demnach nur 2 unabhängige Beziehungen zwischen d. Größen $u\ p\ v\ \delta\ U$ hat. Im Ganzen haben wir also nun mit d. Continuitätsgl. 3 unabhängige Beziehungen. Es fehlen also noch 2. Diese bisher gefundenen Beziehungen waren allgemein gültig für jede Flüssigkeit in welcher Form, die beiden noch fehlenden Beziehungen können dagegen nicht so allgemein aufgestellt werden, indem dieselben von d. Art und Aggregatform d. betreffenden Flüssigkeit abhängen. Diese beiden Beziehungen sind nämlich d. aus d. Wärmetheorie her bekannte ~~Zustandsgleichung~~ Zustandsgleichung und Gleichung d. inneren Arbeitsvermögens. Die Zustandsgl. drückt eine Beziehung zwischen d. Größen $p\ v\ t$ aus und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens ist eine Gl. zwischen d. Größen $v\ p\ t\ U$, welche Beziehungen aber bekanntlich im Allgemeinen für jede verschiedene Flüssigkeitsart und jede verschiedene Aggregatform verschieden sein können. — Handelt es sich um eine nicht homogene Flüssigkeit, sondern um ein Gemisch gleichartiger Flüssigkeit in verschiedenen Aggregatformen, so kommt noch eine 6te unabhängige Veränderliche hinzu nämlich d. Mischungsverhältniß y. In diesem Fall ist aber auch noch eine 6te Beziehung vorhanden, indem bekanntlich für den in einem solchen Gemisch entsprechenden Grenzzustand d. Übergangs von einer Bewegungsform in d. andere, zwischen d. Pressung p und d. Tangentialkraft t bzw. d. Verschiebungsverhältniß η eine bestimmte Beziehung stattfindet. Wenn man also in einem solchen Falle mit d. Zustandsgl. und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens mit Hilfe dieser besonderen Beziehung zwischen $p\,t\,\eta$, η ~~und~~ eliminirt, so stehen dann noch außer d. 3 schon vorher genannten allgemein giltigen noch 2 für besonderen Falle speciell aufzustellende unabhängige Beziehungen zwischen d. 5 Größen $p\ v\ T\ U\ u$ fest, um Ganzen also nunmehr d. erforderlichen 5 Beziehungen zu Gebote stehen. Diese 5 Bestimmungsglgn. sind freilich theils noch Differentialglgn., deren Integration aber mit Rücksicht auf d. weiter gegebenen Bedingungen möglich ist. —

Wenn nun hiermit auch d. Lösbarkeit d. allgemeinen Aufgabe dargethan und ihre Elemente auch angegeben ist, so mögen doch noch einige Bemerkungen über einige Größen gemacht werden, nämlich über dM, dQ, $d\mathfrak{M}$ und $d\mathfrak{B}$.

Wenn, wie gewöhnlich, Massenkräfte nur mit d. Schwerkraft und d. eigenen Beweg. d. Leitfl. herrühren, so gelten für d. Größe $d\mathfrak{M}$ d.h.: für d. Arbeitssumme d. Massenkräfte pr. Gewichtseinheit Flüssigkeit auf einem beliebigen endlichen Wege d. ~~früher~~ erhaltenen Ausdr., wenn man anstatt d. Elements ds d. Bahn nur d. zugehörige endliche Strecke $s\ s_0$ setzt. Indessen soll $d\mathfrak{M}$ noch etwas ausgedrückt werden mit Rücksicht auf d. Annahme eines gleichen Mittelzustandes in allen Querschnittspunkten.



S = Schwerpunkt d. Querschnitts $\mathfrak{F}$ bzw. ein Punkt d. Mittellinie, dessen Beweg. mit d. Geschw. u im Sinne d. Pfeils gegen d. Leitfläche (Röhre, Canal etc.) vor sich geht. Diese Leitfl. habe nun eine eigene Beweg. so daß, wenn d. Punkt S fest mit d. Leitfl. verbunden wäre, dieser Punkt S eine Beschl. f erlange, deren Richtung mit d. Mittellinie d. Winkel φ bilde.

Die Arbeit $d\mathfrak{M}$ ist nun, weil d. eigene Beweg. d. Leitfl. unbeschränkt, nur von d. ersten Ergänzungskraft abhängig, indem d. 2te immer normal zur relativen Bahn gerichtet ist also deren Arbeit im Sinne d. Beweg. $= 0$ ist. Nun ist aber d. von d. 1sten Ergänzungskraft herrührende Beschl. immer gerade ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet d. Beschl. d. Punktes, welche dieser haben würde wenn er mit d. Leitfl. fest verbunden wäre d.h. diese Beschl. ist nach ~~[illegible]~~ gerichtet. Die Beschl. d. resultirenden Massenkraft ist demnach d. Resultante aus f und aus g d.h. aus d. Beschleunigungen d. ersten Ergänzungskraft d. relativen Beweg. und d. Schwerkraft.

Pr. Masseneinheit ist nun d. Beschl. d. Schwerkraft ausgedrückt $= \frac{g}{g} = 1$

. . . . d. ersten Ergänzungskraft $= \frac{f}{g}$

und demnach d. resultirende Beschl.: $= \left(1 \cdot \cos\psi - \frac{f}{g}\cos\varphi\right)$

folgl.: $$dM = \left(\cos\psi - \frac{f}{g}\cos\varphi\right) ds.$$

Für d. Möglichkeit einer permanenten Beweg. müssen nun bekanntlich d. Größen ψ f und φ unabhängige Functionen von d. Zeit t sein. Hinreichend gewiß ist dies d. Fall, wenn d. Leitfl. um eine feste Achse rotirt mit constanter Winkelgeschw. und auch noch wenn außerdem eine Translationsbeschl. f im Sinne d. festen Rotationsachse stattfindet. Also dann, wenn d. Winkelgeschw. $= 0$ d.h. d. Leitfl. keine Rotation besitzen, die Translationsbeschl. eine beliebige Richtung haben und wenn man ganz von d. Schwere, wie bei Gasen und Dämpfen, absehen darf, so können d. Richtungen d. Rotationsachse und d. Translationsbeweg. beliebig sein. Ferner kann man d. allgemeinen Ausdruck auch anwenden, wenn d. Größen ψ f u. φ periodische Functionen d. Zeit t sind, dann sind aber diese Größen nur als Mittelwerthe zu betrachten, welche sich mit d. Berechnungen während einer größeren Anzahl Zeitperioden ergeben.

Was d. Glied dQ in d. allgemeinen Gl. betrifft, d.h.: d. Wärmemittheilung durch d. Rohrwand, so kann diese zunächst positiv od. negativ sein, positiv genannt d. Richtung d. Wärmemittheilung von Außen nach Innen. Diese Wärmeleitung ist namentlich wichtig, wenn dieselbe herrührt von einer Flüssigkeit, welche sich außerhalb d. Rohrwand befindet und ebenfalls in Beweg. ist. Es sei dann T_1 d. absolute Temperatur d. äußeren Flüssigkeit an demjenigen ~~Stelle~~ d. Querschnitts, in welchem im Innern d. Rohre in d. Flüssigkeit d. absolute Temperatur T herrscht. Es sei ferner dF_1 ein Element d. Rohrwandfläche, zwischen ~~[illegible]~~ zwei unendl. nahe benachbarten Querschnitten, welche d. Element ds d. Mittellinie begrenzen; ferner sei k d. sogenannte Wärmedurchlässigkeitscoefficient d.h.: diejenige Wärmemenge, welche durch 1 □m Wandfläche in 1 Sek. und für jeden Grad Temperaturdifferenz d. beiderseits angrenzenden Flüssigkeiten übertragen wird in d. Richtung von Außen nach Innen. Dies vorausgesetzt ist offenbar:

$k(T_1 - T)\,dF_1$ = die pr. 1 Sek. durch dF_1 hindurch von Außen mitgetheilte Wärmemenge. Diese ist aber offenbar auch $= G\,.\,dQ$ unter dQ d. pr. Gewichtseinheit mitgetheilte Wärmemenge verstanden, denn diese Wärmemenge wird demjenigen Flüssigkeitselement vom Gew. G mitgetheilt, welches gerade in derselben Zeit an dem Flächenelement dF_1 vorbeiströmt. Folglich:

$$k(T_1 - T)\,dF_1 = G\,.\,dQ.$$

Die Größe dQ hat man nun später mit Rücksicht auf diese Gl. zu bestimmen, vorausgesetzt man d. Wärmedurchlässigkeitscoefficienten k in genügend [illegible] Werthen kennt. Damit ein permanenter Zustand möglich wird, müssen natürlich d. Coefficienten in Betracht kommenden Größen wieder unabhängig von d. Zeit t sein. — Was d. Wärmedurchlässigkeitscoefficienten k betrifft so sei [illegible], daß derselbe abhängig ist von d. Wärmeübergangscoefficienten an d. inneren und äußeren Rohrwandfl., welche wiederum abhängig sind von d. Oberfl.-Beschaffenheit d. Rohrwand, ferner von d. Wärmeleitungscoefficienten d. Materials d. Rohrwand, von d. Dicke und Krümmung d. Rohrwand und endlich auch noch von d. Temperaturdifferenz $T_1 - T$. — Außerdem kann später d. Fall vorkommen, daß d. äußere Flüssigkeit d. Rohr nicht ringsherum gleichmäßig umgiebt, sondern daß nur an einem Theile d. Rohrwand eine solche Wärmedurchlässigkeit stattfindet. z.B. wenn man d. Heizkanal eines Dampfkessels durch d. zu erwärmende Wasser hindurchführt, so daß d. Flüssigkeit ringsherum d. Kanal umgiebt, wenn aber d. Heizkanal außerhalb am Kessel vorbeiführt, so findet nur an einem Theile d. Kessels eine Wärmedurchlässigkeit statt, während an d. anderen Stellen nur wenig Wärme durchgelassen wird. —

Für unsere Betrachtung erfordert nun d. Glied dB, welches sich auf d. Leitungswiderstände bezieht. Dieselben pflegen in d. technischen Rechnung gebraucht zu werden durch Vergleichung mit d. sogenannten Widerstandshöhen. Unter d. Leitungswiderstandshöhe für d. Beweg. d. Flüssigkeit vom Querschnitt S_0 bis zum Querschnitt S versteht man diejenige Höhe, um welche 1 Kgr. Flüssigkeit niedersinken müßte, um vermöge seiner Schwere eine Arbeit = derjenigen Arbeit zu verrichten, welche auf d. Wege vom Querschnitt S_0 bis S pr. 1 Kgr. durch d. Leitungs-Widerstand aufgewendet werden. Die Arbeit, welche 1 Kgr beim Niedersinken von einer gewissen Höhe vermöge d. Schwere verrichtet ist dann Zahlenmäßig auch gleich dieser Höhe selbst, man [illegible] bedeutet also d. Größe B in d. allgemeinen Gl. nichts anderes, als diese Widerstandshöhe für eine gewisse Weite d. Rohre von endlicher Länge, oder für ein Längenelement ds d. Rohre. Gewöhnlich wird nun aber diese Widerstandshöhe wiederum auf einen anderen Begriff, auf d. sogenannten Widerstandscoefficienten zurückgeführt. Setzt man nämlich $B = \zeta \frac{u^2}{2g}$ unter u d. mittlere Geschwindigkeit verstanden, mit welcher d. Flüssigkeit durch d. Endquerschnitt S d. fraglichen Strecke $S_0 S$ hindurchfließt, so nennt man ζ d. Widerstandscoefficienten für $S_0 S$. Derselbe für eine gewisse Rohrstrecke bedeutet also d. Verhältniß d. Widerstandshöhe für diese Rohrstrecke zu derjenigen Geschw.-Höhe $\frac{u^2}{2g}$, die d. Mittelgeschw. u entspricht, vermöge welcher d. Flüssigkeit aus d. fraglichen Rohrstrecke durch den

Endquerschnitt d. abfliesst. Zuweilen wird auch noch d. Widerstandscoeff. auf d. mittlere Geschw. in irgend einem andern Querschnitt bezogen in d. Weise, daß wenn aber u' d. mittlere Geschw. in einem beliebigen andern Querschnitt bedeutet, dann d. betreffende hierauf bezogene Widerstandscoeff. ζ' durch d. Gl. bestimmt ist: $B = \zeta' \frac{u'^2}{2g}$; indessen wird, wenn in dieser Weise d. Widerstandscoeff. aufgestellt wird, immer ausdrücklich hinzugefügt werden, daß d. Widerstandscoeff. bezogen werden soll auf einen gewissen Querschnitt; wird aber schlechtweg von d. Widerstandscoeff. für eine gewisse Rohrstrecke gesprochen, so soll er immer stillschweigend bezogen werden auf d. Endquerschnitt d. fraglichen Strecke, also auf d. mittlere Geschw. in demselben. —

Diejenigen Widerstände insbesondere, welche auf d. ganzen zurück in Betracht gezogenen Weg einer Flüssigkeit hemmend wirken und welche verursachen, daß d. Endgeschw. auf diesem ganzen in Betracht gezogenen Weg kleiner ist als sie sein würde, wenn keine Leitungswiderstände vorhanden wären, diese Widerstand wird häufig auch auf andere Weise, nämlich durch d. Geschwindigkeitscoefficienten in Rechnung gebracht, welche mit φ bezeichnet werden soll. Zwischen ζ und φ besteht dann aber eine ganz bestimmte einfache Beziehung. Ist nämlich u' diejenige Endgeschw., welche unter sonst übrigens gleichen Umständen stattfinden würde, wenn keine Leitg. vorhanden wäre, so zerfällt d. Geschw.-Höhe $\frac{u'^2}{2g}$ in 2 Bestandtheile, nämlich d. effectiv Geschw.-Höhe und d. Widerstandshöhe, d. h. es ist: $\frac{u'^2}{2g} = (1+\zeta)\frac{u^2}{2g}$. Nun wird unter d. Geschw.coeff. φ d. Verhältniß $\frac{u}{u'}$ verstanden,

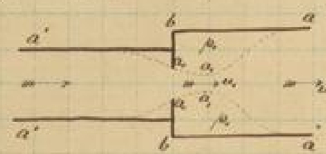
welches aber nach letzter Gl.: $= \frac{u}{u'} = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$

also umgekehrt: $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1$. —

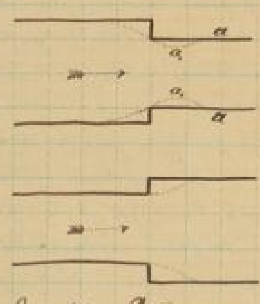
In Beziehung auf diese bedingenden Umstände können d. gebräuchlichen Leitungswiderstände unterschieden werden in solche, d. längs d. ganzen Leitung stetig einwirken und in solche, die nur unter gewissen Umständen an gewissen Stellen vorkommen. D. ersteren sollen zusammengefaßt werden unter d. Bezeichnung d. allgemeinen Leitungswiderstandes; sie rühren von d. äußeren und inneren Reibung her. Die diesem allgemeinen Leitungswiderstand entsprechende Widerstandshöhe, wird später unter gewissen Voraussetzungen näher untersucht werden. Was aber d. eventuell an gewissen Stellen vorkommenden besonderen Widerstände betrifft, so werden diese verursacht durch plötzliche Änderung d. Querschnitts oder d. Änderung d. Richtung d. Mittellinie d. Röhre. Aber kann es d. Fall sein, daß solche plötzlichen Richtungsänderungen d. Leitröhre zunächst plötzliche Änderungen d. Querschnitts verursachen. Ist so aber untenstehend eine Leitröhre, welche an einer gewissen Stelle eine plötzliche Richtungsänderung erleidet.

An d. Stelle wo diese plötzliche Richtungsänderung stattfindet, werden d. Bahnen d. Wasserfädchen plötzlich gekrümmt und zwar namentlich an d. innern Seite mit einem sehr kleinen Krümmungshalbmesser. Dieser Umstand muß nothwendig zur Folge haben, daß d. Pressung in d. betreffenden Querschnitt in d. Richtung von innen nach außen beträchtlich zunimmt. Erinnern wir uns an d. allgemeinen Gl. $Ky + \frac{1}{\mu}(Ky \pm \frac{dp}{dy}) = \frac{u^2}{\varrho}$, die bezogen war auf d. Gesetz d. Pressungsänderung in irgend einem Querschnitt im Sinne d. Krümmungsradius: wenn nun in d. Gl. d. Krümmungshalbmesser ϱ d. betreffenden Bahn sehr klein wird, also $\frac{u^2}{\varrho}$ sehr groß wird, so wird d. Änderung von p im Sinne von y, also gegen d. Krümmungsmittelpunkt hin vorzugsweise durch $\frac{u^2}{\varrho}$ bedingt sein, so daß man hat: $\frac{dp}{dy} = -\mu\frac{u^2}{\varrho}$; also je kleiner ϱ ist und je größer u ist, in desto höherem Grade muß d. Pr. im Querschnitt im Sinne gegen d. Krümmungsmittelpunkt hin bedeutend abnehmen, so daß sich an d. schärfsten Stelle gar keine strömende Masse befindet. Es findet also eine örtliche Änderung d. Flüssigkeitsstromes statt. Es handelt sich nun darum für d. besonderen Widerstand in allen solchen Fällen wenn möglich einen durch d. Erfahrung bestätigten allgemeinen einfachen Ausdruck zu gewinnen. Für d. Widerstandshöhe, durch welche ein solcher besonderer Widerstand gemessen wird, läßt sich ein solcher allgemeiner einfacher Ausdruck in d. That gewinnen für alle diejenigen Fälle, wo eine derartige plötzliche Querschnittsänderung d. Flüssigkeitsstromes verbunden mit einer Trennung d.

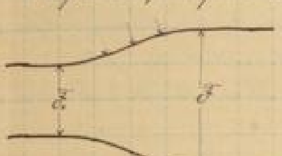
d. Flüssigkeitsdruck an d. Rohrwand stattfindet. Dabei ist es vollkommen gleichgültig für d. Gültigkeit d. Formel, ob diese Änderung unmittelbar durch eine plötzliche Änderung d. Röhrenquerschnitts selbst hervorgerufen werden, oder ob durch eine plötzliche Richtungsänderung d. Mittellinie. Den bekannten Werth ist d. Formel indessen nur in d. ersten Fall, während in solchen Fällen, wie d. oben erwähnten, nur ganz besondere Versuche zu einer einigermaßen Lösung führen. Es soll also ein solcher Fall vorausgesetzt werden, in welchem d. plötzliche Querschnittsänderung d. Flüssigkeitsstroms verursacht wird durch eine plötzliche Änderung d. Röhrenquerschnitts, während sonst d. einzelnen Rohrstrecken eine gemeinsame Axe haben. D. Querschnitt $a'a'$ zieht



sich zunächst plötzlich zusammen bis zu $a_0 a_0$ und dehnt sich dann plötzlich wieder aus bis zu $bb = aa$. Die Folge davon wird sein, daß zunächst bereits in d. Röhre, in der d. Flüssigkeit ankommt, eine Ablösung derselben von d. Rohrwand stattfindet, nachdem durchgegangen durch $a_0 a_0$ kann eine fortgesetzte Zusammenziehung d. Flüssigkeitsstroms stattfinden etwa bis zu $a_1 a_1$ und erst dann dehnt er sich aus, so daß d. Curven $a'a_0$, $a_1 a$ d. Trennung darstellen. Der hier in d. Figur angenommene Fall ist nur ein allgemeiner Fall, derselbe kann verschiedene Modificationen erleiden. Wesentlich für den zu bestimmenden Widerstand ist nur d. plötzliche Erweiterung d. Querschnitts d. Flüssigkeitsstroms von $a_1 a_1$ bis aa, dieselbe ist aber nicht nothwendig an d. Voraussetzung obiger Figur gebunden, es könnte auch eine weitere Röhre plötzlich in einer engern übergehen und umgekehrt. D. kleinste



Querschnitt $a_1 a_1$ sei bezeichnet mit F_1, d. volle Querschnitt aa mit F, so ist es im Wesentlichen diese plötzliche Querschnittsänderung von F_1 bis F, welche d. in Rede stehenden Widerstand verursacht; es fragt sich, wie d. allgemeine Ausdruck für d. entsprechende Widerstandshöhe gewonnen wird. Was d. Querschnitte F_1 und F betrifft, so können sie als eben vorausgesetzt werden, da an d. Stelle d. kleinsten Querschnitts d. Fasern parallel geworden sind, ebenso bei aa. In einem solchen Falle, wo ebene Querschnitte von parallelen und normalen geradlinigen Fasern geschnitten werden, ist d. Änderungsgesetz d. Pr. von Punkt zu Punkt d. Querschnitts nur von äußeren Massenkräften abhängig. Wird nun hier von d. Wirkung d. Schwere abgesehen, so darf in d. ganzen Querschnitt F_1 eine gleichförmige Pressung $= p_1$ stattfindend vorausgesetzt werden, und ebenso im Querschnitt F eine gleichförmige Pr. $= p$. Die mittlere Geschw. im Querschnitt F_1 sei bezeichnet mit u_1 und die in F mit u. D. spec. Volumen d. Flüssigkeit in d. Zustande, in welchem sie F_1 durchströmt sei bezeichnet mit v_1 und in F mit v. In d. ganzen Raume $a_0 a_1 a b$ hat sich d. Flüssigkeitsstrom von d. Rohrwand getrennt, da d. hier befindliche Flüssigkeit nicht an d. Bewegung Theil nimmt. Ist dies d. Fall, so wird innerhalb dieses Raumes auch keine Änderung oder eine merkbare Änderung d. Pr. stattfinden, man kann also annehmen, daß hier eine überall gleiche Pr. herrscht, da kein Grund zu einer andern Annahme vorhanden wäre. Diese Pr. kann aber keine andere sein als diejenige Pr. p_1, die im ganzen Querschnitt F_1 stattfindet, widrigenfalls hier eine Ausgleichung stattfinden würde. In d. übrigen Querschnitten zwischen F und F_1, welche aber nicht ebene Querschnitte sind, wird zwar an d. äußeren Fl. d. Flüssigkeitsmasse gleichfalls d. Pr. p_1 stattfinden, aber es wird von Punkt zu Punkt in diesen gekrümmten Querschnitten eine ganz bedeutende Pr.-Änderung stattfinden. Offenbar ist nun $P = (p_1 - p) F$, d. Druck auf d. ganzen Masse, deren Längsschnitt $aa\, a_1 a$ ist, herrscht, denn d. nämliche auf d. Flächeneinheit bezogene äußere Druck F. d. deren horizontal resultierende Druck im Sinne d. Bewegung ist also $p_1 F$; entsprechend herrscht in d. ganzen Querschnitt F die nämliche Pr. $= p$ und zwar im entgegengesetzten Sinne, so daß d. resultierende Druck $P = (p_1 - p) F$ ist. Wesentlich anders würden d. Verhältnisse sein, wenn nur d. Querschnittsänderung d. Flüssigkeitsstroms von F_1 bis F nicht außer Berührung mit d. Rohrwand, sondern mit Berührung derselben stattfinden lassen, wenn also d. Röhre eine plötzliche Querschnittsänderung erfährt; denn wenn es d. Fall sein, daß d. Querschnittsänderung d. Stromes d. Querschnittsänderung d. Röhre vollständig folgt ohne sich von d. Röhrenwand zu trennen, muß hier immer F_0 und F also als eben zu betrachten und dann p_0 und p als constant anzunehmen, aber d. gegenseitige Normaldruck, d. jetzt hier an d. Krümmung statt d. Flüssigkeit stattfindet würde jetzt nicht mehr $= p_0$



sein. d. genauere Bestimmung dieser Pr. würde ganz wesentlich abhängig sein von d. Gesetz nach welchem sich d. Querschnitt d. Röhre ändert. Soviel ist gewiß, daß d. Mittelwerth dieser Pr. zwischen F_0 u. F welcher $= p_x$ sei, jetzt größer als p_0 sein muß, denn durch d. Röhrenwand wird d. Flüssigkeitsstrom verhindert sich auszubreiten bis zu einer in cirkelförmiger Bewg. befindlichen Masse. Diese Bewg. kann nur dadurch aufgehoben werden, daß d. Pr. p_x im Mittel größer ist, als sie sein würde, wenn diese Erweiterung d. Stromes unbehindert stattfinden könnte, um wieviel $p_x > p_0$ ist, hängt ab von d. Gesetz d. Querschnittsänderung d. Röhre. Man kann soviel leicht sich begreifen, daß d. Unterschied zwischen p_x und p_0 um so größer sein wird, je schneller diese Querschnittsänderung erfolgt bis $p_x = p_0$ wird, wenn diese Änderung so schnell vor sich geht, daß eine Trennung von d. Röhrenwand stattfindet. In einem solchen Fall ist also d. Pr. $\mathfrak{P}$ auf d. dazwischen befindliche Flüssigkeitsmasse

$\mathfrak{P} = p_0 F_0 - p_x (F - F_0) - pF = -(p' - p_0) F$, ob ist also $\mathfrak{P}$ jedenfalls größer als p_0. Wenn auch in diesem zuletzt genannten Fall sich d. Bestimmung d. Widerstandshöhe $\mathfrak{B}$ d. Rechnung entzieht, so ist er doch immer d. allgemeinere Fall und d. ursprünglich vorausgesetzte ist nur ein gewisser Grenzfall. Es soll deshalb d. allgemeine Fall durch vorausgesetzt werden, um dann zum Grenzfall überzugehen.

Zunächst handelt es sich nun darum, eine Beziehung zu bestimmen zwischen p_0 u. p und u_0, u. Dazu muß nun d. bekannte Prinzip d. Antriebes od. Impulses aus d. Mechanik bekannt sein. Danach ist bekanntlich für ein ganz beliebiges Massensystem d. Zuwachs an Bewegungsgröße nach einer gewissen Richtung in irgend einem Zeitmoment = d. gleichzeitigen Antrieb d. resultierenden äußeren Kraft nach dieser Richtung. Unter d. Bewegungsgröße irgend eines Massensystems nach einer gewissen Richtung versteht man d. Summe d. Produkte aus d. einzelnen Massenelementen in d. Geschw. Comp. nach d. fraglichen Richtung. Wenn also d. X Axe d. fragliche Richtung darstellt, und u_x d. Geschw. Comp. eines Massenelementes m nach dieser Richtung ist, so ist d. Bewegungsgröße dieses Systems nach d. X Axe $= \Sigma m u_x$ und d. Zuwachs an Bewegungsgröße d. Systems im Sinne d. X Axe während d. Zeitelementes $dt = d\Sigma m u_x$. Dieser Zuwachs an Bewegungsgröße d. beliebigen Massensystems im Zeitelement dt ist nach d. fraglichen Gesetz d. Antriebes d. resultierenden äußeren Kraft nach derselben Richtung. d. resultierende äußere Kraft nach d. Richtung d. X Axe ist = d. Summe d. nach d. X Axe genommenen Comp. aller einzelnen äußeren Kräfte, die etwa auf d. Massensystem wirken $= \Sigma X dt$. Die inneren Kräfte womit d. einzelnen Massenelemente gegenseitig auf einander wirken kommen nicht in Betracht, indem sie paarweise gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, also sich gegenseitig aufheben. Man hat demnach:

$$d \Sigma m . u_x = \Sigma X dt.$$

Dieses Prinzip nun muß angewendet werden auf diejenige strömende Flüssigkeitsmasse, die sich augenblicklich zwischen F und F_0 befindet und auf ein unendl. kl. Zeitelement dt. Es handelt sich also um d. Zuwachs an Bewegungsgröße, den diese Flüssigkeitsmasse zwischen F_0 und F während d. Zeitelements dt erfährt. Derselbe ist mit Rücksicht auf d. vorausgesetzten Beharrungszustand d. Bewg. = d. Unterschied derjenigen Bewegungsgröße, womit eine unendl. dünne Flüssigkeitsschicht im Zeitelement dt durch d. Querschnitt F geht über diejenige Bewegungsgröße, womit eine ebensolche Schicht durch F_0 geht. d. Masse d. Flüssigkeitsschicht, d. im Zeitelement dt durch irgend einen Querschnitt hindurch geht ist $= \frac{Q\,dt}{g}$. Diese Flüssigkeitsmasse geht nun durch d. Querschnitt F mit d. Geschw. u, sie geht dagegen durch d. Querschnitt F_0 mit d. Geschw. u_0, also d. Unterschied d. einen über d. andern: $= \frac{Q\,dt}{g}(u - u_0)$. Dies ist nun auch d. Zuwachs d. Bewegungsgröße d. zwischen d. Querschnitten F_0 u. F befindlichen Flüssigkeit im Zeitelement dt. Dieser muß nun gleich sein d. Antriebe d. resultierenden äußeren Kraft, welche im Sinne d. strömenden Bewg. auf diese Flüssigkeitsmasse wirkt.

Es kann möglicher Weise auf diese Flüssigkeitsmasse eine äußere Kraft als Schwerkraft wirken, indessen kann man d. Einfluss derselben auf diesem kurzen Wege abstrahiert werden, so dass nur d. Oberfl.-druck übrig bleibt. Dieser ist aber bezeichnet mit P und sein Antrieb im Zeitelement dt ist $= P\cdot dt$, für d. allgemeinen Fall ist $P = (p' - p)F$ also erhält man:

$$\frac{G\,dt}{g}(u-u_1) = P\cdot dt = (p'-p)F\,dt$$ woraus folgt: $p - p' = \frac{G}{gF}(u_1-u)$

und mit Rücksicht auf d. Continuitätsgl. $G = F\frac{u}{v}$ auch:

$$p-p' = \frac{u(u_1-u)}{gv}.$$

Siehe 37, 2)

Nun ist aber nach d. Gl. d. lebendigen Kraft (A) wenn sie integriert wird vom Querschnitt F_1 bis zum Querschnitt F, die betreffende Widerstandshöhe B, die sich auf diesen besonderen Vorgang bezieht:

$$B = \int_u^{u_1}\frac{u\,du}{g} - \int_{p_1}^{p} v\,dp.$$

die äußeren Wärmezuflüsse wenn außer Acht gelassen, letzteres Integral ist $= \frac{u_1^2-u^2}{2g}$ und d. 2te $= vp - \int p\,dv$

also:

$$B = \frac{u_1^2-u^2}{2g} - (pv - p_1v_1) + \int_{v_1}^{v} p\,dv.$$

In diesem letzteren Falle herrscht nun aber so nicht d. besonders bestimmte Sp. im Querschnitt F, sondern eine veränderliche Sp. d. sich auf d. Änderung von v_1 bis v bezieht; während dieser Änderung ist d. Sp. d. Flüssigkeit jedoch stetig, also:

$$B = \frac{u_1^2-u^2}{2g} - (p-p')v - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v} p\,dv.$$

Setzen wir nun für $p-p'$ seinen Wert, so ist nun außerdem noch bedenkt, dass d. Integral d. Expansionsarbeit pr 1 kg von F_1 bis F ist: f.

$$B = \frac{u_1^2-u^2}{2g} - \frac{2u(u_1-u)}{2g} - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v}p\,dv$$

$$= \frac{(u_1-u)^2}{2g} - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v}p\,dv.$$

Diese Gl. gilt allgemein für eine plötzliche Querschnittsänderung, also auch für d. Fall einer stetig stattfindenden Querschnittserweiterung, nur lässt sich in diesem letzten Fall d. Wert von p' nicht vorhanden bestimmen. Von wesentlichem Nutzen ist diese Formel nur in d. Grenzfall, dass eine so plötzliche Querschnittsänderung stattfindet, dass eine Trennung d. Flüssigkeitsstrahls von d. Wandung damit verbunden ist, dann ist $p' = p_1$ und zwar ist p_1 ein min. von p' und somit d. Wert von B ein max. Für diesen Grenzfall ergibt sich dann:

$$B = \frac{(u_1-u)^2}{2g} + p_1(v_1 - v) + \int_{v_1}^{v}p\,dv$$

d. Lösung dieses Integrals ist nun abhängig von besonderen Umständen, wenn diese Formel nun für solche Fälle in Anwendung gebracht werden soll, wo d. spez. Volumen so zu sagen als constant anzunehmen ist, so verschwindet für diesen Fall d. 2te und 3te Glied d. Gl.; für d. Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit ergibt sich demnach d. Widerstandshöhe:

$$B = \frac{(u_1-u)^2}{2g}. —$$

Handelt es sich um d. stationäre Bewegung eines Gases od. Dampfes od. Gebläseluft, so kommen d. beiden letzten Glieder natürlich noch hinzu. Für d. wichtigsten besonderen Fall, ist $v_1 = v$ und also d. Widerstandshöhe $B = \frac{(u_1-u)^2}{2g}$

gesetzt werden kann, ist nun d. entsprechende Widerstandscoeff. ζ = d. Widerstandshöhe dividirt durch d. Geschw.-höhe, d. d. Geschw. u entspricht, also:

$$\zeta = \left(\frac{u_1}{u} - 1\right)^2$$

od. da in diesem Fall d. mittleren Geschw. umgekehrt proportional d. Querschnitten sind, ist auch:

$$\zeta = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1\right)^2 . —$$

Vereinigung verschiedener Flüssigkeitsströme zu einem einfachen Strom.

Practische Anwendungen dieser Theorie sind d. Wasserstrahlpumpe, Wasserstrahlgebläse, Dampfstrahlinjector etc., welche betreffenden Vorrichtungen zu Kategorie d. Strahlapparate für Flüssigkeiten gehören. —

Es soll nun d. allgemeine Fall vorausgesetzt werden, daß an einer bestimmten Stelle verschiedene Ströme zusammenfließen und zwar unter folgenden Voraussetzungen:

1) die einzelnen Ströme fließen alle in derselben Richtung in d. Vereinigungskammer ein, in welcher sie nachher vereinigt d. Raum durchfließen. = A·x.
2) In d. kleinsten Querschnitten d. verbreiteten Strahlen herrsche d. Pr. p' und ebenso gestalte auch $= p'$ sei d. Druck, d. auf d. Oberfl. d. gesammten strömenden Flüssigk. in d. Vereinigungskammer ausgeübt wird bis zum Querschnitt, durch welchen d. resultirende Strom abfließt, wogegen im Querschnitt σ d. Druck $= p$ sei. Diese Voraussetzung d. constanten Werthes von p' in d. kleinsten Querschnitten ist offenbar an d. Umstand gebunden, daß d. Vereinigungskammer hinreichend groß genug ist, um zu verhindern, daß d. strömende Flüssigkeit sich bis zur Wand ausbreitet.
3) Sei vorausgesetzt, daß während d. Vereinigung d. einzelnen Ströme zu einem resultirenden Strome von d. Wirkung etwaiger Massenkräfte od. einer etwaigen Stromablenkung durch d. Wand d. Raumes abgesehen werden darf. —

Es sei nun G d. Gew. d. resultirenden Flüssigkeit, welche pr. Sek. durch d. Querschnitt σ hindurch aus d. Vereinigungskammer abfließt. Im Querschnitt σ sei d. Geschw. $= u$, d. resultirende Flüssigkeit habe hier d. spec. Volumen v u. d. Arbeitsvermögen U; es sei ferner G_m d. Gew., welches durch irgend einen d. beliebig vielen Ströme z.B. d. $m$ten pr. Sek. d. Vereinigungskammer zugeführt wird, d. kleinste Querschnitt d. verbreiteten Strahls, als welcher diese Flüssigkeit sich in d. Vereinigungskammer ergießt sei σ_m, d. Geschw. $= u_m$, d. spec. Volumen $= v_m$ und d. spec. innere Arbeitsvermögen $= U_m$, dann hat man mit Rücksicht auf d. Beharrungszustand:

$$1) \quad G = \Sigma G_m \qquad G = \frac{\sigma u}{v} \quad \text{und} \quad G_m = \frac{\sigma_m u_m}{v_m}.$$

Ferner ist, wenn man diejenige Flüssigkeitsmasse ins Auge faßt, d. sich von d. sämmtlichen Querschnitten σ_m d. in d. Vereinigungskammer eintretenden verbreiteten Strahlen erstreckt bis zum Querschnitt σ, d. resultirende äußere Druck, welcher im Sinne d. Beweg. nach d. Richtung auf d. Oberfl. wirkt $= (p' - p)\sigma$, da von einer äußeren Massenkraft abgesehen wird. Dieselbe Kr. kann auch betrachtet werden als d. Antheil dieser äußeren Kr. pr. Sek.; dieser Antheil ist nun gleich d. Zuwachs an Beweg.-Größe d. fraglichen Masse nach d. Richtung Ax pr. Sek., indem aber pr. Sek. d. Flüssigkeit durch d. Endquerschnitt σ hindurchfließt mit d. Beweg.-Größe $\frac{G}{g}u$, wogegen d. einzelnen beliebig vielen Flüssigkeitsströme durch d. kl. Querschnitte σ_m zufließen mit d. Beweg.-Größe $\Sigma \frac{G_m}{g} u_m$. So ist d. Zuwachs an Beweg.-Größe pr. Sek.:

$$\frac{G}{g}u - \Sigma \frac{G_m}{g} u_m = (p' - p)\sigma = \frac{1}{g} \Sigma G_m (u - u_m)$$

da offenbar $\Sigma G_m u = u \Sigma G_m = uG$ ist.

Also

2) $$p - p' = \frac{1}{g\mathfrak{F}} \Sigma G_m (u_m - u)$$

[illegible] Gl. [illegible] d. Gl. d. Arbeitsvermögens (Seite 32, γ), wenn man diese Gl. bezieht auf 1 kg Flüssigkeit eines einzigen Flüssigkeitsstromes, sie dann multipliziert mit G_m und integriert von $\mathfrak{F}_m$ bis $\mathfrak{F}$, [illegible] für alle Ströme zusammen genommen summiert und dabei beachtet, daß [illegible] Wärme [illegible] = 0 wird:

$$\Sigma\left[G_m\left(\frac{u^2 - u_m^2}{2g} + U - U_m + pv - p'v_m\right)\right] = 0$$

od. durch Multiplikation mit -1:

$$\Sigma\left[G_m\left(\frac{u_m^2 - u^2}{2g} + U_m - U + p'v_m - pv\right)\right] = 0$$

Nun ist aber: $\frac{u_m^2 - u^2}{2g} = \frac{(u_m - u)^2}{2g} + \frac{u(u_m - u)}{g}$; ferner ist: $p'v_m - pv = p'(v_m - v) + (p' - p)v$

od. nach Gl. 2): $p'v_m - pv = p'(v_m - v) - \frac{v}{g\mathfrak{F}} \Sigma G_m (u_m - u)$

od. da: $\frac{v}{\mathfrak{F}} = \frac{u}{G}$ ist:

$$p'v_m - pv = p'(v_m - v) - \frac{u}{g}\left(\frac{\Sigma G_m u_m}{G} - u\right);$$ demnach folgt:

$$\Sigma\left\{G_m\left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + U_m - U + \frac{u}{g}\left(u - \frac{\Sigma G_m u_m}{G}\right)\right]\right\} = 0$$

Nun ist aber: $\Sigma G_m\left[\frac{u}{g}\left(u - \frac{\Sigma G_m u_m}{G}\right)\right] = 0$, denn dies ist $= \frac{u}{g}\left[\Sigma G_m (u_m - u)\right] = 0$

Also hat man:

3) $$\Sigma\left\{G_m\left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + U_m - U\right]\right\} = 0.$$

Diese Gl. 1) 2) 3) in Verbindung mit d. Zustandsgl. und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens [illegible] [illegible] Seite 32, [illegible] β, [illegible] [illegible] Gl. β. Seite 32, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $\mathfrak{B}$ [illegible] = 0 [illegible]:

$$\mathfrak{B} = \Sigma\left\{G_m\left[U - U_m + \int_{v_m}^{v} p\,dv\right]\right\}$$

od. nach Gl. 3):

$$\mathfrak{B} = \Sigma\left\{G_m\left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + \int_{v_m}^{v} p\,dv\right]\right\}$$

[illegible] $\mathfrak{F}$ [illegible] v_m bis v [illegible]

zu thun, sondern mit einem einzigen Strom, ist an Stelle von M d. Zeiger 1 zu setzen und d. Summenzeichen ist zu streichen, man erhält dann, wenn man denselben noch durch g dividirt, d. Ausdruck:
$$\mathfrak{B} = \frac{(u_1 - u)^2}{2g} + p'(v_1 - v) + \int_{v}^{v_1} p\,dv \text{ ,}$$
welche Formel ebenso ganz übereinstimmt mit d. schon früher Seite 32 gefundenen nur mit d. Unterschied, daß p. formal p' bezeichnet worden ist. —

Untersuchung d. permanenten strömenden Bewegung d. Wassers.

Das Wasser ist zu betrachten als Repräsentant irgend einer tropfbaren Flüssigkeit. Hierbei ist d. spez. Volumen v in ganz geringem Grade von d. Dr. abhängig; wenn dann also außerdem vorausgesetzt wird, daß d. Temperatur nur in sehr geringem Grade veränderlich sei, also $T = const$ gesetzt wird, so darf auch $V = const$ gesetzt werden. d. innere Arbeitsvermögen U ist eine Function von v und T, sind also v u. T constant, so ist auch $U = const$. Von d. 5 Größen $p. v. T. U. u$ wären im Allgemeinen als Functionen von S zu bestimmen, sind also 3 von vornherein gegebene Constante, und es reducirt sich d. Aufgabe darauf, nur d. übrigen beiden Größen zu bestimmen für jeden Querschnitt T. dazu sind natürlich 2 Gl. genügend und es dienen dazu d. Continuitätsgl. und d. Gl. d. lebendigen Kr. Die Continuitätsgl. besteht in diesem Falle einfach darin, daß $T u = const$ ist, also:
$$T.\, u = T_0.\, u_0$$
und zwar ist d. Bedeutung dieses Productes nichts anderes als d. dasjenige Wasservolumen, welches per Sek. durch einen Querschnitt hindurchfließt, ist $const = V$. —

Was d. Gl. d. lebendigen Kraft betrifft, so ergibt sich mit d. allgemeinen Form derselben (Gl. 2 S. 32), wenn man sie integrirt vom Querschnitt T_0 bis T und wenn man ferner statt d. spez. Volumens aus d. spez. Gew. d. Wassers in d. Rechnung einführt $= \frac{1}{v} = \gamma$, so folgt:
$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + M - \mathfrak{B}\text{ ,}$$
wenn mit M d. Arbeit d. Massenkräfte und mit $\mathfrak{B}$ d. Arbeit d. Bewg.-Widerstände per 1 Kgr. Flüssigkeit auf d. Wege von T_0 bis T bezeichnet wird.

Was d. Glied M betrifft, so kommen in Frage als äußere Massenkräfte nur d. Schwerkraft und d. etwaigen Trägheitskräfte d. rel. Bewg. mit Rücksicht auf d. eigene Bewg. d. Gefäßes, in welchem. Bezeichnet h d. Höhe d. Punktes S_0 über S unter S_0 d. Schwerpunkt d. Querschnittes T_0 und unter S d. in T verstanden, so ist d. Arbeit d. Schwerkraft per 1 Kgr. Flüssigkeit auf d. Wege von T_0 bis T $= h$; hat d. Röhre eine eigene Bewg., so kommt von d. beiden Trägheitskräften nur d. erste in Betracht, da d. 2te normal gegen d. relative Bahn gerichtet ist. Bezeichnet also K d. Arbeit d. ersten Trägheitskraft, so ist: $M = h + K$. d. Größe K ergibt sich als d. Integral d. 2ten Bestandtheils von dM (Seite 33)
$$K = -\frac{1}{g}\int_{0}^{S} f \cos\beta \; ds$$
worin f d. Beschl. d. Röhre selbst vermöge ihrer eigenen Bew. an d. Stelle eines beliebigen Punktes d. Mittellinie, β d. Richtung derselben gegen d. Richtung d. Bewg. und S bedeutet d. ganze Länge $S_0 S$ d. Mittellinie. Setzt man für M d. Ausdruck ein, so ergibt sich als Hauptfundamentalgl.:
$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h + K - \mathfrak{B}\text{ .}$$
Dieselbe soll jedoch in eine etwas einfachere Form gebracht werden. Wie schon erwähnt, gleichen Umständen d. Wassers in d. Röhre in relativer Ruhe, also $u = 0$ und $u_0 = 0$, so wäre auch $\mathfrak{B} = 0$, es wäre dann also d. Unterschied d. Druckhöhe im Querschnitt T über d. Druckhöhe im Querschnitt T_0, also d. Größe $\frac{p - p_0}{\gamma} = h + K$. diese Größe soll bezeichnet werden als d. „hydrostatische Unterdruckhöhe" d. Röhrenstrecke $T_0 T$ d. Röhre. Im Gegensatz dazu soll unter d. „hydraulischen Unterdruckhöhe" verstanden werden, d. Unterschied d. Druckhöhe im Querschnitt T über die im Querschnitt T_0 für d. Zustand d. strömenden Bewg. d. Wassers in d. Röhre. Um diese letztere von d. hydrostatischen Unterdruckhöhe zu unterscheiden sei d. hydrostatische Unterdruckhöhe bezeichnet mit $\left(\frac{p - p_0}{\gamma}\right)$. Wenn man d. hydraulische von d. hydrostatischen Unterdruckhöhe

ergiebt, also $(p - p_0) \div \frac{p-p_0}{\gamma}$ bildet, d. i. auf dasselbe ist, wenn man d. algebraische Summe bildet $h + k - \frac{p-p_0}{\gamma}$, so soll diese Größe mit d. Buchstaben H bezeichnet werden und dieselbe d. wirksame Druckhöhe für d. Wasserfaden $\delta_0 \delta$ genannt werden. Sie ist nämlich derjenige Theil d. hydrostatischen Totaldruckhöhe, welcher auf d. Erhaltung d. strömenden Bewegung verwendet wird. Mit Hilfe dieser Bezeichnung kann nun d. Fundamentalgl. geschrieben werden:

$$\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}.$$

Ein Theil dieser wirksamen Druckhöhe setzt sich in Geschw. um, ein anderer Theil wird dazu gebraucht um d. hydraulischen Bew.-Widerstände von δ_0 bis δ zu bewältigen. —

Ist nun ζ d. Widerstandscoeff. für d. Wasserfaden $\delta_0 \delta$, dann kann mit Rücksicht auf d. früher festgestellten Betrachtungen eines solchen Widerstandscoeff. $\mathfrak{B} = \zeta \frac{u^2}{2g}$ geschrieben werden und man hat demnach: $\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - \zeta \frac{u^2}{2g}$. Hieraus folgt:

$$u = \sqrt{\frac{u_0^2 + 2gH}{1+\zeta}}$$

Ist φ d. entsprechende Geschw.-Coeff., d. zu berechnen zu ζ in d. Beziehung steht: $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$, so ist auch:

$$u = \varphi \sqrt{u_0^2 + 2gH}$$

Die Continuitätsgl. $\delta u = \delta_0 u_0 = V$ in Verbindung mit d. Gl. d. lebendigen Kraft $\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}$ od. was auf dasselbe hinauskommt, d. Continuitätsgl. in Verbindung mit d. Gl. d. Geschw. $u = \sqrt{\frac{u_0^2 + 2gH}{1+\zeta}} = \varphi \sqrt{u_0^2 + 2gH}$ sind als d. Hauptformeln zu betrachten zur Beantwortung aller Fragen, die sich auf d. permanente Strömung d. Wassers beziehen, wobei zu berücksichtigen ist $H = h + k + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist.

Die verschiedenen Aufgaben nun, zu deren Behandlung diese Gln. als d. Fundamentalgln. zu betrachten sind, beziehen sich theils auf d. Ausfluß d. Wassers aus Gefäßen theils auf d. Bewegung d. Wassers in längeren Röhren. Es ist also:

1) $\delta u = \delta_0 u_0 = V$ — d. Continuitätsgl.

2) $\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}$ — d. Gl. d. lebendigen Kraft.

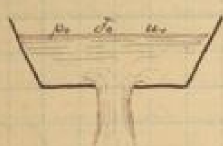
3) $u = \sqrt{\frac{u_0^2 + 2gH}{1+\zeta}} = \varphi \sqrt{u_0^2 + 2gH}$ — d. Geschw.-Gl.

wobei $H = h + k + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ und $k = -\frac{1}{g}\int_0^s f \cos\varrho \, ds$ ist. —

Ausfluß d. Wassers aus Gefäßen. —

Denken wir uns in einem beliebig gestalteten Gefäß, Wasserspiegelhöhe und d. in diesem Gefäß befindliche Wassermenge durch entsprechenden äußeren Zufluß constant erhalten, während d. Wasser gleichzeitig durch eine Öffnung im Boden d. Gefäßes ausfließt, dann hat man es zu thun mit einer Bew., welche unter sich gleichbleibenden Umständen in gleichbleibender Weise stattfindet. Die Ausflußöffnung befindet sich in einem solchen Fall entweder als einfache Wandöffnung unmittelbar in d. Gefäßwand, od. sie befindet sich am Ende eines sogenannten Mundstücks, welches aber hier als so kurz vorausgesetzt werden soll, daß von d. Reibungswiderständen in demselben abgesehen werden kann. Im Übrigen sollen sie d. Flächeninhalt d. Mündung bezeichnet mit A. Diese Mündung $= A$ wird dabei verstanden als eine ebene Fl., begrenzt von d. inneren Wandfl. d. Gefäßes od. resp. d. Mundstücks. Diese ebene Mündung $= A$ ist also im Allgemeinen nicht ein Querschnitt d. strömenden Flüssigkeit in dem bis dahin damit ~~verbundenen~~ Sinne d. h. d. Bahnen d. Flüssigkeitstheilchen brauchen durchaus nicht diese Mündung A normal zu durchschneiden, im Gegentheil, es wird im Allgemeinen das nicht d. Fall sein. Denken wir uns

Z. B.: in einem ebenen Boden eines Gefäßes befinde sich d. Mündung A, so fliesst im Innern d. Gefäßes von verschiedenen Seiten d. Wasser dieser Mündung A zu. Diese Fäden werden gegen d. Mitte hin d. Mündung A senkrecht schneiden können, gegen d. Rand hin werden d. Fäden mehr od. weniger schief geneigt sein können. Mit dieser schiefen Richtung d. Fäden gegen d. Mündungsebene hin, nimmt auch d. Krümmung d. Fäden von d. Mitte nach d. Rand hin entsprechend zu. Diese nach d. Rand hin zunehmende Krümmung d. Fäden wird auch eine nach d. Rande hin abnehmende Geschw. in d. Mündung A entsprechen und wird demnach nicht d. Geschw. in allen Punkten d. Mündung A gleich groß sein, sondern sie wird in d. Mitte am größten sein. Ferner wird d. Folge dieses Umstandes sein, daß d. Wasserstrahl, nachdem er d. Mündung A passiert hat, eine weitere Contraction seines Querschnitts erfährt, aber in d. Weise, daß d. kleinste Querschnitt dieses contrahierten Strahls erst in einer gewissen Entfernung von d. Mündungsebene erreicht sein wird. An d. Stelle dieser stärksten Zusammenziehung kann man d. Querschnitt d. [illegible] wieder als [illegible] werden und somit kann auch in diesem kleinsten Querschnitt wieder eine gleichförmige Geschw. vorausgesetzt werden und zwar wird diese gleichförmige Geschw. gleich ~~derjenigen~~ zu setzen sein derjenigen Geschw., welche in d. äussersten Punkten an d. Mündung herrscht und die = [illegible] sei. Was d. Wassermenge betrifft, d. sich von diesem kleinsten Querschnitt bis zur Mündung A erstreckt, so wird man [illegible] nach d. Rand hin eine kleinere, nach d. Mitte hin aber eine grössere. D. kleinste Querschnitt dieses contrahierten Strahls sei mit F bezeichnet und d. Verhältnis dieses kleinsten Querschnitts zur Mündung A sei mit α bezeichnet also $\alpha = \frac{F}{A}$, man nennt dieses Verhältnis d. Contractionscoefficienten. D. mittlere Geschw. u, welche im Querschnitte F stattfindet soll kurzweg d. Ausflussgeschw. genannt werden. Unter p_0 werde [illegible] d. Gr. verstanden, welche in d. freien Oberfl. d. Wassers im Gefäß stattfindet. F_0 sei d. Größe dieser Oberfl. und u_0 d. mittlere Geschw., womit an dieser freien Oberfl. d. Wasserteilchen sich bewegen. Es ist nun d. Wasservolumen V, welches pro Sek. ausfliesst $V = F \cdot u$ od. mit Rücksicht auf d. Contractionscoeff.: $V = \alpha A u$, worin auch noch: $u = \varphi\sqrt{u_0^2 + 2gH}$ ist, also:



$$V = \alpha\varphi A\sqrt{u_0^2 + 2gH}$$

worin $H = h + k + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist unter h d. Höhe d. freien Oberfl. d. Wassers über d. Schwerpunkt d. Querschnitts F verstanden. D. Produkt aus d. Contractionscoeff. α und d. Geschw. Coeff. φ pflegt häufig mit einem besonderen Buchstaben μ bezeichnet, als sog. Ausflusscoefficient in d. Folge in Rechnung eingeführt zu werden.

Es ist dann also auch: $V = \mu A\sqrt{u_0^2 + 2gH}$. Die Geschw. u_0 an d. freien Oberfl. ist nun im Allgemeinen nicht gegeben, sie bestimmt sich aus durch V, denn es ist $u_0 = \frac{V}{F_0}$; setzt man diesen Wert für u_0 ein, so folgt, und diese Gl. man durch μA dividiert, dann d. Gl. quadriert und u_0^2 auf d. linke Seite gebracht wird:

$$V^2\left(\frac{1}{(\mu A)^2} - \frac{1}{F_0^2}\right) = 2gH \quad \text{also} \quad V = \mu A\sqrt{\frac{2gH}{1-\left(\frac{\mu A}{F_0}\right)^2}}$$

nun ist aber $u = \frac{V}{\alpha A} = \frac{V}{F}$ also:

$$u = \varphi\sqrt{\frac{2gH}{1-\left(\frac{\mu A}{F_0}\right)^2}}.$$

dies sind d. allgemeinen Formeln für d. Ausflussmenge und Ausflussgeschw. d. Wassers aus einem Gefäß. In d. meisten Fällen ist nun A im Vergleich zu F_0 klein genug, um hierfür einfach schreiben zu dürfen:

$$V = \mu A\sqrt{2gH} \quad \text{und} \quad u = \varphi\sqrt{2gH} \qquad *$$

und zwar darf man diese einfachen Formeln immer dann unbedenklich anwenden, wenn $\frac{A}{F_0} < \frac{1}{10}$ ist, indem man dann nur einen Fehler begeht, d. weniger beträgt als $\frac{1}{2}\%$ d. wahren Wertes und weil man nur bis zu einer solchen Genauigkeit im Stande ist überhaupt d. Werte von μ und φ anzugeben.

(daß man keinen größeren Fehler begeht, ist leicht ersichtlich: Haben wir einen Ausdruck $\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$ worin x ein [illegible] Bruch ist, so ist bei Vernachlässigung unendlich kleiner höherer Ordnung $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2$ und wenn man diesen ganzen Ausdruck $= 1$ setzt, so begeht man einen Fehler $= \frac{1}{2}x^2$ für jede Einheit, ist nun $x < \frac{1}{10}$ so ist dieser Fehler für jede Einheit $= \frac{1}{200}$ also $= \frac{1}{2}\%$.) — —

Was d. wirksame Druckhöhe H betrifft, so soll, wenn nicht d. Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, vorausgesetzt werden, daß sich d. Gefäß selbst in Ruhe od. höchstens in einer gleichförmigen Translationsbew. befindet, daß somit dann d. Wasser eine horizontale freie Oberfl. im Gefäß bildet und somit d. Erzeugungskraft d. relativen Bew. nicht in Betracht kommen. Es hat dann H d. Bedeutung $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$. h bedeutet d. Höhe d. horizontalen freien Oberfl. im Gefäß über d. Schwerpunkt d. Querschnitts F, während p_0 d. Druck d. äußeren Mediums an d. freien Oberfl. und p d. Druck an d. Mündung bedeutet. Wenn d. Gefäß ringsum von d. freien atmosph. Luft umgeben ist, deren spez. Gew. d. Luft von d. Mitte d. Gefäßes $= \lambda$ bezeichnet wird, $p - p_0$ d. Unterschied d. äußeren Luftdrucks an d. Stelle d. Mündung über d. äußeren Luftdruck in d. Höhe d. freien Oberfl. im Gefäße = d. Gew. einer Luftsäule von d. Grundfl. $= 1$ und d. Höhe h also $p - p_0 = h\lambda$ und somit: $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = h\left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right)$. In d. Regel ist nun aber $\frac{\lambda}{\gamma}$ so klein, daß man diesen Bruch wieder gegen 1 vernachlässigen darf, jedenfalls mit Rücksicht auf d. beschränkten Grad d. Genauigkeit, womit man μ u. φ anzugeben vermag. Es ist dann:

* $$V = \mu A\sqrt{2gh} \quad \text{und} \quad u = \varphi\sqrt{2gh}$$

Wenn d. Wasser unter gleichen Voraussetzungen wie oben, durch eine Öffnung in d. Seitenwand ausfließt in ein anderes Gefäß, in welchem gleichfalls ein constanter Wasserstand erhalten wird, so kann d. auf d. freie Oberfl. wirkende spez. Druck in beiden Gefäßen ohne großen Fehler gleich und zwar $= p_0$ gesetzt werden. Ist dann h d. Höhe d. Wasserspiegels im ersten und h_1 d. im 2ten über d. Schwerpunkt d. Querschnitts d. contrahirten Strahls, so ist offenbar $p = p_0 + \gamma h_1$

also $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = h - h_1$.

Nun möchte man eigentlich in jedem besonderen Fall d. Höhe dieses Schwerpunktes genau kennen, da dies aber nicht d. Fall ist, so pflegt man vorgezogen zu werden um Unsicherheiten zu vermeiden, unter h d. Höhe d. freien Wasseroberfl. im Ausflußgefäß über d. Schwerpunkt d. Mündung A selbst zu verstehen, allerdings erhalten dann φ u. μ andere Bedeutungen. Diese modificirten Bedeutungen haben aber nichts auf sich, da dieselben doch empirisch bestimmt werden müssen. Am meisten ändern sich φ u. μ wenn d. Wasser aus einer großen Seitenöffnung ausfließt. Eine andere Variation d. Formel kann in solchen Fällen wünschenswerth erscheinen, wo d. Mündungsebene nicht horizontal ist und d. größte Vertikaldimension nicht sehr klein im Vergleich mit h ist.

Denken wir uns z. B. eine ebene Seitenwand eines Gefäßes, welche etwa unter d. Winkel ψ gegen d. Horizont geneigt sein mag. In derselben befindet sich eine große Öffnung, so können in einem solchen Fall d. Geschw. in verschiedenen Punkten d. Mündung A bedeutend verschieden sein und wenn es auch schon ziemlich fehlerhaft sein, d. mittlere Geschw. = derjenigen zu setzen, welche im Schwerpunkt stattfindet.

Es fragt sich nun, ob unter ~~diesen~~ Umständen diese Beziehung sich modificiren läßt. Zu dem Ende sollen H, H_1 und H_2 d. Werthe von $h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ für d. Schwerpunkt, d. tiefsten und d. höchsten Punkt d. Mündung bezeichnen, für einen beliebigen Punkt d. Mündung sei d. Größe $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ mit z bezeichnet. Nun denke ich mir d. ganze Mündungsebene durch horizontale Linien in unendl. schmale Flächenstreifen zerlegt. D. Entfernung eines solchen Streifens von d. durch d. Schwerpunkt d. Mündung gezogenen Horizontalen sei bezeichnet mit x, wobei x positiv od. negativ gesetzt werden soll, jenachdem d. Streifen höher od. tiefer liegt als d. Schwerpunkt d. Mündung. D. Länge dieses Streifens sei bezeichnet mit y, d. unendl. kl. Breite derselben ist $= dx$ also $y\,dx$ d. Inhalt eines solchen Flächenstreifens. Auf diesen beliebigen Flächenstreifen bezieht sich auch d. beliebige z. An Stelle d. Formel $V = \mu A\sqrt{2gH}$ wird nun streng genommen gesetzt

Formel zu bedenken haben: $V = \mu \int y\,dx\sqrt{2gz}$, indem z d. Wasserdruck Größe H für d. beliebigen Flüssigkeitsstreifen bedeutet. D. Gl. kann auch geschrieben werden: $V = \mu\sqrt{2g}\int y\sqrt{z}\,dx$. Nun ist: $z = H + x.\sin\psi$ also $dx = \frac{dz}{\sin\psi}$ und $V = \frac{\mu\sqrt{2g}}{\sin\psi}\int y\sqrt{z}\,dz$.

Hat man hieraus je nach d. Form d. Mündung V bestimmt, so findet man d. Ausflussgeschw.:

$$u = \frac{V}{\alpha A}.$$

Ist z. B.: d. Ausflussöffnung ein Rechteck und zwar so gelegen, daß 2 Seiten derselben horizontal sind, dieselben seien $= b$ und d. beiden anderen $= a$. In diesem Fall ist also $y = const = b$ und somit $V = \frac{\mu b\sqrt{2g}}{\sin\psi}\,\frac{2}{3}\left(H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}\right)$. Die mittlere Ausflussgeschw. u ergibt sich hieraus durch Division mit αA; es ist aber $A = ba$ und auch $a = \frac{H_1 - H_2}{\sin\psi}$ und somit:

$$u = \frac{2}{3}\varphi\sqrt{g}\,\frac{H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}}{H_1 - H_2}.$$

Andererseits läßt sich auch leicht eine für alle Fälle ausreichende Näherungsformel wie folgt finden. Es ist nämlich: $\sqrt{z} = \sqrt{H + x.\sin\psi} = \sqrt{H}\sqrt{1 + \frac{x\sin\psi}{H}}$. d. Größe $\frac{x\sin\psi}{H}$ ist ein echter Bruch und man kann daher nach dem binomischen Satz entwickeln, d. Glieder höherer Ordnung schreiben: $\sqrt{z} = \sqrt{H}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x\sin\psi}{H} - \frac{1}{8}\left(\frac{x.\sin\psi}{H}\right)^2\right)$. Wird dann nachstehend d. Factor $\frac{1}{\sin\psi}$ unter d. Integral und für $\frac{dz}{\sin\psi}$ wieder dx geschrieben, so ist wieder $y\,dx$ nichts anderes als d. Inhalt eines Flüssigkeitsstreifens, welcher auch mit dA bezeichnet werden kann; dann ist: $V = \mu\sqrt{2gH}\int dA\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x\sin\psi}{H} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{H^2}\sin^2\psi\right)$. Nun ist $\int dA = A$, ferner $\int x\,dA = 0$, da d. Inhalt dieser Flüssigkeitsstreifen multipliziert mit ihrer Entfernung vom Schwerpunkt $= 0$ sein muss; d. dritte Glied enthält noch $\int x^2\,dA$. Diese Summe d. Produkte aus d. Inhalt d. Flüssigkeitsstreifen in d. Quadrat ihrer Abstände von d. Schwerpunktsachse ist als d. Trägheitsmoment d. Mündungsfläche A in Bezug auf d. Schwerpunktsachse zu bezeichnen mit Ak^2. dann wird:

$$V = \mu A\sqrt{2gH}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{k^2}{H^2}\sin^2\psi\right) \text{ und } u = \frac{V}{\alpha A}$$

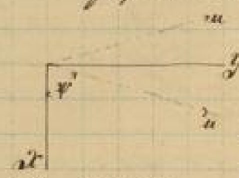
Wie man sieht unterscheidet sich diese corrigirte Formel für V u. u nur dadurch, daß dazu ein gewisser Correctionsfactor hinzugekommen ist und es fragt sich, unter welchen Umständen man bei Vernachlässigung dieses Factors nur einen Fehler von ½ % begeht. Beispielsweise soll dies durchgeführt werden für ein Rechteck und eine Ellipse:

Ist d. Mündung A ein Rechteck mit d. Seiten b u. a, wo b horizontal ist, so ist bekanntlich: $Ak^2 = \frac{a^3b}{12}$ also $k^2 = \frac{a^2}{12}$. Bezeichnet man d. Correctionsfactor mit $1 - f$. So ist also für diesen Fall: $f = \frac{1}{96}\left(\frac{a.\sin\psi}{H}\right)^2$ und durch d. Vernachlässigung dieses Coefficienten begeht man einen Fehler, d. weniger beträgt als ½ %, wenn $f < \frac{1}{200}$ ist; man überzeugt sich leicht, daß dies d. Fall ist wenn $\frac{a.\sin\psi}{H} < 0{,}7$ ist. —

Für d. Fall einer Ellipse seien a u. b d. beiden Hauptdurchmesser, b sei horizontal, dann ist: $Ak^2 = \frac{\pi ab}{4}k^2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3\frac{b}{2}$ also $k^2 = \frac{a^2}{16}$ und somit: $f = \frac{1}{128}\left(\frac{a.\sin\psi}{H}\right)^2$. Diese Größe ist nun $< \frac{1}{200}$ wenn $\frac{a\sin\psi}{H} < \frac{8}{10}$ ist. Dies ist in d. meisten Fällen wirklich so; ist aber $\frac{a\sin\psi}{H} >$ als diese Zahlen, so schlägt man doch zweckmäßig d. alte Formel zu wählen, da, wenn man auch diese corrigirten Formeln anwendet, sie ja doch auch abhängig sind von H u. d. Dimensionen d. Mündung, die nur durch ungenaue Versuche bestimmt werden können. Es wird also in d. Weise wie sie ja d. Werte hineingesetzt werden müssen, daß d. Schwerpunkt d. rechteckigen Querschnitts unten liegen kann und erhalten diese nach d. Einfluss dieser vernachlässigten Correctionsfactoren $1 - f$. —

Die Größe d. Contraction entzieht sich einer genauen theoretischen Bestimmung; jedoch läßt sich immer ein gewisser Grenzwerth angeben, unter welchen d. Contractionscoeff. α [illegible] sinken kann. Es läßt sich beweisen, daß α mindestens $= \frac{1}{2}$ sein muß, wenn an allen denjenigen Stellen d. Gefäßwand d. Geschw. d. entlang fließenden Wassers nicht unendl. kl. ist und d. entsprechenden Elemente mit einem spitzen Winkel mit d. Richtung d. Ausflußgeschw. bildet. Dieser Grenzwerth d. Contractionscoeff. $\alpha = \frac{1}{2}$ hängt zusammen mit einem genau zu besprechenden Verhalten d. Reaction d. aus einem Gefäßwand ausfließenden Wassers.

Es seien mit einem Gefäß 2 rechtwinklige Coord.-Axen X u. Y fest verbunden; sie seien angenommen in einer Verticalebene, welche parallel sein soll mit d. Richtung von u und zwar soll X vertical abwärts und Y horizontal in einem solchen Sinne, daß d. Richtung dieser positiven Y Axe einen spitzen Winkel mit d. Richtung von u bildet, also wie d. beiden Fälle in d. Zeichnung zeigen. Derjenige Winkel, welchen d. Richtung d. Ausflußgeschw. mit d. X Axe bildet sei $= \psi$.



— Betrachten wir nun d. Wassermasse, welche sich momentan in d. Ausflußgefäße befindet, welche begrenzt wird bis zum kleinsten Querschnitt σ d. contrahirten Strahls. Der Zuwachs an Bewegungsgröße, den diese Wassermasse beziehungsweise im Sinne d. X und Y Axe in einem Zeitelement dt erhält ist offenbar $= \gamma \frac{V}{g}(u \cos\psi - u_0)\, dt$ im Sinne d. X Axe und $\gamma \frac{V}{g} u \sin\psi\, dt$ im Sinne d. Y Axe, wenn u_0 d. mittlere vertical abwärts gerichtete Geschw. bedeutet, welche bereits an d. freien Oberfl. im Gefäß stattfindet. Dieser Zuwachs an Bewegungsgröße entspricht d. Unterschied derjenigen Bew.-Größe, womit im Zeitelement dt d. Wasser im Querschnitt σ ausfließt über den, womit es im Querschnitt [illegible] zufließt. Nun ist V d. Wasservolumen, welches in d. Zeiteinheit ausfließt, also γV d. ausfließende Gew. und $\gamma \frac{V}{g}$ d. in d. Zeiteinheit ausfließende Masse. Diese erhält im Sinne d. X Axe einen Geschw.-Zuwachs $= u \cos\psi - u_0$ und im Y Sinne: $u \sin\psi$. Dieses sind also d. Größen, um welche sich d. Bew.-Größen während eines Zeitelements dt im Sinne d. Axen ändern. Nach d. Princip d. Arbeit muß d. erste Zuwachs an Bew.-Größe $= X dt$ und d. andere $= Y dt$ sein, wenn X u. Y d. im Sinne d. Axen genommenen Comp.-Summen d. äußeren Kräfte bedeuten, d. auf d. Wassermasse wirken. Es ist also d. Größe d. resultirenden Kraft, welche auf d. Wassermasse im Gefäß im Sinne d. Axen ausgeübt wird:

$$X = \gamma \frac{V}{g}(u \cos\psi - u_0) \qquad Y = \gamma \frac{V}{g} u \sin\psi.$$

Mit ebenso großer Kraft aber gerade umgekehrt wirkt d. Wasser an seiner Oberfl. auf seine Umgebung zurück. Wenn d. Mündung, mit welcher d. Wasser ausfließt, geschlossen und d. Wasser im Gefäß in relativer Ruhe, so würde d. Wasser auf d. Gefäßwand in keiner Richtung hin einen resultirenden Druck ausüben und es sind X u. Y diejenigen Größen um welche d. Druck, d. d. Wasser auf d. Gefäß beziehungsweise im Sinne d. Axen ausübt durch den Zustand d. Bew. d. Wassers vermindert wird, oder umgekehrt: X u. Y sind diejenigen Kräfte, womit d. Wasser während d. Ausfließens entgegengesetzt im Sinne d. X u. Y Axe auf d. Wasser zurückwirkt. Gewöhnlich kann diese kl. Geschw. u_0 im Vergleich mit $u \cos\psi$ vernachlässigt werden; [illegible] ist also $u_0 = 0$, so ist d. resultirende Reaction d. ausfließenden Wassers auf d. Ausflußgefäß:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \gamma \frac{V}{g} u.$$

Es ist also bei Vernachlässigung dieser Geschw. u_0 d. Reaction einfach = derjenigen Bew.-Größe, womit d. Wasser p. Sek. ausfließt und wie in diesem Falle d. Ausdrücke von X u. Y erkennen lassen, so ist diese Reaction R gerade entgegengesetzt gerichtet im Sinne von u.

Setzt man $V = \sigma u$, so kann man auch d. Ausdruck für d. Reactionsdruck schreiben:

$$R = 2\gamma \frac{\sigma u^2}{2g}.$$

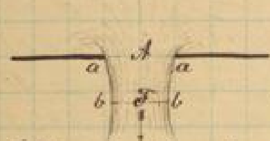
d. h. es ist diese Größe = Reactionsdruck = dem doppelten Gew. einer Wassersäule deren Grundfl. $= \sigma$ und deren Höhe = d. Ausflußgeschw.-Höhe ist. Setzt man ferner $\sigma = \alpha A$ und $u = \varphi\sqrt{2gH}$

zu erhalten für d. Reactionsdruck $R = 2\alpha\varphi^2\gamma A H$.

Dieser letzte Ausdruck kann man dazu benutzen, d. fraglichen Grenzwerth d. Contractionscoeff. $\alpha = \frac{1}{2}$ festzustellen, wenn in allen denjenigen Fällen, wo d. Wasser nicht mit einer verschwindend kl. Geschw. vorbeistreicht, d. Normale einen spitzen od. höchstens rechten Winkel mit u bildet.

Zu dem Ende muss man bemerken, dass d. bewegte Wasser in 2facher Weise auf d. Gefässwand wirkt, theils durch d. Normaldruck theils durch d. Reibung an d. Wand. Jene Kraft R, womit d. ausfliessende Wasser entgegengesetzt im Sinne von u auf d. Ausflussgefäss zurückwirkt, ist zu betrachten als d. Unterschied eines im entgegengesetzten Sinne von u genommenen auf d. Gefässwand ausgeübten Normaldrucks über eine im Sinne von u wirkende Reibung d. an d. Gefässwand entlang fliessenden Wassers. Es ist also R zu betrachten als $P - R'$, wenn P bedeutet d. entgegengesetzt im Sinne von u genommenen Normaldruck, den d. Wasser normal auf d. Gefässwand ausübt, und R' d. Kraft, womit umgekehrt d. Wasser auf d. Gefässwand im Sinne von u wirkt. Also $R = P - R'$.

Was diesen Normaldruck P betrifft, so denken wir uns zunächst einen einfachen Normalfall, dass d. Ausflussöffnung sich in einer ebenen Gefässwand befindet z. B. im Boden. Das Wasser fliesst hier von d. verschiedenen Seiten d. Mündung zu und es wird d. Ausflussstrahl in einem gewissen Punkt contrahirt werden bis zum Querschnitt F.

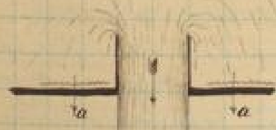


Wenn d. Mündung A geschlossen wäre und d. Wasser im Gefäss in Ruhe, so würde von Seite A d. Oberfl. d. Wassers ein Normaldruck stattfinden $= A(\gamma h + p_0)$ unter p_0 d. äusseren Druck auf d. Oberfl. d. Wassers im Gefäss verstanden. D. entsprechende Theil d. Oberfl. d. im Gefäss enthaltenen Wassers im Zustande d. Bew. ist d. Fl. abba. An dieser ganzen Oberfl. herrscht d. nämliche Druck p = d. Druck in d. Raum, in welchen d. Ausfluss stattfindet, so dass d. resultirende Normaldruck, d. während d. Bew. an d. Oberfl. herrscht von A u. F und zwar im Sinne von u nicht mehr $= A(\gamma h - p_0)$ sondern $= Ap$ ist. Folglich ist an diesem Theile d. Wasseroberfl. d. Unterschied d. hydrostatischen Drucks über d. hydraulischen Druck = dieser Differenz, also =:

$$A(\gamma h + p_0) - Ap = \gamma A\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right) = \gamma A H$$

Um diesen Betrag wird also jedenfalls d. Druck, den d. Wasser im Sinne von u auf d. Gefäss ausübt, vermindert od. umgekehrt d. Druck, den d. Wasser auf d. Gefäss entgegengesetzt im Sinne von u vermehrt. Aber dieses ist nicht d. einzige Grund, aus welchem dieser Druck P d. ausfliessenden Wassers auf d. Gefäss entgegengesetzt im Sinne von u grösser wird im Zustand d. Bew. als im Zustand d. Ruhe, nämlich an denjenigen Theilen d. Gefässwand, welche d. Mündung unmittelbar umgeben, strömt d. Wasser zum Theil längs d. Gefässwand hin d. Mündung zu. In grösserer Entfernung von d. Mündung wird diese Geschw. so klein sein, dass man davon absehen kann, aber unmittelbar an d. Mündung wird es doch nicht sein. Ist dies d. Fall, so wird an diesen Stellen d. innere Druck kleiner sein als d. hydrostatische um einen Betrag, d. der Geschw.-Höhe entspricht. Es ist also an diesen Stellen d. Normaldruck, den d. Wasser auf d. Gefässwand ausübt, während d. Ausflusses kleiner als er bei geschlossener Mündung ist und deshalb ist auch d. Theil d. Grösse P nicht nur $= \gamma A H$ sondern mehr od. weniger als grösser als $\gamma A H$. d. h. $P = R + R' > \gamma A H$.

Um wieviel dieser grösser sein wird als $\gamma A H$ hängt ab von d. Gestaltung d. Gefässes in d. Umgebung d. Mündung A. In d. Falle, wo d. Normaldruck d. Wassers auf d. Gefässwand an dem d. Mündung unmittelbar umgebenden Theil wirkt, muss P erheblich grösser sein als $\gamma A H$ und zwar wird dieses immer d. Fall sein, an dem Theile d. Gefässwand, welche d. Mündung unmittelbar umgibt. D. Grenzfall, in welchem $P = \gamma A H$ wird, ist d. Fall eines sogenannten inneren cylindrischen Ansatzrohrs von verschwindend kl. Dicke. Es wird allerdings auch an dieser cylindrischen Wand d. Normaldruck kleiner sein im Zustand d. Bew. als im Zustand d. Ruhe, dies hat aber auf d. Druck im Sinne von u keinen Einfluss, weil d. Normale rechtwinklig gegen u gerichtet ist. Würde d. Wasser in a senkrecht gegen d. Fläche mit einer gewissen Geschw. fliessen, so wäre $P > \gamma A H$; ist aber d. Ansatzröhre genügend lang, so wird man annehmen können, dass in einiger Entfernung vom oberen Rande d. Röhre



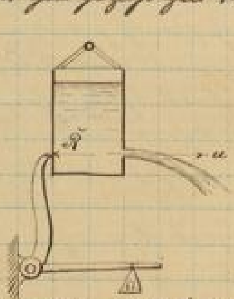
gleich d. Länge derselben d. Wasser nur eine unbedeutende Geschw. haben. Dann würde P nur wenig größer sein als $\gamma A H$, vorausgesetzt, daß d. Wand d. Ansatzröhre nur sehr dünn ist, also an d. Oberfl. nur einen sehr kl. Rand hat. Wären gar keine Widerstände vorhanden, so wäre d. Geschw.-Coeff $\varphi = 1$. Es wäre dann d. Reactionsdruck R, welcher zu bezeichnen sei mit R_0:

$$R_0 = 2\alpha \gamma A H.$$

— und d. Unterschied dieses idealen Werthes von R_0 und d. effectiven Werth d. Reactionsdrucks R ist d. Größe d. äußeren Reibung zwischen d. Wasser und d. Gefäßwand im Sinne normal gegen d. Mündung: $R_0 - R = R'$. Es ist dies allerdings nicht ganz unbedingt zutreffend, denn dieses ist nur d. Fall, wenn man von etwaigen wirbelförmigen Bew. absieht. Es ist also $R + R' = R_0 = 2\alpha \gamma A H$. Halten wir nun diese 2 Gleichungen zusammen ($R + R' = P$ und $P > \gamma A H$) so folgt: $2\alpha > 1$ also $\alpha > \frac{1}{2}$; d. kleinste Werth, den d. Contractionscoeff. α haben kann ist also $\frac{1}{2}$ unter d. Voraussetzung, daß an allen Stellen d. Gefäßwand bei d. Mündung d. Normale mit [illegible] Winkel mit d. Richtung von u bildet. Sie bildet stumpfe Winkel mit derselben, wenn d. innere Fläche sich nach außen hin erweitert; hier würde $P < \gamma A H$ sein also $\alpha < \frac{1}{2}$; indessen kommt ein solcher Fall fast nie vor.

Es handelt sich nun noch um d. Lage und Richtung von R. Was dieselbe betrifft, so muß zurückgegangen werden auf d. verschiedenen Bestandtheile, aus welchen R besteht. Es war $R = P - R'$ unter P d. entgegengesetzt im Sinne von u genommene Normaldruck d. Wassers gegen d. Gefäßwand verstanden und R' d. Reibung, welche d. fließende Wasser an d. Gefäßwand wirkt. Dieser Normaldruck P besteht aber selbst wieder aus 2 Theilen, theils nämlich aus dem d. Unterschied d. hydrostatischen und hydraulischen Drucks auf d. Mündungsebene A selbst, theils aus demselben Druck auf die, die Mündungsebene A umgebenden Theile d. Gefäßw. D. erste Bestandtheil von P war $= \gamma A H$; dieser Bestandtheil ist jedenfalls derart, daß es kann angenommen werden, daß d. Richtungslinie dieses Theils von P durch d. Schwerpunkt d. Mündungsebene A hindurchgeht. Was d. anderen Bestandtheil von P und d. Reibung R' betrifft, so kann man hierin nicht ohne Weiteres behaupten, daß sie solche Kräfte geben, deren Richtungslinien durch d. Schwerpunkt d. Mündungsebene gehen. Dies ist nur dann d. Fall, wenn d. Wasser ringsum d. Mündung in gleicher Art und Weise zufließt. D. Richtungslinie von R läßt sich also nur versuchsweise bestimmen, wenn nicht gerade von vornherein angenommen werden darf, daß d. Wasser ringsum d. Mündung in gleicher Weise zufließt. D. gewöhnlichen Versuche lassen jedoch erkennen, daß man hiervon absehen kann, daß man also annehmen kann, daß das Wasser ziemlich gleichmäßig von allen Seiten d. Mündung zu. —

Die hierher gehörigen Versuche wurden von d. Engländer Ewart ausgeführt. Es wurde ein cylindrisches Gefäß, welches unten mit einer Öffnung versehen war, vermittelst eines Gehänges auf einer horizontalen Axe aufgehängt, welche Axe rechtwinklig und windschief gegen d. horizontale Ausflußröhre u gerichtet war. D. Wasserspiegel wurde immer in gleicher Höhe erhalten. Es zeigte sich dann, daß d. Gefäß sich neigte. Nun wurde d. Größe d. Drucks R gemessen, indem man d. einen Arm eines Winkelhebels dort andrücken ließ, wo d. Normale d. Schwerpunkts d. Mündung d. Wand trifft, den anderen Arm entsprechend belastet und nun konnte so d. Größe dieser Kraft R messen.



Ging nun d. Richtungslinie d. Reactionsdrucks genau durch d. Schwerpunkt hindurch, so war d. gemessene Kraft auch = d. Reactionsdruck, während dies nicht d. Fall sein würde, wenn d. Richtungslinie d. Reactionsdrucks tiefer liegt als d. Schwerpunkt d. Mündung A. Wenn also dieser so gefundene Druck $R = 2\alpha \varphi^2 \gamma A H$ eingesetzt wird, wo γ, A, H bekannte Größen sind, so ergeben sich diese Werthe von $\alpha \varphi^2$, welche übereinstimmten mit d. auf andere Weise gefundenen Werthen d. Coeff $\alpha \varphi^2$. Daraus konnte man schließen, daß d. Richtungslinie d. Reactionsdrucks nicht merklich vom Schwerpunkt d. Mündungsebene A abweicht.

Wenn man d. Versuche so einrichtet, daß man weiß, ob immer d. Richtungslinien wenig von d. Richtung von R vorbei gehen, so erkennt man, daß man bedingt dazu gelangen kann, d. Werthe von α u. φ zu bestimmen, so daß man jedenfalls den d. einen Werth finden kann, wenn man d. andern kennt.

Bei d. zuletzt entwickelten Gesetzen ist vorausgesetzt worden, daß d. Ausflußgefäß sich nicht in Bew. befinde od. höchstens eine gleichförmige Translationsbew. hätte, so daß d. freie Oberfl. eine Horizontalebene bilde. Jetzt soll noch ausdrücklich vorausgesetzt werden, es sei d. Gefäß, aus welchem das Wasser ausfließt, in eigener Bew. begriffen, so daß d. Wasseroberfl. eine krumme Fl. sein kann. In einem solchen Fall erscheinen d. Arbeiten d. Kräfte, welche d. Bew. d. Wassertheilchen von verschiedenen Stellen d. Oberfl. aus gegen d. Mündung hin bestimmen, so von einander verschieden, daß man jedenfalls bei d. Berechnung d. mittleren Ausflußgeschw. kaum eine mittlere Bew. zu Grunde legen zu dürfen. Es kann von vornherein möglich erscheinen, daß ein Wassertheilchen in d. Mündung A verschiedene Geschw. annimmt, je nachdem es von verschiedenen Stellen d. Oberfl. herkommt. Dieses ist jedoch nicht d. Fall.

Ist nämlich A_0A irgend ein Stück einer beliebigen von einem Wassertheilchen durchlaufenen Bahn und zwar von A_0 gegen A hin, so findet d. früheren zufolge bekanntlich folgende allgemeine Gl. statt:

$$\frac{u^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}=\frac{u_0^2}{2g}+\frac{p_0}{\gamma_0}+M+E+\int R_s\,ds$$

d. h. d. Summe aus d. Geschw.- und Druckhöhe d. Punktes A ist = d. analogen Summe für d. Punkt A_0 + d. Arbeit d. Massenkräfte, d. Expansionsarbeit u. d. Arbeit d. inneren Reibungen pr. 1 kgr von A_0 bis A.

Im vorliegenden Falle, wo es sich eben um d. Bew. einer tropfbaren Flüssigkeit handelt, kann von vornherein $\gamma=\gamma_0$ gesetzt werden und ferner kann auch d. Expansionsarbeit $= E = 0$ gesetzt werden, weil d. spec. Volumen gleich bleibt. Wenn man ferner von d. inneren Reibung vorläufig absieht, so kann im vorliegenden Fall d. Gl. geschrieben werden: $\frac{u^2}{2g}+\frac{p-p_0}{\gamma}=M$ wo nun aber jetzt diese Massenkraft nicht nur d. Schwerkraft sondern auch d. Centrifugalkraft d. relativen Bew. in sich schließt, entsprechend d. eigenen Bew. d. Gefäßes. Es könnte nun von vornherein möglich erscheinen, daß dieses M einen verschiedenen Werth hat, je nachdem A_0 einen verschiedenen Punkt in d. freien Oberfl. d. Flüssigkeit im Gefäß bedeutet und, daß somit sich für u verschiedene Werthe ergeben, je nachdem ein Punkt von d. verschiedenen Stellen d. Oberfl. kommt. Thatsächlich ist dies nicht d. Fall. Die Bew. d. Gefäßes kann nun bestehen in einer Rotation mit constanter Winkelgeschw. ω um eine vertikale Axe verbunden mit einer gleichzeitig stattfindenden Translation mit constanter Geschw. im Sinne dieser vertikalen Rotationsaxe od. es kann d. eigene Bew. d. Gefäßes bestehen in einer stetigen Translationsbew. mit d. constanten Geschw. f, die aber eine beliebige Richtung haben kann, denn nur unter diesen Bedingungen kann eine permanente Bew. statt d. Wassers im Gefäße möglich sein. Es handelt sich also nun darum, für diese beiden Fälle zu constatiren, daß auch diese Ausflußgeschw. u dieselbe ist, von welcher Stelle d. freien Oberfl. auch d. Wassertheilchen herkommen möge.

Alle von d. verschiedenen Punkten A_0 d. Oberfl. beginnenden Bahnen werden als durch d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahles hindurch gehend gedacht werden können. Wie nun auch diese Bahnen gestaltet werden können, so ist doch immer d. Geschw. u dieselbe, womit ein Wassertheilchen in S anlangt, welcher Satz nun bewiesen werden soll.

1) d. Gefäß rotire mit const. Winkelgeschw. ω um eine vertikale Axe und habe außerdem eine Translation mit const. Geschw. f im Sinne d. Rotationsaxe, und zwar soll d. Geschw. f positiv gerechnet werden, wenn vertikal nach unten gerichtet.

Wenn d. Wasser sich in relativer Ruhe gegen d. selbst rotirende Gefäß befindet, so bildet d. freie Oberfl. d. Wassers im Gefäß bekanntlich ein Rotationsparaboloid. Wenn man d. Scheitel dieses Rotations-Paraboloids als Ursprung eines Coord.-Systems annimmt, d. z Axe vertikal und positiv aufwärts, dann ist bekanntlich d. Gl. dieses Rotations-Paraboloids: $x^2+y^2=2\frac{g-f}{\omega^2}z$

In diesem Fall ist d. früheren zufolge d. Arbeit M d. Massenkräfte pr. 1 kgr: $M=\left(1-\frac{f}{g}\right)h+\frac{\omega^2}{2g}\left(r^2-r_0^2\right)$.

Für d. verschiedenen möglichen Fälle d. eigenen Bew. d. Gefäßes, während d. Wasser im Beharrungszustande ausfließt, nimmt d. Ausdruck für h folgende [illegible]. Für d. Fall, daß das Gefäß um eine vertikale Axe rotirt und zugleich eine translatorische Beschl. hat, gilt für h d. letztere Ausdruck. Dabei ist h d. Höhe d. Punktes A also d. beliebigen Punktes d. freien Oberfl. über d. Scheitelpunkt d. betreffenden Curve, ebenso S, r und r_0 sind d. Perpendikellängen von S und A auf d. Z Axe. Dabei ist, wenn wir [illegible] d. Höhe d. Scheitelpunktes über S mit h_0 bezeichnet sei:

$$h = h_0 + z$$

wo z d. Höhe d. Punktes A über d. Coord.-Anfang bedeutet. Setzt man diesen Werth von h in d. Gl. für h ein und setzt man $h = \frac{u^2}{2g} + \frac{p-p_0}{\gamma}$, so folgt:

$$\frac{u^2}{2g} = \left(1-\frac{f}{g}\right)h_0 + \frac{p_0-p}{\gamma} + \left(1-\frac{f}{g}\right)z + \frac{\omega^2}{2g}(r^2-r_0^2);$$ setzen wir: $\left(1-\frac{f}{g}\right)h_0 + \frac{p_0-p}{\gamma} = H_0$, so wird:

$$\frac{u^2}{2g} = H_0 + \frac{(r\omega)^2}{2g} + \frac{\omega^2}{2g}\left(2\,\frac{g-f}{\omega^2}\,z - r_0^2\right)$$

Hierin ist nun r_0 d. Perpendikel von A auf d. Axe Z, also $r_0^2 = x^2 + y^2$, wenn x und y d. Coord. von A sind. Nun wird man mit derselben Annäherung, womit man von d. Oberfl.-Geschw. abstrahiren durfte, auch annehmen dürfen, daß d. freie Oberfl. dieselbe Form hat, welche sie haben würde, wenn d. Wasser ganz und gar in relativer Ruhe gegen d. Gefäß sich befände, denn in d. oberen Partien ist das d. Theil d. Wassers fast ganz genau in relativer Ruhe gegen d. Gefäß. Es wird also d. Gestalt d. freien Oberfl. fast ganz genau so sein, als wenn gar kein Wasser ausflösse, somit ist also: $r_0^2 = 2\,\frac{g-f}{\omega^2}\,z$

und folglich d. Endgeschw. $u = \sqrt{2gH_0 + (r\omega)^2}$ od. behufs nachträglicher Correction wegen d. Ausflußcoefficienten:

$$u = \varphi\sqrt{2gH_0 + (r\omega)^2}.$$

Dieser Ausdruck ist ganz unabhängig von d. Lage d. Punktes A in d. freien Oberfl., r bedeutet d. Entfernung d. Schwerpunktes S d. kleinsten Querschnitts d. austretenden Strahls von d. Rotationsaxe d. Gefäßes, also $r\omega$ d. absolute Geschw. dieses Gefäßpunktes, welcher mit d. Schwerpunkt von A zusammenfällt. Wenn d. Gefäß ringsherum von atm. Luft umgeben ist, so daß man ohne grossen Fehler $p = p_0$ setzen kann, so ist:

$$u = \varphi\sqrt{2(g-f)h_0 + (r\omega)^2}$$

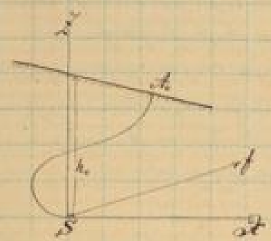
Wäre d. Gefäß nicht in Rotation begriffen, sondern hätte dasselbe nur eine translatorische Bew. mit einer vertikal gerichteten Beschl., also $\omega = 0$, so ist:

$$u = \varphi\sqrt{2(g-f)}$$ da $h_0 = \text{const} = h$ ist.

Wenn z. B. d. Gefäß durch seine eigene Schwere frei herunter fiele und man wüßte man für diesen Fall d. relative Geschw. angeben, mit welcher d. Wasser aus einer Öffnung in d. Öffnung d. Gefäßbodens ausfließen, so wäre $f = g$ und also $u = 0$ d. h. es würde gar kein Wasser ausfließen. —

2) d. Gefäß sei in einer translatorischen Bew. begriffen mit d. Beschl. f, d. constante Richtung dieser Beschl. f bilde d. Winkel ψ mit d. Horizont, gerichtet nach [illegible] aufwärts und vorwärts. In diesem Fall kann wieder, wenn d. Gefäß hinlänglich groß ist d. freie Oberfl. als identisch betrachtet werden mit derjenigen, welche stattfinden würde, wenn d. Wasser ganz in relativer Ruhe gegen d. Gefäß sich befände, wenn also kein Ausfluß vorhanden wäre. Für diesen Fall bildet aber d. freie Wasseroberfl. nach d. Hydrostatik eine geneigte Ebene. Mit d. Gefäß fest verbunden sei ein rechtwinkliges Axensystem angenommen, so daß d. Z Axe vertikal und gerichtet nach oben sei. In d. Horizontalebene durch d. Ursprung werde d. X Axe so angenommen, daß d. constante Richtung d. Beschl. f d. Gefäßes parallel d. XZ Ebene ist, sie bilde (nämlich) mit d. X Axe d. Winkel ψ. Die Y Axe geht dann in S senkrecht zur Ebene d. Figur. Für den Fall, daß d. Wasser in relativer Ruhe gegen d. Gefäß ist, bildet nun d. freie Oberfl. eine geneigte Ebene, welche parallel d. Y Axe ist; d. Gl. ist d. früheren gemäß:

$$z = -\frac{f\cos\psi}{g + f\sin\psi}\,x + h_0$$



Hierbei bedeutet h_0 diejenige Höhe, welche von d. Z-Axe durch d. freie Oberfl. abgeschnitten wird. h_0 ist natürlich auch von d. Größe d. Beschleunig. abhängig. Wenn nun aber aus einem so bewegten Gefäß aus irgend einer Stelle Wasser ausfließt, während durch entsprechenden Zufluß d. Wasserniveau constant erhalten wird, so ist:

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p-p_0}{\gamma} = M$$

d. Beschleunig. ist angenommen im Schwerpunkt S d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls, in welchem also d. Geschw. = d. mittleren Ausflußgeschw. u zu setzen ist. Nun kommen d. verschiedenen in S ausfließenden Wassertheilchen von ganz verschiedenen Stellen d. Oberfl. her, kommen z. B. von A_0; d. Weg, den d. Wassertheilchen einschlägt, ist ganz von d. Gestalt d. Gefäßes abhängig. Es kann sein, wie es von vornherein möglich erscheinen, daß d. Geschw. u verschieden ist, von welchem Punkt aus d. Wassertheilchen herkommt. Für diesen Fall ist d. frühere zu setzen M = d. Höhe d. Punktes über S $+ \frac{f}{g} S'$ also:

$$M = z - \frac{f}{g} S'$$

unter + S' d. Projection d. Strecke $A_0 S$ auf d. Richtung von f verstanden. Die Projection $-S'$ ist d. Richtung $S A_0$ auf f ist offenbar auch = d. Projection d. gebrochenen Linie x y z auf f, unter x y z d. Coord. von A_0 verstanden, also: $-S' = x\cos\psi + z\sin\psi$.

Also $M = \frac{f}{g}(x\cos\psi + z\sin\psi) + z$. Aus d. obigen Gl. für z ergibt sich, wenn man sie mit $g + f\sin\psi$ multiplicirt: $f(x\cos\psi + z\sin\psi) = (g + f\sin\psi)h_0 - gz$. Dieses in M eingesetzt giebt: $M = \left(1+\frac{f}{g}\sin\psi\right)h_0$

Hieraus sind nun d. Coord. von A verschwunden, M hat also denselben Werth, wo auch d. Punkt A_0 in d. freien Oberfl. liegen mag. Setzt man diesen Ausdruck in d. Gl. für $\frac{u^2}{2g}$ …, so ergibt sich, wenn durch Hinzufügung eines Geschw.-Coeff. auf d. Contr.-Widerstand Rücksicht genommen wird:

$$u = \varphi\sqrt{2gH_0} \qquad \text{worin} \qquad H_0 = \left(1+\frac{f}{g}\sin\psi\right)h_0 + \frac{p_0-p}{\gamma} \text{ ist.}$$

Hat man hiernach u gefunden, so ist schließlich d. pro Sek. ausfließende Wasservolumen: $V = Fu = \alpha A u$. —

Nun kommt es noch darauf an, die in diesen Formeln empirisch zu bestimmenden Erfahrungscoeff. näher zu besprechen. Dieselben sind: d. Contractionscoeff. α, d. Geschw.-Coeff. φ, d. Ausflußcoeff. μ und d. Widerstandscoeff. ζ. Diese 4 stehen bekanntlich in 2 Beziehungen zu einander:

$$\mu = \alpha\varphi \qquad \text{und} \qquad \varphi^2(1+\zeta) = 1.$$

Genügt braucht man nur 2 wirklich bestimmt zu haben, so kennt man auch d. beiden anderen. Allerdings können nicht beliebig 2 bestimmt werden, sondern es muß einer d. Coeff. μ u. α in Verbindung mit einem von φ u. ζ bestimmt werden. Man wird natürlich d. dafür zu nehmenden Versuche so einfach wie irgend möglich einrichten. Zunächst wird man sich hierbei beschränken auf d. Fall, daß d. Gefäß sich in Ruhe befindet, daß also d. Wasser eine horizontale freie Oberfl. bildet. Ferner wird man d. Ausflußgefäß so wählen, daß d. Oberfl. d. Wassers im Gefäß sehr groß ist im Vergleich mit d. Mündungsebene, so daß man dann u_0 im Vergleich zu u vernachlässigen kann. Drittens wird man d. Versuche so einrichten, daß d. ganze Versuchsapparat ringsum von d. atm. Luft umgeben ist, so daß $p_0 = p$ gesetzt werden kann. Damit kann dann auch für d. mittlere Ausflußgeschw. u und für d. pro Sek. ausfließende Wasservolumen V d. folgenden Formeln zu Grunde gelegt werden:

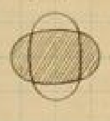
$$u = \varphi\sqrt{2gh} \qquad \text{und} \qquad V = \mu A\sqrt{2gh}.$$

unter h im Falle d. Ausflusses in d. freie Luft d. Höhe d. horizontalen freien Oberfl. d. Wassers im Gefäß über d. Schwerpunkt d. Mündungsebene verstanden. — Im Falle d. Ausflusses in ein anderes Gefäß ist h die Höhendifferenz d. beiden Wasserniveaus in d. beiden Gefäßen. Genau sind φ und μ davon abhängig, daß verhältnismäßig d. Schwerpunkt d. Mündung A nicht in gleicher Höhe mit d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls liegt; ferner sind sie davon abhängig, daß d. Geschw. im kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls nicht identisch ist mit d. mittleren Geschw. d. Querschnitts F. Gewöhnlich d. Ausfluß unter Wasser, so ist d. Differenz d. Höhen d. oberen u. unteren Wasserspiegels über jeden Punkt von F gleich groß, also nur wenn es sich um d. Ausfließen in d. freie Luft handelt, sondern in ... und ist nicht diese ...

Am einfachsten ist von diesen Coefficienten d. Ausflußcoeff. μ zu bestimmen. Es ist weiter nichts erforderlich, als daß man d. in einer gewissen Zeit ausgeflossene Wassermenge zu messen, indem dividiert durch d. entsprechende Sekundenanzahl erhält man V und kann mit Hilfe d. Formel $V = \mu A\sqrt{2gh}$
od. $\mu = \dfrac{V}{A\sqrt{2gh}}$ d. Ausflußcoeff. μ, da d. anderen Größen A g h bekannt sind. —

Ungleich schwieriger ist schon d. Bestimmung d. Contractionscoeff. α. Diesen hat man für verschiedene Fälle gefunden durch directe Messungen. Es geschieht dies auf d. Weise, daß man d. Strahl durch einen Ring hindurchfließen ließ, welcher mit möglichst vielen spitzen Schrauben versehen war, die alle radial gerichtet waren, also von verschiedenen Seiten durch d. Ring hindurch d. Strahl entgegen geschraubt werden konnten.

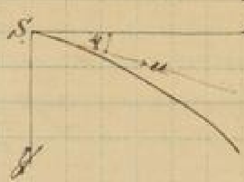
Man schraubte nun alle Schrauben so lange vor, bis sie gerade d. Strahl berühren und konnte so dann d. Strahlenquerschnitt sehr genau bestimmen. Indem man diesen Ring verschiebt und versetzt findet man allmählich d. Größe und Gestalt und Ort d. kleinsten Querschnitts d. contrahierten Strahls. Es werden übrigens diese Versuche erschwert, wenn d. Mündung nicht kreisförmig ist durch d. Umstand, daß d. Querschnittsänderung d. Strahls nicht nur eine Änderung d. Größe sondern auch d. Gestalt mit in sich schließt. Der allgemeine Charakter dieser Gestaltsänderung besteht in einer gewissermaßen wiederkehrenden Umkehrung, wobei an d. Stelle d. stärksten Krümmung d. Querschnittsbegrenzung d. Stelle d. schwächsten Krümmung tritt und umgekehrt. Also z.B.: wenn d. Querschnitt d. Form einer gestreckten Ellipse hat, so findet man, daß in einiger Entfernung von d. Mündung dieser Querschnitt sich gerade um 90° gedreht hat u.s.f.



Wenn d. Querschnitt d. Quadratform hat, so findet man, daß d. Stellen, wo d. Ecken liegen in einiger Entfernung von d. Mündungsebene abgestumpft erscheinen durch gebogene Seiten u. in noch größerer Entfernung von d. Mündungsebene hat sich d. Gestalt umgedreht. Diesen periodischen Gestaltsänderungen entsprechen auch periodische Gestaltsumkehrungen bis schließlich d. ganze Wasserstrahl zerstäubt ist. Diese Erscheinungen lassen erkennen, daß d. gemeinschaftliche Lage d. Wasserteile bestimmt wird von einer ... Lage.

Dieselbe rührt zunächst ohne Zweifel her von d. seitlichen Zufluß d. Wassers innerhalb d. Gefäßes zur Mündung u. d. dadurch bedingten Geschwindigkeit d. Punkte im Querschnitt. Jedenfalls spielen hierbei d. Molekularkräfte auch eine große Rolle. Bekanntlich ist d. Molekularbeschaffenheit d. Wassers im Innern eine wesentlich andere als an d. Oberfl. und zwar lassen sich d. betreffenden Molekularerscheinungen erklären, wenn man annimmt, daß in d. Oberfl. nach allen Richtungen eine gewisse Sp. stattfindet; wenn dieses d. Fall ist, so wird an einer solchen Stelle, wo d. Oberfl. d. Wassers nach außen convex gekrümmt ist durch diese Sp. ein einwärts gerichteter Capillardruck verursacht und zwar ist dieser am stärksten dort, wo d. Oberfl. am stärksten gekrümmt ist, und dieser hat wesentlich zur Folge, daß sich d. Querschnitt sich zusammen ziehen will. Ist an irgend einer Stelle d. Oberfl. nach außen concav gekrümmt, so ist d. Capillardruck auch nach außen gerichtet. —

Was drittens d. Bestimmung d. Geschw.-Coeff. φ betrifft, so kann dieselbe geschehen durch Vergleichung d. gemessenen Ausflußgeschw. mit d. theoretischen. Von einer direkten unmittelbaren Messung kann hier nicht d. Rede sein. Dieselbe kann nur gemessen werden, wenn man d. Richtung von u kennt, dadurch daß man irgend eine Schar zusammengehöriger Coord. d. Mittellinie d. Wasserstrahls mißt od. besser, wenn man d. Richtung nicht kennt, so findet man d. Größe und Richtung von u zugleich, indem man d. Coord. für 2 Punkte d. Wasserstrahls beobachtet. Wie aus solchen Beobachtungen d. Geschw.-Coeff. gefunden werden kann ist leicht ersichtlich. Angenommen es sei S ein Punkt d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahierten Strahls, durch diesen Punkt S seien 2 rechtwinklige Achsen gelegt und zwar in derjenigen Verticalebene, in welcher d. Richtungslinie d. Ausflußgeschw. u liegt. d. X Achse sei horizontal, d. Y Achse sei vertical und d. Ausflußgeschw. $= u$, welche mit d. X Achse d. Winkel ψ bildet. Vorausgesetzt ist nun, daß weder u noch ψ bekannt sind, dieselben sollen vielmehr für einen bestimmten Fall gefunden werden.



die Mittellinie d. ausfließenden Wasserstrahls bildet eine Curve, welche in d. Nähe von S mit genügender Annäherung als Parabel betrachtet werden kann. Angenommen es seien x u. y d. zusammengehörigen Coord. irgend eines beliebigen Punktes dieser Mittellinie und t d. Zeit in Sek., welche ein Wasserteilchen ~~braucht~~ um von S hierher zu gelangen, dann ist:

$$y = u \sin\psi\, t + g\frac{t^2}{2}$$ da $u \sin\psi$ d. Verticalcomp. d. Anfangsgeschw. in S ist, ferner ist

$$x = u \cos\psi\, t$$ also $t = \frac{x}{u\cos\psi}$ und demnach $y = x\,tg\psi + \frac{g}{2u^2}\frac{x^2}{\cos^2\psi}$.

Vermittelst dieser Gl. kann man, wenn man 2 Paar zusammengehörige Werte von Coord. x misst etwa $x_1\, y_1$ u. $x_2\, y_2$ sich so 2 Gl. bilden um u und ψ zu bestimmen. Entwickelt man aus dieser Gl. u, so hat man:

$$u = x\sqrt{\frac{g}{2}\frac{1+tg^2\psi}{y - x\,tg\psi}}$$

Sind nun $x_1\, y_1$ und $x_2\, y_2$ d. zusammengehörigen Coord. irgend 2er Punkte d. Mittellinie, d. durch Versuche bestimmt sind, so ist weiter:

$$\frac{y_1 - x_1\,tg\psi}{y_2 - x_2\,tg\psi} = \frac{x_1^2}{x_2^2} \quad \text{also} \quad tg\psi = \frac{x_2^2 y_1 - x_1^2 y_2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)}$$

Hat man nun so d. Winkel ψ gefunden, so kann man auch aus d. obigen Gl. u berechnen. Vergleicht man diesen Wert mit d. Gl.: $u = \varphi\sqrt{2gh}$, so findet man d. Geschw.-Coeff. φ. — Richtet man sich nun noch so ein, daß $\psi = 0$ ist, so ist einfach:

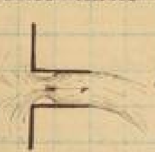
$$u = x\sqrt{\frac{g}{2y}}$$

dann braucht man nur x u. y irgend eines Punktes d. Mittellinie zu messen; indessen ist es vorzuziehen, sich auf diese Weise von ψ nicht vollständig zu verlassen, sondern lieber 2 Punkte zu messen und daraus ψ berechnen und daraus u bestimmen und somit φ. —

Als annähernd zuverlässige Werte gelten, wenn d. Gegenstand nicht weit hinreichend bekannt ist, für d. Fall d. Ausflusses d. Wassers in d. freie Luft. —

Bei denjenigen Coeff., die sich auf d. Ausfluß mit Mündungen unmittelbar beziehen, also aus Öffnungen in d. Gefäßwand, ist ferner eine trichterartige Mündung vorausgesetzt, welche dadurch hergestellt wird, daß d. Öffnung der Gefäßwand nach außen hin divergent abgeschrägt ist, z. B. wenn d. Boden eine gewisse Dicke hat, so wird d. Rand d. Mündung wie untenstehend abgeschrägt, so

daß d. Wasserstrahl nur an d. scharfen ~~Kanten~~ vorbeifließt. D. Ausflußcoeff. $\mu = \alpha\varphi$ ist, wenn es sich um d. Ausfluß mit Mündungen im engeren Sinne handelt, bei weitem vorwiegend bedingt durch d. Contractionscoeff. α indem d. Geschw.-Coeff. φ fast immer d. Einheit sehr nahe kommt. Handelt es sich dagegen um d. Ausfluß aus Mundstücken, so kann d. Ausflußcoeff. μ vorwiegend durch d. Geschw.-Coeff. φ bestimmt sein, denn kann sogar $\alpha = 1$ und $\mu = \varphi$ sein, besonders im Falle eines cylindrischen Ansatzrohres. Wenn indessen in solchen Fällen d. Ausflußcoeff. merklich kleiner als 1 ist, so wird er merklich bedingt durch eine innere Contraction. Ist ein solches Mundstück nämlich scharfkantig, so erleidet d. Wasser



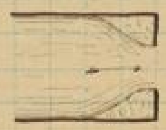
im Innern eine Contraction, und dadurch ist dann d. früheren zufolge ein entsprechender Geschw.-Verlust d. Folge, d. Ausflußcoeff. ist dann also durch eine innere Contraction bedingt. In allen Fällen ist es also im Wesentlichen d. äußere und innere Contraction, welche d. Ausflußcoeff. so bestimmt und man pflegt gewisse Fälle zu unterscheiden. Es ist im Allgemeinen klar, daß d. Contraction um so bedeutender ist, also α um so kleiner, je größer d. Winkel δ ist, um welchen d. vom Rand ~~zu~~ d. Mündung zufließenden Wasserteilchen von ihrer Bew.-Richtung abgelenkt werden müssen, um d. kleinsten Querschnitt vermehrt zu durchströmen. Ist z. B. d. Boden d. Gefäßes wie in Fig I gestaltet, so wird d. Winkel, um welchen d. in d. Nähe d. Randes ankommenden Wasserteilchen abgelenkt werden müssen, ein stumpfer Winkel und in Fig II ein spitzer Winkel. Im ersten Fall wird offenbar eine beträchtlichere ~~Cont~~ Contraction stattfinden als im 2ten Fall. —

I

II

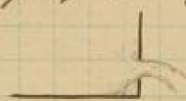
In dieser Beziehung ist derjenige Fall als ein mittlerer Normal zu betrachten, wo dieser Ablenkungswinkel $\delta = 90°$ beträgt. Für diesen Fall fällt gleichfalls d. Contraction als

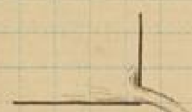
~~normale Contraction~~ d. normale Contraction bezeichnet werden. Ist wieder aber β kleiner od. größer als 90° ist, soll d. Contraction eine geschwächte od. verstärkte Contraction genannt werden. Eine Änderung d. Contraction kann auch dann stattfinden, wenn d. Mündung sich in einer ebenen Wand befindet, welche nicht sehr groß ist im Vergleich mit d. Mündung selbst. Es sei z. B.



eine weite cylindrische Röhre eines Ausflußgefäßes am Ende durch eine ebene Wand abgeschlossen, in welcher sich eine Öffnung befindet, die nicht sehr klein ist im Vergleich mit d. Größe d. Abschlußwand. Dann entsteht um diese Mündung herum ein ganz ringförmiger Raum, in welchem d. Wasser nicht Theil nimmt an d. strömenden Bew., es verhält sich dann als ob todt wäre, als ob d. ganze Fl. zwischen d. strömenden und im Winkel befindlichen Wassertheilchen d. Grenze d. Gefäßes wäre; also ist β kleiner als 90°. Die Contraction nennt man in diesem Falle eine unvollkommene Contraction. D. Fall d. Normalcontraction, wobei d. Mündung sich in einer verhältnismäßig großen Wand befindet, wird als vollkommene Contraction bezeichnet. —

Bei diesen Begriffsbestimmungen bezüglich d. Charakters d. Contractionen ist vorausgesetzt, daß d. Winkel β, um den d. von d. Wand zufließenden Wasserfäden abgelenkt werden müssen, überall gleich groß sei, also nicht wesentlich verschieden sei, und welches β d. Mittelwerth aller dieser Ablenkungswinkel ist. Es kann aber auch d. Fall sein, daß dieser Winkel β an verschiedenen Stellen d. Mündungsumfangs bedeutend verschieden ist. Es kann unter Umständen an einem Theile d. Mündungsumfangs eine normale, an einem andern Theile eine merklich geschwächte od. verstärkte Contraction stattfinden, namentlich dann, wenn d. Mündung d. Rande d. betreffenden Wand, in d. sie sich befindet, sehr nahe liegt. Wenn z. B. in d. vertikalen Seitenwand eines Ausflußreservoirs eine rechteckige





Mündung nahe über d. Boden sich befindet, während d. Wasser hoch über d. oberen Rand d. Mündung steht, so ist am oberen Rand d. Mündung d. Contraction als eine vollkommene normale zu bezeichnen, am unteren Rand findet jedoch eine geschwächte Contraction statt, da ein d. Theil d. Wassers sich in winkelförmiger Lage befindet. Hierbei ist namentlich d. Fall bemerkenswerth, daß an einem Theile d. Mündungsumfangs d. Contraction ganz aufgehoben ist, also β = 0 ist. Dies findet dann statt, wenn d. rechteckige Mündung sich unten ganz bis zum Boden erstreckt, d. untern Wasserfäden fließen dann parallel d. Mündung zu. In einem solchen Falle, wo an einem Theile d. Mündung d. Contraction gänzlich aufgehoben ist, pflegt man d. Gesammtcontraction als eine partielle zu bezeichnen. —

Bevor wir nun zur Besprechung d. einzelnen Fälle übergehen, wollen wir vorher ein Paar allgemeine Gesetze betrachten, d. sich aus d. verschiedenen Versuchen ergeben haben. Es hat sich zunächst als ein ganz allgemein gültiges Gesetz gezeigt, daß wenn μ vorwiegend durch d. äußere od. innere Contraction bedingt ist, daß dann μ um so größer wird, je kleiner d. Mündung und ~~..~~ je kleiner d. wirksame Druckhöhe ist. — Ferner hat sich fast allgemein herausgestellt, daß bei Mündungen von ungleicher Form, (die sich also unmittelbar in d. Gefäßwand befinden, wenn sie eine längliche Form haben, d. Ausflußcoeff. größer ist als unter übrigens gleichen Umständen d. [illegible] für gleiche Werthe von A u. H für d. Fall solcher Mündungsformen, d. sich d. Kreisform nähern. Bei solchen länglichen Mündungen ist es zweckmäßiger nur d. kleine Dimension, die den Ausflußcoeff. bedingt, denn mit dieser kleineren Dimension nimmt ja d. Ausflußcoeff. zu. Endlich hat sich aus d. allerdings verhältnismäßig wenig zahlreichen Versuchen, d. namentlich von Weisbach für d. Ausfluß unter Wasser angestellt sind, ergeben, daß d. Ausflußcoeff. durch eine Mündung zwischen 2 Wasserreservoiren um etwas mehr als 1% größer ist, als beim Ausfluß in d. freie Luft. —

Ausfluß d. Wassers aus Mündungen im engeren Sinn.

1) **Kreisförmige Mündung.** Offenbar läßt d. Ausfluß d. Wassers aus einer solchen kreisförmigen Mündung von vornherein d. einfachste und deutlichste Gesetzmäßigkeit erkennen und es haben sich daher auch mit Recht diesem Fall hauptsächlich d. Versuche zugewandt.

Es sei nun zunächst d. Contraction normal, also Mündung in einer ebenen Wand und zwar an einer mittleren Stelle, so daß d. Wand viel größer als d. Mündung ist. Für diesen Fall ist wiederholt und übereinstimmend constatirt worden, daß d. Ausflußcoeff. um so größer ist, je kleiner d. Durchmesser d. Mündung und je kleiner d. wirksame Druckhöhe ist, entsprechend d. vorhin entwickelten allgemeinen Gesetz. Insbesondere fand Weisbach für:

	d =	0,01	0,02	0,03	0,04 metr
und H = 0,25 m	μ =	0,637	0,629	0,622	0,614
u. H = 0,6 m	μ =	0,628	0,621	0,614	0,607

ferner für d = 0,01 metr ergab sich:

für H =	0,02	0,101	0,909	13,57	103,58 metr.
μ =	0,711	0,665	0,641	0,632	0,600

Alle diese Weisbach'schen Versuchswerte lassen sich angenähert in d. folgenden empirischen Formel zusammenfassen, welche freilich d. letzte Versuchswert nicht so recht mit d. ersten übereinstimmend. d. Formel lautet:

$$\mu = 0{,}6 + \frac{0{,}06}{0{,}5 + \sqrt{H}} - 0{,}7\,d \qquad (d \text{ u. } H \text{ in metr.})$$

Diese Versuche beziehen sich nun auf d. Ausflußcoeff. μ, welcher aber bekanntlich aus d. beiden anderen Coeff. α u. φ besteht. Was nun d. Contraction des aus einer solchen kreisförmigen Öffnung ausfließenden Strahls betrifft, so haben wiederholte Strahlmessungen ergeben, daß derselbe seinen kleinsten Querschnitt in einer Entfernung von d. Mündungsebene = d. Halbmesser d. Mündung und es ergibt sich bereits im Querschnitt dieser kleinste Durchmesser = 0,8 d. Mündungsdurchmesser d, so daß somit d. entsprechende Contractionscoeff. ist:

$$\alpha = 0{,}64.$$

Was d. Geschw.-Coeff. φ betrifft, so zeigt derselbe sich weniger differirend für verschiedene Fälle; namentlich für mittlere Druckhöhen und Mündungsweiten ist:

$$\varphi = 0{,}97 \text{ bis } 0{,}98$$

Widerstandscoeff.:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = 0{,}063 \text{ bis } 0{,}041.$$

und demgemäß d. ... gehen also 4 bis 6 % d. lebendigen Kraft, womit d. Wasser ausfließt, durch d. hydraulischen Widerstand verloren. Was d. Art d. großen Veränderlichkeit dieses Coeff. φ betrifft, so hat sich diese in so ferne ungezwungen d. Änderungsgesetz von μ ergeben, als d. Geschw. μ um so größer wird, je größer H ist. Da aber d. Ausflußcoeff. μ mit wachsender Druckhöhe abnimmt, so muß man annehmen, daß d. Contractionscoeff. α mit wachsender Druckhöhe in noch stärkerem Grade abnimmt als d. Ausflußcoeff. μ. Was in diesem Fall einer kreisförmigen Mündung d. geschwächte od. verstärkte Contraction betrifft, so sind darüber namentlich auch von Weisbach eine Reihe Versuche angestellt worden, bei denen d. Winkel ϑ zwischen 0° und 180° variirt wurde; indem d. innere Wand ... mit ... Ansätzen versehen wurde, welche jedoch nicht scharfkantig, sondern mit allmählichen Abrundungen in d. Gefäßwand übergeführt wurden, konnten dadurch ... Einflüsse abgehalten werden. Es wurde gefunden für d = 0,02 m ferner für H = 0,2 bis 3 m und für ϑ = 0°, 90° u. 180° entsprechend μ = 0,966 0,632 u. 0,541.

d. Werth von μ für $\vartheta = 90°$ entspricht sehr nahe d. oben angeführten empirischen Formel, wenn man $\alpha = 0{,}02$ setzt, man bekommt dann genau $\mu = 0{,}632$ für $H = 0{,}9$ m. Dies ist auch d. Mittelwerth zwischen 0,3 u. 3 m, d. [illegible] Versuchen angewandt wurde. Ist d. Winkel $\vartheta = 0$, so findet eine Contraction nicht statt, denn ist d. Ausflusscoeff. ein [illegible] Geschw.-Coeff. Nimmt man an, d. Coeff. sei in d. letzten 3 Fällen immer derselbe gewesen und zwar = $\mu = 0{,}966$, so würde für d. Fall einer inneren cylindrischen Ansatzröhre d. Contractionscoeff. $\alpha = \frac{0{,}541}{0{,}966} = 0{,}56$. Nach einer früheren Untersuchung hatte sich ergeben, daß [illegible] d. Contractionscoeff. $\alpha = \frac{1}{2}$ sein muss [illegible] d. Wandstärke [illegible]. Dieses Resultat ist also mit d. theoretischen in ganz guter Uebereinstimmung, da d. Wandstärke [illegible] klein ist [illegible] $\alpha = \frac{1}{2}$ [illegible] d. Druckhöhe größer ist. Es fand z. B. Borda für diesen Fall $\mu = 0{,}515$ und dementsprechend $\alpha = 0{,}53$. d. Geschw.-Coeff. [illegible] d. Druckhöhe und zwar in d. Weise, daß derselbe mit zunehmender Druckhöhe wächst. [illegible] Versuchen bez. d. Druckhöhe zwischen [illegible] Grenzen, zwischen welchen μ im Falle $\vartheta = 0$, μ von 0,96 bis 0,98 variirt wurde; bei sehr bedeutenden Druckhöhen kann [illegible] d. Geschw.-Coeff. wachsen bis zu 0,99.

[illegible] μ_0 d. Werth $\vartheta = 90°$, so ist nach Zeuner zu setzen:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 0{,}33214\cos^3\vartheta + 0{,}16672\cos^4\vartheta.$$

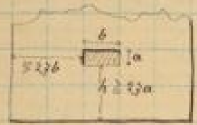
Was endlich für d. Fall einer kreisförmigen Mündung d. unvollkommenen Contraction betrifft, also für d. Fall, daß d. Mündung A sich in einer nicht sehr großen ebenen Wand im Vergleich mit d. Mündung befindet, so ist auch hierüber eine [illegible] Versuche angestellt worden. Es befand sich dabei d. Mündung in einer ebenen Wand an dem einer cylindrisch gestalteten Gefäßes; ist so $\frac{A}{F}$ d. Verhältniß d. Mündungsgröße zur Größe d. ebenen Wand $= v$, also: $\frac{A}{F} = v$, so lassen sich d. [illegible] Werthe zusammenfassen in d. Formel:

$$\mu = \mu_0\left(1 + 0{,}04564\,(14{,}821^{v} - 1)\right).$$

Bei diesen Versuchen war d. Wand, in d. sich d. kreisförmige Mündung befand, [illegible] kreisförmig und zwar befand sich d. Mündung genau in d. Mitte. [illegible] d. Mündung [illegible] mit d. Mitte [illegible], od. wenn d. Wand, in der d. Mündung sich befindet, nicht ganz kreisförmig ist, so werden d. Werthe von μ sich nicht bedeutend ändern, sofern nicht d. Mündung ganz dicht an d. Rand rückt. Ueber diesen besonderen Fall d. partiellen Contraction liegen nur einige Versuche vor, da dieselben aber kein [illegible] Interesse haben, so soll hier auch davon abgesehen werden. —

2) **Rechteckige Mündung.** Was zunächst d. Ausfluss d. Wassers aus rechteckigen Mündungen in einer ebenen verticalen Wand eines Gefäßes betrifft, [illegible] d. Mündungsseiten horizontal und vertical sind, so sind darüber d. umfassendsten Versuche in Metz angestellt worden in d. Jahren 1828 – 29 von [illegible] und Lesbros und später von 1829 – 34 von Lesbros allein. d. [illegible] Versuche bezogen sich auf d. fundamentalen Fall, nämlich auf d. vollständige und Contraction in d. freien Luft. Es befand sich d. rechteckige Mündung in einer verticalen [illegible] und zwar in einer [illegible] Platte, so daß also d. Fall einer vollständigen Contraction vorlag. Das Wasser floss von allen Seiten d. Mündung zu, um d. Mündungsebene normal zu passiren. d. rechteckigen Mündungen hatten durchweg eine [illegible] Breite von 20 ctm. und d. Höhen wurden variirt zwischen 1 bis 20 ctm. d. Ueberfallhöhen betrugen bis 1,8 m. und zwar über d. ebenen Wand d. rechteckigen Mündung gemessen. d. später von Lesbros allein angestellten Versuche waren [illegible] umfangreicher und bezogen sich auf [illegible] Fälle.

Was zunächst d. Fall d. Contraction bei einer rechteckigen Mündung betrifft, so wurde constatirt, daß d. Contraction nicht normal hervorgerufen werden kann, wenn nur d. Entfernung d. unteren Kante

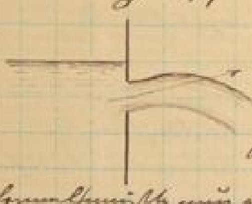


d. rechteckigen Mündung vom Boden nicht beträgt als 2,7 a unter a d. Höhe d. Mündung verstanden und wenn nur d. Entfernung d. beiden Seitenwände d. Mündung von d. Rändern d. Wand nicht beträgt als 2,7 b unter b d. Breite d. Mündung verstanden. Wird diese Grenze erreicht, so hat eine weitere Vergrößerung dieser Entfernungen keinen weiteren Einfluß auf d. Ausflußcoeff. zur Folge. Die Tabellen über μ befinden sich in „Grashof's theoretische Maschinenlehre". Dieselbe ist geordnet in d. einen Richtung nach d. verschiedenen Werthen von a und zwar für a = 0,01, 0,02, 0,03, 0,05, 0,1 und 0,2 metr., nach d. anderen Richtung ist sie geordnet nach d. Werthen von h_2, wo h_2 d. Höhe d. oberen Wasserspiegels über d. Oberkante d. Mündung ist. Dabei ist noch auf einen Umstand aufmerksam zu machen: Wenn d. Höhe h_2 nicht sehr groß ist, so senkt sich d. Wasserspiegel gegen d. betreffende Ausflußstelle d. Gefäßes hin, eine merkliche Senkung, es ist deshalb nicht gleichgültig, an welcher Stelle h_2 gemessen wird. In d. Tabelle ist vorausgesetzt, daß h_2 dort gemessen ist, wo d. freie Oberfl. noch nicht eine merkliche Senkung erlitten hat. Würde diese Höhe h_2 bei d. Anwendungen direct an d. Rande gemessen und dadurch entsprechend kleiner gefunden, so müsste d. Ausflußcoeff. entsprechend vergrößert werden, denn d. Werthe von μ, um die es sich handelt, beziehen sich alle auf d. Formel: $V = \mu A \sqrt{2gh}$ unter h d. Höhe d. Wasseroberfl. über d. Schwerpunkt d. Mündung verstanden, also $h = h_2 + \frac{a}{2}$. Würde man dieses h dicht bei d. Mündung messen, so müsste μ entsprechend größer sein. Dieser Umstand macht sich bemerklich in d. [illegible] von μ, so lange h_2 nicht größer als 0,2 m geworden ist; ist $h > 0,2$ so ist dies nicht mehr wesentlich. —

Wenn man d. Grashof'sche Tabelle näher betrachtet, so findet man im Allgemeinen bestätigt d. früheren Gesetz, daß d. Ausflußcoeff. um so größer wird, je kleiner d. Mündung und Druckhöhe ist. Es sind in d. Tabelle in d. Horizontalreihe d. Werthe von a von links nach rechts wachsend angeordnet, h_2 von oben nach unten wachsend; d. Werthe von h_2 gehen von 0,01 m bis zu 3 m., wobei d. Werthe von 0,0 1,5 bis 3 m nicht gemessen sondern geschätzt sind. Es stehen also d. größten Werthe von μ links oben und d. kleinsten rechts unten, welches auch in d. That im Allgemeinen d. Fall ist. Nur wenn man für d. größeren Werthe von a d. Verticalreihen hinuntergeht, so findet man keine stetige Abnahme von μ, sondern zunächst nimmt μ zu bis zu einem max. und erst nachher nimmt es stetig ab. Die Ursache liegt jedenfalls darin, daß in d. Formel $V = \mu A \sqrt{2gh}$ d. Coeff. μ eine zusammengesetzte Bedeutung hat, da in μ auch d. Einfluß d. früher besprochenen Correctionsfactors $1-f$ enthalten ist, welcher bekanntlich für eine rechteckige Mündung in einer verticalen Wand d. Bedeutung hatte:

$$1-f = 1-\frac{1}{96}\left(\frac{a}{h}\right)^2 \text{ also hier: } = 1-\frac{1}{96}\left(\frac{a}{h_2+\frac{a}{2}}\right)^2.$$

Dieser Correctionsfactor ist in μ mit hineingezogen worden und daraus erklären dann auch d. obigen Abweichungen, denn es ist dieser Correctionsfactor um so mehr von d. Einheit verschieden, d. h. um so kleiner, je größer a und je kleiner h ist, es muß also namentlich bei d. großen Werthen von a und d. kleinen von h_2 dieser Correctionsfactor mitwirken, daß sich ein entsprechend kleinerer Werth von μ ergibt, als es d. Fall wäre, wenn dieser Correctionsfactor nicht mit hineingezogen würde. — Es kann auch noch ein anderer Umstand dabei in Betracht kommen; wenn nämlich h_2 sehr klein ist, so fließt d. Wasser d. rechteckigen Mündung in höherem Grade am



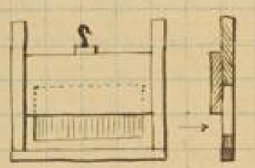
unteren Rande als am oberen zu, es findet also am unteren Rande eine geringere Ablenkung d. seitlichen Wasserstroms als am oberen statt, d. Folge ist, daß d. ganze Wasserstrahl etwas nach oben abgelenkt wird; es kann also d. Fall sein, daß d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts S d. contrahirten Strahls etwas höher liegt, als d. Schwerpunkt d. Mündung A. In d. Ausflußformel müsste nun eigentlich h gleich gesetzt werden d. Höhe d. Oberfl. über d. Schwerpunkt von S, so daß hier also d. Höhe etwas zu groß gesetzt worden ist und μ etwas zu klein gefunden werden musste.

Nach d. Versuchen von Lesbros ist d. Ausflußcoeff. vorwiegend abhängig von d. kleineren Dimension d. rechteckigen Mündung, möge es nun d. Breite o. d. Höhe sein, und zwar in d. Weise, daß bei gleichen Werthen von h und bei gleicher Größe dieser kleinen Dimension d. Mündung, d. Ausflußcoeff. sich nicht wesentlich ändert, wenn d. Verhältniß von Höhe u. Breite zwischen 1 u. 20 variirt. Mit Rücksicht auf diesen Umstand können also auch d. Zahlen d. vorstehenden Tabelle, obgleich sie sich alle nur auf d. nämliche Breite d. Mündung beziehen, doch auch angewandt werden für andere Fälle, wo diese Breite erheblich größer ist, sofern sie nur nicht mehr als d. 20fache d. Höhe beträgt. –

Was d. Geschw.-coeff. betrifft, so ist auch dieser von Lesbros bei verschiedenen Versuchen ermittelt worden und es hat sich ergeben, daß derselbe wenig verschieden ist von d. Geschw.-coeff. φ betreffend d. Ausflußrohr und kreisförmigen Mündungen, es ergab sich nämlich:

$$\varphi = 0{,}97.$$

Bei diesen Fundamentalversuchen war immer sorgfältig d. Ausfluß in einer sogenannten dünnen Wand hergestellt, so daß d. innere Wand eine scharfe Kante bildete. Bei d. technischen Ausführungen findet nun im Allgemeinen ein solcher idealer Fall nicht statt, sondern es pflegen d. betreffenden seitlichen Mündungen rechtwinklig in d. Gefäßwand eingeschnitten zu sein. Unter diesen Umständen findet d. Wasserstrahl Gelegenheit, sich an diese Umfassungsfläche d. Öffnung mehr od. weniger anzuschließen. Im Allgemeinen wird d. Neigung d. Wasserstrahls zur Wand vergrößert, also d. Geschw.-coeff. etwas verkleinert, dagegen wird d. Contraction vermindert, also d. Contractionscoeff. vergrößert und zwar wird ursprünglich d. Contractions-coeff. mehr vergrößert als d. Geschw.-coeff. verkleinert, so daß d. Product aus beiden eine Vergrößerung erfährt. Es ist dies namentlich d. Fall beim Ausfluß d. Wassers durch seitliche Schützenöffnungen. Es pflegt die Schutztafel mehr od. weniger eingeschoben zu sein, so daß d. Wasser nur



durch d. seitliche Öffnung unter d. Schutztafel fließt. Bei solcher Tafel muß nun dafür gesorgt werden durch Führungsleisten, welche eine gewisse Einfassung für diese seitliche Mündung bilden. Stehen diese Führungsleisten etwas vor, so wird an d. beiden Seiten d. Contraction geschwächt; ebenso kann sich auch unten eine Leiste befinden, um d. Schutztafel beim Herunterlassen eine Stütze zu gewähren, so daß auch am unteren Rand d. Mündung eine solche Schwächung d. Contraction stattfindet. D. verschiedenen Modificationen, wie sie für diese Fälle sind, wurden von Lesbros speciell geprüft, deren Resultate im Gesetz zusammengestellt sind. –

Gehen wir nun über zu d. Fall einer unvollkommenen Contraction, daß also $n = \frac{A}{B}$ nicht sehr klein ist. Auch über diesen Fall hat Weisbach Versuche angestellt und folgende Formel gefunden:

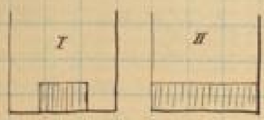
$$\mu = \mu_0 \left[1 + 0{,}076\left(9^n - 1\right)\right]$$

wenn μ_0 d. Ausflußcoeff. unter übrigens gleichen Umständen im Falle einer vollkommenen Contraction bedeutet. Ferner ist bei d. Ausfluß d. Wassers aus rechteckigen Mündungen d. partielle Contraction beachtenswerth. Solche Versuche wurden von Bidone mit quadratischen Mündungen und von Weisbach mit Mündungen, d. 0,1 m Höhe und 0,2 m Breite hatten, angestellt. Nach Weisbach ergab:

$$\mu = \mu_0 \left(1 + 0{,}155\, p\right)$$

unter p d. verhältnißmäßige Größe desjenigen Theils d. Mündungsumfangs verstanden, an welchem keine Contraction stattfindet, zum ganzen Mündungsumfang. –

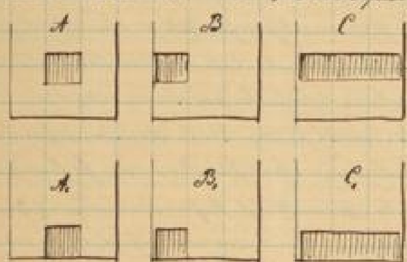
Meistens kommt d. unvollständige Contraction so vor, daß d. seitliche Mündung nur mit d. unteren Rand am Boden d. Gefäßes liegt, od. daß sie sich auch bis zu den Seitenwänden erstreckt. Im ersten Fall ist d. Contraction nur am unteren Rand aufgehoben, im 2ten Fall auch



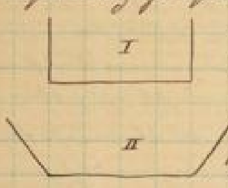
an d. Seitenwänden. Ist also a d. Höhe und b d. Breite d. Mündung, so ist im ersten Fall: $p = \frac{b}{2(a+b)}$

im 2ten Fall $p = \frac{2a+b}{2(a+b)}$.

Es sind über diesen Fall auch Versuche von Lestros angestellt worden, und zwar mit solchen Mündungen, welche annähernd d. in d. Praxis vorkommenden Umständen Rechnung tragen sollen; dabei ist zwar auch an einem Punkt d. Contraction vollständig aufgehoben, an d. Seitenwänden jedoch [illegible] nicht ganz [illegible], indem [illegible] d. Seitenwände d. Mündung sich nicht ganz bis zur Wand erstrecken, welche [illegible] eingewandt werden können. Von Lestros sind Versuche angestellt worden erstens für d. Fall d. vollständigen



Contraction, 2tens für d. Fall, daß d. Mündung auf d. einen Seite bis nahe an d. Rand d. betreffenden verticalen ebenen Wand nicht bis zur Entfernung von 2 cm; 3tens für d. Fall, daß d. Mündung auf beiden Seiten bis auf 2 cm an d. Seitenwänden d. Wand entfernt liegt; zu allen diesen Fällen A B C wurde nach d. Anordnung vorgenommen, daß d. Mündung bis auf d. Boden [illegible] wurde, so daß sich A' B' C' ergab. In diesen Fällen waren d. Seitenwände d. Ausflußgefäßes senkrecht gerichtet gegen diese Ausflußwand [illegible], so ist nun aber [illegible] d. Gefäß wie [illegible]



Es wurden aber auch, und zwar im Falle C u. C', Versuche angestellt mit d. Änderung, daß d. beiden Seitenwände d. Gefäßes schräg gegen d. Mündungswand angeordnet waren und zwar unter 45°, so daß sie gegen einander senkrecht gerichtet waren. Es zeigte sich, daß in einem solchen Fall d. Ausfluß-Coeff. fast gleich waren denen in d. Fällen B u. B'. In allen diesen Fällen [illegible] d. Aufhebung d. Contraction an einem Punkt einen ebenso [illegible] Einfluß auf d. Vergrößerung von μ als d. Aufhebung d. Contraction an d. Seitenwänden, [illegible] als d. Contraction an d. Seitenwänden nicht vollkommen aufgehoben wurde. Man kann also d. Formel für alle diese Fälle dahin angeben, daß man setzt:

$$\mu = \mu_0 (1 + x\, p_a + y\, p_b)$$

unter p_a d. Werth von p verstanden, welcher sich auf d. partielle Contraction an d. Seitenwänden bezieht, p_b an d. anderen Punkten; es ist also im Falle A: $p_a = 0$ u. $p_b = 0$; im Falle A': $p_a = 0$ u. $p_b = \frac{b}{2(a+b)}$;

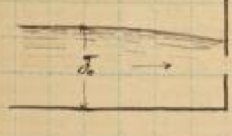
im Falle B: $p_a = \frac{a}{2(a+b)}$ u. $p_b = 0$; im Falle B': $p_a = \frac{a}{2(a+b)}$ u. $p_b = \frac{b}{2(a+b)}$;

im Falle C: $p_a = \frac{a}{a+b}$ u. $p_b = 0$; im Falle C': $p_a = \frac{a}{a+b}$ u. $p_b = \frac{b}{2(a+b)}$;

Die Coeff. x u. y waren [illegible] ebenso [illegible], da d. Contraction an d. Seitenwänden nicht so vollkommen wie an einem anderen Punkt. D. Resultate von Lestros liefern d. Formel:

$$\mu = \mu_0 (1 + 0{,}12\, p_a + 0{,}16\, p_b) \text{ —}$$

Endlich ist noch d. Fall besonders [illegible], daß d. Wand mit d. Ausflußöffnung sich am Ende eines Gerinnes befindet, so d. Wasser schon mit einer gewissen Geschw. d. Mündung zufließt. Also in einem [illegible] Gerinne fließe d. Wasser einer verticalen Wand zu, in welcher sich d.



rechteckige Ausflußmündung befindet. Es sei d. Mündung A nicht sehr klein im Vergleich mit d. Querschnitt F_0 d. zufließenden Wassers. D. mittlere Geschw. d. fließenden Wassers sei im Gerinne u_0 und zwar ist diese zu finden:

$$u_0 = \frac{V}{F_0}, \text{ wobei man setzen kann d. Ausflußmenge: } V = \mu A \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{\mu A}{F_0}\right)^2}}$$

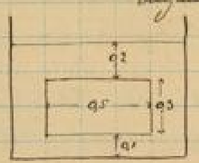
indem man unter h [illegible] d. Höhe d. Wasserstands im Gerinne über d. Schwerpunkt d. Mündung A. Bezeichnet man nun $\frac{A}{F_0} = n$, so ist: $V = \mu A \sqrt{\frac{2gh}{1-(\mu n)^2}}$. Allerdings bedeutet für d. Coeff. μ' nicht einen ganz neuen Ausflusscoeff.; er enthält vielmehr noch einen anderen Einfluss in sich. Es ist nämlich auch hier vorausgesetzt, dass d. Höhe h gemessen werde in einer solchen Entfernung von d. Zuflusswand, wo d. Wasseroberfl. noch nicht merklich sich gegen d. Wand abzurunden geneigt hatte also etwa 1 m von d. Wand. Bei d. vorhandenen Geschw. u_0 erfährt d. Wasser auf d. Strecke von 1 m Länge schon immer einen nicht ganz zu vernachlässigenden Widerstand; so dass d. Höhe h auch d. Widerstandshöhe im Gerinne von dieser Strecke bis zur Wand in sich enthält, und ebenso kann es d. Fall sein, dass wenn man für μ d. Werth setzt, denselben Fall für d. Ausfluss d. Wassers mit einem Gefäss, dass man V mit μ zu gross findet. Es sind deshalb von Weisbach besondere Versuche angestellt worden über diesen Fall, wobei einfach gesetzt wurde:

$$V = \mu' A\sqrt{2gh}$$

wobei nun d. Coeff. μ' mit d. Versuchsergebnissen variirt. Dieser begreift dann verschiedene Einflüsse in sich: 1) d. der Contraction 2) d. d. Geschw.-Coeff. φ 3) d. d. Umstandes, dass d. Geschw. im Schwerpunkte d. kleinsten Querschnitts d. austretenden Strahls nicht genau gleich d. mittleren Geschw. ist 4) d. des Umstandes, dass d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. austretenden Strahls in anderer Höhe liegen kann als d. Schwerpunkt d. Mündung. 5) d. d. Zuflussgeschw. u. 6) d. d. Widerstandshöhe, die d. Wasser schon bei d. Lauf im Gerinne erfährt von d. Stelle an, wo h gemessen wird, bis zur Ausflusswand. Er fand, dass d. Coeff. μ' mit genügender Annäherung berechnet werden könne vermittelst folgender empirischen Formel:

$$\mu' = \mu_0 (1 + 0,641\, n^2)$$

, vorausgesetzt, dass d. Verhältniss $n < \frac{1}{2}$ ist u. ferner, dass d. Höhe h d. Wasserstandes im Gerinne über d. Mittelpunkt d. Mündung A gemessen wird in d. Entfernung von 1 m von d. Wand. Würde d. Höhe h gemessen in grösserer Entfernung, so würde diese eine noch grössere Widerstandshöhe in sich schliessen. Aus demselben Umstande ist es zu erklären, dass d. aus diesen Versuchen entstandenen Werthe von μ' kleiner sind als diejenigen Werthe, welche μ' nach d. Formel für V haben müsste; es sollte μ' d. Ableitung haben $\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{1-(\mu n)^2}}$, man findet aber im Allgemeinen μ' kleiner als dieser Werth und dies ist d. Einfluss d. Widerstandshöhe zuzuschreiben. Als Beispiel sei Folgendes zu berechnen:



Angenommen es fliesse d. Wasser in einem Gerinne von 0,8 m Breite, welches 2 verticale ebene Seitenwände hat. Angenommen man wolle d. Wassermenge messen, die in diesem Kanal im Beharrungszustande fliesst. Zu d. Ende wird d. Gerinne abgeschlossen durch eine verticale Wand, in welche eine Mündung eingeschnitten wird von 0,m5 Breite und 0,m3 Höhe und zwar sei diese Mündung an einer solchen Stelle in d. Wand, dass d. untere Rand in einer Höhe 0,m1 über d. Boden liegt, ferner d. beiden Seitenwände gleich weit, also um 0,m15 von d. Seitenwänden d. Gerinnes abliegen. Nachdem dies geschehen ist, wird sich zunächst d. Wasserstand im Gerinne ändern und zwar ergebe sich derselbe im Beharrungszustande 0,2m über d. oberen Rand d. Mündung und gemessen in einer Entfernung = 1 m von d. Wand. Hiernach soll V berechnet werden.

Zu dem Ende ist zunächst d. Coeff. μ_0 zu berechnen, welcher Ausflusscoeff. unter übrigens gleichen Umständen bei vollkommener Contraction gelten würde für d. Ausfluss aus einer rechteckigen Mündung in einer ebenen grossen Wand. In d. früheren Tabelle sind d. Werthe von μ, d. hier mit μ_0 bezeichnet werden, nach Werthen von a und h_1 geordnet. a = 0,3 kommt nun in jener Tabelle nicht vor; man wird also zunächst d. Werth von μ_0 aufsuchen für d. demnächst kommenden Fall, also für $h_1 = 0,2$ und a = 0,2, wofür man findet $\mu_0 = 0,598$. Nun wissen wir aber, dass d. Ausflusscoeff. um so kleiner ist, je grösser d. kleinere Dimension ist. Es muss also für a = 0,3 d. Coeff. μ_0 etwas kleiner sein als für a = 0,2. Es mag nach Schätzung durch d. Tabelle $\mu_0 = 0,595$ sein. Ferner ist nun: $n = \frac{0,5 \cdot 0,3}{0,8 \cdot 0,6} = \frac{5}{16}$ also kleiner als $\frac{1}{2}$, so dass d. Weisbach'sche Formel angewandt werden kann. Mit Hülfe derselben ist: $\mu' = 0,595\left(1 + 0,641\left(\frac{5}{16}\right)^2\right) = 0,632$ und demnach d. Ausflussmenge:

$$V = \mu' A\sqrt{2gh} = 0,632 \cdot 0,3 \cdot 0,5 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,35} = 0,2484 \text{ cubm.}$$

Hier sei hinzugefügt, entsprechend d. Umständen, unter denen Weisbach diese einfache Formel abgeleitet hat, daß d. Contraction zur unvollkommenen oder unvollständig sei. Hier ist eine rechteckige Mündung vorausgesetzt, die irgendwo i. d. Gefäßwand befindlich ist. Wird nun aber d. Contraction gleichzeitig partiell indem z. B. d. Mündung derartig eingerichtet wird, daß sie sich mit d. unteren Rand bis zum Gerinneboden erstreckt, so würde sie jedenfalls größer werden sein, aber daß gewisse Versuche hierüber vorliegen. In einem solchen Fall kann man sich folgendermaßen helfen:
Es sei für diesen Fall d. Ausflußcoeff. mit μ'' bezeichnet, so wird derselbe größer sein als μ' unter übrigens gleichen Umständen, weil überhaupt bei d. partiellen Contraction d. Coeff. größer ist. Man wird daher können: $\mu'' = (1+y)\,\mu'$. Diesen Vergrößerungscoeff. kennt man für d. vorliegenden Fall durch direkte Versuche nicht, sondern nur für d. Fall vollkommener Contraction und es sei für diesen Fall bezeichnet mit $1+x$. Dann ist, wenn d. Contraction zum partiell übrigens aber vollkommen wäre: $\mu'' = (1+x)\,\mu_0$, wo μ_0 für normale Contraction gilt. Dieses x kennt man u. ist: $x = 0{,}12\,p_a + 0{,}16\,p_b$ nach Lesbros. D. Vergrößerungscoeff. $1+y$ wird jedenfalls kleiner sein als $1+x$, da d. Contractionscoeff. äußersten Falls bis zur Einheit wachsen kann. Es wäre also möglich, daß $\mu' > 1$ würde, was nicht sein kann; wäre $\mu' = \mu_0$, so wäre $y = x$. Die einfachste Formel, welche diesen Anforderungen entspricht, wäre $\mu'' = \left(1 + \frac{1-\mu'}{1-\mu_0}\,x\right)\mu'$.
Für $\mu' = \mu_0$ wird d. Vergrößerungscoeff. $= 1+x$, wäre aber μ' nun $= 1$, dann müßte μ'' ebenfalls $= 1$ sein; in d. That verschwindet d. ganze Klammer, also $\mu'' = \mu'$. Es kann also μ'' nie über d. Einheit wachsen. Übrigens wird man nun d. entsprechenden Werth von μ'' direkt berechnen können, wenn bei diesem Versuche betreffs d. Wassermenge V d. rechteckige Mündung so angebracht wird, daß sie bis an d. Gerinneboden sich erstreckt.

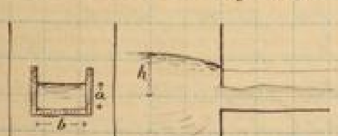
Die Dimensionen d. Gerinnes seien unter diesen Umständen dieselben wie vorher, jetzt wird sich freilich ein anderer Wasserstand herausstellen, es sei aber vorausgesetzt, es fließe eine andere Wassermenge in d. Gerinne, so daß auch in diesem Falle d. Wasserstand im Gerinne 1 m von d. Wand entfernt $= 0{,}6^m$ sei. Dann kann derselbe Werth von μ_0 hier zu Grunde gelegt werden, wie vorher; es ist nur jetzt h_2 nicht $= 0{,}2$ sondern $= 0{,}3$ m. Wenn man aber d. Fundamentaltabelle von Poncelet-Lesbros ansieht, so bemerkt man, daß für diese bl. Änderung von h sich kein Unterschied ergibt, so daß $\mu_0 = 0{,}595$ gesetzt werden kann. μ' wird dann wie vorher berechnet $= 0{,}632$. Dieses wäre d. Ausfluß-Coeff. abgesehen davon, daß am unteren Rand d. Contraction aufgehoben ist. Man hat also nun μ'' nach d. Formel zu berechnen. In derselben hat x auf Grund d. früher erwähnten Lesbros'schen Versuche d. Werth $x = 0{,}16\,\frac{0{,}5}{2{,}08} = 0{,}05$, und somit ergibt sich:

$$\mu'' = \left(1 + \frac{0{,}368}{0{,}405}\,0{,}05\right)0{,}632 = 0{,}661$$

und somit d. pr. Sek. durchfließende Wasservolumen:

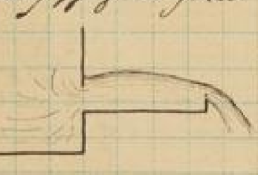
$$V = \mu'' A \sqrt{2gh} = 0{,}661 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}45} = 0{,}2946 \text{ cubm.}$$

Bei diesen Fällen d. Ausflusses d. Wassers aus rechteckigen Mündungen ist vorausgesetzt worden, daß d. Ausfluß in d. freien Luft erfolge, daß also d. ausfließende Wasserstrahl frei niederfalle.
Es kommt nun häufig d. Fall vor, daß dies nicht so ist, sondern daß sich an d. rechteckige Mündung unmittelbar ein Schußgerinne anschließt, so zwar, daß d. Boden desselben genau d. unteren Rand d. Mündung entspricht und die beiden verticalen Seitenwände d. Gerinnes d. beiden Seitenkanten d. Mündung entsprechen.



Das Wasser, welches durch diese Mündung abfließt, kann zunächst eine gewisse Contraction erfahren, indem es sich dann aber wieder ausdehnt, kommt es mit d. Gerinnwänden in Berührung; dadurch wird ein gewisser Widerstand verursacht, bewirkt eine Hebung d. Wassers an d. Gerinnwänden, bewirkt mit diesem Gerinne d. Wasserstrahl nicht mit einer gewöhnlichen Kraft niederzufallen. Wenn man also nun für diesen Fall d. pr. Sek. ausfließende Wasservolumen V berechnet nach d. Formel: $V = \mu A \sqrt{2gh} = \mu a b \sqrt{2gh}$ wobei h d. Höhe d. Wasserspiegels im Gefäß über d. Mittelpunkt d. Mündung bedeutet, so wird d. Coeff. μ

kleiner sein, als unter übrigens gleichen Umständen es d. Fall wäre, wenn d. Wasserstrahl frei niedersinkt. Dieser hemmende Einfluß d. Gerinnes beträgt hauptsächlich eine Vergrößerung d. Dr. [illegible] im kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls. In dieser Beziehung sei zunächst vorausgesetzt, daß d. Gerinneboden horizontal od. doch schwach abwärts geneigt sei, aber daß ein besonderer Widerstand im Gerinne vorhanden sei. In solchem Falle wird d. Wasseroberfl. im Gerinne von d. obern Rand d. Mündung beginnen, in d. höchsten Punkten d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls wird d. Dr. = d. äußern Luftdruck sein und nach unten zu wird sie wachsen. Wenn man annehmen dürfte, daß in d. kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls d. Wassertheilchen parallele gerade Bahnen bilden, so würde d. Dr. nach oben nach unten entsprechend einfachen hydrostatischen Gesetzen; es würde dann d. Druckhöhe im tiefsten Punkt d. Strahls um d. Tiefe d. Strahls größer sein als d. obere Druckhöhe und man würde V finden, indem man statt h setzte $h-\frac{a}{2}$, so daß dann je kleiner wäre als unter übrigens gleichen Umständen bei freiem Abfluß um d. Factor $\sqrt{1-\frac{a}{2h}}$. In der That findet man auch, daß in solchen Fällen d. Ausfluß-Coeff. durch d. Ausflußgerinne [illegible] d. Fall d. freien Ausflusses [illegible], je kleiner d. Druckhöhe ist. Jene Voraussetzung, daß d. Bahnen d. Wassertheilchen im d. kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls parallel [illegible], ist im Allgemeinen nicht zulässig. d. Bewegung d. Wassers bei seinem Lauf im Abflußgerinne erfordert einen gewissen Überschuß an Druckhöhe; ist d. Abflußgerinne genügend stark abwärts geneigt, so kann es d. Fall sein, daß d. Neigung an und für sich hinreicht, um d. Widerstand zu überwinden, daß also d. Wasser mit constantem Querschnitt abfließt; ist aber d. Gerinne sehr wenig geneigt, so kann diese Druckhöhe nur dadurch hergestellt werden, daß d. Wasser nach d. Contraction sich wieder erhebt und dann allmälig [illegible]. Dieses findet man auch in d. That. Ist dieses aber d. Fall, so sind auch im kleinsten Querschnitt d. Bahnen d. Wassertheilchen nicht [illegible] gekrümmt und zwar [illegible] nach unten, so daß aus einem doppelten Grunde d. Dr. von oben nach unten wächst. So daß also je in noch höherem Grade kleiner ist als unter übrigens gleichen Umständen um $\sqrt{1-\frac{a}{2h}}$. Dieser Umstand wird offenbar in um so höherem Grade sich geltend machen, je länger d. Ausflußgerinne ist und je weniger geneigt es ist. Werden diese Umstände nun [illegible] [illegible], so kommt ein Umstand in Betracht, d. je zu vergrößern strebt. Indem nämlich d. ausfließende Wasserstrahl sich nachher wieder erhebt, wird d. Contraction verringert. Dabei war eine Voraussetzung gemacht: es war angenommen, daß d. Ausflußgerinne höchstens horizontal oder ein wenig abwärts geneigt sei und daß ein Widerstand durch einen [illegible] oder nicht vorhanden sei. Es kann aber auch d. Fall sein, daß in einem solchen Ausflußgerinne noch ein besonderes Hinderniß angebracht worden ist, welches entweder durch ein Wehr od. durch sonstige [illegible] Stellung d. Gerinnes gebildet sein kann. Dadurch kann ein so erhebliches

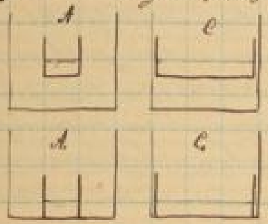


Hinderniß für d. Abfluß d. Wassers hergestellt werden, daß schon dicht an d. Mündung d. Wasser höher steht als d. obere Rand d. Mündung. In einem solchen Fall ist es angemessen nicht nach d. Formel:

$V=\mu A\sqrt{2gh}$ V zu berechnen, sondern nach d. Formel:

$$V=\mu a b\sqrt{2g(h-h')},$$

wo h dieselbe Bedeutung wie vorhin hat, h' aber d. Höhe d. Wasseroberfl. im Ausflußgerinne über d. Schwerpunkt d. Mündung und zwar an einer solchen Stelle genommen, wo d. Wasser seine größte Senkung hat. Wäre h' groß im Vergleich mit $\frac{a}{2}$, dann wäre d. freie Wasseroberfl. im Ausflußgerinne fast horizontal, es würde dann d. Fall d. Ausflusses unter Wasser stattfinden. In einem solchen Fall wäre nach einer früheren Bemerkung je sehr wenig kleiner als für d. Fall d. Ausflusses in d. freie Luft und zwar ungefähr um 1%. Dieses ist nun aber in d. meisten Fällen nicht so, denn gewöhnlich ist h' nicht sehr groß im Vergleich mit $\frac{a}{2}$; dann wird d. Abhängigkeitsgesetz d. Coeff. von d. verschiedenen Umständen nicht nur durch besondere Versuche einigermaßen zuverlässig zu bestimmen sein. Zunächst sind d. betreffenden Versuche von Lesbros zu erwähnen, die sich beziehen auf d. Ausfluß d. Wassers aus einer rechteckigen Mündung in einer verticalen ebenen Wand und zwar in einem Aufsatzgerinne, welches entweder horizontal, d. h. höchstens bis auf $\frac{1}{10}$ abwärts geneigt ist, auftretende besondere Widerstände in diesem Gerinne nicht vorkommen; d. Gerinne sollte eine Länge von $2^m.50 - 3^m.00$. So liegt also d. Anwendung d. Formel $V = \mu a b \sqrt{2gh}$ zu Grunde. Die Versuche beziehen sich namentlich auf folgende Specialfälle: A) d. Mündung befindet sich an einer mittleren Stelle



in d. verticalen Wand d. Gefäßes; A1) d. Mündung befindet sich an einer mittleren Stelle d. Bodens d. Gefäßes; C) und C1) wie Seite 59, nur mit Aufsatzgerinne. Für diese Fälle sind d. Resultate im Anhang zusammengestellt. Es ist nun zu bemerken, daß d. Zahlen dieser Tabelle durchweg kleiner sind als d. Zahlenwerthe von μ bei d. früher besprochenen Lesbros'schen Versuchen, wo sich kein Aufsatzgerinne an diese Mündungen anschloßen. Daß aber diese Verkleinerung von μ durch d. Aufsatzgerinne um so geringfügiger ist, je größer d. Druckhöhe h ist, [illegible] besonders im Falle A zeigt sich, daß bei d. größeren Wasserständen h d. Coeff. μ für d. Fall d. Aufsatzgerinnes gar nicht kleiner ist, als für d. Fall d. Ausflusses in d. freien Luft. [illegible], daß im Falle A d. Ausflußcoeff. am meisten durch Contraction bedingt ist, da d. Wasser von allen Seiten her d. Mündung zufließt; diese Contraction wird aber durch d. Aufsatzgerinne vermindert und [illegible] d. Ausflußcoeff. vergrößert, so daß für d. Fall [illegible], daß durch Vergrößerung von h d. Verkleinerung von μ vollständig aufgehoben werden kann. Unter anderen Umständen, als diejenigen, unter denen diese Lesbros'schen Versuche angestellt worden sind, können d. Werthe d. Lesbros'schen Tabelle wenigstens als Verhältnißzahlen benutzt werden, wie dies am folgenden Beispiel ersichtlich sein mag:

D. Gerinne habe $0,^m8$ Breite, welches am Ende durch eine verticale Wand abgeschlossen wird. In derselben befindet sich eine rechteckige Öffnung von 0,5 m Breite und 0,3 m Höhe, welche sich bis auf d. Boden d. Gerinnes erstrecken soll, also wie in Seite 60–61. [illegible] sich d. Beharrungszustand hergestellt hat, so d. Wasserstand, 1 m von d. Wand gemessen, werde $= 0,3$ m über d. oberen Wand. Für diesen Fall nun, wenn d. Wasser als ein freier Strahl ausfließt, d. Ausflußcoeff. berechnet werden $\mu = 0,661$. Jetzt sei vorausgesetzt, d. Wasser fließe nicht als ein freier Strahl aus dieser Mündung aus, sondern es schließe sich an diese Mündung ein Aufsatzgerinne, wodurch d. Wasser abgeführt wird. Unmittelbare Versuche sind über einen solchen Fall von Lesbros nicht angestellt worden. D. Fall, welcher hier vorliegt, liegt [illegible] zwischen A u. C; nun ist nach d. Lesbros'schen Tabelle in diesen beiden Fällen A u. C für d. Fall d. freien Ausflusses d. Ausflußcoeff. $= 0,621$ resp. $0,699$ u. z. für d. hier vorliegenden Werthe von h und a. Für dieselben Fälle, wo d. Ausfluß durch ein Aufsatzgerinne erfolgt, ist d. Ausflußcoeff. nach Lesbros resp. $0,575$ u. $0,599$. Da nun d. hier vorliegende Fall als zwischen A und C liegend angenommen werden kann, so wird man hier sagen dürfen, es wird d. Ausflußcoeff. durch d. Aufsatzgerinne verkleinert ungefähr um $\frac{0,575 + 0,599}{0,621 + 0,699} = 0,9$, folgt d. Ausflußcoeff. wird: $\mu = 0,661 \cdot 0,9 = 0,595$.

Hieraus sieht man wie d. [illegible] Zahlenwerthe auch als Verhältnißzahlen angewendet werden können. —

Von praktischem Interesse ist ferner d. Fall, daß d. rechteckige Mündung sich in einer schräg stehenden ebenen Wand befindet, welche mit einem in gleicher Breite fortlaufenden Gerinne unter einem gewissen Winkel gegen d. Verticale geneigt nach oben angeschlossen ist; dieser Winkel sei $= \delta$. Unten dieser schrägen ebenen Wand befinde sich d. rechteckige Durchflußöffnung, die sich mit d. unteren Rande bis zum Boden erstreckt. Hier findet d. Contraction im Wesentlichen nur am oberen Rande statt und auch hier nur in einem geschwächten Maße. Dieser Fall ist namentlich von Interesse für d. Fall d. Wasserzuführung zu Wasserrädern, wobei diese schräge Wand d. Zweck hat, d. Durchflußöffnung möglichst nahe an d. Rad anzubringen. Für diesen Fall

sind von Poncelet Versuche angestellt worden und dabei hat sich d. Ausflusscoeff. $\mu = 0{,}7 \quad 0{,}74 \quad 0{,}8$, ergeben, je nachdem $tg\,\delta = 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$ war. Diese Werthe von μ beziehen sich auf d. Formel $V = \mu a b \sqrt{2gh}$, wo a d. Höhe d. Ausflussöffnung bedeutet, die aber senkrecht gemessen ist zum Boden d. Wand, b d. Breite d. Mündung und h d. Höhe d. Wasserspiegels über d. Mittelpunkt d. Mündung. D. Fall $tg\,\delta = 0$ würde dem einer verticalen Wand entsprechen, welchen Fall wir schon durchgenommen haben. Für diesen Fall ergaben sich freilich aus d. Lesbros'schen Versuchen merklich kleinere Werthe von μ als 0,7 nämlich 0,63 bis 0,65. Diese Differenz kann daher rühren, daß d. Poncelet'schen Mündungen erheblich breiter als d. Lesbros'schen waren. Ferner d. Contraction an d. Seiten würde nur sehr schwach an, wenn sie doch an und für sich geringer sein als bei d. Lesbros'schen Versuchen; außerdem stieß bei d. Poncelet'schen Versuchen d. Wasser d. Mündung mit einer nennenswerthen Geschw. zu. Bei d. Poncelet'schen Versuchen war h gemessen dort, wo d. Wasser schon eine bedeutende Geschw. hatte, bei d. Lesbros'schen dort, wo es in Ruhe war. In solchen Fällen, wo unter übrigens gleichen Umständen μ nicht $= 0{,}7$ war, können diese Poncelet'schen Zahlen wenigstens als Verhältnißzahlen benutzt werden. D. Ausflusscoeff. ~~[illegible]~~ wird vergrößert um $\frac{0{,}75}{0{,}7}$, wenn d. Winkel δ vermindert wird, daß $tg\,\delta$ nicht $= 0$ sondern $= \frac{1}{2}$ ist. Für d. Fall, daß $tg\,\delta$ weniger größer als 1 ist, kann man d. Vergrößerungscoeff. allgemein gleich setzen:

$$1 + \frac{6\,tg\,\delta + 4\,tg^2\delta}{70}$$

Für $tg\,\delta = \frac{1}{2}$ geht dieser Ausdruck über in $\frac{74}{70}$ und für $tg\,\delta = 1$ in $\frac{8}{7}$. — Wenn man also d. Ausflusscoeff. für einen gewissen Fall bestimmt hat, so wird eine Neigung d. Wand um δ denselben um diese Größe vergrößern. Für diese Schützen hat Poncelet außerdem einen Geschw.-Coeff. φ ermittelt, d. durchschnittlich $= 0{,}93$ war. Diese Versuche beziehen sich alle auf d. Fall, daß d. Abflußgerinne horizontal u. beinahe [illegible] gemacht war. Was nun aber d. anderen Fall betrifft, in welchem d. Gerinne, welches sich an d. rechteckige Mündung anschließt, in d. Höhe gerückt ist, od. wenn wir früher bereits gesehen haben, so daß dann d. Oberfl. d. im Gerinne abfließenden Wassers höher als d. Rand d. Mündung steht, so sind über diesen Fall in d. Jahren 1866 u. 67 besondere Versuche von Bornemann angestellt worden. Bei diesen Versuchen handelte es sich auch um ein mit [illegible] Gerinne, welches d. Gerinne [Anschluss] einfach d. Fortsetzung d. Zuflußgerinnes war. D. rechteckige Mündung

befand sich in einer senkrechten Wand und zwar unten d. Wand, so daß d. untere Rand d. Mündung bis an d. Boden d. Gerinnes reichte und d. Seitenwände d. Mündung bis an d. Seiten d. Gerinnes reichten. D. Gerinne hatte eine Breite von 1,135 m. An einer Stelle waren 2 Schützen eingesetzt, welche zwischen sich eine Ausflußöffnung frei ließen von 0,006 m Breite. Diese Schützen dienten als Mittelwand für ein Schutzbrett, welches eine Dicke von 4 cm hatte. D. Versuche und zwar im Ganzen 15 bezogen sich auf verschiedene Werthe d. Öffnungshöhe a und zwar für a = 0,034 m bis 0,174 m. Bezeichnet h d. Höhe d. Oberwasserspiegels bis zur Mündungsmitte, h_1 d. Höhe d. Unterwasserspiegels über denselben Punkt, wobei [illegible] zu beachten ist, daß d. Höhe h_1 gemessen werden muß an d. Stelle, wo d. Unterwasserstand seine größte Höhe hat und wirklich in Ruhe ist. So umfassten dann d. Versuche solche Werthe von $\frac{a}{h_1}$, welche zwischen d. Grenzen 0,17 – 0,85 lagen; d. Werthe von h_2 d. h. d. Höhe d. Oberwasserstands über d. oberen Rand d. Mündung, lagen zwischen d. Werthen 0,09 – 0,42 m. Natürlich ist bei diesem Fall [illegible] folgende Formel zu Grunde zu legen: $V = \mu a b \sqrt{2g(h - h_1)}$. Bornemann versuchte nun d. erhaltenen Werthe von μ, welche sich aus d. sämtlichen Versuchen ergaben, durch eine empirische Formel auszudrücken; d. er gelangte zu: $\mu = \alpha + \beta \frac{a}{h_1}$, wenn d. Coeff. α u. β bestimmt wurden mit Hilfe d. Methode d. kleinsten Quadrate: $\alpha = 0{,}63775$ und $\beta = 0{,}29995$. D. dieser Rechnung entsprechende wahrscheinliche größte Fehler ist: 0,0109. —

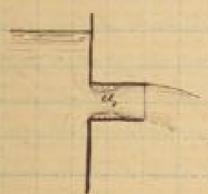
Ausfluß d. Wassers durch Mundstücke.

Betrachten wir zunächst d. Ausfluß aus cylindrischen Ansatzröhren.

Hierbei braucht d. Querschnitt d. cylindrischen Röhre nicht gerade ein Kreis zu sein, es ist dagegen notwendig, daß d. Querschn. derselbe sein soll wie d. Mündung d. Gefäßes; auch innen kann jedenf. d. Mündung eine abgerundete Form haben. Unter diesen Umständen fließt d. Wasser aus d. Mündung genau als ein vollkommener cylindrischer Strahl, eine äußere Contraction findet nicht statt, es ist also $\alpha = 1$ und $\mu = \varphi$.

Wenn diese Röhre so kurz ist, daß von ihrem Leitungswiderstand abgesehen werden kann u. wenn d. innere Mundst. mit einer abgerundeten Fl. stetig in d. innere Gefäßwandfl. übergeht, dann ist erfahrungsmäßig d. Ausflußcoeff. μ kaum verschieden von d. Geschw.-Coeff., welche unter übrigens gleichen Umständen einer Mündung in d. dünnen Wand entsprechen würde; es liegt also dann aber d. Ausflußcoeff. μ zwischen d. Grenzen 0,96 u. 0,99 und zwar wachsend mit d. Druckhöhe.

Ist hingegen d. cylindrische Ansatzröhre scharfkantig an d. Gefäßwand angesetzt. Indem dann das H_2O aus dem Gefäß in diese Ansatzröhre hineinfließt, erfährt es zunächst im Innern d. Röhre



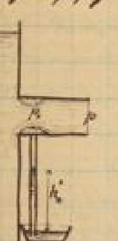
eine Contraction, bevor es sich wieder zum vollen Querschnitt d. Ansatzröhre ausdehnt. Dadurch wird ein nach früheren Betrachtungen zu beurteilender Widerstand verursacht, und es muß dadurch d. Ausflußcoeff. μ merklich kleiner werden als wenn d. cylindrische Röhre mit merklicher Abrundung in d. Gefäßwand übergeht. Bezeichnet man in einem solchen Fall d. Geschw., womit d. Wasser in diesem kleinsten Querschnitt unmittelbar nach d. Eintritt in d. Ansatzröhre mit u_1, mit u diejenige d. Geschw., womit es im vollen Querschnitt d. Ansatzröhre fließt, dann wird durch diesen plötzlichen Übergang d. größeren Geschw. u_1 in u d. kleineren zufolge ein Widerstand verursacht, dessen entsprechende Widerstandshöhe od. Arbeit pr. 1 Kgr. Wasser durch d. Formel ausgedrückt ist: $\frac{(u_1-u)^2}{2g}$. Wird aber eine beliebig lange Ansatzröhre vorausgesetzt, so kommt noch ein Leitungswiderstand d. Röhre hinzu, der ist $= \zeta\frac{u^2}{2g}$ unter ζ d. betreffenden Widerstandscoeff. verstanden. Demnach wird d. gesammte Widerstandshöhe vom kleinsten Querschnitt bis zur Mündung sein:

$$B = \frac{(u_1-u)^2}{2g} + \zeta\frac{u^2}{2g}.$$

Nun verhalten sich aber u_1 und u umgekehrt wie d. Querschnitte also $\frac{u_1}{u} = \frac{1}{\alpha}$ und wird:

$$B = \left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2 - \zeta\right]\frac{u^2}{2g}.$$

Von d. Vorhandensein d. hier vorausgesetzten inneren Contraction kann man sich leicht direkt überzeugen durch einen Versuch, den zuerst Venturi im vorigen Jahrhundert anstellte. Wenn man an dieser cylindrischen Ansatzröhre nahe bei d. Einmündung in dieselben ein kleines Seitenröhrchen anbringt u. dieses nach unten reichen läßt in ein wassergefülltes



Gefäß, so bemerkt man, daß d. Wasser in diese Röhre emporgesaugt wird bis zu einer gewissen Höhe h'; wenn nun an d. Mündung d. eigentlichen cylindrischen Ansatzröhre und in diesem kleinen Gefäß d. nämliche Druck (atm. Druck) herrscht, so folgt aus diesem Aufsteigen d. Wassers, daß d. Dr. in d. cylindrischen Ansatzröhre, da wo dieses Röhrchen angebracht wurde, also p_1 kleiner als p sein wird und zwar ist h' ein Maß für d. Unterschied d. äußeren Dr. p über d. Dr. p_1; es ist:

$$h' = \frac{p-p_1}{\gamma}$$

, vorausgesetzt, daß d. Flüssigkeiten gleiches spez. Gew. haben. Man kann einen solchen Versuch benutzen, vorzugsweise wenn d. Ansatzröhre kurz ist, um d. Contractionscoeff. zu bestimmen. Zunächst soll unter d. Voraussetzung, daß d. Contractionscoeff. α bekannt ist, ein Ausdruck für h' abgeleitet werden. Selbstverständlich ist für irgend einen Querschnitt einer Leitung d. Summe aus Geschw.-höhe und Druckhöhe = d. verfügbar gebliebenen Summe für einen anderen Querschnitt + d. Arbeit d. Massenkräfte und d. Arbeit d. Bewg.-Widerstände; also z. B.: auf d. Wege von d. kleinsten

bis zur Mündung pr. 1 Kgr. Flüssigkeit: für d. Mündungsquerschnitt ist d. Summe aus Geschw.-Höhe und Druckhöhe $= \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma}$ und für d. kleinsten Querschnitt $= \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma}$. Angenommen nun d. Ansatzröhre sei horizontal, dann kommt eine Arbeit von Massenkräften gar nicht in Betracht, die Arbeit d. Wid.-Widerstände ist nichts anderes als d. Widerstandshöhe und zwar ist dieselbe vom kleinsten Querschnitt bis zur Mündung weiter schon mit gebildet worden, sie ist hergekommen: $-\left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+\zeta\right]\frac{u^2}{2g}$.
Folgl. hat man d. Gl.:

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} - \left[\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+\zeta\right]\frac{u^2}{2g}$$

Nun ist d. Saughöhe h' nichts anderes als d. Maß für d. Unterschied d. obere. Druckhöhe $\frac{p}{\gamma}$ und $\frac{p_1}{\gamma}$. Bei kleinen Ansatzröhren braucht sich nicht dort ganz genau dort zu befinden, wo d. größte Contraction stattfindet, weil in d. ganzen Raume, wo nahezu d. nämliche Contr. stattfindet, d. gleiche Dr. herrscht. Es ist also

$$h' = \frac{p}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma}.$$

Dieses läßt sich aber aus d. obigen Gl. berechnen, es wird, da $u_1 = \frac{u}{\alpha}$:

$$h' = \frac{p-p_1}{\gamma} = \left[\frac{1}{\alpha^2}-1-\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2-\zeta\right]\frac{u^2}{2g}$$

Ist nun μ d. Ausflußcoeff. für diese Röhre, hat man also $u = \mu\sqrt{2gh}$, da $\mu = \varphi$ war, so folgt: $\frac{u^2}{2g} = \mu^2 h$ und folgl.:

$$h' = \left[2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)-\zeta\right]\mu^2 h.$$

Hiernach kann man nun h' berechnen, wenn man μ, α u. ζ kennt, insbesondere für eine kurze cylindrische Ansatzröhre, für welche $\zeta = 0$ gesetzt werden kann. Mißt man h', so kann man umgekehrt auch α finden. Wenn diese Höhe h' sich größer ergeben sollte, als d. Höhe h'' d. Ansatzröhrenrand über d. Gefäß, so würde folgen, daß d. Wasser in d. kleinen Gefäß vollständig aufgesaugt würde, dann sollte man einen solchen sich betreffend d. zusammenfließend erscheinenden Flüssigkeitsstrahl zu einem einfachen gemeinschaftlichen Strom. Will man diese Formel dazu brauchen, um α zu ermitteln mit Hilfe von, durch Versuche bestimmte Werte von μ u. h'', so wird man sich unabhängig machen müssen von d. Leitungswiderstand ζ, also d. Mündung so kurz machen, daß man $\zeta = 0$ setzen kann. Thut man dies, indem man d. Röhre höchstens 3 mal so lang als weit macht, so ergibt sich aus obiger Gl.:

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{h'}{2\mu^2 h}.$$

Damit übrigens, wie es hier stillschweigend vorausgesetzt wurde, ein wirklich voller Ausfluß stattfindet, also d. Strahl vom d. Mündung ganz ausfülle, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein: es darf zu dem Ende d. Ansatzröhre nicht übermäßig kurz sein u. d. Druckhöhe nicht übermäßig groß sein. Es fragt sich nun, welches sind d. Bedingungen hierfür? Jedenfalls ist dieses nur so lange möglich, als erst dort, wo d. Dr. am kleinsten ist, für doch einen größeren als 0 ist. Könnte es vorkommen, daß irgendwo d. Dr. d. Wassers sich auf 0 vermindert, so hätte man ja keine Sicherheit mehr für d. ununterbrochene Zusammenhang d. Wassers; eine Bedingung für d. Ausfluß ist also $p_1 > 0$, oder $\frac{p_1}{\gamma} > 0$. Dieses ergibt sich aber aus d. Gl. für h', wo ja $h' = \frac{p-p_1}{\gamma}$ ist, also $h' = b - \frac{p_1}{\gamma}$, wenn $\frac{p}{\gamma} = b$ gesetzt wird. Ist d. ausfließende Flüssigkeit Wasser und erfolgt d. Ausfluß in d. freie Luft, so ist das b d. sogenannte <u>Wasserbarometerhöhe</u> $= 10{,}3$ m und es ist also:

$$\frac{p_1}{\gamma} = b - \left[2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)-\zeta\right]\mu^2 h.$$

Dieser Ausdruck muß nun > 0 sein, um einen vollen Ausfluß zu erzeugen. Demnach ergibt sich eine Grenze für d. höchstens zulässige Höhe h d. Oberwasserspiegels über d. Mitte d. Mündung, es muß nämlich:

$$h < \frac{b}{\left[2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)-\zeta\right]\mu^2}.$$

Hiernach sieht man unmittelbar zweierlei: es wird d. volle Ausfluß unsicher möglich, je kleiner d. äußere Druck und je kürzer d. Röhre ist: je kleiner also b und ζ sind, desto kleiner wird auch dieser Grenzwert h. Insbesondere für eine sehr kurze cylindrische Ansatzröhre, für welche man $\zeta = 0$ setzen kann, ergibt sich d. Bedingung d. vollen Ausflusses:

$$h < \frac{b}{2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\mu^2};$$

dies ist ein Grenzwerth, den besonders Weisbach durch verschiedene Versuche ermittelt hat. – Für ganz sichere Beurteilung dieses Grenzwerthes ist allerdings sehr schwierig, da d. Ausfluß an [illegible] Umständen abhängt, indem d. Ausfluß [illegible]. Was d. [illegible] von α anbetrifft, [illegible] zu [illegible], also α aus dieser Formel zu [illegible], sondern man kann auch α [illegible] Versuche d. ermitteln [illegible].

[illegible] Querschnitt [illegible] d. Arbeit d. [illegible] zwischen diesen Querschnitten, [illegible] Wenn $p_1 = p_0$ [illegible]. An Stelle von $\frac{u_1^2}{2g}$ tritt d. Geschw.-Höhe entsprechend u_0, [illegible] $\frac{u_0^2}{2g}$, [illegible] an Stelle von $\frac{u_0^2}{2g}$ tritt $= 0$ setzen und $\frac{u^2}{2g}$ d. Arbeit d. Schwere auf d. Wege von d. freien Oberfl. bis zur Mündung [illegible] Widerstands- [illegible] Wege. [illegible] Widerstandshöhe [illegible] Querschnitt bis zur Mündung; [illegible] Oberfl. bis zum kleinsten Querschnitt [illegible] Widerstände [illegible] für d. Fall d. Ausflusses aus d. Mündung in d. dünnen Wand. Für diesen Fall wird d. Widerstand gemessen durch einen Geschw.-Coeff. φ und mit Hilfe desselben ist d. entsprechende Widerstandscoeff. $= \frac{1}{\varphi^2} - 1$ und also d. Widerstandshöhe $= \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{u_1^2}{2g}$. D. Widerstandshöhe für d. Strecke vom kleinsten Querschnitt bis zur Mündung ist

[illegible] $= \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta\right]\frac{u^2}{2g}$ und folgt:

$$\frac{u^2}{2g} = h - \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{u_1^2}{2g} - \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta\right]\frac{u^2}{2g}$$

wo da $\frac{u_1^2}{2g} = \frac{1}{\alpha^2}$ ist.

$$\frac{u^2}{2g} = h - \left[\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{1}{\alpha^2} + \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta\right]\right]\frac{u^2}{2g}$$

da nun $u = \mu\sqrt{2gh}$ ist, so ist: $\frac{2gh}{u^2} = \frac{1}{\mu^2}$ also:

$$1 = \frac{1}{\mu^2} - \left(\frac{1}{\alpha\varphi}\right)^2 + \frac{2}{\alpha} - 1 - \zeta$$ und ferner:

$$\left(\frac{1}{\alpha\varphi}\right)^2 - 2\varphi\frac{1}{\alpha\varphi} - \frac{1}{\mu^2} + 2 + \zeta = 0$$ da:

$$\frac{1}{\alpha\varphi} = \varphi + \sqrt{\varphi^2 + \frac{1}{\mu^2} - 2 - \zeta}$$

Hat man es mit einer kurzen Röhre zu thun, für welche $\zeta = 0$ gesetzt werden kann, so kann man μ durch Messung und φ kann man demjenigen gleich setzen, welcher [illegible] gleichen Umständen für d. Ausfluß aus d. feinen Wand gilt. — Was d. [illegible] Ausfluß aus kurzen Ansatzröhren [illegible] Querschnitt [illegible] für $p_0 = p$, [illegible] Mündung [illegible] freien Oberfl. [illegible] allgemeinen Fall [illegible] $h = \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist. [illegible] Coeff. α, [illegible] Ausfluß aus Mündungen in d. dünnen Wand. [illegible] Ansatzröhre eine conisch [illegible] Querschnitt d. cylindrischen Röhre. Für diesen Fall sind [illegible] d. Werthe von μ ermittelt worden für d. Druckhöhe $h = 0{,}23$ bis $0{,}6$ m und für d. Röhrenweite

$d = 0{,}01 \quad 0{,}02 \quad 0{,}03 \quad 0{,}04$ m, während d. Röhrenlänge ungefähr d. 3fache d. Weite betrug, [illegible]. Es ergab sich dann: $\mu = 0{,}843 \quad 0{,}832 \quad 0{,}821 \quad 0{,}810$ welche Werthe in folgender empirischen Formel zusammengefaßt werden können:

$$\mu = 0{,}854 - 1{,}1 d.$$

Diese Resultate sind in befriedigender Uebereinstimmung mit Versuchsergebnissen, d. von anderen Physikern angestellt wurden. —

Vermittelst d. hier später entwickelten Formeln kann man auch in diesen Fällen d. Coeff. α d. inneren Contraction berechnen, wenn man für $\zeta = 0$ setzt und wenn man ferner für φ d. von früher bekannten Durchschnittswerth $\varphi = 0,97$ setzt, wie derselbe für d. Fall d. Ausflusses mit einer kreisförmigen Öffnung in d. dünnen Wand in d. freie Luft gefunden wurde. Dementsprechend ist: $\alpha = 0,661 \quad 0,648 \quad 0,636 \quad 0,624$

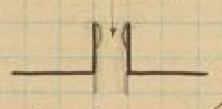
also $\alpha = 0,672 - 1,2\, d.$

Man sieht, daß diese innere Contraction kaum verschieden ist von d. äußeren Contraction, welche unter übrigens gleichen Umständen beim Ausfluß durch eine dünne Wand stattfindet; hier kann d. Mittelwerth von $\alpha = 0,64$ gesetzt werden. D. Widerstandscoeff. für d. Ausfluß d. Wassers mit einer solchen ~~dünnen Wand~~ kurzen zylindrischen Ansatzröhre kann man durchschnittlich $\zeta = 0,5$ annehmen; derselbe ist nämlich $= \frac{1}{\mu^2} - 1$ und es wird d. Annahme $\zeta = 0,5$ entsprechen $\mu = 0,8615$. Es läßt sich hiernach beispielsweise auch folgern, wie hoch durchschnittlich d. Wasser in einem solchen Zweigröhrchen angesaugt werden kann. Setzt man in d. Formel für h' $\zeta = 0$ und $\mu^2 = \frac{1}{1+\zeta} = \frac{2}{3}$, dann findet man, wenn $\alpha = 0,64$ genommen wird (ζ in d. Formel h' bezieht sich auf d. Widerstand unterwegs, ist also $= 0$): $h' = \frac{3}{4} h$; in d. Formel $\mu^2 = \frac{1}{1+\zeta}$ bedeutet ζ d. resultierenden Widerstandscoeff., welcher d. Ausflußcoeff. [illegible].

Was ferner d. Grenze betrifft, welche h nicht überschreiten darf, wenn ein voller Ausfluß zu Stande kommen soll, so ist hier: $h < \frac{b}{2(\frac{1}{\alpha} - 1)\mu^2}$. Die Größe $2(\frac{1}{\alpha} - 1)\mu^2 = \frac{3}{4}$, also $h < \frac{4}{3} b$; wenn also durchschnittlich $b = 10,3$ m ist, so muß $h < 13,6$ m sein. Ist h größer, so ist es gar nicht möglich durch eine kleine Röhre, d. 3mal so lang als weit ist, einen vollen Ausfluß zu erzielen. Oft findet man, daß d. volle Ausfluß schon früher aufhört, dann hat dies darin [illegible], daß d. inneren Wände d. Röhre schlüpfrig sind. Zuweilen kann man d. vollen Ausfluß durch Schütteln herbeiführen. —

Es sind von Weisbach u. Michelotti auch Versuche angestellt worden über μ für kurze zylindrische Ansatzröhren; dabei hat sich ergeben, daß d. Coeff. μ kaum merklich verschieden ist von d. Ausflußcoeff., welcher unter übrigens gleichen Umständen bei einer zylindrischen Ansatzröhre mit kreisförmigem Querschnitt stattfindet. —

Erstreckt sich eine solche Ansatzröhre nach innen hinein, so ist d. innere Contraction bekanntlich bedeutender als bei äußeren Ansatzröhren, es findet hier eine beträchtliche Zusammenziehung



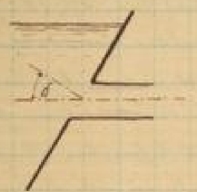
d. Wassers statt. Wenn diese Röhre lang genug ist, so läßt sich erwarten, daß d. Ausflußcoeff. so kleiner sein wird als für eine äußere Ansatzröhre. Für diesen Fall liegen Versuche von Bidone und Weisbach vor, wonach sich ergeben hat: $\mu = 0,71$ annähernd gesetzt, daß d. Wanddicke ~~kleiner~~ [illegible] als für ist, während bei d. äußeren angesetzten Röhre $\mu = 0,82$ war; nimmt man weiterhin an $\varphi = 0,97$ f. d. Geschw.-Coeff., d. sich auf d. Widerstände bis zum kleinsten Querschnitt bezieht, so ergibt sich nach d. Formel $\frac{1}{\alpha\varphi} = \varphi + \sqrt{\varphi^2 + \frac{1}{\mu^2} - 2 - \zeta}$, wenn man darin $\zeta = 0$ setzt für eine kurzen Röhre $\alpha = 0,534$, also auch hier nur sehr wenig verschieden von d. Coeff. d. äußeren Contraction im d. Fall, daß diese zylindrische innere Ansatzröhre so kurz ist, daß d. Strahl sich gar nicht wieder bis zur Mündung ausbreitet. Auch dieser Coeff. ist, wie d. Theorie es verlangt, nur wenig größer als d. Grenzwerth $\alpha = \frac{1}{2}$. Läßt man d. Wanddicke einer solchen Ansatzröhre größer werden, oder versieht man d. Ansatzröhre mit einem umbiegenden Rand, so wächst μ sehr schnell und ist nicht merklich verschieden von d. Coeff. μ für eine äußere Ansatzröhre, wenn d. Breite sich bis zu $\frac{1}{5}$ d. Röhrweite erstreckt. Übrigens ist es schwieriger bei einer solchen inneren Ansatzröhre einen wirklich vollen Ausfluß zu erzielen, wie es auch d. Theorie nach nicht anders zu erwarten ist. Für d. Bedingung d. Möglichkeit d. vollen Durchschnitts-Ausflusses einer (inneren) zylindrischen Ansatzröhre ergibt sich: $h < \frac{b}{2(\frac{1}{\alpha} - 1)\mu^2}$; setzt man hierin $\mu = 0,71$ und $\alpha = 0,534$, so findet man, daß ein voller Ausfluß nur so lange möglich ist, als $h < 1,14\, b$ ist. Bei einer äußeren zylindrischen Ansatzröhre ergibt sich d. entsprechende Bedingung $h < 1,33\, b$ und damit also gezeigt, daß es im Falle einer inneren zylindrischen Ansatzröhre schwieriger ist einen vollen Ausfluß zu erzielen als im Falle einer äußeren Ansatzröhre. —

Auch im Ansatz muss d. innere Contraction, welche beim Ausfluss stattfindet, wenn d. vollkommen ausgebildeten [illegible] Contraction entstehen, wenn aber d. cylindrische Ansatzröhre an eine gleichfalls kreisförmige Wand anschließt, die aber nicht viel größer ist als d. Querschnitt d. Ansatzröhre; so findet eine geschwächte Contraction statt, es ist also in diesem Falle d. Contractionscoeff. größer als bei d. sogenannten vollkommenen inneren Contraction und in diesem Falle ist auch d. Ausflusscoeff. größer. Nach Versuchen von Weisbach über diesen Fall kann man, wenn A d. Querschnitt d. Ansatzröhre, F d. Fl. d. Wand, in welcher d. Ansatzröhre eingesetzt ist und wenn man $n = \frac{A}{F}$ setzt, setzen:

$$\mu = \mu_0 \left(1 + 0{,}102\, n + 0{,}067\, n^2 + 0{,}046\, n^3\right)$$

wo μ_0 d. Ausflusscoeff. unter übrigens gleichen Umständen bei vollkommener innerer Contraction für $n = 0$ bedeutet, also F bedeutend größer als A ist. –

Bezüglich auf d. besondere Anordnung solcher cylindrischer Ansatzröhren ist noch ein Fall bemerkenswerth, d. bei d. Ausfluss mit einer eigentlichen Mündung seine Analogie nicht hat, nämlich, wo d. cylindrische Ansatzröhre an einer ebenen Gefäßwand so angesetzt ist, daß d. Axe d. Röhre einen gewissen Winkel δ mit d. Normalen d. Gefäßwand bildet. In diesem Falle ist d. Ausflusscoeff. μ kleiner als



unter sonst gleichen Umständen für $\delta = 0$. Ist aber μ kleiner, so ist d. Widerstandscoeff. $\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1$ größer als für $\delta = 0$. Von Weisbach ist d. Werth von ζ ermittelt worden bei verschiedenen Werthen δ. Die Werthe, d. sich ergeben, lassen sich durch folgende empirische Formel wiedergeben:

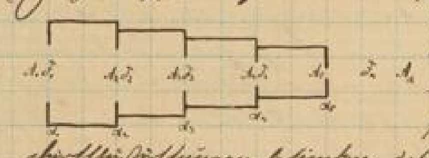
$$\zeta = \zeta_0 + 0{,}303 \sin\delta + 0{,}266 \sin^2\delta.$$

wo ζ_0 d. Widerstandscoeff. für $\delta = 0$ bedeutet. Übrigens möchte, um in solchem Fall einen vollen Ausfluss zu erzielen, bei d. größten Werthen von δ d. Länge d. Röhre beträchtlich größer als 3 mal d. Weite genommen werden. Es wurden deshalb von Weisbach d. betreffenden Versuche mit beträchtlich längeren, schräg angesetzten Röhren ausgeführt. Von d. so gewonnenen ermittelten Widerstandscoeff. ζ wurden dann d. Widerstände abgezogen, d. sich auf den Leitungswiderstand d. Röhre beziehen, und d. Rest ergibt man dann d. Widerstandscoeff., d. sich nur auf d. Eintritt in d. Röhre bezieht. – Andererseits ist es bei d. betreffenden Anwendungen immer d. Fall, daß d. Röhren, welche angesetzt sind, nicht sehr kurz sind, sondern eine größere Länge haben. D. bisher erw. gefundenen Werthe von μ und von ζ beziehen sich dann immer nur auf d. Widerstand, d. durch d. Einströmen d. Wassers in d. Röhre verursacht wird, oder nur auf d. Strecke, deren Länge = 3 fache Rohrweite ist. Zu diesem Widerstand müssen dann d. Widerstände hinzugefügt werden, d. sich auf d. weiteren Verlauf d. Wassers in d. Röhre beziehen. –

Außer solchen cylindrischen Ansatzröhren sind auch noch conisch geformte Ansatzröhren im Gebrauch. Dabei können 2 Fälle unterschieden werden, solche, d. nach außen divergent und solche, d. nach außen convergent sind. Wenn man in allen Fällen unter A d. Inhalt d. äußersten Querschnitts d. conischen Ansatzröhre versteht und somit d. Ausflusscoeff. bezieht auf d. Formel: $V = \mu A \sqrt{2gh}$, dann ist im ersten Fall für eine divergente Ansatzröhre d. Ausflusscoeff. μ unter allen Umständen kleiner als unter sonst gleichen Umständen für eine cylindrische Ansatzröhre; für d. 2te Fall einer nach außen convergenten Röhre aber ist bis zu einer gewissen Grenze d. Convergenzwinkels β d. Ausflusscoeff. μ größer als für d. Ausfluss einer cylindrischen Ansatzröhre und nur wenn d. Winkel

über diese Grenze wächst, wird μ kleiner als für eine cylindrische Ansatzröhre. Dabei ist vorausgesetzt, daß in allen Fällen d. Röhre sich scharfkantig an d. Gefäßwand anschließe und daß d. Röhrenaxe normal gegen d. ebene Gefäßwand sei. Wenn man freilich ein und d. nämliche Röhre einmal als divergente und einmal als convergente Röhre benutzt, so fließt durch diese nämliche Röhre, wenn sie nach außen divergent liegt, auch eine größere Wassermenge ab als umgekehrt, aber bei weitem nicht in d. Verhältniß d. äußeren Querschnitte. Solche nach außen divergente Röhren haben indessen kein weiteres technisches Interesse, sondern nur d. anderen. Werthe d. Ausflusscoeff. und solcher convergenten conischen Ansatzröhren sind ausführliche Versuche gemacht von d'Aubuisson u. Castel. Die ausführlichste dieser Versuchsreihen bezieht sich auf Röhren im folgenden Dimensionen: Es war d. Durchmesser d. Mündung in allen Fällen = 0,0155 m, d. Länge d. Röhre betrug 0,04 m und d. Druckhöhe $H = h = 3$ m. d. Winkel β wurde verändert und zwar zwischen 0 u. 45°. Für verschiedene Werte von β wurden dann durch Versuche ermittelt sowohl d. Ausflußcoeff. als auch d. Geschw. Coeff. φ, ersteren durch Messung d. Wasserquantums, welches in einer gegebenen Zeit ausfließt, letzteren durch Messung d. Gestalt d. Mittellinie d. ausfließenden parabolischen Strahls. Wenn man sich auf Grund dieser Versuche eine Tabelle herstellt, in welcher die zusammengehörigen Werte von μ u. φ für gleichmäßige Intervalle enthalten sind, so erkennt man deutlich, daß μ zunächst wächst bis zu einem max. In d. Versuchen war für $\beta = 0$: $\mu = 0,829$. Läßt man β wachsen, so wächst μ zu und erhält seinen max für $\beta = 13°$. Dieses max beträgt $\mu = 0,945$. Weiter nimmt aber d. Ausflußcoeff. wieder ab und war bei $\beta = 45°$ wieder heruntergegangen bis auf $\mu = 0,857$. Würden d. Versuche noch weiter ausgedehnt, so wäre zu erwarten, daß für $\beta = 55°$ wieder derselbe Wert erhalten wie für $\beta = 0$ und schließlich für $\beta = 180°$ auch wieder $\mu = 0,62$ werden. Dieses Verhalten d. Ausflußcoeff. μ läßt sich leicht erklären. Derselbe ist zu betrachten als d. Produkt eines Contractions- und eines Geschw. Coeff. d. Contractionscoeff. ist bei einer zylindrischen Ausflußröhre, also $\beta = 0$: $\alpha = 1$, je mehr aber β wächst, desto mehr nimmt α ab und für $\beta = 180°$ hat α angenommen bekanntlich 0,64. d. Coeff. φ verhält sich aber gerade umgekehrt. Wenn d. Winkel β von 0 anfangend wächst, so wird offenbar d. innere Contraction ~~kein fehlt~~, welche beim Einfließen in d. Röhre stattfindet, immer geringer und geringer. Diese innere Contraction bei d. Ausflußröhre ist aber vorzugsweise, welche d. Geschw. Coeff. φ bedingt. Dieses besondere Verhalten d. Produkts $\alpha\varphi$ läßt erkennen, daß anfangs d. Geschw. Coeff. in stärkerem Grade wächst als α abnimmt, daß d. Produkt wachsen muß in geringerem Grade jedoch als φ; später jedoch nimmt d. Contractionscoeff. α schneller ab, als φ zunimmt, so daß d. Produkt abnehmen muß, wenn auch in geringerem Grade als α. —

Es erfolge d. Ausfluß durch ein System von n unmittelbar aufeinander folgenden zylindrischen Röhren. d. Querschnitte dieser aufeinanderfolgenden Röhrenstücke seien $f_1\ f_2 \dots f_n$



wobei es gerade nicht nötig ist, daß d. Querschnitte abnehmen. An d. Übergangsstellen von einem solchen Röhrenstück zum andern und ebenso zu Anfang d. ersten und am Ende d. letzten können sich im Allgemeinen auch Scheidewände befinden, in denen sich Durchflußöffnungen befinden, d. Größe derselben seien $A_1\ A_2 \dots A_n\ A$. Fließt d. Wasser durch d. Öffnung A_1 und fließt dann zum Querschnitt f_1 weiter, bevor vorher eine Zusammenziehung d. Flüssigkeitsstrahls stattfinden, so ist hinter A_1 ein kleinerer Querschnitt entstehen. d. Contractionscoeff. hierfür sei α_1 also $A_1\alpha_1$ d. kleinste Querschnittgröße $A_1 \cdot A_2$; d. folgenden weiteren Contractionscoeff. seien $\alpha_2\ \alpha_3 \dots \alpha_n\ \alpha$. Gehen d. Wasser nun aus d. Querschnitt A_1 übergeht in d. Querschnitt f_1, und sind, wenn V d. je Sek. abfließende Wasservolumen bedeutet, d. Geschw. d. Wassers plötzlich übergeht von $\frac{V}{\alpha_1 A_1}$ in $\frac{V}{f_1}$, so wird dadurch ein Widerstand verursacht, welcher zu 1 kg. Wasser d. früheren zufolge gleich zu setzen wäre. Nun: $= \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_1 A_1} - \frac{V}{f_1}\right)^2$; indem ferner d. Wasser vom Querschnitt $\alpha_2 A_2$ in d. Querschnitt f_2 übergeht, also d. Geschw. von $\frac{V}{\alpha_2 A_2}$ in $\frac{V}{f_2}$ übergeht, wird dadurch ein Widerstand $= \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_2 A_2} - \frac{V}{f_2}\right)^2$ verursacht u. s. w. d. Gesamtwiderstand $\mathfrak{B}$ ist demnach:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_1 A_1} - \frac{V}{f_1}\right)^2 + \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_2 A_2} - \frac{V}{f_2}\right)^2 + \dots \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_n A_n} - \frac{V}{f_n}\right)^2$$

$$\mathfrak{B} = \frac{V^2}{2g} \sum_{n=1}^{n=n} \left(\frac{1}{\alpha_n A_n} - \frac{1}{f_n}\right)^2$$

Wenn man im Anschluß mit diesem Gesamtwiderstand d. unterschiedlichen Widerstände außer Acht läßt, so kann man diesen Ausdruck als d. Widerstandsarbeit pro 1 kg. Flüssigkeit im Ganzen betrachten; dies ist dann d. Widerstandshöhe und es ergibt sich d. Widerstands-Coeff. ζ = dieser Widerstandshöhe dividirt durch d.

Ausflußgeschw.-Höhe. Diese Ausflußgeschw. ist d. Geschw. im kleinsten Querschnitt d. ausfließenden Wasserstr.: $= \frac{V}{\alpha A}$, da αA d. letzte Querschnitt ist, also d. Ausflußgeschw.-Höhe $= \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha A}\right)^2$ und demnach:

$$\zeta = \frac{B}{\frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha A}\right)^2} = \sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{\alpha A}{\alpha_m A_m} - \frac{\alpha A}{F_m}\right)^2.$$

Aus diesem Ausdruck für d. Widerstandscoeff. ζ ergeben sich d. Ausflußcoeff. μ und d. Geschw.-Coeff. φ mit d. Gl.:

$$u = \mu\sqrt{2gH} \quad \text{und} \quad V = \mu A\sqrt{2gH}:$$

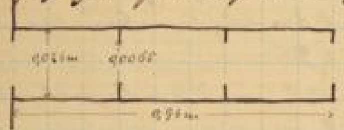
$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} \quad \text{und} \quad \mu = \alpha\varphi.$$

Diese Formel mag nun zunächst auf folgenden Specialfall angewandt werden:
Es seien beispielsweise d. sämmtlichen Wasserquerschnitte untereinander gleich und zwar $= F$, also

$$F_1 = F_2 = F_3 = \dots\dots F_n = F.$$

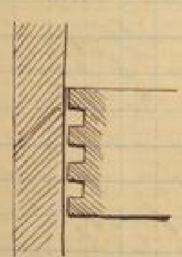
ebenso sei auch:
$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots\dots A_n = A$$
und
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots\dots \alpha_n = \alpha$$

In diesem Falle ist $\zeta = n\left(1 - \frac{\alpha A}{F}\right)^2$. Zur Prüfung dieser Formel, wie überhaupt zur Prüfung d. Anschauungsweise dieser Formel ist ein bemerkenswerther Versuch von Eytelwein zu benützen: Er benutzte ein cylindrisches Ansatzrohr von 0,94 m Länge, welches durch Wände an d. Enden und in d. Mitte in 3 Abtheilungen getheilt war. D. Weite d. Röhre betrug 0,026 m und d. d. kreisförmigen Öffnungen 0,0065 m;



er [illegible] gefunden d. resultirende Ausflußcoeff. $\mu = 0{,}331$ und es fragt sich, ob dieses Resultat in Übereinstimmung ist mit d. Formel für ζ: für diesen Fall ist $n = 3$ und ferner $\frac{A}{F} = \frac{1}{16}$. Hierbei kann man d. Contraction mit genügender Annäherung als eine normale betrachten, man kann also α d. [illegible] entsprechend $= 0{,}64$ setzen. Diese Werthe in obige Formel für ζ eingesetzt giebt: $\zeta = 3\left(1 - \frac{0{,}64}{16}\right)^2 = 2{,}7648$ also $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} = 0{,}5155$ und schließlich $\mu = \alpha\varphi = 0{,}64 \cdot 0{,}5155 = 0{,}330$, also ist vollkommene Übereinstimmung mit d. Versuch. Es kann dieser Versuch namentlich dazu dienen d. hier zu Grunde liegende Anschauungsweise zu bestätigen. — Wenn man diese einzelnen Scheidewände mehr und mehr aneinander rücken läßt, also d. ganze Länge d. Röhre kleiner werden läßt, so zeigt sich anfangs kein merklicher Unterschied von μ; wenn aber diese Verkürzung eine gewisse Grenze überschreitet, so fängt μ an zu wachsen. Dies ist leicht erklärlich, denn es hat hierbei d. Wasserstrahl nicht genügend Zeit, sich wiederum zum vollen Querschnitt d. Röhre auszubreiten bevor er durch d. folgende Öffnung tritt. Deshalb wird derselbe ergiebt als wenn $\frac{A}{F}$ größer wäre. —

Von dieser Vergrößerung d. Widerstandes durch wechselnde Querschnittsänderung läßt sich unter Anderem bei Kolbenliderungen ein nützlicher Gebrauch machen. Es kann nämlich manche Fälle geben, wie z. B. eben bei Kolbenliderungen, daß durch [illegible], d. Durchfluß einer auf d. einen Seite d. Kolbens befindlichen Flüssigkeit nach d. anderen Seite hin möglichst zu erschweren, wo es andererseits durch [illegible] erkennt, d. Kolben eine große Reibung [illegible] zu [illegible]. Diesen Zweck kann man bis zu einem gewissen Punkt damit erreichen, daß man d. Kolben mit einer Anzahl umlaufender Nuthen versieht, wie untenstehende Skizze zeigt. D. Kolben habe also n solcher umlaufender Nuthen, dann ist d. Zwischenraum auf d. einen Seite d. Kolbens getrennt von d. anderen Seite durch eine solche Abschlußbüchse, die hier nur eine Ringform hat. Zunächst wird ein solcher Ringquerschnitt passirt, dann erweitert sich plötzlich d. Querschnitt um ein Bedeutendes und zieht sich darauf gleich wieder zusammen u. s. w. Hier wird man es also mit einer solchen zusammengesetzten Ausflußröhre von ringförmigem Querschnitt zu thun haben. Es seien nun in Allem n solcher Nuthen vorhanden, dann kommen für die Grenzen $2n+1$ verschiedene Querschnitte vor, d. Querschnitte $F_1 = F_3 = F_5 = \dots\dots F_{2n+1}$ sind alle gleich und sehr klein.



Sind d. Nuthen nun alle gleich tief, so sind auch $F_2 = F_4 = \dots\dots F_{2n}$. D. entsprechenden ersten $n+1$ Querschnitte seien mit F_1 bezeichnet, d. anderen mit F_2; besondere Scheidewände kommen [illegible], es sind also alle d. in obiger Formel mit A bezeichneten Größen = F_1, und d. mit F bezeichneten = F_2. Was d. Contractionscoeff. betrifft, so sind sie beim Übertritt = 1, [illegible] = 1 verschieden. Eine Contraction findet nur statt dort, wo d. Flüssigkeit in d. engeren Querschnitt einströmt, es ist also $\alpha_1 = \alpha_3 = \ldots\ldots \alpha_{2n+1}$, wie diese selben oben mit α_1 bezeichnet wurden; im Übrigen dagegen ist: $\alpha_2 = \alpha_4 = \ldots\ldots \alpha_{2n} = 1$ und ebenso d. Coeff. α d. äußeren Contraction. In d. allgemeinen Formel besteht nun ζ aus $2n+1$ Summanden. Von diesen sind $n+1$ unter sich gleich und d. übrigen n auch. D. ersteren erhält man, wenn man d. Index m d. Reihe nach d. Werthe $1, 3, 5 \ldots 2n+1$ beilegt, von denen jeder $= \frac{1}{\alpha_1} - 1$ sein wird, also $(n+1)(\frac{1}{\alpha_1}-1)^2$. D. übrigen n Summanden sind auch unter einander gleich und zwar da $\alpha_m = 1$, $A_m = F$, $F_m = F_2$ ist, $= 1 - \frac{F_1}{F_2}$, also erhält man: $n(1-\frac{F_1}{F_2})^2$ und folgt: $\zeta = (n+1)(\frac{1}{\alpha_1}-1)^2 + n(1-\frac{F_1}{F_2})^2$.

Was d. Coeff. α_1 betrifft, so muß man berücksichtigen, daß d. Contraction überall dort, wo d. Flüssigkeit in einen engeren Querschnitt eintritt, nur eine partielle Contraction ist, dagegen ist d. weitere Flüssigkeit verhältnißmäßig [illegible], es ist für d. Verhältniß d. Contraction ungefähr $= \frac{1}{2}$. Nimmt man also d. Contractionscoeff. α_1 = denjenigen an, welcher unter sonst gleichen Umständen bei vollständiger Contraction stattfindet, multiplicirt mit $(1 + 0{,}155 \cdot \frac{1}{2})$. D. Contractionscoeff., welcher unter sonst gleichen Umständen bei vollständiger Contraction stattfindet, kann auch hier wieder $= 0{,}64$ gesetzt werden, also:

$$\alpha_1 = 0{,}64(1 + 0{,}155 \cdot \tfrac{1}{2}) = 0{,}6896.$$

mit diesem Werth wird $(\frac{1}{\alpha}-1)^2 = 0{,}2025$ also abgerundet $= 0{,}2$, und somit ergibt sich:

$$\zeta = \left[0{,}2 + \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)^2\right] n + 0{,}2$$

D. Verhältniß $\frac{F_1}{F_2}$ ist meist sehr klein, so daß es gegen 1 vernachläßigt werden kann; dann ist: $\zeta = 1{,}2n + 0{,}2$ und zwar

für n =	2	4	6	8
ist ζ =	2,6	5	7,4	9,8
$\mu = \varphi$ =	0,527	0,408	0,345	0,304

und somit nach d. Formel $\mu = \varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$

und endlich: $V = \mu A \sqrt{2gH}$ wenn A sehr klein ist. —

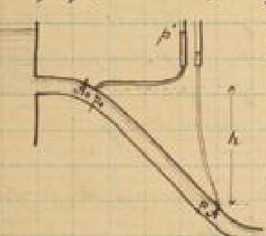
Bewegung des Wassers in längeren Röhren.

Es fließe jetzt d. Wasser in einer geraden od. nur schwach gekrümmten längeren cylindrischen Röhre; d. Länge derselben, $= l$, sei so groß, daß d. Leitungswiderstand derselben einen wesentlichen und in manchen Fällen d. hauptsächlichsten Bestandtheil d. Gesammtwiderstandes ausmacht. Dieser Leitungswiderstand, welcher von d. innern und äußeren Reibungen abhängt, ist erfahrungsmäßig nur vom d. Dr. ganz unabhängig und unterscheidet sich dadurch wesentlich von d. Reibung 2 fester Körper. Es ist dadurch nachgewiesen, daß man d. äußeren Druck an d. Oberfl. d. Wassers und an d. Mündung d. Röhre um beliebig vergrößerte und zwar um mehr als 1 Atm., es fand sich dadurch nicht im Geringsten eine Änderung im Leitungs-Widerstand. Es unterscheidet sich aber d. Zustand d. Wassers in verschiedenen Querschnitten d. Röhre durch weiter nichts als durch d. verschiedenen Druck u. da dieselbe keinen Einfluß hat auf d. Leitungswiderstand d. Röhre, so ist d. Leitungswiderstand einfach proportional d. Länge, also d. Leitungswiderstand pr. Längeneinheit in allen Stellen d. Röhre gleich, es kann also derselbe $= l\,B$ gesetzt werden, wo B d. Leitungswiderstand pr. Mtr. Länge bedeutet, wobei es ganz gleichgültig ist, ob in d. ersten Leitungseinheit ein grösserer Druck herrscht, als in d. letzteren. Außer diesem Leitungswiderstand können auch noch besondere Widerstände vorkommen, wie früher besprochen ist, ein besonderer Eintrittswiderstand; ist seine Höhe $\zeta \frac{u^2}{2g}$ d. übrigen [illegible] Widerstandshöhe, dann ist: $B = \zeta\frac{u^2}{2g} + B_1 l$. — Gesammtwiderstandshöhe für d. Last. in d. Röhre, wo u d. mittlere Wassergeschw. bedeutet. —

Es handelt sich nun zunächst darum, durch Versuche d. Grösse B_1 zu ermitteln, also d. Leitungswiderstandshöhe. Es kann dies auf verschiedene Weise geschehen. Erinnern wir uns d. Grundformel: $\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - B$, welche Formel sich bezieht auf d. Last. von einem beliebigen Querschnitt d. Rohrleitung bis zu einem anderen, u d. mittlere Geschw. im Endquerschnitt und u_0 d. im Anfangsquerschnitt, H d. wirksame Druckhöhe für d. ganze Rohrstrecke und B d. Widerstandshöhe. — Bezieht man nun diese Gl. auf d. Last. von d. Oberfl. d. Wassers im Gefäß bis zur Mündung d. ganzen Röhre, so ist $u_0 = 0$ und $B = \zeta\frac{u^2}{2g} + lB_1$ also:

$$H = (1+\zeta)\frac{u^2}{2g} + lB_1 .$$

wo H in diesem Falle $= h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist, unter p_0 d. äussere Druck an d. freien Oberfl. d. Wassers im Ausflussgefäß und p an d. Mündung, während h d. Höhe d. freien Wasseroberfl. im Ausflussgefäß über d. Schwerpunkt d. Mündung od. dem Unterwasserspiegel bedeutet. Diese Gl. in Verbindung mit $u = \frac{V}{F}$ kann dazu dienen, d. Grösse B_1 zu ermitteln, wenn d. Grössen l, d. wirksame Druckhöhe H und d. Querschnitt F bekannt sind und wenn man ferner durch Versuche d. pr. Sek. ausfließende Wasservolumen V misst und d. Coeff. ζ kennt. Natürlich wird man d. Versuche so anstellen, daß derartige besondere Widerstände nicht viel vorkommen. Dann kann man B_1 in jedem Fall ermitteln und thut man dies für möglichst viele verschiedene Fälle, so wird sich ein empirisches Gesetz ergeben, wie B_1 von d. verschiedenen Umständen abhängig ist. — Dieses Verfahren ist insofern bedenklich [illegible] zu ersetzen, indem man dieses zunächst abhängig ist von d. Fehlern d. d. B_1 und V u. ζ [illegible]. D. Versuche sind nun so angestellt worden, daß man von diesen Mängeln möglichst unabhängig war.



Es wird eine beliebig lange Röhre genommen, A_0 u. A seien 2 Querschnitte derselben, und deren Länge A_0 bis A sei l. Es werden nun mit dieser Leitungsröhre 2 beliebig enge Zweigröhren verbunden mit einem [illegible] verbunden und diese werden [illegible] oben offenen Glasröhren geführt, d. unten [illegible]. Es wird dann d. Wasser in diesen Glasröhren verschieden hoch stehen. Nun besteht eine ganz einfache Beziehung zwischen d. Differenz dieser Wasserhöhen und d. gesammten Widerstandshöhe für d. Rohrstrecke $A_0 A$. Es sei p_0 d. Dr. in A_0 und p d. in A; p' sei d. äussere atm. Druck, an d. Glasröhren sich befinden. Dann ist d. Höhe d. Wasserspiegels in d. ersten Glasröhre über A_0 einfach ein Maß für d. Unterschied d. Druckes p_0 über p', d. h. es ist d. Höhe d. Wassers in d. Glasröhre über $A_0 = \frac{p_0 - p'}{\gamma}$, folglich ist d. Höhe d. Wasserspiegels in d. ersten Glasröhre über d. ersten Querschnitt d. Leitungsröhre um h größer als $\frac{p_0 - p'}{\gamma}$. Andererseits ist d. Höhe d. Wasserspiegels in d. 2ten Glasröhre über A ein Maß für d. Unterschied d. Druckes p über p' also $= \frac{p - p'}{\gamma}$. Zieht man d. Höhe d. Wasserspiegels in d. 2ten Glasröhre über A ab von d. ersten über A, so erhält man d. Höhendifferenz: $h + \frac{p_0 - p'}{\gamma} - \frac{p - p'}{\gamma} = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = H$ d. h. = d. wirksamen Druckhöhe für d. Rohrstrecke $A_0 A$; die mittlere Geschw. u_0 ist $= u$, also ist $H = B$. Wählt man d. Stellen A_0 u. A so, daß d. Strecke $A_0 A$ gradlinig ist, also kein besonderer Widerstand vorkommen, so ist $B = lB_1$, also $B_1 = \frac{H}{l}$ und man wird B_1 um so genauer finden, je größer H ist. —

Diese Versuche zur Bestimmung von B_1 sind hauptsächlich mit gusseisernen Röhren von kreisförmigem Querschnitt angestellt worden, jedoch sind auch Versuche mit gezogenen schmiedeeisernen Röhren, ferner mit Messing-, Zink-, Blei-, Asphalt-, Glas- und Holzröhren angestellt worden, welche Versuche erkennen lassen, daß bei [illegible] Gestalt und Beschaffenheit d. Röhren, d. Material nicht viel auf d. Leitungswiderstand [illegible]; sind jedoch d. Röhren rauher, so ist d. Leitungswiderstand größer z. B. bei rauhen Holzröhren ist d. Leitungswiderstand $1\frac{3}{4}$ mal so groß wie bei guten Eisenröhren. Sind d. Röhren

ab, also jener mit Stoß und Schwere beschäft., so kann d. Leitungswiderstand nicht doppelt messen.
Um eine Formel für d. Abhängigkeit von R_1 zu finden, müssen alle [illegible] eigentümlichen Rauhheit d. Wandung [illegible] ausgeschlossen werden von d. Versuchen, denn da diese Abweichung [illegible] nicht bezüglich auf ihren Grund definiert werden können, so hat eine solche Formel gar keinen Wert und [illegible] nicht d. Mangel d. in d. Praxis [illegible] angewandten Leitungsröhren kann man sich dann entschließen, d. Größe R_1 um einen Procente d. Sicherheit wegen zu vergrößern.
Man ist, in d. Absicht für d. Größe R_1 eine empirische Formel aufzustellen, zunächst von d. Vorstellung ausgegangen, daß d. Wasser sich wie ein [illegible] cylindrischer Körper durch d. Röhre hindurchbewegt, man hat also d. Geschw. u als eine [illegible] in allen Punkten d. Querschnitts wirkende Geschw. betrachtet. Geht man nun hiervon aus, so besteht d. Leitungswiderstand lediglich in d. Reibung dieser Wassermasse an d. inneren Rohrwand. Bezeichnet man dann diese Reibung pr. [illegible] d. Rohrwand mit R' u. d. Umfang d. inneren Querschnitts mit U, so ist $R'U$ d. Leitungswiderstand pr. Längeneinheit d. Röhre. D. Arbeit dieser Reibung ist dann pr. Sek. $= R'Uu$.
Setzen aber d. pr. Sek. durch jeden Querschnitt d. hindurchfließende Wassergew. $= \gamma F u$ ist, so ist d. Arbeit d. Leitungswiderstandes pr. 1 kg. Wasser: $B_1 = \frac{R'U}{\gamma F}$. Ist insbesondere d. Querschnitt kreisförmig vom Durchmesser d, so ist: $U = \pi d$ und $F = \frac{\pi d^2}{4}$ also $B_1 = \frac{R'}{\gamma}\cdot\frac{4}{d}$.
Man kann sich aber auch derselben Formel bedienen, wenn d. Querschnitt eine andere Gestalt hat, wenn man dann nur unter d d. sog. mittleren Durchmesser versteht, unter dem also $d =$ d. ~~[illegible]~~ 4 fachen Inhalt dividiert durch d. Umfang d. Querschnittes bedeutet. [illegible] dieser Leitungswiderstand [illegible] zunächst d. Rohrweite d umgekehrt proportional ist, suchte man nun aus d. Resultaten $\frac{R'}{\gamma}$ als eine empirische Function d. Geschw. u darzustellen.
Es sind namentlich d. Beobachtungen von Couplet 26 von Bossut u. 18 von Dubuat, welche zu diesem Zwecke vorzugsweise benutzt wurden; hierbei ist es immer von Wichtigkeit zu wissen, zwischen welchen Grenzen d. maßgebenden Größen sich bei solchen Versuchen bewegt haben. Es sei deshalb bemerkt, daß bei allen diesen Versuchen d. Rohrweite d zwischen d. Grenzen $d = 0{,}027$ bis $0{,}49$ m lag und daß $u \leqq 2$ m. Auf Grund dieser Versuche sind nun sehr mannigfache empirische Formeln für d. Größe $\frac{R'}{\gamma}$ aufgestellt worden. Die erste solche Formel von einiger Brauchbarkeit rührt her von d. Wasserbaudirector Woltmann aus Hamburg; derselbe legte d. Formel zu Grunde:

$$\frac{R'}{\gamma} = a u^n$$

[illegible] $n = \frac{7}{4}$; einige Jahre später 1796 modificierte Eytelwein diese Formel dahin, daß er $n = \frac{35}{18}$ setzte. Noch später wurde dieselbe Formel von St. Venant zu Grunde gelegt und da derselbe d. [illegible] sorgfältigsten bestimmte, so soll dieselbe vollständig angegeben werden; sie war:

$$\frac{R'}{\gamma} = 0{,}0002956\, u^{\frac{12}{7}} \quad (\text{Längeneinheit} = \text{m}).$$

Schon im Jahre 1802 legte jedoch Prony eine andere Formel zu Grunde, nämlich

$$\frac{R'}{\gamma} = au^2 + bu$$

worin zu setzen ist: $a = 0{,}000348$ und $b = 0{,}0000173$.
Auch Eytelwein schloß sich später dieser Formel an, er bestimmte aber d. Coeff. auf Grund derselben Versuche wesentlich anders, er setzte: $a = 0{,}000280$ und $b = 0{,}0000224$.
d'Aubuisson [illegible] d. sogenannten 51 fundamentalen Versuche [illegible] und bestimmte d. Coeff. wieder anders, nämlich: $a = 0{,}000343$ und $b = 0{,}0000188$.
Weisbach ging von vornherein von einem andern Ausdruck aus, er setzte:

$$B' = \zeta \frac{u^2}{2g}$$

, worin ζ d. Leitungscoeff. pr. Längeneinheit d. Röhre bedeutete. Unter einem solchen wird allgemein diejenige Zahl verstanden, mit welcher d. Geschw.-Höhe d. Wassers multipliciert werden muß, um d. [illegible] zu erhalten. Setzen wir diesen Coeff., entsprechend d. vorher [illegible] zu Grunde liegenden Auffassungsweise, d. Durchmesser d umgekehrt proportional gesetzt wird, ergibt sich:

$$B' = \frac{\lambda}{d}\,\frac{u^2}{2g}$$

wo λ auch ein empirisch zu bestimmender

Coeff. d. Vergleicht man d. beiden Ausdrücke für R, mit einander, so folgt:

$$\lambda = \frac{2g}{u^2}\,\frac{4R'}{r} = \frac{8g}{u^2}\,\frac{R'}{r}.$$

Wenn also nun nach Prony $\frac{R'}{r} = au^2 + bu$ gesetzt wird, so ist $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{u}$, wo $\alpha = 8ga$ und $\beta = 8gb$ ist. Später nun hat Weisbach außer diesen 51 Leitungsröhren noch 12 weitere Versuche mit hinzugezogen, von denen 11 von ihm selbst und einer von Gueymard in Grenoble angestellt sind, wobei d. Mittelgeschw. des Wassers erheblich größer war als früher, nämlich bis zu 4,6 m pro Sek.; so ist nun ein weiterer Spielraum schließlich entstanden war. Damit bestimmte Weisbach ein genaueres Gesetz auf Grund dieser 63 Versuche. Er erkannte, daß eine bessere Anschließung an d. Gesamtheit d. Versuche erzielt werden konnte, wenn d. Coeff. λ nicht $= \alpha + \frac{\beta}{u}$ gesetzt würde, sondern $= \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{u}}$; indem für d. Coeff. α u. β auf Grund dieser 63 Versuche mit Hilfe d. Methode d. kleinsten Quadrate ihr wahrscheinlichster Wert bestimmt wurde, fand sich:

$$\lambda = 0{,}01439 + \frac{0{,}009471}{\sqrt{u}}.$$

Später sind von Weisbach Versuche angestellt worden mit Glas-, Messing- und Zinkröhren, welche eine Geschw. umfaßten von 21 – 22 m pro Sek. Obgleich dieselben Versuche ganz genügende Übereinstimmung mit dieser Formel zeigten, ließ sich aus diesen Versuchen noch ein weiterer Einfluß erkennen; sie zeigten, daß λ nicht nur v. Wassergeschw. abhängig sei, sondern in demselben Sinne wie von u, d.h. es ist λ um so größer, je kleiner u u. d sind, wenn auch d. Einfluß d. Rohrweite nicht in so hohem Grade stattfand, wie d. von u. —

Noch zahlreichere Leitungsröhren sind von d. französischen Ingenieur Darcy an d. Wasserleitung Chaillot in Paris angestellt worden. Es wurden dabei im Ganzen 22 verschiedene Röhrenleitungen benutzt, welche theils aus Gußeisen, theils aus gezogenem Schmiedeeisen, theils aus Glas- u. Asphalt-Röhren bestanden. Alle diese Röhren waren neu u. doch einige theils gereinigt mit Ausnahme von 3 gußeisernen Röhrensträngen, d. schon lange im Gebrauch waren. Da diese Versuche in d. Praxis am meisten benutzt werden sollen, so sollen d. Umstände zunächst charakterisiert werden, unter denen sie angestellt wurden. D. bei d. Versuchen benutzten Asphaltröhren waren von solcher Art, wie sie in Frankreich vielfach benutzt werden: sie sind aus Eisenblech zusammengelegt, am Rande vernietet, dann mit Zinn überzogen, und schließlich innen und außen mit Asphalt versehen. Die einzelnen Röhrenstücke wurden in einander eingeschraubt; d. eisernen gezogenen und d. Glasröhren waren durch übergeschobene Muffen mit einander verbunden und d. Bleiröhren durch Lötung. D. Röhrenstränge, an denen d. Versuche vorgenommen wurden, waren meistens etwas über 100 m lang, nur d. Glas- und Bleiröhren waren etwa halb so lang. D. Durchmesser der einzelnen Leitungen zwischen $d = 0{,}012$ bis $d = 0{,}5$ m; d. mittlere Geschw. d. Wassers lag zwischen d. Grenzen $u = 0{,}16$ m bis 5 m pro Sek. Es lagen also sowohl d. Rohrweiten, wie d. Geschw. zwischen ziemlich weiten Grenzen. Darcy entdeckte aus seinen Versuchen nun zunächst, daß d. Leitungswiderstand in höherem Grade vom Material und vom Oberflächenzustand abhängig sei, als bisher angenommen wurde und daß d. Einfluß d. Materials mehr und mehr schwindet, je länger d. Röhren im Gebrauch sind und durch solche Verunreinigung, wie sie immer in mehr oder weniger hohem Grade nach längerer Zeit entsteht, soll d. Widerstandshöhe noch größer als um doppelten Betrag wachsen. Diese Verunreinigung hängt jedoch von so vielen verschiedenen Umständen ab, so daß man an d. Grad d. Verunreinigung keine Voraussetzung machen kann; überhaupt kam es Darcy nicht so sehr darauf an, d. Gesetz d. Leitungswiderstandes selbst näher zu bestimmen, als es ihm nur darauf ankam, gewisse empirische Regeln aufzustellen, nach welchen d. Leitungswiderstand im ursprünglichen Zustand und nach längerer Zeit Gebrauch beurtheilt werden kann. In diesem Sinne empfiehlt Darcy zu setzen:

$$\frac{R'}{r} = \left(0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{d}\right)u^2.$$

Diese Formel bezieht sich auf Leitungsröhren, d. schon längere Zeit in Gebrauch waren; es ist vorausgesetzt, daß hierbei $u > 0{,}2$ m sei. Es wird nach dieser Formel $\frac{R'}{r}$ ungefähr doppelt so groß gefunden, als bei neuen gußeisernen Röhren.

Mit Rücksicht auf d. Beziehung zwischen λ und $\frac{R'}{r}$, wäre also hiernach λ von d. Form $\alpha + \frac{\beta}{d}$, während also, wie man früher annahm, λ nur mit abnehmender Geschw. wächst. Während nach d.

Weisbach'schen Versuchen k mit abnehmendem u u. d wachsen würde, während nach Darcy k einzig und allein mit abnehmender Rohrweite wachsen, wie auch von Weisbach d. Gesetz d. Abhängigkeit nicht bestimmt. Es sind nun diese Darcy'schen Versuche später von Andern benutzt worden, um es zu versuchen, d. Gesetz d. Widerstandes noch genauer zu bestimmen. Zunächst ist ein solcher Versuch von Gauckler gemacht worden. Er schloss aus d. Darcy'schen Versuchen, daß sich für B_1 folgende empirische Formel ergibt:

$$B_1 = \left(\frac{u^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{4} u^{\frac{1}{4}}}{\alpha\, d^{\frac{3}{8}}}\right)^4.$$

wenn u d. mittlere Geschw., d d. Rohrweite bedeutet, während α ein Coeff. ist, welcher für verschiedenartige Röhren und verschiedenen Zuständen derselben verschieden ist, und zwar bestimmt Gauckler für Asphalt- und Bleiröhren $\alpha = 7{,}0$; für Glas $\alpha = 6{,}7$; für neue Gusseisenröhren $\alpha = 6{,}6$; für gezogene Eisenröhren $\alpha = 6{,}4$; für unreine Gusseisenröhren $\alpha = 5{,}5$. Hiernach wäre d. ungünstigste Verhältniss d. Widerstandshöhe B_1 für gusseiserne Röhren in unreinem Zustande über d. günstigsten: $=\left(\frac{6{,}6}{5{,}5}\right)^4 = 2{,}07$. Vergleicht man diesen Ausdruck für d. spec. Leitungswiderstandshöhe mit d. Ausdruck für $B_1 = \frac{k}{d}\,\frac{u^2}{2g}$, dessen wir uns bis jetzt vorzugsweise bedienen wollen, so folgt daraus:

$$k = \frac{2g}{\alpha^4}\,\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{4u^{\frac{1}{4}}}\right)^4}{d^{\frac{1}{2}}}.$$

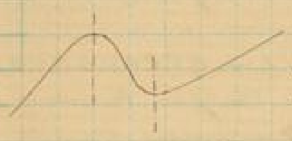
Demzufolge würde d. Coeff. k in Uebereinstimmung mit d. früher besprochenen Erfahrungen desto mehr so größer sein, je kleiner u ist; was aber d. Abhängigkeit von d betrifft, so ist sie eine zusammengesetzte; d. Zähler und d. Nenner wächst mit d, es zeigt sich jedoch, daß es für jede Geschw. einen bestimmten d gibt, für welchen k ein Min. wird. Wenn man bei gegebenem Werth von u diesen Ausdruck als eine Funktion von d betrachtet und untersucht, für welchen Werth von d dieser Ausdruck ein Min. wird, so findet man $d = \frac{4}{11}\,u^{\frac{1}{4}}$. Es würde also, wie [illegible] ist, nach dieser Formel für jede mittlere Geschw. eine besondere Rohrweite [illegible], für welche d. Geschw. [illegible] wäre,

also für:	$d =$	0,346	0,364	0,432	0,514 m
für:	$u =$	0,5	1	2	4

Diese Formel scheint auch keine [illegible] für d. Gebrauch, vorausgesetzt kann sie als d. [illegible] Abhängigkeitsgesetz d. Widerstandshöhe betrachtet werden. Auch ist zu bemerken, daß d. Coeff. α, welche für d. verschiedenen Rohrweiten verschieden sind, nicht nur in sich begreifen d. Einfluss d. verschiedenen Materials und d. verschiedenen Oberfl.-Beschaffenheit, sondern auch d. bei diesen verschiedenen Arten vorkommenden Abweichungen von d. cylindrischen Form, welche mehr oder weniger zufällig sind. Zur Bestimmung von α sind von Gauckler durchaus nicht d. Versuche mitgetheilt worden, welche von keinem [illegible] Werth sind, namentlich d. Versuche an Glasröhren sind nicht gut zu brauchen, da dieselben immer nicht zutreffen, so daß d. [illegible] zwischen 53 u. 44 mm schwankte, womit also [illegible] [illegible] Querschnittsänderungen verbunden sind. Ebenso verhält es sich mit d. Asphaltröhren; diese konnten kaum mit Sicherheit benutzt werden, um d. Abhängigkeitsgesetz von B_1 zu ermitteln, weil d. Asphalt nur [illegible] in [illegible] Zustande aufgetragen wurde und nicht immer [illegible] wurde. Auch d. Versuche mit d. gezogenen Röhren hätten kaum verwendet werden dürfen, weil d. [illegible] schon einen [illegible] Einfluss [illegible] konnten. D. Formel ist demnach als theoretische nicht gut verwendbar. —

D. Leitungswiderstandshöhe B_1 kann auch von andern Umständen abhängig sein. Daß zunächst d. Abh. [illegible] damit [illegible] ist klar; jedoch wollen wir uns nur auf d. Versuche mit Wasser begrenzen. D. Größe B_1 kann auch von d. Wärmezustande abhängen, welcher wiederum von d. [illegible] der Temperatur abhängt. Daß d. [illegible] keine erhebliche Änderung [illegible], ist schon gesagt [illegible] also nur eine Änderung von B_1 durch d. Temperatur denkbar. Es wurde auf diesen Umstand schon im Jahre 1800 von Gerstner hingewiesen und zwar wurde nachgewiesen, daß d. Menge d. durch eine enge Röhre abfliessenden Wassers unter sonst gleichen Umständen sich verdoppeln kann, wenn d. Temperatur um 30° C. wächst. Dieser merkliche Einfluss d. Temperatur ist später von Oberbaurath Hagen in Berlin beobachtet worden, freilich auch nur mit Röhren von geringer Weite

[illegible] in d. Versuchsanordnung [illegible] und für [illegible] Geschw. Er benutzte bei seinen hauptsächlichen Versuchen 3 verschiedene Röhren; sie waren alle aus Messingblech zusammengelötet und über Dornen [illegible] cylindrisch ausgezogen. Diese 3 sehr cylindrischen, innerlich glatten Röhren hatten einen Durchmesser von 2,8, 4 u. 6 mm, d. engste war 0,5 m lang, d. beiden anderen über 1 m. D. Geschw. u bewegten sich in d. Grenzen 0,07 – 0,88 m und d. Temperatur d. Wassers wurde variiert über 67° R.
Es zeigte sich nun ein [illegible] interessantes Verhalten: Wenn unter sonst gleichen Umständen d. Temperatur d. abfließenden Wassers stufenweise höher wurde, so nahm zuerst d. z. Zt. ausfließende Wassermenge ab, bis zu einem gewissen max. zu; wurde dann ferner d. Temperatur d. Wassers weiter erhöht, unter sonst gleich bleibenden Umständen, so nahm d. Wassermenge [illegible] ab [illegible], bis zu einem gewissen min. Wurde ferner [illegible] d. Wassermenge [illegible], so ist d. Geschw.-Curve, deren Abscissen d. Temperaturen und deren Ordinaten d. Geschw. u sind, [illegible] Gestalt [illegible]. D. beiden Temperaturen, bei d. max. u. min. von u entsprechen, liegen 10° bis 20° auseinander. D. Lage dieser Temperaturen ist [illegible] abhängig von d. Röhren und d. mittleren Geschw. Je größer u u. d waren, desto tiefer lagen diese Temperaturen; wuchsen u u. d über gewisse Grenzen, so kann es vorkommen, daß diese Temperaturen bis unter d. Gefrierpunkt sinken, so daß dann überhaupt nur d. zweite Abschnitt dieser Geschw.-Curve zu Tage tritt. Dies ist nun unter solchen Umständen, d. in d. Praxis vorkommen, fast immer d. Fall. Es würden diese beiden Temperaturen unter d. Nullpunkt [illegible], sobald nur $ud > 0{,}00575$ ist, und dies wird bei d. Verhältnissen d. technischen Anwendungen fast immer d. Fall sein. Für diesen sogenannten 2. Abschnitt d. Geschw.-Curve [illegible] d. ersten Abschnitt, d. h. d. [illegible] Abschnitt. – Es zeigt sich aus d. Hagen'schen Versuchen, wenn sie [illegible] werden mit d. Formel: $B_1 = \frac{k}{d}\frac{u^2}{2g}$;



$$k = \frac{0{,}000496\,(22{,}6-\sqrt{t})}{\sqrt{ud}},$$ wenn t d. Temperatur d. Wassers in Reaumur'schen Graden bedeutet.
Es würde daraus d. einfachere Formel: $k = \frac{0{,}01}{\sqrt{u}}$ entsprechen für $t = 6°$ R. Außerdem ist nach diesen Hagen'schen Versuchen d. Geschw. von u u. d abhängig; für d. ersten Abschnitt d. Geschw.-Curve, also für solche Temperaturen, d. kleiner sind als d. dem max. von u entsprechenden [illegible] Leitungswiderstandes entsprechen, ergab sich ein anderes Gesetz dieses Widerstandes. Hagen stellt d. Widerstandshöhe für diesen Fall in Grenzen mit verschiedenen [illegible] her, [illegible] Größe ist nur [illegible] $B_1 = b\frac{u}{d^2}$ unter b einen von d. Temperatur abhängigen Coeff. verstanden, [illegible] also: $k = \frac{\beta}{ud}$ ist; d. Coeff. b u. β sind [illegible] in anderer Weise von d. Temp. abhängig als d. Ziffern von k für d. 2te Abschnitt [illegible], und [illegible] ergab sich für d. 2te Abschnitt:

$$\beta = \beta_0(\sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{t}). -$$

Man hat also nur [illegible] eine [illegible] Widerstandsformel, und es fragt sich, welcher Formel man d. Vorzug geben soll, wenn man d. beiden [illegible]: [illegible] und [illegible] mit einander verbinden kann, so ist dies natürlich am besten. Dies hat Hagen [illegible], nämlich d. Darcy'schen Versuche zu benutzen, um daraus d. Abhängigkeitsgesetz d. Widerstandes in wissenschaftlicher Weise aufzuklären und doch eine Formel zu erlangen, d. für d. praktischen Gebrauch geeignet ist. Hagen ging von d. Ansicht aus, daß d. [illegible], welche bis jetzt bezüglich auf d. Leitungswiderstand [illegible] bestanden, daß man bei d. [illegible] Versuchen nicht sorgfältig genug alle d. Umstände [illegible] hatte, d. nicht zum Gebrauch geeignet waren. Hagen hat nun alle diejenigen von d. Darcy'schen Versuchen ausgeschieden, welche nicht d. volle Genauigkeit hatten, er wurde zunächst ausgeschieden d. [illegible], d. [illegible] und [illegible] d. [illegible] Röhren [illegible]; er blieben also nur d. Versuche übrig mit d. [illegible] gußeisernen Röhren, ferner mit 3 [illegible] und mit einer gezogenen eisernen Röhre von größerem Durchmesser, im Ganzen 8 gußeiserne Leitungsröhren, eine [illegible] und eine gezogene Röhre. Mit diesen verschiedenen Röhren lagen nun 87 [illegible] Beobachtungen vor, um einen Ausdruck für d. Leitungswiderstandshöhe zu gewinnen. Bei diesen Versuchen lag d. mittlere Geschw. zwischen d. Grenzen

$u = 0{,}16$ bis 5 m p. Sek. und d. Rohrweiten zwischen $d = 0{,}014$ bis 0,5 m. Unter verschiedenen empirischen Formeln zur Darstellung d. Abhängigkeit d. Größe B_1 zeigte sich am brauchbarsten folgende:

$$B_1 = a\frac{u^2}{d} + b\frac{u}{d^2}$$

wenn aus d. 87 Versuchen sich ergaben:

$$a = 0{,}0011193 \text{ und } b = 0{,}0000005336.$$

[illegible] Hagen diesen unmittelbar aus d. sorgfältigen Darcy'schen Untersuchungen abgeleiteten Werthen von a u. b [illegible] Correction, um sie mit seinen eigenen Beobachtungen besser in Übereinstimmung zu bringen. Betrachtet man letztere Formel für B_1, so erkennt man, daß [illegible] d. 2te Glied überwiegend d. erste sein wird [illegible]; es lässt sich deshalb erwarten, daß bei solchen Versuchen, welche enge Röhren beobachtet wurden, B_1 genau bestimmt werden kann. Bei d. Versuchen von Hagen betrugen d. Röhrenweiten nur einige mm. und [illegible] auch eine gewisse Sorgfalt auf d. gleichmäßige Form d. Röhren verwendet. Auf Grund seiner eigenen Versuche setzte nun Hagen d. von d. Temp. t abhängigen Coeff. b:

$$b = 0{,}000005871 - 0{,}000000267\,t + 0{,}00000000735\,t^2$$

unter t d. Temp. in Reaumur'schen Graden verstanden. Sollte dieser Werth von b, d. aus d. Hagen'schen Versuchen abgeleitet wird, d. [illegible] Werthe von b aus Darcy [illegible] entsprechen, so müßte $t = 2{,}11°$ R. sein; nun sind d. Darcy'schen Versuche, welche mit d. [illegible] angestellt sind (u. diese Versuche [illegible] d. [illegible] Einfluß auf b [illegible]) angestellt worden in d. Monaten October u. Mai; welches aber d. Temp. gewesen ist, ist nicht angegeben worden, es lässt sich [illegible], daß um d. [illegible] d. Temp. [illegible] höher sei als 2,11° R.; setzt man aber in d. Hagen'schen Versuchen $t = 10°$, so ergiebt sich d. wahrscheinlich richtigen Werth:

$$b = 0{,}0000003936.$$

Diesen Werth von b setzt nun Hagen an d. Stelle d. [illegible] bestimmten in d. Formel für B_1 ein, wonach folgt: $a = 0{,}0012017$. Dieser Werth von b ist zwar nicht [illegible] Ursache d. [illegible] bestimmt, indessen ist d. Unterschied nur wenig größer als d. wahrscheinliche Fehler, d. diesem b [illegible], es ist nämlich d. Unterschied d. Werthe von $b = 0{,}0000014$ und d. wahrscheinlich von b [illegible] Fehler ist: $= 0{,}0000010$. [illegible] ergiebt sich also für d.

Widerstand [illegible] B_1 d. letzte Ausdruck, während $a = 0{,}0012017$ ist und b von d. Temp. abhängt, während für $t = 10°$ R. $b = 0{,}0000003936$ ist.

In d. [illegible] wollen wir nun d. Formel: $B_1 = \frac{\lambda}{d}\frac{u^2}{2g}$ benutzen, dann ist:

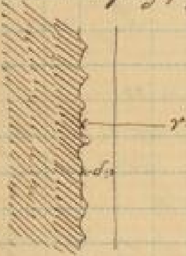
$$\lambda = 2g\left(a + \frac{b}{ud}\right) \text{ oder } = \alpha + \frac{\beta}{ud} \text{ wenn:}$$

$$\alpha = 0{,}023577 \text{ und } \beta = 0{,}00011519 - 0{,}0000004191\,t + 0{,}000000009229\,t^2.$$

wenn nun aber t in Celsius'schen Graden zu verstehen ist; setzt man d. mittlere Temp. d. in d. Leitung [illegible] Wasserleitungsröhren $= 10°$ C. so wird d. mittlere Werth von β: $\beta = 0{,}0000251$.

Da diese Formel aus d. Darcy'schen u. d. Hagen'schen Versuchen abgeleitet ist, wobei mit Sorgfalt alle [illegible] vermieden waren, wobei d. Röhren nur nicht ganz gleichmäßig waren, so entsprechen nun [illegible] diese Werthe von λ einem idealen Zustand, wie er in d. Praxis nicht vorkommt. Man muß also diesen Werthen λ etwa um 20% vergrößern. Diejenige Vergrößerung, welche dies eine Ablagerung von Schlamm und dergleichen [illegible], wird man am besten dadurch in Rechnung bringen, daß man d. [illegible] Temperaturen [illegible] in Rechnung stellt, als es für d. erste Zeit d. Anlage zu sein braucht. —

Es ist schon vorhin bemerkt worden, daß d. Ausdruck von B_1, also $a\frac{u^2}{d} + b\frac{u}{d^2}$ und also auch d. [illegible] Ausdruck $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{ud}$ sich auch dadurch empfiehlt, daß d. Ausdruck mit einer einfachen und wahrscheinlichen Vorstellung von d. Wesen d. Leitungswiderstandes in Zusammenhang gebracht werden kann. d. Widerstand kann nämlich als aus 2 [illegible] Bestandtheilen bestehend betrachtet werden, indem derselbe herrührt theils von d. äußeren Reibung theils von d. inneren Reibung d. Wassers; demgemäß möge vorerst gesetzt werden $B_1 = E_1 + J_1$, wo E_1 denjenigen Bestandtheil von B_1 bedeutet, d. von d. äußeren Reibung herrührt und J_1 d. von d. inneren Reibung herrührenden Bestandtheil von B_1. D. äußere Reibung, welche d. Bestandtheil E_1 entspricht, ist, insofern sie von d. inneren Reibung unabhängig ist, zurückzuführen auf gewisse einmal ganz feststehende Hervorragungen und Vertiefungen; in stark vergrößertem Maßstabe wird



d. Röhrenwand etwa wie nebenstehend aussehen. Wenn nun d. Wasser an d. Röhrenwand entlang fließt, so wird durch diese Hervorragungen eine plötzliche Änderung d. Geschw.-Größe also auch d. Geschw.-Richtung stattfinden; stößt d. Wasser gegen eine solche Hervorragung, so wird es gewissermaßen reflectirt gegen d. Innere hin. Wenn genauer aufsehen kann sich verwickelte Vorgänge. Da dieser thatsächliche Vorgang unmöglich näher untersucht werden kann, so kann man sich dadurch helfen, daß man d. Einfluß dieser äußeren Reibung zunächst als sich erstreckend betrachtet auf eine innerste Wasserschicht von sehr kleiner Dicke. Denken wir uns um d. Axe d. Röhre herum eine cylindrische Fl. beschrieben mit einem Radius, d. etwas kleiner ist als d. innere Radius d. Röhre, so daß zwischen dieser eine sehr dünne Wasserschicht übrig bleibt. Es fließe hier d. Wasser mit einer mittleren Geschw. w', die Dicke dieser Schicht sei δ. Diese Dicke ist aber nicht constant, sie schwankt zwischen einem min. u. max und es sei d. durchschnittliche min $= \delta_1$ d. max $= \delta_2$. An d. Stelle, wo d. Dicke dieser Schicht am kleinsten $= \delta_1$ ist wird d. Geschw. d. Wassers am größten $= w_1$ sein und dort wo d. Dicke am größten $= \delta_2$ ist, wird d. Geschw. am kleinsten $= w_2$ sein. So oft nun d. max.-Geschw. w_1 plötzlich in d. min. Geschw. w_2 übergeht wird ein Widerstand entstehen, welcher gemessen wird durch d. Widerstandshöhe $\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$. Bezeichnet man nun d. Widerstandscoeff. bezogen auf d. mittlere Geschw. w' mit ζ' so kann man setzen:

$$\zeta' \frac{w'^2}{2g} = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$$ so daß also $$\zeta' = \left(\frac{w_1}{w'} - \frac{w_2}{w'}\right)^2$$ ist.

od. da d. Geschw. sich umgekehrt wie d. Dicken d. Wasserschicht verhalten:

$$\zeta' = \left(\frac{\delta}{\delta_1} - \frac{\delta}{\delta_2}\right)^2.$$

Angenommen es kommen auf d. Längeneinheit für irgend einen Wasserfaden, d. längs d. Röhre hinfließt, eine plötzliche Querschnittsänderung n mal vor, so wird also d. Widerstandshöhe pr. meter Länge $= n \zeta' \frac{w'^2}{2g}$ sein, wo sich d. Factor von n auf eine einmalige plötzliche Geschw.-Änderung bezieht. Dieses ist also d. durchschnittliche Verlust an Arbeit pr. 1 Kgr. d. an d. Oberfl. hinfließenden Wassers. Dieser Arbeitsverlust bleibt aber nicht beschränkt auf d. an d. Oberfl. fließende Wasser, sondern es findet ein beständiger Austausch zwischen d. innern und äußern Wasser statt. Um nun diesen Verlust pr. 1 Kgr. d. ganzen in d. Röhre fließenden Wassers zu erhalten, muß dieser Arbeitsverlust multiplicirt werden mit d. Verhältniß derjenigen Wassermenge, welche gleichzeitig in dieser Oberfl.-Schicht und in d. ganzen Röhre sich strömend bewegt. Es ist aber d. Wasservolumen, welches durch einen Querschnitt wie diese oberste Oberfl.-Schicht hinfließt $= 2\pi r \delta w'$, wenn r d. Radius d. Röhre ist. Dagegen ist d. dasjenige Wasservolumen, welches pr. Sek. durch einen Querschnitt d. ganzen Röhre hindurchfließt = d. Product aus πr^2 und d. mittl. Geschw. u; es ist also d. Verlust an lebendiger Kraft pr. 1 Kgr. d. ganzen in d. Röhre strömenden Wassers $= n \zeta' \frac{w'^2}{2g} \frac{2\pi r \delta w'}{\pi r^2 u}$ insoweit er von d. äußeren Reibung abhängt, also

$$E_1 = \frac{n \delta \zeta'}{g} \frac{w'^3}{r u}$$ od. wenn $\frac{w'}{u} = \varepsilon$ gesetzt wird und $r = \frac{d}{2}$

so folgt dieser Verlust: $$E_1 = \frac{2 n \delta \varepsilon^3 \zeta'}{g} \cdot \frac{u^2}{d}$$

Dieses ist ein Ausdruck von d. Form $a \frac{u^2}{d}$ also übereinstimmend mit d. ersten Ausdruck in d. Hagen'schen Formel, wenn

$$a = \frac{2 n \delta \varepsilon^3}{g} \left(\frac{\delta}{\delta_1} - \frac{\delta}{\delta_2}\right)^2$$ gesetzt wird. Von einer Berechnung von a kann natürlich keine

[illegible]

$$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = w\,\frac{dw}{ds} \qquad \text{(Seite 22)}$$

[illegible] K_s [illegible] R_s [illegible] ds [illegible] $K_s = 0$ [illegible] w [illegible] $\frac{dw}{ds} = 0$ [illegible]

$$R_s = \frac{dp}{ds}.$$

[illegible] p [illegible] s [illegible]

$$R_s = \frac{dp}{ds}.$$

[illegible] $\gamma\,\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds}$; [illegible] $\frac{p}{\gamma}$ [illegible] $\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds}$ [illegible] $\div\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds}$ [illegible] J [illegible]

$$R_s = +\gamma\,\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds} = \div\gamma J.$$

[illegible] R_s [illegible]

$$R_s = \frac{R}{y}\,\frac{d}{dy}\left(y\,\frac{dw}{dy}\right) \qquad \text{(Seite 25)}$$

[illegible] R [illegible] w [illegible] y [illegible]

$$\frac{d}{dy}\left(y\,\frac{dw}{dy}\right) = \div\gamma\,\frac{J}{R}\,y$$

[illegible]

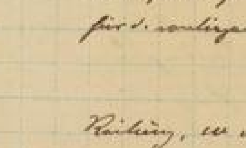
$$y\,\frac{dw}{dy} = \div\gamma\,\frac{J}{R}\,\frac{y^2}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{dw}{dy} = -\gamma\,\frac{J}{R}\,\frac{y}{2}$$

[illegible] $= 0$, [illegible] $y = 0$ [illegible] $\frac{dw}{dy} = 0$ [illegible] max [illegible]

$$w = \div\gamma\,\frac{J}{4R}\,y^2 + \text{Const.}$$

[illegible] $y = 0$ [illegible] w_0 [illegible]

$$w = w_0 - \gamma\,\frac{J}{4R}\,y^2$$



[illegible] w [illegible] $w_0 - w = \gamma\,\frac{J}{4R}\,y^2$. [illegible] $(w_0 - w)$ [illegible] y^2 [illegible] w' [illegible]

$$w' = w_0 - \gamma\,\frac{J}{4R}\,r^2$$

[illegible]

$$w - w' = \gamma\,\frac{J}{4R}\,(r^2 - y^2).$$

Es kommt nun aber auf eine Beziehung zwischen w' und d. mittleren Geschw. u an. Letztere wird gefunden, indem man d. Querschnitt in Elemente zerlegt denkt, d. eine ringförmige Gestalt haben, deren jedes mit seiner Geschw. w multipliziert und d. Summe dieser Produkte durch d. ganzen Querschnitt dividiert, also:

$$u = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi y\,dy\,w.$$

Nimmt man d. Constanten heraus und setzt für w seinen Ausdruck, so folgt:

$$u = \frac{2}{r^2}\int_0^r \left[w' + \gamma\frac{J_1}{4R}(r^2-y^2)\right] y\,dy$$

dieses Integral ausgeführt, liefert:

$$u = \frac{2}{r^2}\left[w'\frac{r^2}{2} + \gamma\frac{J_1}{4R}\left(r^2\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\right] = w' + \gamma\frac{J_1}{8R}r^2 = w' + \frac{\gamma J_1}{32R}d^2$$

also
$$J_1 = \frac{32R}{\gamma}\cdot\frac{u-w'}{d^2} = \frac{32R(1-\varepsilon)}{\gamma}\frac{u}{d^2} = b\frac{u}{d^2}$$

wenn man wieder $\frac{w'}{u} = \varepsilon$ setzt und wenn $b = \frac{32R(1-\varepsilon)}{\gamma}$ bedeutet, womit sich wieder d. Übereinstimmung d. früheren Formel ergibt. Auf kann wieder nicht d. Werte für eine wirklich theoretische Berechnung d. Coeff. b, denn sowohl R als auch ε entziehen sich für eine rationelle Bestimmung, so daß b nur durch Versuche bestimmt werden kann. b ist natürlich von d. Temperatur d. Wassers abhängig, da d. spez. Gew. γ von d. Temp. abhängig ist. —

Für d. Folge soll immer d. spez. Leitungswiderstandshöhe unter d. Form:

$$B_1 = \lambda\frac{1}{d}\frac{u^2}{2g}$$

benutzt werden, so daß $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{ud}$ wird. Man kann hier bemerken, daß wenn u u. d innerhalb d. gewöhnlichen Grenzen liegen, d. Wert von λ nur wenig veränderlich ist, gewöhnlich pflegt u zwischen d. Grenzen 0,5 – 2 m zu liegen und d. Rohrweite d zwischen 0,05 – 0,5 m, so daß also $u\,d$ etwa zwischen d. Grenzen $\frac{1}{40}$ – 1 liegt. Berechnet man zwischen diesen Grenzen d. Werte von λ, indem man für β diejenigen Werte setzt, d. einer durchschnittlichen Temp. von 10° C. entsprechen, so bekommt man:

λ zwischen 0,027 – 0,024.

so daß man meistens für viele Anwendungen damit begnügen darf, einen constanten Mittelwerth λ zu benutzen, um so mehr als man doch d. Sicherheit wegen bei d. technischen Gebrauch λ um einige Procente größer nehmen muß. Wenn man aber durchschnittlich λ um 20% größer nimmt als nach dieser theoretischen Formel, so kann man durchschnittlich $\lambda = 0,03$ setzen.

Alles ist hauptsächlich Untersuchungen, wie sie bei [illegible] größeren Gefällen [illegible] Verhältnisse entnommen nicht Rechnung getragen. Außerdem bietet [illegible] nur d. Abweichung von d. theoretischen Formel Rechnung. Um außerdem Umstand Rechnung zu tragen ist es angemessen ϑ größer zu setzen, als es in d. ersten Zeit d. Anlage nöthig wäre. —

Unter Umständen kann es vorkommen, daß d. Rohr einen rechteckigen Querschnitt hat. Für diesen Fall liegen spezielle Erfahrungen bezüglich d. Leitungswiderstandes nicht vor und es ist am angemessensten, d. Leitungswiderstand eines solchen prismatischen gleich zu setzen d. eines cylindrischen Rohres, dessen Durchmesser = d. mittleren Durchmesser d. prismatischen Rohres ist. ~~Man setzt~~ also dieser mittlere Durchmesser ist bekanntlich: $d = \frac{4F}{U}$, wenn F = Inhalt d. Querschnitts und U d. Umfang ist. —

Was nun d. fundamentale Formel betrifft, welche bei d. Wassersäulenmaschinen und d. Leit. d. Wassers in Röhren bezüglich vorkommenden Aufgaben benutzt wird, so war dieselbe:

$$\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - B.$$

wo u d. Geschw. am Ende, u_0 d. mittlere Geschw. am Anfange irgend einer Rohrstrecke bedeutet, H = wirksame Druckhöhe und B = gesammte Widerstandshöhe für diese Rohrstrecke. Bezieht man d. Gl. vom Oberwasserspiegel bis zum Ende d. Abflußrohres, so kann $u_0 = 0$ gesetzt werden. Ferner besteht d. Widerstandshöhe B aus denjenigen Widerstandshöhen, die einzigen, an gewissen Stellen concentriert vorkommenden besonderen Widerständen entspricht, und dazu

d. Leitungswiderstandshöhe. Ist ζ d. Widerstandscoeff. für an besonderen Stellen auftretende Widerstände, so ist:
$$B = \zeta \frac{u^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{u^2}{2g}$$
setzt man dies ein, so erscheint d. Fundamentalgl. in d. Form:
$$\left(1 + \zeta + \lambda \frac{l}{d}\right) \frac{u^2}{2g} = H$$
wenn d. wirksame Druckhöhe d. Leitung ist: $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$, wenn wiederum p_0 d. äusserliche Druck an d. freien Oberfl., p d. an d. Mündung ist, während h d. Höhe d. Wasseroberfl. im Ausflussgefäss über d. Mittelpunkt d. Mündung od. über d. Unterwasserspiegel bedeutet. –

Um d. ganze Gesetz in Bez. zu bringen ein Coeffizient μ hinzu, wenn genau gerechnet werden soll. Bei dieser Form ist vorausgesetzt, daß d. Wasser mit d. vollen Querschnitt d. zylindrischen Rohres abfließe. Unter Umständen kann es d. Fall sein, daß d. Wasser nicht mit einem vollen Querschnitt abfließt, sondern daß d. Rohr mit einem Mundstück versehen ist, dessen Größe dann mit A bezeichnet werden soll, während F d. vollen Querschnitt d. Rohres bedeutet. Ist dies d. Fall so sei α d. Contractions-Coeff., d. sich unter d. vorliegenden Umständen auf d. Ausfluss bezieht, ferner φ d. Geschw.-Coeff. betreffend d. durch diese Mündung selbst auftretenden Widerstand, also $\mu = \alpha\varphi$ = Ausflusscoeff. und $\frac{1}{\varphi^2} - 1$ = Widerstandscoeff., welcher dieser Mündung an und für sich entspricht, denn es ist leicht einzusehen, wie in einem solchen Fall diese Fundamentalgl. zu modifizieren ist. d. Gl. drückt aus, daß d. wirksame Druckhöhe aus 2 Teilen besteht nämlich aus $\frac{u^2}{2g}$ als Ausflussgeschw.-Höhe, $\zeta \frac{u^2}{2g}$ Widerstandshöhe, welche d. besonderen Widerständen entspricht und aus $\lambda \frac{l}{d} \frac{u^2}{2g}$ Leitungswiderstandshöhe für d. ganze Rohrlänge l. –

Ist d. Rohr nun ferner mit einem engen Mundstück versehen, so ist d. wirksame Druckhöhe zu verwenden, um nicht nur d. Geschw. in d. Rohre zu erzeugen, sondern auch d. größere Geschw., womit sie durch d. kleinsten Querschnitt d. contrahierten Strahls hindurchfließt; dieser Querschnitt ist αA und es ist also d. Geschw. im d. kleinsten Querschnitt d. contrahierten Strahls im Verhältnis $\frac{F}{\alpha A}$ größer als u, d. h. um d. Geschw.-Höhe $\frac{1}{2g}\left(\frac{F}{\alpha A}\right)^2 u^2$ zu erzeugen. Außerdem kann durch d. Mundstückung ein besonderer Widerstand verursacht werden entsprechend d. Widerstandscoeff. ζ. dieser Widerstandscoeff. ist dann $= \frac{1}{\varphi^2} - 1$, es ist somit dann d. wirksame Druckhöhe H im Ganzen jetzt dazu zu verwenden, um außer diesen Widerstandshöhen noch zu erzeugen diese Ausflussgeschw.-Höhe und d. Widerstandshöhe $\frac{1}{\varphi^2} - 1$ mal d. Ausflussgeschw.-Höhe. dieser Ausdruck tritt an d. Stelle von $1 \cdot \frac{u^2}{2g}$ also:
$$\frac{1}{2g}\left(\frac{F}{\alpha A}\right)^2 u^2 \left[1 + \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\right] = \left(\frac{F}{\alpha\varphi A}\right)^2 \frac{u^2}{2g} = \left(\frac{F}{\mu A}\right)^2 \frac{u^2}{2g}$$
demnach ist nun d. allgemeine Fundamentalgl.:
$$H = \left[\left(\frac{F}{\mu A}\right)^2 + \zeta + \lambda \frac{l}{d}\right] \frac{u^2}{2g}.$$
Wenn $A = F$, so wird auch $\mu = 1$ und d. Gl. geht dann wieder in d. frühere Form über. –

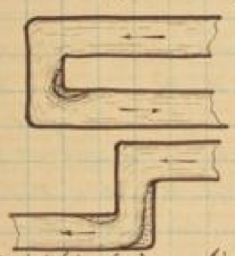
Bevor man diese Fundamentalformel zur Lösung einiger Aufgaben benutzt werden soll, sollen zunächst d. in solchen längeren Röhrenleitungen vorzugsweise auftretenden besonderen Widerstände besprochen werden, auf welche sich d. Coeffizient ζ in d. Fundamentalgl. bezieht. Solche Widerstände werden verursacht durch plötzliche Richtungsänderung und plötzliche Querschnittsänderung.

Derartige Richtungsänderungen werden namentlich verursacht durch Kniestücke und Krümmungen. Unter einem Kniestück ist ein solches in einer Röhrenleitung eingeschaltetes Röhrenstück zu verstehen, in welchem d. Wasser eine Ablenkung durch einen scharfen Winkel erleidet. Es ist leicht begreiflich, daß dieser Widerstand nur durch Versuche ermittelt werden kann. In Betreff eines solchen Kniestückes hat namentlich Weisbach Versuche angestellt wobei d. Winkel α verschiedenen Werthe gegeben wurden. d. Resultate lassen sich in folgende Formel zusammenfassen:
$$\zeta = 0{,}9457 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2{,}047 \sin^4 \frac{\alpha}{2}.$$

womit z. B. für: α =	20°	40°	60°	80°	90°
sich ergibt: ζ =	0,046	0,139	0,346	0,740	0,984

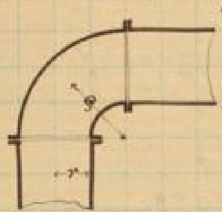
[illegible] $d = 0{,}03\,m$ [illegible] $d = 0{,}01\,m$ [illegible] ζ [illegible] d [illegible] $1\frac{1}{2}$ [illegible]

[illegible] $90°$ [illegible]



[illegible] $1\frac{1}{2}$ [illegible] $= \zeta_1$ [illegible] $= \zeta_2$ [illegible] $\zeta = \zeta_1$ [illegible] $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ [illegible] $\zeta = \zeta_1 + \frac{1}{2}\zeta_2$. [illegible]

[illegible] 2 [illegible]



[illegible] $90°$ [illegible]

$$\zeta = 0{,}131 + 1{,}847\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{7}{2}}$$

[illegible] r [illegible] ρ [illegible]

[illegible] r [illegible]

$$\zeta = 0{,}124 + 3{,}104\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{7}{2}}.$$

[illegible]

für $\frac{r}{\rho}$ =	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
ζ =	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440.

[illegible] $90°$ [illegible] ζ [illegible] $= 180°$ [illegible] $90°$ [illegible] 2 [illegible] gekrümmt, daß wenn man d. Mittellinien d. beiden geraden Strecken verlängert, dieselben sich in d. Anfangspunkt d. Krümmung schneiden. Wird ein solcher Krümmung zu Grunde gelegt, so ist:

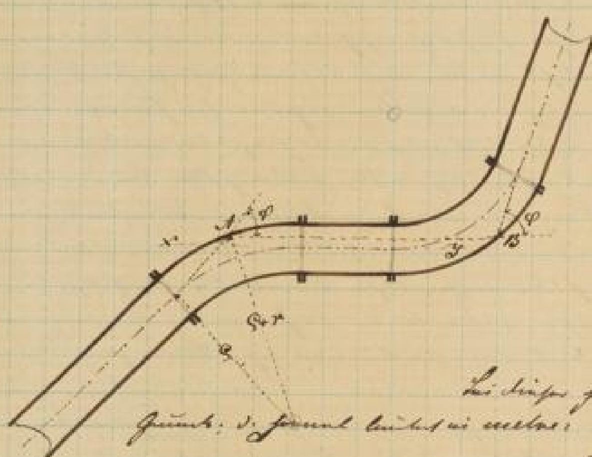
$$r = \rho(\sqrt{2}-1) \quad \text{also} \quad \frac{r}{\rho} = 0{,}4142.$$

Setzt man diesen Werth in d. Weißbach'sche Formel ein, so folgt:

$$\zeta = 0{,}215. -$$

Außer solchen Richtungsänderungen einer Röhre, die sich auf kurze Rohrstrecken concentriren, kommt es auch vor, daß ein Leitungsrohr auf einer größeren Strecke bogenförmig fortgeführt wird, wie z. B. ein spiralförmig gewundenes Rohr eines Kühlrohres etc. Diese Fälle können nicht mit d. Weißbach'schen Formel berechnet werden, denn es müßte dann für $\frac{r}{\rho} = 0$ $\zeta = 0{,}131$ werden; für diesen Fall trifft die Dubois'sche Formel zu:

Ist so ein Leitungsrohr in irgend einer Weise gekrümmt und an beiden Enden schließen sich gerade Strecken an, denkt man sich d. Mittellinie d. geraden Rohrstrecke an einem Ende verlängert bis sie d. Rohrwand trifft, zieht von diesem Punkte eine Tangente an d. Mittellinie bis sie abermals d. Rohrwand trifft bis d. letzte Punkt wieder in d. andern Rohrmittellinie fällt, so erhält man eine Reihe von Ablenkungswinkeln φ. Nimmt man bei dieser Zeichnung an einem Punkt A an, welcher nun so gewählt ist, wie man d. Tangente zieht, so zieht man d. Tangente xy an d. Stelle d. Mittellinie, wo d. Krümmungsradius $= \infty$ ist und zieht dann $AB \parallel xy$. Werden diese Winkel φ bestimmt so ergibt:



$$\mathfrak{B} = \frac{\Sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{3000}\, u^2 \text{ für}$$

Bei dieser Formel von Dubois liegt indessen d. Pariser Zoll zu Grunde; d. Formel lautet in Metern:

$$\mathfrak{B} = 0{,}0123\, u^2\, \Sigma\left(\sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)$$

Setzt man diese Widerstandshöhe $= \zeta \frac{u^2}{2g}$, so folgt:

$$\zeta = 0{,}2413\, \Sigma\left(\sin^2 \frac{\varphi}{2}\right).$$

Ist d. Krümmungshalbmesser constant $= \rho$, dann ist $\Sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha}{\varphi} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, wenn α d. gesammte resultirende Ablenkungswinkel ist, also $\frac{\alpha}{\varphi}$ d. Zahl d. Ablenkungswinkel. Außerdem ergibt sich $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\rho}{\rho + r}$ aus d. Zeichnung. Wenn z. B.:

$\frac{r}{\rho}$	$=$	0,05	0,1	0,15	0,2
so ist ζ	$=$	0,0632	0,0850	0,0994	0,1099 mal $\frac{\alpha}{100}$
und für $\alpha = 90°$: ζ	$=$	0,057	0,076	0,089	0,099.

Für $\alpha = 90°$ kann man diese Werthe vergleichen mit denen, die sich nach d. Weißbach'schen Formel $\zeta = 0{,}131 + 1{,}847\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{7}{2}}$ ergeben sollten, denn nur für $\frac{r}{\rho} = 0{,}2 \ldots \zeta = 0{,}138$. Man wird nun für alle Fälle sicher gehen, wenn man erst von d. Verhältniß $\frac{r}{\rho} = 0{,}2$ bis d. Weißbach'sche Formel benützt und für kleinere Werthe von $\frac{r}{\rho}$ d. Dubois'sche, nur muß man dann d. Coeff. von ζ so vergrößern, daß wenn sie d. Weißbach'schen Formel für $\alpha = 90°$: $\frac{r}{\rho} = 0{,}2$ entspricht; dies ist d. Fall, wenn man setzt:

$$\zeta = 0{,}337 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

dann wurde d. Coeff. von ζ größer und d. letzte $= 0{,}138$. Dementsprechend für einen beliebigen Krümmungswinkel ist dann zu schreiben:

$$\zeta = 0{,}337\, \frac{\alpha}{\varphi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad \text{wenn} \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\rho}{\rho + r}.$$

Hiernach ist z. B. für:

$\frac{r}{\rho}$	$=$	0,05	0,1	0,15	0,2
ζ	$=$	0,0882	0,1188	0,1389	0,1534 mal $\frac{\alpha}{100}$.
und für $\alpha = 90°$ ζ	$=$	0,079	0,107	0,125	0,138

Ist d. Verhältniß von $\frac{r}{\rho}$ sehr klein, so kann man sich auch eine [illegible] Formel für ζ entwickeln, nämlich welche d. Krümmungswiderstand ζ unmittelbar als Function dieses Verhältnisses $\frac{r}{\rho}$ entwickelt wird. Setzt man dieses sehr kleine Verhältniß $\frac{r}{\rho} = x$, so ist $\cos\frac{\varphi}{2} = (1+x)^{-1}$

$$\text{also } \sin^2\frac{\varphi}{2} = 1-(1+x)^{-2} = 2x\left(1-\tfrac{3}{2}x+\dots\right) \quad \text{also } \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2x}\left(1-\tfrac{3}{4}x+\dots\right)$$

$$\text{und demnach } \quad \frac{\varphi}{2} = \operatorname{arc}\sin\sqrt{2x}\left(1-\tfrac{3}{4}x+\dots\right) = \sqrt{2x}\left(1-\tfrac{5}{12}x+\dots\right)$$

$$\text{demnach } \quad \frac{1}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{2x}{2\sqrt{2x}}\cdot\frac{1-\frac{3}{2}x+\dots}{1-\frac{5}{12}x+\dots} = \sqrt{\frac{x}{2}}\left(1-\tfrac{13}{12}x+\dots\right)$$

Wenn man nun d. für [illegible] Schärfe [illegible] berücksichtigt, daß man statt $-\frac{13}{12}x$ einfach x setzt, so ist:

$$\frac{1}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2} = (1-x)\sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$\text{also } \quad \zeta = \frac{0{,}337}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{180}\cdot\alpha(1-x)\sqrt{x} = 0{,}00416\,\alpha\left(1-\frac{r}{\rho}\right)\sqrt{\frac{r}{\rho}}.$$

Worin [illegible] als d. Winkel in Graden, [illegible] $\frac{\pi}{180}$ gesetzt wurde. Diese Formel gilt für $\frac{r}{\rho} < \frac{1}{20}$, [illegible] also α d. ganze Ablenkungswinkel [illegible] ist, [illegible] in demselben Sinne [illegible].

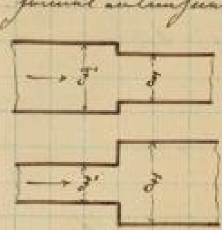
Ist $\frac{r}{\rho}$ sehr klein und α von mäßiger Größe, so wird dieser Widerstand so klein sein, daß man ihn kaum zu berücksichtigen braucht. Es kann aber sein, daß α bei kleinem $\frac{r}{\rho}$ sehr groß ist, wie namentlich bei schraubenförmigen Röhren. —

Außer d. genannten Ablenkungswiderständen kommen [illegible] Widerstände vor, [illegible] plötzliche Änderung d. Röhrenquerschnitts [illegible] Änderungen, d. mit einer örtlichen Trennung d. Wassers von d. Röhrenwand verbunden sind, und somit mit einer (auch [illegible]) unbekannten Widerstand behaftet sind, sollten möglichst vermieden werden; indessen gibt es Fälle, wo ein solcher Widerstand sich nicht vermeiden läßt oder wo ein solcher [illegible] ist, insbesondere zur Regulirung od. zur [illegible] Hemmung d. Wasserströmung, wie dies [illegible] durch Schieber, Hähne, Drosselklappen und Ventile. Wenn auf solche Weise d. Röhrenquerschnitt an einer gewissen Stelle verengt ist, so sei d. kleinste Querschnitt d. Röhre an einer solchen Stelle bezeichnet mit A und F sei d. volle Querschnitt d. Röhre; damit ist dann aber noch nicht gesagt, daß A d. kleinste Querschnitt d. Wasserstromes selbst sei, [illegible], daß [illegible] d. Wasser [illegible] derselbe [illegible] [illegible] ist als αA. Dieser kleinste Querschnitt αA erweitert sich nun sehr schnell wieder bis zum vollen Querschnitt d. Röhre. Wäre diese plötzliche Querschnittserweiterung des Wasserstromes von αA bis F d. einzige Widerstand, so wäre: $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A}-1\right)^2$; thatsächlich und nun [illegible] diese plötzliche Vergrößerung d. Querschnitts d. Wasserstromes von αA bis F d. Hauptursache d. Widerstandes sein. Außerdem wird aber auch schon ein gewisser Widerstand verursacht durch d. [illegible] Verengung d. Querschnitts von F bis αA; ferner können namentlich bei diesen Regulirungsvorrichtungen außer d. Querschnittsänderungen, auch [illegible] Gestaltungen d. Wasserstromes, plötzliche Richtungs- und Geschwindigkeitsänderungen ~~vorkommen~~ d. Querschnitts vorkommen. Weil aber d. plötzliche Erweiterung d. Querschnitts immerhin d. Hauptursache bleibt, so kann man auch in allen diesen Fällen diesen Ausdruck von ζ zu Grunde legen, wenn man dann unter α eine entsprechende [illegible] Bedeutung beilegt und diesem [illegible] einen Werth beilegt, der nur [illegible], für [illegible] Fälle zu [illegible]. —

Es ist indessen [illegible] d. Werthe von α zu kennen für einen Fundamentalfall, bei welchem d. genannten [illegible] Umstände ausgeschlossen sind. Dies wird d. Fall einer concentrischen Röhre, welche an einer gewissen Stelle eine ebene Scheidewand besitzt mit d. concentrischen [illegible] Durchflußöffnung A; F sei d. volle Querschnitt d. Röhre und $\frac{A}{F} = n$. Es ist dann d. Werth von ζ von Weisbach [illegible] bestimmt worden und damit dann auch d. Werth von α, so ergibt sich:

für n =	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
ζ =	0	0,06	0,29	0,80	1,80	3,75	7,80	17,5	47,8	226
α =	1	0,892	0,813	0,755	0,712	0,681	0,659	0,643	0,632	0,624

Je kleiner n, desto vollkommener ist d. innere Contraction, desto kleiner also auch α. Wenn α bezüglich d. Coeff. einer inneren Contraction bedeutet, so wäre α für sehr kleine Werthe von n = d. früher bestimmten Ausflusscoefficienten Coeff. 0,64; Thatsächlich fällt für α [illegible] niedriger, weil dieser Coeff. bereits einen inneren Contractionscoeff. bedeutet, einzuwenden aber auch d. Werth ist sich entstellt, d. durch d. plötzliche Zusammenziehung d. Querschnitts durch d. kleine Öffnung bedingt ist. Wenn d. centrale Durchflussöffnung A nicht d. Scheidewand, in welcher sie sich befindet, nicht in einer mit d. früheren Querschnitt fortlaufenden Röhre eingesetzt ist, sondern wenn in d. Mitte dieser Scheidewand 2 Röhren von verschiedenen Weiten mit gemeinsamer Axe in einander übergehen, so muss man berücksichtigen, dass in dieser Formel für ζ .. F d. Querschnitt d. Röhre hinter dieser Durchflussöffnung bedeutet, wofür d. Coeff. α abhängt von d. Verhältniss d. Durchflussöffnung A zum Querschnitt F' der anderen Röhrenstrecke. Man hat also, wenn man d. Werth von α mit dieser Formel entnehmen will, $n = \frac{A}{F'}$ zu setzen.

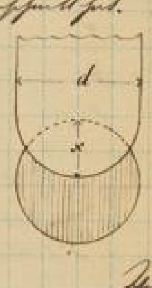


Hierbei sind folgende Fälle bemerkenswerth:

1) Wenn $F' > F$ und $A = F$ sein, dann ist: $\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$ wobei d. Coeff. α gemäss d. Verhältniss $n = \frac{F}{F'}$ mit d. entsprechenden Tabelle entnommen werden kann.

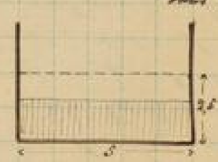
2) $F' < F$ und $A = F'$, dass also einfach an einer gewissen Stelle d. Querschnitt sich plötzlich erweitert; dann findet eine innere Contraction nicht statt, also $\alpha = 1$ und daraus: $\zeta = \left(\frac{F}{F'} - 1\right)^2$. —

Was nun d. Durchfluss d. Wassers durch Schieberöffnungen betrifft, so sind von Weisbach Versuche angestellt worden über d. 2 Fälle, dass d. Röhre entweder einen kreisförmigen od. einen rechteckigen Querschnitt hat. Wenn eine solche Röhre von kreisförmigem Querschnitt mit einem inneren



Regulierungsschieber versehen ist, so bildet sich eine sichelförmige Durchflussöffnung. Wenn d. Schieber um d. Maass x eingeschoben ist, und d. Röhrendurchmesser = d ist, so wird d. Widerstandscoeff. abhängig sein von $\frac{x}{d}$; je grösser $\frac{x}{d}$, desto grösser ζ. Bei diesen Versuchen hatte d. Röhre einen Durchmesser $d = 4$ Ctm. und es ergab sich für:

$\frac{x}{d}$ =	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
ζ =	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,00	97,8.



Was d. Versuche mit d. rechteckigen Röhren betrifft, so wurde d. Schieber von d. grössten Seite eingeschoben; d. Rechteck hatte d. Dimensionen 5 Ctm. und 2,5 Ctm. Auch hier wurde für verschiedene Werthe von $\frac{A}{F}$, welches Verhältniss hier einfach = d. Verhältniss d. Höhe d. Durchflussöffnung zur Höhe d. Öffnung d. Röhre ist, d. Werth von ζ bestimmt, und finden sich in Weissbach's Mechanik. Wenn man diese Werthe von ζ vergleicht mit denjenigen Werthen ζ aus d. allgemeinen Formel $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2$ für gleiche Werthe von $\frac{A}{F}$, so findet man, dass bei d. grösseren Werthen von $\frac{A}{F}$ d. Widerstandscoeff. etwas grösser sind, als im Fundamentalfall, dagegen für d. kleineren Werthe von $\frac{A}{F}$ etwas kleiner als im Fundamentalfall. Dies lässt sich leicht erklären: es ist nämlich ein doppelter Grund vorhanden, weshalb d. Werthe von α in dieser allgemeinen Formel hier etwas abweichende Werthe von denen von α im Fundamentalfall haben: d. Umstand, dass d. verengte Durchflussöffnung A nicht eine centrale Lage und nicht eine gleiche Gestalt hat. d. Querschnittsänderung bedingt natürlich eine Vergrösserung d. Widerstandes, also eine Verkleinerung von α, denn es ist mit d. Querschnittsänderung zugleich eine Richtungsänderung verbunden. Andererseits wird aber durch diese seitliche Lage d. Durchflussöffnung verursacht, dass d. innere Contraction nicht vollständig, sondern nur partiell ist; sie findet nur an einem Theile statt. Diese Contraction vergrössert α. Es sind also 2 Einflüsse vorhanden: d. eine verkleinert α und d. andere vergrössert α. Dieser letztere Einfluss wird sich namentlich in d. Fällen besonders geltend machen, wo $\frac{A}{F}$ klein ist.

Beispiel: Angenommen eine cylindrische Abflußröhre von $d = 0{,}1\,m$, welche mit einem solchen Regulirungsschieber versehen ist, liefere bei vollständig zurückgezogenem Schieber, also für $x = 0$, bei einer wirksamen Druckhöhe $H = 1{,}15\,m$ eine Wassermenge $V = 0{,}015$ cubm. pr. Sek.

Also $d = 0{,}1\,m$ $H = 1{,}15\,m$ und für $x = 0$: $V = 0{,}015$.

Außer dem besonderen Widerstand, der durch diesen Regulirungsschieber herbeigeführt werden kann, sei nur außerdem ein Widerstand vorhanden, als für den Einfluß des Wassers in die Röhre $\zeta = \frac{1}{2}$ gesetzt werden kann, die Röhre sei also scharfkantig angesetzt. Im Übrigen sei kein besonderer Widerstand vorhanden. Es muß nun für einen anderen Grad der Regulirungsschieber so weit vorgeschoben werden, daß die Röhre nur halb soviel Wasser giebt. Wie weit muß der Schieber vorgeschoben werden oder wie groß muß man x annehmen, damit $V' = \frac{V}{2}$ Wasservolumen abfließe?

Zunächst ist nun: $\sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}15} = 4{,}75$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}007854$$

Also die Geschw. u für $x = 0$: $u = \frac{V}{F} = 1{,}91\,m$ pr. Sek.

Bezeichnet man nun mit φ den entsprechenden Widerstandscoeff., so ist: $u = \varphi\sqrt{2gH}$ also: $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{2gH}}{u} = \frac{4{,}75}{1{,}91} = 2{,}487$.

und demnach der entsprechende Widerstandscoeff. für $x = 0$:

$$\frac{1}{\varphi^2} - 1 = 5{,}185.$$

Von diesem erhaltenen Widerstandscoeff. ist $\zeta = 0{,}5$ abzuziehen, um denjenigen Bestandtheil zu finden, der auf Rechnung des Leitungswiderstandes kommt; also der Leitungswiderstandscoeff.:

$$\lambda \frac{l}{d} = 4{,}685.$$

Soll nun nur die Hälfte Wasser ausfließen, so muß die entsprechende Geschw. u' nur halb so groß als u sein, es muß also auch φ' nur $\frac{1}{2}$ so groß als φ sein, d.h.: $\varphi' = \frac{\varphi}{2}$ sein; und somit:

$$\frac{1}{\varphi'^2} - 1 = \frac{4}{\varphi^2} - 1 = 4 \cdot 6{,}185 - 1 = 23{,}74.$$

Zieht man hiervon ab erstens denjenigen Widerstand, welcher durch den Einlauf bedingt wird $= 0{,}5$, ferner den Leitungswiderstand $\lambda' \frac{l}{d}$, so ist der verbleibende Rest der Widerstandscoeff. der durch den Schieber bedingt wird, also:

$$\zeta = 23{,}24 - \frac{\lambda'}{\lambda} 4{,}685$$

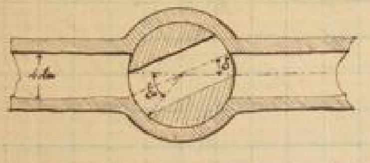
Nun ist aber $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{ud}$ und für $x = 0$: $\frac{1}{ud} = 5{,}2$ also: $\lambda = 0{,}0240$.

ferner in neuem Zustand $\frac{1}{u'd} = 2 \cdot \frac{1}{ud} = 10{,}4$ also $\lambda' = 0{,}0244$. also $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{61}{60}$.

demnach $\zeta = 18{,}48$.

Für $\zeta = 17$ findet sich in der Tabelle $\frac{x}{d} = \frac{6}{8}$, so daß $\zeta = 18{,}5$ einem Werthe von x entspricht, der wenig größer als $0{,}075\,m$ ist. – Eine solche ~~[illegible]~~ Rechnung wird man sich erleichtern können, wenn man davon absieht, daß $\lambda' > \lambda$ ist, ohne dabei wesentliche Fehler zu begehen. ——

Was nun den Widerstand beim Durchgange durch Hähne betrifft, so ist auch dieser von Weisbach geprüft worden und zwar so, daß der Hahn sich in einer cylindrischen od. parallelepipedischen Röhre befand. Für den ersten Fall war die Weite der Röhre $d = 4$ cm. δ sei der Winkel, welchen die Axe der Hahnenbohrung mit der Axe der Röhre bildet. Es muß dann zur vollständigen Absperrung der Hahn gedreht werden, bei welchem Werthe von δ die Absperrung vollkommen ist, dieser Winkel sei $= \delta'$; bei den Weisbach'schen Versuchen war $\delta' = 82°$. Offenbar ist dieser Winkel bedingt durch d u. D, wenn D der Durchmesser des Hahnenkegels ist und zwar ist:



$$\sin \frac{\delta'}{2} = \frac{d}{D}.$$

Unter diesen Umständen ergab sich nun für:

$\delta =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°
$\zeta =$	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68	17,3	31,2	52,6	106	206	486

Für den letzten Winkel wird ζ schon so groß, daß die Versuche nicht weiter geführt werden und nicht fortgesetzt werden.

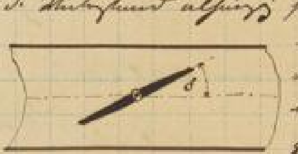
Es fragt sich nun, wie man nun mit Hilfe dieser Versuche d. Coeff. ζ berechnen kann für irgend einen anderen Schieber, für welchen d. Absperrungswinkel δ' einen anderen Werth hat als d. d. Versuchsschieber.
Zu dem Zweck kann man bemerken, daß hier d. resultirende Widerstand aus 2 Theilen besteht, nämlich einer plötzlichen Querschnittsänderung und einer plötzlichen Richtungsänderung; ersterer wird abhängig sein vom Verhältniß $\frac{\delta}{\delta'}$, letzterer hängt jedoch nicht von d. verhältnißmäßigen Werthe von $\frac{\delta}{\delta'}$ ab, sondern von d. absoluten Werth von δ. Mit Rücksicht auf diese Folgerungen wird nun ζ auch mit Hilfe dieser Zahlen auch für einen anderen Schieber, für welchen δ' einen anderen Werth hat, berechnet werden können. Zu dem Zweck haben obiger Tabelle noch d. Werthe von ζ_0 beigefügt werden, d.h. diejenigen Bestandtheile von ζ, d. nur von d. ersten Umstand herrühren; dieselben können nämlich berechnet werden nach d. Formel $\zeta_0 = \left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2$, wenn man für d. entsprechenden Stellwinkel d. Versuchsschiebers d. Werthe von $\frac{A}{F}$ berechnet, mit diesen Werthen d. Werthe von α bestimmt aus dem Contractionstabelle und dann ζ_0 berechnet. Es folgt für:

$\delta =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°
$\zeta_0 =$	0,02	0,15	0,39	0,85	1,62	2,89	5,05	8,72	15,4	27,9	53,9	113	276.

Wenn es nun d. Aufgabe wäre, für einen Schieber in einem cylindrischen Rohre, dessen Absperrungswinkel $\delta' = 75°$ ist, d. Widerstandscoeff. ζ zu bestimmen, welcher d. Winkel $\delta = 50°$ entspricht, so kann man folgendermaßen schließen:

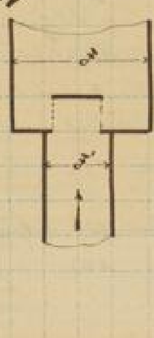
Es ist $\frac{\delta}{\delta'} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$. Bei d. Weisbach'schen Versuchsschieber würde diesem Verhältniß $\frac{2}{3}$ ein Werth δ entsprechen von $54\frac{2}{3}°$ und hierfür ist $\zeta_0 = 52$. D. andere Bestandtheil hängt nun nicht von d. Verhältniß $\frac{\delta}{\delta'}$ ab, sondern von dem absoluten Werthe von δ; für $\delta = 50°$ ist also $\zeta - \zeta_0 = 52,6 - 27,9 = 25$ und somit kann für d. vorliegenden Schieber, welcher bei $\delta' = 75°$ vollkommen absperrt, entsprechend einem Stellwinkel von 50°: $\zeta = 52 + 25 = 77$ gesetzt werden. —

Es sind ferner v. Weisbach Versuche angestellt worden über d. Widerstandscoeff. von Drosselklappen und zwar auch für ein cylindrisches und ein parallelepipedisches Rohr. Es wird auch hier d. Widerstand abhängig sein von d. Winkel δ, den d. Richtung d. Drosselklappe mit d. Rohrmittellinie bildet. Vergleicht man d. hier gefundenen Werthe mit



diejenigen, welche d. Contractionstabelle bei gleichen Werthen von $\frac{A}{F}$ entsprechen, so zeigt sich, daß für d. kleinen Werthe von α d. Widerstandscoeff. größer sind als d. aus Contractionstabelle einer verdeckten Ausflußöffnung in einer ebenen Scheidewand, daß dagegen bei größeren Werthen von α d. Werthe kleiner werden als aus Contractionstabelle. Daß bei d. kleinen Werthen von δ d. Widerstandscoeff. größer ist, erklärt sich daher, daß schon diese Drosselklappe an und für sich einen gewissen Widerstand verursacht, wenn auch $\delta = 0$ ist; wenn dagegen δ wächst, so macht sich d. Umstand geltend, daß hier d. Contraction nur eine theilweise ist, da an äußersten Rande ja keine seitliche Wasserzuflüsse stattfindet und diese Zuflüsse aufgehoben an d. einem Ende nie vollkommen ist. —

Schließlich sind von Weisbach auch Versuche mit Ventilen angestellt. Betrachten wir zunächst d. Kegelventil: d. Öffnung d. Ventils befindet sich an einer solchen Stelle, wo zugleich eine Querschnittsänderung stattfindet, wie d. Ventil bei einem Pumpencylinder. Es sei F d. Querschnitt d. ankommenden Wassers, also d. Rohres unter d. Ventil und F' d. Querschnitt d. abfließenden Wassers, also " " hinter d. Ventil; dann



sind 3 enge Querschnitte zu unterscheiden: 1) den d. Ventilöffnung A_1
2) d. ringförmige Querschnitt um d. Ventil herum $= A_2$
3) d. cylindrische Ausflußquerschnitt zwischen d. Ventil und seinem Sitz $= A_3$
also d. eigentliche Öffnung. Bei einem gegebenen Ventil sind nun A_1 und A_2 gegeben, wogegen A_3 von d. Hubhöhe d. Ventils abhängt. D. resultirende Widerstandscoeff. ζ ist nun abhängig von d. Verhältniß zwischen A_1 A_2 A_3

und d. Querschnitt $\mathfrak{F}$. Ist d. Hubhöhe h sehr klein, dann wird d. resultirende Widerstandscoeff. vorzugsweise von A_2 abhängig sein; wird d. Hubhöhe h und damit A_2 vergrößert, so nimmt d. Einfluß d. Hubhöhe h auf ζ mehr und mehr ab, bis zu einer Grenze, wo d. weitere Vergrößerung von h keinen Einfluß mehr auf ζ ausübt. Man wird annehmen dürfen, daß dieser Einfluß d. Durchflußöffnung A_2 auf ζ aufhöre ~~von~~ merklich zu sein, sobald d. Querschnitt d. Wasserstroms beim Durchgange durch A_2 nicht mehr kleiner als d. Öffnung A_1 im Ventilsitze ist. Wenn d. Hubhöhe h = d. Radius r d. Öffnung A_1 geworden ist, so ist $A_2 = 2\pi r \cdot r = 2\pi r^2 = 2A_1$, woraus man schließen kann, daß in diesem Zustand d. mittlere Winkel, unter dem d. Wasserfäden diese Fl. A_2 schneiden, ungefähr 30° beträgt, denn dann ist d. Projection von A_2 auf eine Ebene senkrecht zu d. Letzteren = d. Hälfte von A_2; also für $h = r$ fällt d. Einfluß von A_2 heraus und es wird nun ζ hauptsächlich nur abhängig sein von d. Verhältniß d. Querschnitte A_1 A_2 zum Querschnitt $\mathfrak{F}$, so daß man setzen kann:

$$\zeta = \left(\frac{\mathfrak{F}}{\alpha A} - 1\right)^2$$

wenn hier nur unter A verstanden wird d. kleinere d. beiden Querschnitte A_1 und A_2 und wenn man sich vorbehält, d. Coeff. α durch besondere Versuche zu bestimmen. Dieser Coeff. α bedeutet hier nicht nur einen bloßen Coeff. d. inneren Contraction, sondern er wird mit bestimmt sein durch d. verschiedene Richtungsänderung, d. das Wasser erleidet und zum Theil von d. Beschaffenheit d. Zuleitung u. Wiedervereinigung d. Wasserstroms, außerdem von d. Verhältniß $\frac{A_1}{\mathfrak{F}}$ sowie von allen übrigen Umständen, welche d. Grad d. inneren Contraction beeinflussen; also von d. Construct. d. Ventilsitzes etc. —; indessen scheint sich auf d. Einfluß dieser Umstände d. bisherigen Versuche nicht erstreckt, da es wahrscheinlich ist, daß diese letzteren Einflüsse auf d. Grad d. Contraction nicht bedeutend sein werden. — Es ist nun vortheilhafter A_2 etwas größer als A_1 zu machen, so daß erst d. contrahirte Querschnitt nach d. Durchgange durch A_1 etwas größer als A_1 wird.

Bei Weisbach's Versuchen mit einem Ventil, wo $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$, war ferner

$$\frac{A_1}{\mathfrak{F}} = 0{,}356 \quad \text{und} \quad \frac{A_2}{\mathfrak{F}} = 0{,}406.$$

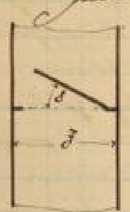
Unter diesen Umständen und während h mindestens $= r$ war, ergab sich: $\zeta = 11$. — Setzt man diesen Werth in d. obige Gl. und nachsehen: $\frac{A}{\mathfrak{F}} = \frac{A_1}{\mathfrak{F}}$, so findet man: $\frac{1}{\alpha} = 1{,}537$ also $\alpha = 0{,}651$. Letzterer Werth ist fast derselbe, wie für d. Contractionscoeff. einer einfachen kreisförmigen, centralen Öffnung in einer ebenen Wand. Für andere Verhältnisse solcher Teller- od. Kegelventile wird man bis auf Weiteres d. Widerstandscoeff. demnach setzen können:

$$\zeta = \left(1{,}537\,\frac{\mathfrak{F}}{A} - 1\right)^2$$

wo unter A d. kleinere d. beiden Querschnitte A_1 u. A_2 zu verstehen ist, wobei am vortheilhaftesten d. Verhältnisse so zu wählen sind, daß A_1 d. kleinere ist. Weisbach selbst stellte eine etwas andere Formel auf; er legt auch diese Formel zu Grunde, versteht aber unter A d. arithmetische Mittel von A_1 und A_2 und findet demnach:

Für d. zusammengesetzten Ventilarten liegen besondere Untersuchungen nicht vor, es bleibt also nichts anderes übrig als ζ nach Vorstehendem zu ermitteln.

Außerdem hat Weisbach Versuche angestellt mit einem Klappenventil; dasselbe war auch in einer mit gleicher Weite fortlaufenden Röhre eingeschaltet und bestand aus einer Lederscheibe. D. Winkel, welchen d. geöffnete Klappe mit d. Ebene d. Ventilsitzes bildet, sei δ, ferner sei A d. Größe d. kreisförmigen Öffnung im Ventilsitz und $\mathfrak{F}$ d. Querschnitt d. Rohrs. Bei d. Versuchsventil war $\frac{A}{\mathfrak{F}} = 0{,}535$. Die Größe von ζ ist wesentlich von diesem Verhältniß und von δ abhängig. Für verschiedene Werthe von δ wurden dann d. Widerstandscoeff.



betrachtet. Setzt man nun für: $\zeta = \left(x\frac{\sigma}{A} - 1\right)^2$, so lassen sich aus den durch d. Versuch zusammengehörigen Werte von x berechnen, also:

für $\sigma =$	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
$x =$	5,61	4,75	4,00	3,47	2,93	2,54	2,18	1,91	1,68	1,49	1,35	1,23

d. Coeff x ist also in bedeutendem Grade von σ abhängig und zwar nicht nur, weil durch σ d. Grad d. zusammenziehenden, seitlichen Ablenkung d. Wasserstroms bedingt wird, sondern auch d. kleinste Querschnitt d. Wasserstroms bedingt wird, namentlich bis σ eine gewisse Größe nicht erreicht. Betrachtet man x als eine Funktion vom Wert von σ, so kann man auch dieser Form auch ζ für ein anderes Klappenventil berechnen. Z. B.: es solle ζ berechnet werden für d. Ausfluss d. Wassers durch ein solches Ventil, während $\frac{A}{\sigma} = 0{,}64$ ist und $\sigma = 50°$ ist. Aus d. Tabelle ist dann $x = 1{,}91$ und somit:

$$\zeta = \left(\frac{1{,}91}{0{,}64} - 1\right)^2 = 4.$$

Beispiele als Anwendungen d. vorgeführten Gesetze.

Aus einem Behälter, in welchem d. Wasserstand durch entsprechenden Zufluss auf constanter Höhe erhalten wird, werde d. Wasser unter gleich bleibenden Umständen abgeleitet durch eine Röhre von d. Länge l und d. gleichförmigen Weite $= d$, ohne dass diese Röhre etwa durch Seitenöffnungen oder abgezweigte kleine Seitenröhren einen anderen Zufluss oder Abfluss als am Anfang und Ende hätte. Unter diesen Umständen fließt also durch jeden Querschnitt d. Röhre d. gleiche Wasservolumen V mit d. mittleren Geschw. u entsprechend d. Gleichung:

$$1)\quad V = \frac{\pi d^2}{4} u$$

Ist ferner ζ d. resultierende Coeff. etwaiger besonderer Widerstände, außer welche den allgemeinen Leitungswiderstand in d. Röhre entnommen können, so hat man d. früheren zufolge:

$$2)\quad \left(1 + \zeta + \lambda\frac{l}{d}\right)\frac{u^2}{2g} = H \qquad \text{(Seite 82)}$$

wo $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist (Seite

wenn p_0 d. äußere Druck an d. Oberfl. d. Wassers im Ausflussgefäß und p d. an d. Mündung, wenn d. Ausfluss in d. freie Luft, oder p d. Druck auf d. Oberfl. in d. Gefäß, in welches d. Wasser hineinfließt; h bedeutet im ersten Fall d. Höhe über d. Schwerpunkt d. Mündung, im anderen Fall Höhenunterschied beider Gefäßwasserspiegel. Wenn man, wie d. Fall, dass d. Wasser aus einem Gefäß in ein anderes fließt als d. allgemeinen Fall annehmen. Gewöhnlich ist nun $p_0 = p$ und damit $H = h$; im Allgemeinen gilt jedoch obige Gleichung. Wenn man zwischen obigen beiden Gl. d. mittlere Geschw. u eliminiert, so erhält man eine Beziehung zwischen l, d, H u. V, durch welche jede eine dieser Größen bestimmt werden kann, wenn d. anderen gegeben sind. Wenn es sich für einen solchen Fall nur um d. Ableitung d. Wassers handelt und eben nicht darum, d. lebendige Kraft d. Wassers zu verwerten, so kommt d. mittlere Geschw. nur in soweit in Betracht, als von d. mittleren Geschw. und d. Röhrenweite d. Größe λ abhängt, nämlich:

$$\lambda = m\left(\alpha + \frac{\beta}{ud}\right)$$

ist, wo α u. β für verschiedene Werte von u u. d bekannt sind und m ein Sicherheitscoeff. bedeutet, d. durchschnittlich $= 1{,}2$ gesetzt werden kann. Durch diesen Umstand, dass λ von u u. d abhängt, können d. verschiedenen hier sich darbietenden Aufgaben erschwert werden. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass d. Veränderlichkeit von λ mit u u. d innerhalb d. Grenzen, zwischen denen u u. d gewöhnlich liegen, nur eine mäßige ist, so dass es meistens genügt, entweder endgültig mit einem ungefähren Mittelwerte von λ d. Rechnung durchzuführen oder mit Hilfe eines vorläufigen Wertes von λ zu rechnen. — Im Allgemeinen können sich 4 verschiedene Aufgaben darbieten indem jede d. 4 Größen gesucht sein kann, wenn d. anderen gegeben sind; jedoch pflegt gewöhnlich l gegeben zu sein, sodaß nur noch 3 Aufgaben übrig bleiben, die dann folgendermaßen behandelt werden:

1) Gegeben d u. V.

Es wird also gesucht H d.h. d. Höhe, bei welcher eine gegebene Röhre ein gegebenes Wasservolumen p. Sek. liefert. Diese Aufgabe läßt sich direkt ohne Näherung ergeben: Zunächst findet man u aus d. Gl. 1); zu diesem u und d. gegebenen d findet man λ und mit diesem Coeff. λ und d. gegebenen Werthen l d u. ζ findet man H aus Gl. 2).

2) Gegeben d u. H; es wird also gesucht dasjenige Wasservolumen V, welches eine gegebene Röhre bei gegebener wirksamer Druckhöhe liefert. Hier muß man schon durch successive Näherung zu Werke gehen. Mit einem vorläufigen Näherungswerthe λ etwa $\lambda = 0.03$ findet man einen entsprechenden Näherungswerth u aus Gl. 2); zu diesem Näherungswerthe u und d. gegebenen Rohrweite d findet man dann einen corrigirten Werth von λ und mit diesem aus Gl. 2) einen corrigirten Werth von u und daraus V aus Gl. 1).

3) Gegeben V u. H; es wird gesucht diejenige Rohrweite d, welche einer Röhre gegeben werden muß, damit sie bei gegebener Länge und Druckhöhe ein gegebenes Wasservolumen p. Sek. liefert. Dieses ist die am häufigsten vorkommende Aufgabe. Hier hat man am besten zwischen Gl. 1) u. 2) u zu eliminiren, multiplicirt man zu diesem Zweck Gl. 2) mit $2g$ und setzt für u seinen Werth aus Gl. 1, so folgt:

$$\left(1+\zeta+\lambda\frac{l}{d}\right)\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{d^4} = 2gH$$

also
$$d = \sqrt[5]{\frac{(1+\zeta)d+\lambda l}{2gH}\cdot\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2}$$

Setzt man nun vorläufig d auf d. rechten Seite d. Gl. $= 0$ setzt und $\lambda = 0{,}03$, so findet man vermittelst dieses Ausdrucks einen Näherungswerth von d, zu diesem Näherungswerth von d findet man auch einen Näherungswerth $u\,d = \frac{4V}{\pi d}$ und hiezu einen corrigirten Werth von λ und wenn man dann diesen corrigirten Werth von λ und d. Näherungswerth von d einsetzt, endlich einen corrigirten Werth von d.

Beispiel: Es sei d. erforderliche Weite einer Röhre zu bestimmen, die bei $l = 50\,m$ und bei $H = 1{,}5\,m$ und unter d. Voraussetzung, daß sonst kein besonderer Widerstand in d. Röhre vorkommen als d. Eintrittscoeff. $\zeta = 0{,}5$, p. Sek. $V = 0{,}03$ cubm. Wasser zu liefern hat.

Setzt man zu dem Ende in d. Formel für d auf d. rechten Seite $d = 0$ und $\lambda = 0{,}03$, so folgt:

$$d = \sqrt[5]{\frac{0.03\cdot 50}{2\cdot 9.81\cdot 1.5}\left(\frac{0.12}{\pi}\right)^2} = 0{,}149$$

demnach ist $\frac{1}{ud} = \frac{0.149\,\pi}{0.12} = 3.9$ also $\alpha + \frac{\beta}{ud} = 0{,}0239$ ($m = 1{,}2$ gesetzt) liefert:

$$\lambda = 0{,}0287.$$

Mit diesem corrigirten Werth und d. Näherungswerth von d findet man nun:

$$d = \sqrt[5]{\frac{1.5\cdot 0.149 + 0.0287\cdot 50}{2\cdot 9.81\cdot 1.5}\cdot\left(\frac{0.12}{\pi}\right)^2} = 0{,}152$$ ~~m~~, welcher Werth genau genug ist um weiter keiner Correction zu bedürfen.

Unter den Umständen kann es auch wichtig sein, d. Pressung, d. in gewissen Querschnitten d. Röhre stattfindet, zu ermitteln. Die Kenntniß dieser Pr. ist namentlich in sofern von Interesse, indem von derselben d. Wandstärke abhängt und indem sich in keinem Querschnitt d. Pr. d. Grenze 0 nähern darf. Namentlich ist es schon nicht, wenn irgendwo d. Pr. kleiner wird als d. äußere atm. Druck, indem dann äußere atm. Luft in d. Leitung eindringen kann od. sich d. innere im Wasser enthaltene atm. Luft ausscheiden kann. Diesem Umstande kann vorgebeugt werden durch sogenannte Windkessel, d. mit einem Hahn versehen sind, od. mit selbstthätigen Vorrichtung, um dieselben beim Auftreten gesammelten Luftblasen entfernen. —

Um d. Druckhöhen in d. Rohrleitung zu berechnen, will ich für eine Strecke, entspr. d. Länge s', d. Mittellinie gemessen vom Anfang d. Röhre entfernt, ~~unter~~ d. in d. Tiefe z unter d. Oberwasserspiegel d. Pr. mit p_s bezeichnen, wobei z auch negativ sein kann. ζ_s sei d. Coeff. etwaiger besonderer Widerstände für d. ganze Rohrstrecke von d. Länge s und $\mathfrak{z}$ d. wirksame Druckhöhe, also:

$$\mathfrak{z} = z + \frac{p_0 - p_s}{\gamma} \quad \text{also} \quad \frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - \mathfrak{z}.$$

Für d. wirksame Druckhöhe $\mathfrak{z}$ gilt nun ein ganz analoger Ausdruck wie für $\mathfrak{H}$ (Seite 82)

also: $$\frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - \left(1 + \zeta_s + \lambda \frac{s}{d}\right)\frac{u^2}{2g}$$ oder wenn für $\frac{u^2}{2g}$ d. Wert aus Gl. 2 Seite 90 gesetzt wird:

$$\frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - \frac{(1+\zeta_s)d + \lambda s}{(1+\zeta)d + \lambda l}\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)$$

Gewöhnlich wird nun d. äußere Druck sowohl am Ober- wie am Unterwasserspiegel = d. atm. Luftdruck sein, also $p_0 = p$, u. so nun $\frac{p_0}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} = b$ = Wasserbarometerhöhe, welche ungefähr = 10 m ist, so folgt nun:

$$\frac{p_s}{\gamma} = b + z - \frac{(1+\zeta_s)d + \lambda s}{(1+\zeta)d + \lambda l}h.$$

Diese Druckhöhe soll größer sein als 0, widrigenfalls sich sonst d. Wasser von d. Rohrwand trennt. Daraus ergibt sich d. Bedingung für d. zulässige Erhebung einer Rohrstrecke über d. Oberwasserspiegel, also d. Größe $\div z$; ~~unter~~ es muß nämlich sein:

$$\div z < b - \frac{(1+\zeta_s)d + \lambda s}{(1+\zeta)d + \lambda l}h.$$

Diese Erhebung über d. Oberwasserspiegel hinaus ist eine Function von s, so daß sich d. Röhrenleitung an verschiedenen Stellen verschieden hoch erheben darf. Ist d. Leitungsröhre sehr lang und sind besondere Widerstände nicht vorhanden, so wird sowohl im Zähler wie im Nenner d. Bruchs d. 2te Glied viel größer als d. erste, so daß man annähernd erhält:

$$\div z < b - \frac{s}{l}h.$$

Daraus ergeben sich d. Umstände, unter denen es möglich ist, durch eine geschlossene Röhre d. Wasser über eine Anhöhe zu leiten. Jedenfalls muß diese Erhebung kleiner sein als b also kleiner als 10 mtr.; ferner erkennt man, daß am Anfang d. Rohrleitung dieselbe sich höher erheben darf als gegen d. Ende hin. Auch ist diese höchstens zulässige Höhe abhängig von h; überschreitet diese Druckhöhe h eine gewisse Grenze, so kann es unmöglich werden, d. Röhre höher als d. Oberwasserspiegel zu legen, sobald nur $h > \frac{l}{s}b$ ist.

Bis jetzt ist eine cylindrische Röhre vorausgesetzt, wo auch d. durch 2 Querschnitte hindurchfließende Wassermenge d. gleiche ist. D. allgemeinste Fall würde nun d. sein, daß d. Weite d. Röhre auf ihrer ganzen Länge veränderlich ist, und daß dann auch d. Wasservolumen V vom Anfang bis zum Ende d. Röhre sich stetig ändert. Letzteres wird streng genommen kaum jemals d. Fall sein, jedoch näherungsweise wie z. B. bei einer städtischen Wasserleitung, welcher sich oft durch kleinen Zweigleitungen Wasser entzogen wird, so man also annehmen kann, dieselben entnehmen stetig d. Wasser d. Hauptleitungsröhre. Es sei also sowohl d. Weite d. Röhre stetig veränderlich als auch d. Volumen V. In einem solchen Fall wird nun d. Leitungswiderstandshöhe f. Längeneinheit für verschiedene Stellen natürlich verschieden sein. Ich will nun sie für d. Längenelement ds mit $\mathfrak{B}_1 ds$ bezeichnen, so wird $\mathfrak{B}_1$ eine Function von s sein. D. veränderliche Weite d. Röhre sei = y und d. mittlere Geschw. an dieser Stelle = u. Man wird dann gerade so wie bei einer cylindrischen Röhre, auch hier d. allgemeine Formel bezüglich $\mathfrak{B}_1$ zu Grunde legen dürfen, sobald nur d. Veränderlichkeit von V ziemlich langsam vor sich geht.

$$\text{also } \mathfrak{B}_1 = a\frac{u^2}{y} + b\frac{u}{y^2} = \frac{\lambda}{y}\frac{u^2}{2g} \qquad \text{(Seite 78)}$$

$$\text{also } \lambda = \alpha + \frac{\beta}{uy}$$

Nun ist es fraglich ob a u. b usf. d. h. ob dieselben Werte haben werden wie bei d. Leit. in einer zylindrischen Röhre, da d. Verhältnisse nach 2 Richtungen hin abweichend sind. Hier wird d. Geschw. nicht in allen Punkten gleich sein, da d. Querschnitte nicht eben sind; ferner enthalten d. Koeff. a u. b d. Verhältnis $\zeta = \frac{w'}{u}$ in sich, wo w' d. Strömung an d. Rohrwand (Seite 78) und u d. mittlere Geschw. ist. Dieses Verhältnis war durch jene Untersuchungen ganz unbestimmt und es fragt sich, ob dieses Verhältnis ebenso groß sein wird für eine weitere Röhre. Da jedoch hierüber keine Versuche vorliegen, so bleibt nichts anderes übrig als für a u. b d. früheren Werte zu nehmen. – Wird nun mit B d. Leitungswiderstandshöhe für d. ganze Röhre bezeichnet, so ergibt sich:

$$B = \int_0^l B_1\,ds = \frac{1}{2g}\int_0^l \frac{\lambda}{y}\,u^2\,ds.$$

Hier wird es zulässig sein, d. Koeff. λ einen konstanten Mittelwert zu geben, so daß derselbe vor d. Integral heraustritt, also:

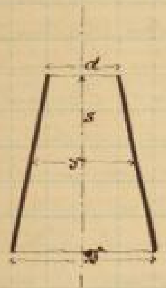
$$B = \frac{\lambda}{2g}\int_0^l \frac{u^2}{y}\,ds.$$

In diesem allgemeinsten Ausdruck ist nun $u = \frac{4V}{\pi y^2}$, wo im Allgemeinen sowohl y als auch V Funktionen von s sein können. Von besonderem Interesse sind indessen nur 2 einfache Spezialfälle, nämlich:

1) daß V konstant und nur y veränderlich ist und zwar gleichförmig veränderlich

und 2) daß y konstant und V veränderlich ist.

Ist zunächst V konstant, so folgt:
$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2\int_0^l \frac{ds}{y^5}$$



Es sei nun d d. Rohrweite am engeren und D d. am weiteren Ende und y d. an einer beliebigen Stelle in d. Entfernung s vom engeren Ende, dann ist
$$\frac{y-d}{D-d} = \frac{s}{l} \quad \text{also} \quad ds = \frac{l}{D-d}\,dy$$ und damit:

$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2\frac{l}{D-d}\,\frac{1}{4}\left(\frac{1}{d^4}-\frac{1}{D^4}\right)$$

oder
$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2\frac{l}{4}\,\frac{D^4-d^4}{(D-d)D^4} = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2\frac{1}{4}\,\frac{l}{D}\left(1+\frac{d}{D}\right)\left(1+\frac{d^2}{D^2}\right).$$

Setzt man diese Leitungswiderstandshöhe $= \zeta\left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2\frac{1}{2g}$, so bedeutet ζ nichts anderes als d. Widerstandskoeff. bezogen auf d. kleinsten Querschnitt, es wird also:
$$\zeta = \frac{\lambda}{4}\,\frac{l}{D}\left(1+\frac{d}{D}\right)\left(1+\frac{d^2}{D^2}\right). —$$

D. andere Spezialfall, daß d. Rohrweite y konstant $= d$ ist, d. Wassermenge V aber stetig veränderlich ist, hat Interesse rücksichtlich d. einzelnen Leitungen einer städtischen Wasserleitung. Tatsächlich findet d. Abnahme d. Wassers nicht stetig längs d. Röhre statt, nur annähernd ist d. Wasserverbrauch d. Häuser, welche Verhältnisse jedoch nicht berücksichtigt werden sollen. – Setzt man nun in d. allgemeine Formel für d. Leitungswiderstandshöhe $u = \frac{4V}{\pi d^2}$ ein, so folgt:
$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\frac{1}{d^5}\int_0^l V\,ds.$$

Ist nun V_0 d. am Anfang einströmende Wasser und V_1 d. am Ende ausströmende Wasser und V d. durch d. in d. Entfernung s vom Anfang liegenden Querschnitt hindurchfließende Wasser, so ist offenbar:
$$\frac{V_0-V}{V_0-V_1} = \frac{s}{l} \quad \text{wo wenn} \quad \frac{V_1}{V_0} = \alpha \quad \text{gesetzt wird:} \quad \frac{V}{V_0} = 1-\frac{1-\alpha}{l}s$$

und damit
$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2\frac{1}{d}\int_0^l\left[1-2\frac{1-\alpha}{l}s+\frac{(1-\alpha)^2}{l^2}s^2\right]ds.$$

Das Integral ergibt sich nun:
$$\int\ldots ds = l-(1-\alpha)l+\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{3}l = \frac{l}{3}(3-3+3\alpha+1-2\alpha+\alpha^2) = \frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}l$$

also
$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2\frac{l}{d}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3};$$
$\frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2$ wäre bekanntlich d. Widerstandshöhe wenn d. Wassermenge konstant bliebe und zwar vom Anfang bis zum Ende d. Röhre.

Beispiel: Eine zusammengesetzte Wasserleitung soll berechnet werden. Von einem gemeinsamen Hochreservoir aus [illegible] d. Wasser zunächst in ein festgelegtes Netz und von hier aus geht ein einziger Rohrstrang, d. sich nach und nach verzweigt. Die erste gemeinschaftliche Hauptstrecke sei bezeichnet mit $A_0 A_1$, wo A_0 d. Anfangsquerschnitt d. ganzen Leitung ist, A_1 d. Querschnitt, wo zuerst eine Abzweigung stattfindet. Die Länge dieser Strecke $A_0 A_1$ sei $= l_1$. Dem entsprechenden Bedürfnisse gemäß sind d. Wassermengen gegeben, die von d. ersten Verzweigungsstelle A_1 in d. verschiedenen Rohrsträngen fortdauernd fließen sollen. Man kann also unter d. verschiedenen Zweigen, d. von A_1 abzweigen, denjenigen betrachten, durch welche d. größte Wassermenge fortwährend fließt; diese Strecke sei $A_1 A_2$ mit d. Länge l_2; an d. Stelle A_2 findet eine abermalige Verzweigung statt; es soll dann wieder d. Strecke betrachtet werden, d. d. größte Wassermenge enthält, nämlich $A_2 A_3$ von d. Länge l_3 u. s. w. — bis zur Strecke $A_{n-1} A_n$ von d. Länge l_n. — Von jedem d. Knotenpunkte aus kann man nun wieder d. abgezweigten Röhren in ähnlicher Weise verfolgen, worauf jedoch nicht weiter eingegangen werden soll. — D. Längen $l_1\ l_2 \ldots\ l_n$ sind natürlich als gegeben zu betrachten. Diese einzelnen Strecken sollen mit constanten Durchmessern d. betreffenden Röhren angeordnet werden; an jeder Knotenstelle kann jedoch eine Änderung d. Durchmesser eintreten und es seien d. Durchmesser d. n Strecken d. Hauptstranges nach: $y_1\ y_2\ y_3 \ldots y_n$. Diese Größen sind aber nicht gegeben. D. Widerstandshöhe d. Wassers in d. ersten Strecke sei bezeichnet mit B_1, die d. folgenden mit $B_2\ B_3 \ldots B_n$. Diese Größen sind auch nicht gegeben, da sie wesentlich von d. betreffenden Durchmessern abhängen. An d. Stellen $A_0\ A_1\ A_2 \ldots A_n$ seien d. Druckhöhen im Innern d. Röhren $b_0\ b_1\ b_2 \ldots b_n$, welche also kürzere Bezeichnungen für $\frac{p_n}{\gamma}$ sind. Von diesen Druckhöhen sind d. erste und d. letzte gegeben und zwar b_0 durch d. Höhe d. Hochreservoirs und b_n dadurch, daß selbst am Ende d. Rohrleitung noch eine genügende Druckhöhe übrig bleiben soll, um d. Wasser in d. höchsten Stockwerke hinauf zu treiben; d. übrigen dazwischen liegenden Druckhöhen sind jedoch vorläufig noch nicht bekannt. — Was d. ganze Anordnung d. Röhrennetzes betrifft, so sind d. Verhältnisse nicht nur d. einzelnen Längen d. verschiedenen Rohrstrecken gegeben, sondern auch d. Höhenlage d. einzelnen Knotenpunkte durch Nivellement d. Terrains. Es sei demnach h_1 d. Höhe von A_0 über A_1, h_2 d. von A_0 über A_2 …… h_n d. von A_0 über A_n. Ferner [illegible] d. früheren Bezeichnungen sei nun H_1 d. wirksame Druckhöhe für d. ganze Rohrstrecke $A_0 A_1$, H_2 d. für d. Strecke $A_1 A_2$, H_n d. von A_0 bis A_n. Diese wirksamen Druckhöhen sind natürlich von d. vorhergehenden Größen abhängig, nämlich: $H_m = h_m + b_0 - b_m$. —

D. Wasservolumen, welches p. Sek. in d. Rohrstrecke $A_0 A_1$ hineinfließt sei V_1; V_2 sei d. Wasservolumen, welches in d. folgende Strecke $A_1 A_2$ hineinfließt, während W_1 d. Wasservolumen ist, welches durch d. sonstigen hier in A_1 abzweigenden Rohrstränge abfließt. D. Größe V_1 kann schon [illegible] während d. Strecke $A_0 A_1$ kleine Abzweigungen erleiden durch kleinere Hausleitungen, so daß d. bei A_1 herausfließende Wasser $= \alpha_1 V_1$ geworden ist. Dieses Wasservolumen $\alpha_1 V_1$ verzweigt sich nun an d. Stelle A_1 in d. Volumen V_2 und in W_1; das aus d. Strecke $A_1 A_2$ hinausfließende Wasservolumen sei $= \alpha_2 V_2$; von diesem geht d. Wassermenge V_3 in d. 3te Strecke $A_2 A_3$, während W_2 in d. übrigen in A_2 sich abzweigenden Leitungen geht. u. s. w. — Schließlich ist V_n d. Wasservolumen, welches in d. nte Strecke hineinfließt, W_n sei dasjenige Wasservolumen welches am Ende d. nten Strecke noch übrig bleibt zur irgend einer [illegible] oder kommenden Verwendung. V_n geht bis gegen d. Ende d. Strecke l_n über in $\alpha_n V_n$. D. Größen α stehen natürl. in Beziehung zu d. gegebenen Größen V u. W, denn es ist: $\alpha_1 V_1 = W_1 + V_2$

also $\alpha_1 = \frac{W_1 + V_2}{V_1}$ $\qquad \alpha_2 = \frac{W_2 + V_3}{V_2}$ $\ldots\ldots$ $\alpha_n = \frac{W_n}{V_n}$

Es sind also:

	A_0A_1	A_1A_2	A_2A_3	… $A_{n-1}A_n$	d. Strecken d. Hauptstränge
	l_1	l_2	l_3	… l_n	d. Längen derselben.
	y_1	y_2	y_3	… y_n	d. entsprechenden Durchmesser
	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}_2$	$\mathfrak{B}_3$	… $\mathfrak{B}_n$	d. Widerstandshöhen
A_0	A_1	A_2	A_3	… A_n	d. Knotenpunkte
b_0	b_1	b_2	b_3	… b_n	d. Druckhöhen daselbst
	h_1	h_2	h_3	… h_n	d. Höhenlagen über A_0
	H_1	H_2	H_3	… H_n	d. verfügbaren Druckhöhen für A_0A_n
	V_1	V_2	V_3	… V_n	d. in $A_{n-1}A_n$ einfließende Wasserquant.
	W_1	W_2	W_3	… W_{n-1}	W_n das in A_n abgezweigte Wasserquant.
	α_1V_1	α_2V_2	α_3V_3	… α_nV_n	das aus $A_{n-1}A_n$ ausfließende Wasserquant.

Unbekannt sollen nur d. Durchmesser y bestimmt werden und zwar so, daß d. Anlagekosten ein Minim. werden, wobei untergeordnete Widerstände unberücksichtigt bleiben sollen, also nur d. Leitungswiderstand betrachtet werden soll, indem man sich vorbehalten kann, d. Coeff. λ etwas größer zu veranschlagen. Es sind bei einer solchen Leitung ja d. Zahl andere Leitungswiderstände von sehr untergeordneter Art, so daß man dies wohl thun kann. Die Anlagekosten sind nun vorzugsweise bedingt durch d. Rohrgewicht d. ganzen Röhrenleitung und dürfen annähernd d. Gew. proportional sein. Für eine Strecke von d. Länge l, Weite y und Wandstärke δ ist d. Volumen proportional $l y \delta$ also d. Gew. d. ganzen Röhrenstrangs proportional $\Sigma\, l y \delta$. D. Wandstärke einer solchen Röhre wird gewöhnlich nach einer empirischen Formel bestimmt: $\delta = \alpha + \beta y$, wo α constant ist, β aber mit d. Pressung wächst. Im vorliegenden Fall sind d. Pressungen in d. einzelnen Theilen an d. verschiedenen Stellen d. ganzen Röhrenstrangs wenig genug verschieden, so daß auch β als Constante betrachtet werden kann, da auch am Ende d. ganzen Leitung d. Pressung noch so groß sein muß, daß d. Wasser in d. obersten Stockwerke hinaufsteigt. Damit sind d. Anlagekosten proportional: $\Sigma\, l y(\alpha + \beta y)$. Behufs einer ersten Annäherung soll zunächst so gerechnet werden, als ob $\beta = 0$ wäre, indem d. Kosten nicht nur bedingt sind durch d. Kosten d. Röhrenstrangs selbst sondern auch durch d. Verlegungskosten, welche ein analoges Abhängigkeitsgesetz haben könnten. Jedenfalls ist β nur sehr klein, es sei also behufs einer ersten Näherung gesetzt: $\Sigma\, l y = \min.$ Soll dieses ein Minim. bezüglich d. Veränderlichen y sein, so muß d. erste Differentialquotient $= 0$ sein, also:

$$\Sigma\, l\, dy = 0$$

d. n verschiedenen Differentiale $dy_1, dy_2, dy_3 \dots$ stehen in einer gewissen Beziehung zu einander. Da keine anderen Widerstände als d. Leitungswiderstand berücksichtigt sind und auch diese Leitungswiderstandshöhe viel größer als d. Geschw.-Höhe d. an irgend einer Stelle fließenden Wassers ist, so vereinfacht sich d. Gl.: $\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}$, wo man d. Geschw.-Höhe links gegen d. viel größere Höhe $\mathfrak{B}$ vernachlässigen kann:

$$H = \mathfrak{B}.$$

Nach Seite 93 ist dann d. Widerstandshöhe irgend einer dieser n Strecken:

$$\mathfrak{B} = \frac{l P}{y^5} \quad \text{wenn} \quad P = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \frac{1+\alpha+\alpha^2}{3} \text{ ist.}$$

Dieses P hat für jede d. n Strecken einen besonderen Werth, der sich aber von vornherein berechnen läßt, wenn für λ vorläufig ein angenäherter Mittelwerth, etwa 0,03, gesetzt wird, man hat nur zu setzen in d. allgemeinen Formel: $V = V_1$, $\alpha = \alpha_1$, so findet man P_1 = d. Werth von P für diese erste Rohrstrecke, dann ist $\mathfrak{B}_1 = \frac{l_1 P_1}{y_1^5}$ u. s. w. — Nun ist aber d. Summe d. Widerstandshöhen aller n Strecken zusammengenommen $= \mathfrak{B} = \Sigma \frac{lP}{y^5}$ eine gegebene größe, denn es muß doch = H_n sein; wenn nun auch d. verschiedenen H_n unbekannt sind so ist doch H_n bekannt, nämlich:

$$H_n = h_n + b_0 - b_n$$

Es sind also d. n Differentiale an d. Bedingung gebunden, daß $\Sigma \frac{lP}{y^5} = const = H_n$ sein muß, d. Bedingung ist also:

$$\Sigma B = \Sigma \frac{lP}{y^5} = H_n = h_n + b_0 - b_n.$$

differentiirt giebt diese Gl.:

$$\Sigma \frac{lP}{y^6}\, dy = 0.$$

Zwischen dieser Gl. und d. Gl. $\Sigma l\, dy = 0$ könnte man nun eins d. n Differentialen $dy_1\, dy_2 \dots dy_n$ eliminiren, so daß eine Gl. entstünde, d. nur d. übrigen $n-1$ Differentiale enthielte; da diese $n-1$ übrig bleibenden Werthe von dy ganz unabhängig von einander sind, so müßte d. entstehende Gl. identisch erfüllt sein für alle Werthe von y, es müßte also d. Coeff. d. einzelnen y gleich sein. Dieses würde $n-1$ Gln. ergeben, welche zusammen mit d. Gl. für P d. erforderliche Zahl von n Gln. geben, woraus d. verschiedenen Durchmesser zu finden sind. Es ist aber geschickter dieses Eliminationsverfahren mit einem gewissen Coeff. auszuführen; zu dem Ende multipliciren wir d. Gl. mit μ^6 und addiren sie zu $\Sigma l\, dy = 0$, so erhalten wir d. Gl.:

$$\Sigma l \left(1 - \mu^6 \frac{P}{y^6}\right) dy = 0$$

Nun kann man so schließen, daß diese n Glieder d. Summe einzeln jedes für sich $= 0$ wird, also d. Gl. in n Theilgleich. zerlegen, wobei nur μ passend bestimmt werden muß. Rechnet man d. Coeff. μ, d. dieser Bedingung entspricht, so ergiebt sich $y = \mu P^{\frac{1}{6}}$. Man braucht dann nur noch d. Werthe $\mu P^{\frac{1}{6}}$ zu bilden, um d. verschiedenen n Durchmesser y zu finden. D. n verschiedenen Werthe von P sind aber bekannt für einen Mittelwerth von λ, so daß es sich nur um d. Bestimmung von μ handelt, dieses kann aber geschehen vermittelst d. Bedingung: $\Sigma \frac{lP}{y^5} = H_n$, dieses aber eingesetzt liefert:

$$\Sigma \frac{lP}{\mu^5 P^{\frac{5}{6}}} = H_n$$

Hierin sind bei P für d. verschiedenen einzelnen Glieder verschieden, μ war aber ein für alle Glieder gemeinschaftlicher Coeff. so daß $\frac{1}{\mu^5}$ herausgeschieden werden kann, also:

$$\mu = \left(\frac{\Sigma l P^{\frac{1}{6}}}{H_n}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Dieser Werth von μ ist dann nur zu multipliciren mit $P^{\frac{1}{6}}$, um y zu finden.

Jetzt kann man eine Correctionsrechnung in zweifacher Richtung anstellen, einmal insofern, als λ nicht immer $= 0{,}03$ ist und dann in so fern, als es nicht ganz d. Aufgabe entspricht, d. Summe d. Producte $l y$ zu einem min. zu machen, sondern daß

$$\Sigma l y (\alpha + \beta y) \text{ zu einem min. gemacht werden soll.}$$

Was zunächst λ betrifft, so kann man, da jetzt d. Durchmesser angenähert bestimmt sind, sowie auch d. Wassermengen, d. durch d. einzelnen Rohrstrecken hindurchfließen, so kennt man auch d. mittl. Geschw. in diesen Rohrstrecken, also kennt man auch u_y und es ist nun im Allgemeinen: $u_y = \frac{4V}{\pi y}$; V ist aber am Anfang $= V$ und am Ende αV, so daß man setzen kann statt $4V$: $2V(1+\alpha)$ also:

$$u_y = \frac{2V(1+\alpha)}{\pi y}$$

Setzt man hierin d. Werthe von $V = V_1\, V_2 \dots$ $\alpha = \alpha_1\, \alpha_2 \dots$ $y = y_1\, y_2 \dots$, so kann man d. mittl. Werthe von u_y für d. einzelnen Strecken berechnen, damit findet man nun entsprechend d. corrigirten Werth von λ. War aber λ' d. vorläufig angenommene Mittelwerth von λ, so braucht man nur d. früher berechneten Werthe von P zu multipliciren mit $\frac{\lambda}{\lambda'}$ um d. corrigirten Werthe von P zu erhalten. Angenommen dieses sei geschehen, so daß nun unter P d. corrigirte Werth von P verstanden werde, dann soll d. Einfachheit wegen gesetzt werden:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m}{2}$$

Die Aufgabe ist dann: $\sum ly\left(1+\frac{my}{2}\right)$ = min zu machen. Zu dem Ende muss d. Differential bezüglich d. Veränderlichen $y = 0$ sein, also:

$$\sum l(1+my)\,dy = 0 .$$

Wenn nun wieder d. Bedingungsgl. $\sum \frac{lP}{y^6}\,dy = 0$ mit d. Coeff. μ^6 multiplicirt und d. Gl. von dieser subtrahirt wird, so ergibt sich:

$$\sum l\left(1+my-\mu^6\frac{P}{y^6}\right)dy = 0 .$$

Hier kann nun wieder μ so bestimmt werden, dass diese Gl. in n einzelne Gln. zerfällt. Wenn d. Coeff. μ so bestimmt, so würden sich d. n einzelnen Werthe von y ergeben aus dieser Gl. Dieses würde aber sehr zeitraubend sein, da diese Gln. durch Probiren aufzulösen sind, welches bei n Gln. vom 7ten Grad nicht so einfach ist. Wenn es sich aber nun wie hier nur um eine Correctionsrechnung handelt und m immer und klein ist, so kann man in my dem y d. vorher schon bestimmten Näherungswerth beilegen, welcher aber mit y' bezeichnet sei; also y' = Näherungswerth für d. Rohrdurchmesser. Dann ergibt sich, wenn μ bestimmt ist:

$$y = \mu\left(\frac{P}{1+my'}\right)^{\frac{1}{6}}$$

d. Werthe von $\frac{P}{1+my'}$ können für d. n Rohrstrecken berechnet werden, da d. n Werthe von P bekannt sind. Es handelt sich also nur noch um d. Bestimmung von μ. Dieser Coeff. ergibt sich aus: $\sum\frac{lP}{y^5} = H_n$; setzt man den Werth ein, so folgt:

$$\sum \frac{lP}{\mu^5\left(\frac{P}{1+my'}\right)^{\frac{5}{6}}} = H_n . \quad \text{und daraus } \mu:$$

$$\mu = \left(\frac{\sum\left[l\left(\frac{P}{1+my'}\right)^{\frac{1}{6}}(1+my')^{\frac{5}{5}}\right]}{H_n}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Nachdem man nun so d. einzelnen corrigirten Weiten d. Strecken d. Hauptleitungen gefunden hat, kann zu d. Nebenleitungen geschritten werden, d. sich an d. Knotenpunkten abzweigen. Um diese Nebenleitungen nun genau so weiter behandeln zu können, ist weiter nichts nöthig, als zunächst d. Druckhöhen $b_1\, b_2 \ldots$ für d. n Knotenstellen zu berechnen, denn dann treten diese bezüglich d. Nebenleitungen an Stelle von b_0 in d. Formel für d. Hauptleitung und kann dann genau so wie vorher verfahren. Die Größen $b_1\, b_2 \ldots\ldots b_{n-1}$ können nun leicht gefunden werden, b_0 und b_n waren bekannt, b_1 bis b_{n-1} müssen berechnet werden. Es kann nun aber, nachdem d. Durchmesser y für d. sämtlichen n Strecken d. Hauptleitung bekannt sind, d. Größe B für d. n Strecken berechnet werden:

$$B_1 = \frac{l_1P_1}{y_1^5} \quad \ldots\ldots \quad B_n = \frac{l_nP_n}{y_n^5} .$$

Ist dies geschehen, so ist d. Druckhöhe H_1 für A_0 bis $A_1 = B_1$, ferner $H_2 = B_1 + B_2$, $H_3 = B_1 + B_2 + B_3$ etc. — es ist aber $H_1 = h_1 + b_0 - b_1$ und hieraus also b_1, da H_1 und b_0 bekannt sind. Ferner ist $H_2 = h_2 + b_0 - b_2$ woraus wiederum b_2 gefunden werden kann u. s. w. —

Nachdem nun also d. Druckhöhen an d. n Knotenpunkten bekannt sind, kann man d. Nebenleitungen ebenso wie d. Hauptleitung berechnen. —

[illegible]

Permanente strömende Bewegung der Luft oder eines Gases in Gefäßen oder Röhren.

Um zunächst gewisse Fundamentalgln. für diesen Fall aufzustellen, muß zunächst erinnert werden an d. früher aufgestellten allgemeinen Gln. für d. permanente strömende Bew. einer beliebigen Flüssigkeit. D. Fundamentalgln., bei denen gar nichts bezüglich d. Art d. strömenden Flüssigkeit vorausgesetzt, waren folgende:

1) d. Continuitätsgl.:
$$Fu = Gv$$
worin F = Querschnitt d. Flüssigkeitsstromes an einer gewissen Stelle, u mittlere Geschw. in F, G = Flüssigkeitsgew., welches pr. Sek. durch F fließt und v = Volumen d. Gewichtseinheit. —

2) d. Gl. d. lebendigen Kraft:
$$\frac{u\,du}{g} + v\,dp = dM - dB$$
diese Gl. ist bezogen auf ein Längenelement ds d. Röhre und auf 1 kgr. d. Flüssigkeit; ferner bedeutet g d. Beschl. d. Schwere, p d. mittl. Pressung in F, dM d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte pr. 1 kgr strömender Flüssigkeit auf d. Wege ds und dB d. Arbeitsverlust durch d. Bew.-Widerstände pr. 1 kgr. Flüssigkeit auf d. Wege ds.

3.) d. Wärmegleichung:
$$dU + p\,dv = W\,d\Theta + dB.$$
Darin bedeutet U d. sog. innere Arbeitsvermögen d. Flüssigkeit pr. 1 kgr, dU d. Änderung desselben auf d. Wege ds, $d\Theta$ bedeutet d. Wärme, welche pr. 1 kgr. strömender Flüssigkeit durch d. Wand d. Röhrenelements von d. Länge ds von außen nach innen zugeführt wird, W d. Arbeitswerth d. Wärmeeinheit, also d. Zahl 424, wenn 1 kgrm. d. Arbeitseinheit ist, vermittelst welcher d. Temperatur von 1 kgr. Wasser um 1° C. erhöht wird.
Aus 2 und 3 ergibt sich d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens:

4) . . . .
$$\frac{u\,du}{g} + dU + d(pv) = dM + W\,d\Theta.$$
Zur näheren Bestimmung von dM dB und $d\Theta$ ist zu bemerken, daß dM, also d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte, wenn diese Kräfte bestehen aus d. Schwerkraft und d. Ergänzungskräften d. rel. Bew., folgende Gl. hat:
$$dM = \left(\cos\psi - \frac{\gamma}{g}\cos\varrho\right)ds\ ;$$
hierin ist ψ d. Winkel, den an d. betreffenden Stelle d. Mittellinie d. Rohrs d. Richtung d. Schwere mit d. Tangente an d. Mittellinie d. Rohrs im Sinne d. Bew. bildet, also $0 < \psi < 180°$; γ bedeutet hier, für d. Fall d. eigenen Bew. d. Systems, d. Beschl. d. Mittellinie d. Rohrs an d. betreffenden

Stelle und φ d. Winkel zwischen d. Richtung von f mit d. Richtung d. Tangente an d. Mittellinie. —

Was d. Größe dB betrifft, so können auch hier d. Bew.-Widerstände zweierlei Art sein, theils Leitungswiderstände längs d. ganzen Röhre theils besondere Widerstände, verursacht durch Richtungs- und Querschnittsänderungen. In diesen differentiellen Gl. können aber nur d. stetig auf d. ganzen Länge vertheilten Leitungswiderstände vorkommen, da diese diff.-Gl. nur im Ganzen behandelt werden können, nicht für einzelne Stücke ds. Etwaige sonstige Widerstände können erst nach d. Integration berücksichtigt werden, wobei es nöthig ist, wenn an irgend einer Stelle ein besonderer Widerstand stattfindet, bis dahin zu rechnen und dann von hier wieder weiter u. s. w. — Für d. Leitungswiderstand kann man dieselbe Gl. zu Grunde legen wie beim Wasser, also:

$$dB = \lambda \frac{ds}{\delta} \frac{u^2}{2g}.$$

wo man sich nur vorbehält λ durch Versuche zu bestimmen. Schließlich ist:

$$g\,dQ = k(T' - T)\,dF',$$

worin bedeutet T d. absolute Temperatur im Innern d. Röhre an d. betrachteten Stelle, T' d. Temperatur d. Mediums an d. entsprechenden äusseren Stelle und dF' d. Wandfl. d. Röhre entsprechend d. Längenelement ds; k ist d. betreffende Wärmeübertragungscoeff., also d. Wärmemenge, d. durch eine Wandfl. F' in d. Zeiteinheit für jeden Grad d. innern und äussern Temp.-differenz hindurchfließt. —

Zu diesen 3 Gl. müssen jedoch noch 2 hinzukommen, um d. 5 Unbekannte zu bestimmen. Diese 2 Gl. sind von d. Art d. Flüssigkeit abhängig; zunächst d. Zustandsgl.:

$$pv = RT \quad \text{- - - - - - - - - -} \quad 4.)$$

Die letzte Gl. endlich bezieht sich auf d. innere Arbeitsvermögen eines Gases. Aus d. Prinzip d. Wärmetheorie ist bekannt, daß d. ∞ kleine Änderung d. Eigenwärme, also d. Wärmemenge einer unendl. kl. Änderung d. Arbeitsvermögens $A\,dU$ einfach proportional ist d. Temperaturänderung. Diese sogenannte innere Arbeit ist beim Gas = 0; eine Änderung d. Eigenwärme ist nur bedingt durch eine Änderung d. inneren lebendigen Kraft nicht bezüglich d. Gruppirung, es ist also:

$$A\,dU = c\,dT.$$

worin c d. spec. Wärme bei constantem Volumen bedeutet. Nun ist bekanntlich: $AR = c_p - c$ wo c_p d. spec. Wärme eines Gases bei constanter Pressung ist. Wird nun $c_p - c = c(n-1)$ gesetzt, wo bekanntlich für atm. Luft $n = 1{,}41$ ist, so ist: $\frac{c}{A} = \frac{R}{n-1}$ also:

$$dU = \frac{R}{n-1}\,dT. \quad \text{- - - - - - - - - -} \quad 5)$$

Jetzt haben wir 5 Beziehungen, wenn auch nur in Form von Diff.-Gl., womit nun d. 5 Unbekannten gefunden werden können als Functionen von s, wenn nur d. Anfangs- und Endzustand, also d. Grenzbedingungen in d. erforderlichen Zahl gegeben sind zur Bestimmung d. Constanten.

Von vornherein sollen diese Versuche jedoch dadurch vereinfacht werden, daß von diesen 5 Größen 2 eliminirt werden und zwar d. d. spec. Volumens und d. d. inneren Arbeitsvermögens, so daß nur 3 Gl. bleiben zwischen Pr., Temp. und Geschw.

Zunächst läßt sich Gl. 1 mit Gl. 4 so combiniren, daß v herausfällt, wie bekannt nämlich:

$$\frac{Fu}{G} = \frac{RT}{p} \quad \text{. . . . .} \quad \mathrm{I}$$

ferner ist mit Rücksicht auf Gl. 4 u. Gl. 5:

$$dU + d(pv) = \frac{R}{n-1}\,dT + R\,dT = \frac{n}{n-1}\,R\,dT.$$

Es soll nun ein Gesetz von einer ... Bew. d. Systems abgeleitet werden, zB.:

$$dM = \cos\psi \, ds$$

dann lautet d. Gl. d. Arbeitsvermögens:

II $$\frac{u\,du}{g} + \frac{n}{n-1}\,\mathfrak{R}\,d\mathfrak{T} = \cos\psi\,ds + W\,dQ$$

Und ferner Gl. 3 betreffl. folgt: $p\,dv = pv\frac{dv}{v} = \mathfrak{R}\mathfrak{T}\frac{dv}{v} = \mathfrak{R}\mathfrak{T}\frac{dv\,g}{gv} = \mathfrak{R}\mathfrak{T}\frac{d(\mathfrak{F}u)}{\mathfrak{F}u}$

III und folgt: $$\frac{\mathfrak{R}}{n-1}\,d\mathfrak{T} + \mathfrak{R}\mathfrak{T}\,\frac{d(\mathfrak{F}u)}{\mathfrak{F}u} = W\,dQ + \lambda\,\frac{ds}{d}\,\frac{u^2}{2g}$$

Hieraus soll noch hingeschrieben werden d. Gl. d. lebendigen Kraft also II − III:

IV $$\frac{u\,du}{g} + \mathfrak{R}\,d\mathfrak{T} - \mathfrak{R}\mathfrak{T}\,\frac{d(\mathfrak{F}u)}{\mathfrak{F}u} = \cos\psi\,ds - \lambda\,\frac{ds}{d}\,\frac{u^2}{2g}$$

Durch diese Gl. können nun p $\mathfrak{T}$ und u als Funktionen von s bestimmt werden, wenn dieselben für einen bestimmten Wert von s bekannt sind und d. Gestalt und Lage d. Röhre gegeben ist.

Zunächst sollen diese Formeln angewandt werden für d. Fall, daß verschiedene d. hier vorkommenden Größen ohne erheblichen Fehler vernachlässigt werden können. Man betrachtet ... d. Zustandsänderung, d. das Gas bezüglich d. Wärme- und Lw.-Widerstandes erfährt, auf einer kurzen Wegstrecke, wo jedoch noch bedeutende Querschnittsänderungen vorkommen können, so kann für diese kurze Strecke abgesehen werden vom Einfluß d. Schwere, die dieselbe bei d. Gasen überhaupt schon eine viel untergeordnetere Rolle spielt, wie beim Wasser; ferner kann abgesehen werden von d. Wärmeleitung durch d. Rohrwand, da dieselbe doch nur vorkommt bei d. Lw. in längeren Röhren und Kanälen. Ferner liegt es in d. Natur d. Sache, daß auch abgesehen werden kann von dem Leitungswiderstand, man kann also abstrahieren von $W\,dQ$, $\cos\psi$ und d. Gliedern mit λ. Dann lautet Gl. II:

$$\frac{u\,du}{g} = -\frac{n}{n-1}\,\mathfrak{R}\,d\mathfrak{T}$$

Dieselbe integriert liefert: $\frac{u^2 - u_1^2}{2g} = \frac{n}{n-1}\,\mathfrak{R}(\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T})$, wenn $\mathfrak{T}_1$ u. u_1 d. zusammengehörigen Werte für d. Anfangsquerschnitt bedeuten.

Gl. III lautet nun, wenn man sie durch $\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{R}}{n-1}$ dividiert: $\frac{d\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}} = -(n-1)\frac{d(\mathfrak{F}u)}{\mathfrak{F}u}$ wenn d. Zeichen λ entfallen soll, daß auch noch ... Widerstand erkennen können. Mit d. Gleichheitszeichen genommen, ergibt sich, da $\mathfrak{F}u = Gv$ ist:

$$\frac{d\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}} = -(n-1)\frac{dv}{v}$$

und durch Integration:

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1}$$

Dies ist d. Beziehung zwischen Volumen und Temp. in 2 Zuständen d. Gases ohne Mitteilung od. Entziehung von Wärme. Verbindet man diese Gl. mit $Gv = p\mathfrak{T}$, so findet man:

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Diese Beziehung gilt aber nur bei Abstraktion von d. Lw.-Widerstand. Es ist ohne Weiteres zu ersehen, in welchem Sinne sich diese Gl. durch d. Lw.-Widerstand ändert. Durch d. Lw. wird Arbeit in Wärme verwandelt, es würde also $\mathfrak{T}$ größer sein, es wird also:

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} \geqq \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1} \text{ resp. } \geqq \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Wenn man nun aus obiger Gl. für $\frac{u^2-u_1^2}{2g}$ u entwickelt, so ergibt sich: $u = \sqrt{u_1^2 + \frac{n}{n-1}\,2g\,\mathfrak{R}\mathfrak{T}_1\left(1 - \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1}\right)}$

hier ist $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1}$ im Allgemeinen größer als $\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, folglich $1 - \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} < 1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, es wird also d. ganze

Ausdruck zu groß, wenn man $\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ an Stelle von $\frac{T}{T_1}$ setzt. Es muß also, um diesen Unterschied auszugleichen, d. ganze Ausdruck mit einem echten Bruch φ multiplizirt werden, wo φ ein Correctionscoeff. ist: also:

$$u = \varphi\sqrt{u_1^2 + \frac{n}{n-1}\, 2gRT_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$ dann

bedeutet φ weiter nichts als d. Geschw.-Coeff., wie bei d. Lehr. d. Wassers, denn d. Zählergröße ist derjenige Werth von u, welcher stattfinden würde, wenn keine Lst.-Widerstände vorhanden wären. Für d. [illegible] Gl. setzt man:

$$T = T_1 - \frac{n-1}{n}\,\frac{u^2-u_1^2}{2g}$$

Nimmt man d. letzten 2 Gl. für u und T zusammen mit Gl. I, so hat man 3 Gln., vermittelst welcher in diesem Falle d. unbekannten Größen gefunden werden können und zwar sind diese Bedingungen jetzt aber in endlicher Form vorhanden. Wenn es sich also handelt um d. Lst. eines Gases aus einer engen Wand, setzt man d. Wärmeleitung, d. Schwerkräfte und d. Contraktionswiderstände vernachlässigt werden kann, so bestehen diese 3 Bedingungen.

In diesen Gln. ist d. Größe $1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, welche mit $f(p)$ bezeichnet werden soll, recht unbequem, weshalb dieselben zweckmäßig tabellarisch ausgerechnet sind. Für atm. Luft mit $n = 1,41$ ist $\frac{n-1}{n} = 0,2908$ und hierfür finden sich d. Werthe von $f(p)$ für $\frac{p}{p_1} = 0,95$ bis $0,1$ in Redtenbacher's Resultate Seite 530. In d. meisten Fällen ist jedoch $\frac{p}{p_1}$ wenig von d. Einheit verschieden, d. h. wenn man $\frac{p}{p_1} = 1-\delta$ setzt, δ ein kleiner Bruch wird. In einem solchen Fall kann man dann $f(p)$ nach Potenzen von δ in eine Reihe entwickeln, von welcher es genügt wenige Glieder zu nehmen. Also:

$$f(p) = 1-\left[1-\frac{n-1}{n}\delta + \frac{\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}-1\right)}{1\cdot 2}\delta^2\right] = \frac{n-1}{n}\delta + \frac{n-1}{2n^2}\delta^2 = \frac{n-1}{n}\delta\left(1+\frac{\delta}{2n}\right)$$

Insbesondere für atm. Luft ist:

$$f(p) = 0,2908\,\delta(1+0,355\,\delta).$$

Diese Formeln finden eine hauptsächliche Anwendung bei d. Berechnung d. Ausflusses eines Gases aus einer Mündung in einer Gefäßwand. In einem solchen Fall pflegen gegeben zu sein d. Pr. p_1 und d. Temp. T_1 im Innern d. Gefäßes, ferner d. Pr. p, welche im äußeren Raume stattfindet, in welchen hinein d. Ausfluß d. Gases stattfindet, also im kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls. Ferner ist gegeben d. Größe d. Mündung $= A$; d. Contraction ist hier ähnlich wie beim Wasser, α sei d. Contractions-Coeff., also αA d. kleinste Querschnitt d. contrahirten Strahls. Außerdem kann hier noch ein besonderer Widerstand in Betracht kommen und es sei d. darauf bezügliche Geschw.-Coeff. $= \varphi$, und ζ = Widerstandscoeff. und $\mu = \alpha\varphi$ = Ausflußcoeff. Wenn nun d. Ausflußgeschw. eine ganz ungleich größere ist, so kann man d. Lst. d. Gases im Innern d. Gefäßes vernachlässigt werden, also $u_1 = 0$ gesetzt werden, man hat dann:

$$u = \varphi\sqrt{\frac{n}{n-1}\, 2gRT_1 f(p)}$$ Ist φ nun durch Versuche

bestimmt, so ist nach dieser Gl. u vollkommen bestimmt.

Bei diesem Ausfluß kann unter Umständen eine bedeutende Temp.-Änderung stattfinden und zwar eine Erniedrigung. Wenn man z. B. Luft, d. unter 2 Atm. Pr. aus einem zylindrischen metallenen Aufsatzrohr ausströmen läßt, so findet man, daß d. Röhre so kalt wird, daß darauf gespritztes Wasser zu Eis erstarrt. —

Setzt man in d. Gl. für T diesen Werth von u und $u_1 = 0$, so folgt:

$$T = T_1\left[1-\varphi^2 f(p)\right]$$

Außer d. Ausflußgeschw. und d. Temp. d. ausströmenden Luft ist ferner noch von Interesse d. Ausflußmenge, welche aber hier besser d. Gew. nach und nicht d. Volumen nach zu bestimmen ist und zwar, um Verwechslungen zu vermeiden, soll noch angegeben werden, unter welchen Umständen dies gemessen ist. G sei d. p. Sec. ausströmende Luftgew., dann ist, wenn d. Gl. auf d. Endquerschnitt bezogen wird:

$$F = A\alpha \quad \text{und} \quad G = \alpha A u \frac{p}{RT}.$$ Setzt man

hierfür u seinen Ausdruck und $RT = RT_1(1-\varphi^2 f(p))$ und $\alpha\varphi = \mu$, so ist:

$$G = \mu A p \frac{\sqrt{\frac{n}{n-1}\frac{2g}{RT_1} f(p)}}{1-\varphi^2 f(p)}$$ – f. d. Gew. d. ausströmenden Luftq.

Zu welchem Grade d. ausströmende Luft eine Temp.-Erniedrigung erfahren kann, mag an einem Beispiel erläutert werden: Es sei etwa $\frac{p}{p_1} = \frac{1}{2}$, dann ist $f(p) = 0{,}1825$ (d.h. wenn d. Dr. im Gefäß 2 mal so groß als außen ist). Es ströme d. Luft aus einer kurzen cylindr. Ansatzröhre; dann ist erfahrungsmäßig für $\frac{p}{p_1} = \frac{1}{2}$, d. Geschw.-Coeff. = Ausfluß-Coeff. $\varphi = 0{,}9$ u. $\varphi^2 = 0{,}81$ und $\varphi^2 f(p) = 0{,}81 \cdot 0{,}1825$. Es sei d. Temp. d. Luft im Innern d. Behälters = 27°C, so daß d. absolute Temperatur = 300° ist, dann ist:

$$T = 300(1-0{,}81 \cdot 0{,}1825) = 255{,}7.$$

und d. entsprechende thermometrische Temp.:

$$t = T - 273 = -17{,}3°C.$$

Bestehen d. Ansätze aus Metall, so kann d. auf diese Weise gezogenes Wasser gefrieren. –

Man kann d. Formel für d. atm. Luft auf eine einfachere Form bringen, indem man $n = 1{,}41$, $R = 29{,}3$ und $g = 9{,}81$ setzt; dann ist:

$$u = 44{,}46\,\varphi\sqrt{T_1 f(p)} \quad \text{und} \quad G = 1{,}517\,\mu A p \frac{\sqrt{\frac{f(p)}{T_1}}}{1-\varphi^2 f(p)}$$

Was d. hier zu brauchenden Erfahrungscoeff. betrifft, so liegen über d. Größe d. Contractions-coeff. eigentlich zuverlässige Erfahrungen nicht vor. D. Ausflußcoeff. μ, d. in wenigen Fällen identisch mit d. Geschw.-Coeff. φ ist, ist allerdings häufiger gesucht worden, indessen nicht so häufig wie beim Wasser. Es ergibt sich hier im Gegensatz zum Wasser, daß μ in hohem Grade abhängt von $\frac{p}{p_1}$ und zwar in d. Weise, daß mit wachsendem Überdruck, also mit abnehmendem Verhältniß $\frac{p}{p_1}$ d. Ausflußcoeff. zunimmt. Dieser Überdruck $\frac{p_1}{p}$ ist aber im Verhältniß zu p größer, je kleiner $\frac{p}{p_1}$ ist. D. Werthe von μ finden sich in Redtenbachers Resultate Seite 532. –

Eine Anwendung dieser Formel kann namentlich gemacht werden für d. Ausfluß d. Luft z.B. bei d. erforderlichen Düsenöffnung eines Gebläses. Dazu dient d. Gl. für G. Allerdings müßte hier d. Dr. p an einer solchen Stelle an d. Windstrom unmittelbar vor d. Düsen gemessen werden, welche d. Geschw. d. Luft nicht = 0 ist. Mißt man aber p unmittelbar vor d. Düsen, aus denen d. Luft herauskommt, so darf eigentlich nicht ohne Weiteres $u_1 = 0$ gesetzt werden, da hier eine Geschw. bis zu 20 mtr p. Sek. vorkommen kann. Jedoch besteht eine Erfahrung, daß wenn d. Geschw. dort, wo p gemessen wird, auch 20 mtr beträgt, dieselbe dann vernachlässigt werden kann, indem dieselbe dadurch eine Vergrößerung d. Düsenöffnung um 2% ausmacht. Man findet d. Ausflußgeschw. etwas zu klein, also ergibt sich dementsprechend bei gegebener Luftmenge d. Düsenöffnung zu groß. Dieses hat aber wenig zu sagen, da durch unvermeidliche Ansätze an d. Düsen d. reine Düsenöffnung etwas größer sein muß, als sie beim Betrieb durchschnittlich bleiben muß. Wenn man zweitens diese Formel zu Grunde legt, so fragt es sich ferner, welche Zahlenwerthe man d. Coefficienten μ u. φ beilegen muß. Solche Düsen sind conische Ansatzröhren mit schwacher Convergenz. Dann kann erfahrungsmäßig setzen, wenn man sich d. Sicherheit wegen etwas zu klein also zu groß nimmt: $\mu = 0{,}95$. Zwar wird man ferner wenig irren, wenn man annimmt, daß dieser Werth zu gleichen Theilen von α und φ herkommt. Eine gewisse äußere Contraction findet statt, und auch rührt dieselbe zum Theil von d. Luft-Widerständen her. Angenommen es rühre dies zu gleichen Theilen von α und φ her, so ist also auch dieser Werth $= \varphi^2$ gesetzt werden kann; ferner sei vorausgesetzt, daß p, also d. Dr. gemessen ist in Klgr. p. □m. Für d. äußeren normalen Atm.-Dr. ist $p = 10333$; wenn man unter b d. Verhältniß d. mittleren Barometerstands d. Aufstellungsortes zum Normalstand versteht, ist also allgemein zu setzen $p = 10333\,b$. Wird d. Luft in d. Gebläsen erwärmt, so kann man allerdings nicht berücksichtigen, daß hier in d. Gebläsen d. Atm.-Stand herrscht; diesem Umstand ist jedoch schon Rechnung getragen, indem μ und φ kleiner gesetzt sind, als sie streng genommen sein sollten.

Setzt man diese Zahlenwerthe in G ein, so findet man:

$$\frac{G}{bA} = \frac{13324}{1-0{,}85\, f(p)} \sqrt{\frac{f(p)}{T_1}}$$

dabei kann d. Werth von $f(p)$ entweder d. vorstehenden Tabelle entnommen werden, od. man kann ihn auch mit genügender Annäherung berechnen aus d. Formel $f(p) = 0{,}291\,\delta(1+0{,}355\,\delta)$ und zwar mit Rücksicht darauf, daß δ hier niemals größer als 0,2 zu sein pflegt, wo $\delta = \frac{p_1-p}{p_1}$. Unter solchen Umständen kommt es wenig darauf an, daß man ein Glied nimmt, da d. folgenden sehr klein werden.

Es sei z. B.: eine Gebläsemaschine für einen Cupolofen zu berechnen, welchem p. Min. 2,5 Klg. Luft zugeführt werden soll, also $G = 2{,}5$. Dem Ort d. Aufstellung entsprechend sei $b = 0{,}74$, dann ist: $\frac{1}{b} = \frac{76}{74} = 1{,}027$. Angenommen es solle in d. Windkammer vor d. Düsen eine stetige Pressung stattfinden, welche gemessen wird durch eine Quecksilbersäule von 88 Ctm Höhe, so daß also d. Überdruck durch einen Unterschied $88-74 = 14$ Ctm Quecksilbersäule zu messen ist, dann ist: $\delta = \frac{88-74}{88} = 0{,}159$.
Vorausgesetzt, d. Gebläse solle durch kalten Wind gespeist werden, so daß d. absolute Temp. in runder Zahl etwa $= 300$ gesetzt werden mag. Hierfür findet man:

$f(p) = 0{,}04888$ und daraus d. erforderliche Größe sämmtlicher Düsenöffnungen:

$$A = 1{,}027 \cdot 2{,}5\, \frac{1-0{,}85 \cdot 0{,}04888}{13324} \sqrt{\frac{300}{0{,}0488}} = 0{,}01447 \text{ □m.}$$

Bewegung der Luft in längeren Röhren.

Hierfür gelten zunächst d. schon bekannten Gln.:

$$\frac{\sigma u}{g} = \frac{RT}{p}$$

$$\frac{u\,du}{g} + \frac{n}{n-1} R\,dT = ds\cos\psi + W\,dQ$$

$$\frac{R}{n-1}\, dT + RT\,\frac{d(\sigma u)}{\sigma u} = W\,dQ + \lambda\,\frac{ds}{\delta}\,\frac{u^2}{2g}$$

$$\frac{u\,du}{g} + R\,dT - RT\,\frac{d(\sigma u)}{\sigma u} = ds\cdot\cos\psi - \lambda\,\frac{ds}{\delta}\,\frac{u^2}{2g}.$$

Es sei nun vorausgesetzt, d. Lds. Röhre habe überall einen constanten Querschnitt, ferner sei dieselbe ungefähr horizontal, so daß von d. Einfluß d. Schwere abgesehen werden kann, und endlich sei angenommen, daß d. Wärmeübertragung durch d. Rohrwand so gering sei, daß sie ganz vernachlässigt werden kann; es ist also zu setzen: $dQ = 0$ und $\cos\psi = 0$.
Für d. Anfangszustand sei d. Pr. $= p_1$, d. absolute Temp. $= T_1$ und d. Geschw. $= u_1$, es sollen dieselben Größen nun in d. Entfernung s gefunden werden.
Zur Abkürzung sei $\frac{u^2}{2g} = h$ und $\frac{u_1^2}{2g} = h_1$; dann folgt aus d. 2te Gl.:

$dT = -\frac{n-1}{n}\,\frac{dh}{R}$ und hieraus durch Integration: $T = T_1 - \frac{n-1}{n}\,\frac{h-h_1}{R}$.

Hiermit ist d. Temp. in d. Entfernung s gefunden, wenn man d. Geschw.-Höhe h kennt.
Zunächst ist zu bemerken, daß weil d. Querschnitt constant ist: $\frac{d(\sigma u)}{\sigma u} = \frac{du}{u} = \frac{u\frac{du}{g}}{\frac{u^2}{g}} = \frac{dh}{2h}$ ist und somit lautet Gl. 3 wenn man für dT seinen Werth und $\psi = 0$ setzt:

$$-\frac{dh}{n} + RT\,\frac{dh}{2h} = \lambda\,\frac{ds}{\delta}\,h.$$

Setzt man hier d. Ausdruck für T ein, so läßt sich d. Gl. auf folgende Form bringen:

$$\left(\mathfrak{R}\mathfrak{T}_1 + \frac{n-1}{n} h_1\right)\frac{dh}{h^2} - \frac{n+1}{n}\frac{dp}{p} = 2\lambda\frac{ds}{d}$$

Diese Gl. kann nun integriert werden, dabei ist $\frac{dh}{h^2} = d\left(-\frac{1}{h}\right)$ und $\frac{dh}{h} = d[\ln h]$.

also:

$$\left(\mathfrak{R}\frac{\mathfrak{T}_1}{h_1} - \frac{n-1}{n}\right)\left(1-\frac{h_1}{h}\right) - \frac{n+1}{n}\ln\frac{h}{h_1} = 2\lambda\frac{s}{d}.$$

durch diese Gl. ist h bestimmt. [illegible] ... ergibt sich dann: $\lambda = 0{,}025$. Weisbach hat namentlich für größere Geschw. bis zu 150 m p. Sek. Versuche angestellt und fand:

$$\lambda = \frac{0{,}12}{\sqrt{u}}, \text{ d. h.:}$$

für $u = 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36$
$\lambda = 0{,}04 \quad 0{,}03 \quad 0{,}024 \quad 0{,}02.$

Weil aber diese Weisbach'schen Versuche angestellt sind für Geschw. von wenigstens 25 m [illegible] ... λ größer als $0{,}04$ zu nehmen. — Ist z. B.: $u_1 = 16$ m. [illegible] ... $u = 20$ m, so wird λ entsprechend $u_1 = 16$ zu $0{,}03$ angenommen [illegible] ... also $\mathfrak{T}_1 = 300$, also ist: $\frac{u_1}{u} = 0{,}8$ und folgl.: $\frac{h_1}{h} = 0{,}64$. [illegible] ergibt:

$$\left(\frac{29{,}3 \cdot 300}{\frac{1}{2\cdot 9{,}81}\cdot 256} + \frac{41}{141}\right)0{,}36 - \frac{241}{141}\ln\frac{1}{0{,}64} = 0{,}06\frac{s}{d}$$

und also $\frac{s}{d} = 4031.$

ferner bekommt man:

$$\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T} = \frac{41}{141}\frac{h}{\mathfrak{R}}\left(1-\frac{h_1}{h}\right) = \frac{41}{141}\frac{400}{2\cdot 9{,}81\cdot 29{,}3}\cdot 0{,}36 = 0{,}073^\circ.$$

[illegible] ... nicht $\frac{1}{10}^\circ$ beträgt, [illegible] ... — [illegible] also

$$d\mathfrak{T} = 0 \quad \text{und} \quad d\mathfrak{F} = 0$$

[illegible] Gl. 4 wenn wie oben $\frac{u\,du}{g} = dh$ und $\frac{d\mathfrak{J}u}{\mathfrak{J}u} = \frac{dh}{2h}$ gesetzt wird:

$$dh - \mathfrak{R}\mathfrak{T}\frac{dh}{2h} = ds\cos\psi - \lambda\frac{ds}{d}h$$

od.

$$\left(\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}{2h} - 1\right)dh = \left(\lambda\frac{h}{d} - \cos\psi\right)ds.$$

Dazu kommt: $\frac{\mathfrak{J}u}{g} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}{p}$. [illegible] ... gegen $\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}{2h}$ vernachlässigt, denn es ist im Allgemeinen $\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}{2h}$ eine sehr große Zahl, es ist nämlich $\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}{2h} \geq 100$; [illegible] ... nicht genau auf 1% angegeben werden kann.

Ist $\frac{RT}{2h} > 100$ wenn $h < \frac{RT}{200}$ oder T mit d. Durchschnittswert 300 angenommen und mit $R = 29{,}8$: wenn $h < \frac{29{,}8 \cdot 300}{200}$ also wenn $h < 43{,}95$ oder demnach wenn $u < \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 43{,}95}$ also wenn $u < 29{,}4$ ist. u ist aber in d. Regel selten größer als dieser Wert, so daß man 1 gegen $\frac{RT}{2h}$ vernachlässigen kann. Thut man dies, so kann man d. Gl. integrieren unter d. Voraussetzung, daß ψ eine Constante ist, daß also d. Röhre constant steigt od. fällt oder wenn ψ ein constanter Mittelwert; dann folgt, da $ds = \frac{\frac{RT}{2h}\,dh}{\lambda\frac{h}{d} - \cos\psi}$ oder $\frac{2\cos\psi}{RT}\,ds = \frac{dh}{\left(\frac{\lambda}{d\cos\psi}h - 1\right)h}$

$$\frac{2\cos\psi}{RT}\,ds = \left(\frac{\frac{\lambda}{d\cos\psi}}{\frac{\lambda}{d\cos\psi}h - 1} - \frac{1}{h}\right)dh = \left(\frac{1}{h - \frac{d\cos\psi}{\lambda}} - \frac{1}{h}\right)dh$$

dieses integriert von 0 bis s gibt:

$$\frac{2\cos\psi}{RT}\,s = \ln\frac{h - \frac{d\cos\psi}{\lambda}}{h_1 - \frac{d\cos\psi}{\lambda}} - \ln\frac{h}{h_1} = \ln\frac{1 - \frac{d\cos\psi}{\lambda h}}{1 - \frac{d\cos\psi}{\lambda h_1}}$$

Für d. Specialfall, daß d. Röhre horizontal ist, also $\psi = 90°$ würde diese Gl. eine identische Gl. liefern; man muß dann auf d. ursprüngl. Diff.-Gl. zurückgehen; diese lautet für $\psi = 90°$:

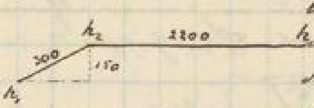
$$ds = \frac{RT}{2h}\,\frac{d}{\lambda h}\,dh$$

und hieraus durch Integration:

da $\frac{dh}{h^2} = -d\frac{1}{h}$ ist: $\lambda\frac{s}{d} = \frac{RT}{2}\left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{h_1}\right)$

oder $\frac{RT}{2}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h}\right) = \lambda\frac{s}{d}$. In dem einen wie in dem andern Fall ist nun d. Geschw.-höhe h und damit d. Geschw. selbst bestimmt und durch d. Continuitätsgl. auch d. Pressung. —

Beispiel. Größere Leitungen von Luft kommen unter Anderem bei Tunnelarbeiten, wo es darauf ankommt Luft fortzuleiten zum Betrieb d. Bohrmaschinen, wozu d. comprim. Luft sich besonders gut eignet indem dieselbe nach d. Gebrauch auch noch zur Ventilation verwendet werden kann. Angenommen, es sei d. Bohrung eines größeren Tunnels fortgeschritten bis auf eine solche Strecke, daß d. Luftleitungsröhre eine Länge von 2500 m hat. Diese Röhre habe einen Durchmesser $d = 0{,}2$ m und es werde durchschnittlich 1 kgr gepreßte Luft pr. Sec. verbraucht also $G = 1$. Angenommen nun d. Trace d. Röhrenleitung sei wie nebenstehend (M. Cenis-Tunnel) daß d. Compressionsmaschinen stehen im Thale und d. Röhre muß auf 300 m Länge um 150 m in d. Höhe steigen also bis d. Tunneleingang erreicht, wo sie nun in einer Strecke von 2200 m horizontal weiter läuft.



D. Compressionsmaschinen spannen d. Luft auf 5 Atm. und es fragt sich, mit welcher Gr. d. Luft am anderen Ende d. Röhre anlangt. Zu dem Ende fragt sich zunächst wie groß unter diesen Umständen d. Anfangsgeschw. u_1 ist. Ein Cubm. Luft wiegt nun bekanntlich bei d. Temp. 0 und bei normalem Atm.-druck 1,293 kgr. umgekehrt hat also unter denselben Bedingungen 1 kgr Luft ein Volumen $= \frac{1}{1{,}293}$ Cubm. Es soll hier aber d. Luft mit einer Gr. von 5 Atm. eintreten, so ist also d. Volumen nun nur $\frac{1}{5}$ so groß; ferner sei d. umgebende Temp. = 27°C so ist d. absolute Temp. = 300 anzunehmen und dann ist d. Volumen von diesem kgr Luft von 5 Atm. Gr. mit Rücksicht auf diese etwas höhere Temp.: $= \frac{1}{1{,}293}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{300}{273} = 0{,}170$ Cbm.

d. Rohrquerschnitt ist: $= \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}0314$ Cubm.

und demnach d. Anfangsgeschw.: $u_1 = \frac{0{,}17}{0{,}0314} = 7{,}33$ m. Demnach kann d. Coeff. λ in runder Zahl $= 0{,}04$ angenommen werden.

Ferner ist d. Geschw.-höhe $h_1 = 1{,}49$.

Es fragt sich nun, in welchem Grad nimmt d. Geschw.-höhe ab bis zu d. Stelle, wo d. Rohrleitung in d. Tunnel hineingeht, also h_2. Hierzu dient d. Gl. in ψ nicht $= 90°$ war, Es ist nämlich im vorliegenden Fall $\cos\psi = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}$. Multiplicirt man nun noch d. Gl. mit d. Modulus d. Brigg'schen Logarithmen-Systems 0,4343, so lautet dieselbe

$$\log \frac{1+\frac{0{,}1}{0{,}4\,h_2}}{1+\frac{0{,}1}{0{,}4\cdot 1{,}49}} = -\,0{,}4343\,\frac{300}{29{,}3\cdot 300}$$

Also: $\frac{1+\frac{2{,}5}{h_2}}{2{,}678} = 0{,}9664$ und somit $h_2 = 1{,}574$

Um nun d. Geschw.-Höhe h zu finden, muss d. Gl. für $\psi = 90°$ benutzt werden, also:

$$\frac{29{,}3\cdot 300}{2\cdot 1{,}574}\left(1-\frac{h_2}{h}\right) = 0{,}04\,\frac{2200}{92}$$

somit $\frac{h_2}{h} = 0{,}843$ also $\frac{h_1}{h} = 0{,}843\,\frac{h_1}{h_2} = 0{,}843\cdot\frac{1{,}49}{1{,}574} = 0{,}798$

Durch dieses Verhältniss ist nun auch d. Pressungsverhältniss bestimmt nach Gl.: $\frac{Fu}{G} = \frac{RT}{p}$. In unserem Falle ist auch pu constant und folgt

$$\frac{p}{p_1} = \frac{u_1}{u} = \sqrt{\frac{h_1}{h}} = 0{,}894$$

und folgt d. Pr. p am Ende d. Röhre:

$$p = 0{,}894\cdot p_1 = 0{,}894\cdot 5 = 4{,}47 \text{ Atm.}$$

es geht also etwas mehr als eine halbe Atm. verloren. —

Wenn bei einer solchen längeren Röhrenleitung ein besonderer Widerstand vorkommen soll, d. im Allgemeinen mit einer Querschnittsänderung verbunden sein kann, so kann man auch hier von d. Temperatur-Änderung absehen und es handelt sich nur darum, näherungsweise d. Pr.-Änderung zu untersuchen. Jedenfalls nimmt an einer solchen Stelle, wo besondere Widerstände vorkommen, d. Pr. ab, jedoch nur in einem solchen Grade, daß man sich mit einer näherungsweisen Rechnung begnügen kann.

Es sei aber an einer solchen Stelle, unmittelbar vor derselben d. Pr. $= p_1$, d. Geschw. $= u_1$ und unmittelbar hinter d. fraglichen Stelle d. Pr. $= p_2$ und d. Geschw. $= u_2$; vor d. fraglichen Stelle sei d. Rohrquerschnitt $= F_1$ und hinter derselben $= F_2$. Außer diesen plötzlichen Querschnittsänderungen kann auch noch ein besonderer Widerstand vorkommen, d. gemessen werden soll durch d. Widerstandscoeff. ζ. Setzt man $p_2 = p_1(1-\delta)$ so darf dieses δ nur als ein sehr kleiner Bruch betrachtet werden. Es war nun nach einer allgemeinen Formel, d. sich bezog auf d. Bew. d. Luft in irgend einem beliebigen Punkt d. Geschw.

$$u = \varphi\sqrt{u_1^2+\frac{n}{n-1}\,2gRT_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

Dieses war d. Formel für d. Ausflussgeschw. aus einer Öffnung in d. Gefäßwand; dieselbe war unter solchen Umständen abgeleitet, daß von d. Wärmeleitung durch d. Rohrwand abgesehen war, ferner von d. Einfluss d. Schwere und endlich von ζ, also vom Leitungswiderstand d. Röhre. Diese Abstractionen kann man auch hier machen für d. betrachtete nach d. wenigen Länge Strecke; nur muss u_2 statt u, p_2 statt p und T_2 statt T geschrieben werden. Dividirt man dann d. Gl. durch φ, quadrirt dieselbe und setzt schließlich $\frac{1}{\varphi^2} = 1+\zeta$, so ergibt sich:

$$\frac{n}{n-1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{(1+\zeta)u_2^2-u_1^2}{2gRT} = \frac{h_1}{RT}\left[(1+\zeta)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2-1\right]$$

Setzt man $p_2 = p_1(1-\delta)$ wo δ nur klein ist, so ist: $1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{n-1}{n}\delta$ und es wird

$$\delta = \frac{h_1}{RT}\left[(1+\zeta)\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2-1\right]$$

da $\frac{u_2}{u_1}$ von d. Pr. und d. Querschnitten abhängt, dessen Abhängigkeit aber sehr gering ist.

Nun kann p_2 und p_1 berechnet werden.

Bewegung des Leuchtgases in einer Stadtleitung.

Hierbei kann man sich noch weitere Vereinfachungen erlauben, weil es sich hier um einen Fall handelt, wobei d. Pr. sich nur äußerst wenig ändert, selbst für d. ganze Strecke d. Leitung soll d. Druck, unter welchem d. Gas steht nur etwa abnehmen um einen solchen Betrag, d. gemessen wird durch eine Wassersäule von 30 mm. Da d. Atm.-Druck einer Wassersäule von 10 m entspricht, so ist dieses $= 0{,}003$ Atm., es handelt sich also um einen Fall, wo d. Pressungsabnahme sehr gering ist, es können deshalb d. Formeln vereinfacht werden. Ist p d. Pr. in d. Entfernung s vom Anfang, p_1 d. Pr. im Anfangsquerschnitt, so ist $\frac{p}{p_1} = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$ gemäß d. Gl.: $\frac{du}{g} = \frac{R\,T}{p}$, wo R T g u. T constant sind, wobei also d. Luft immer gleichen Wärmezustand hat. Bei Vernachlässigung einer unzugehörigen Lage d. Röhrenleitung ist dann:

$$\frac{R\,T}{2u}\left(1 - \frac{h_1}{h}\right) = \lambda \frac{s}{d}$$

bekommt man hieraus d. Wert von h u. substituiert denselben in $\frac{p}{p_1}$ so folgt: $\frac{p}{p_1} = \sqrt{1 - \lambda \frac{s}{d} \frac{2h_1}{R\,T}}$ und da $\frac{p}{p_1}$ nur wenig von d. Einheit verschieden ist, kann man setzen: $\frac{p}{p_1} = 1 - \lambda \frac{s}{d} \frac{u_1^2}{2g\,R\,T}$

also:

$$1 - \frac{p}{p_1} = \frac{p_1 - p}{p_1} = \lambda \frac{s}{d} \frac{u_1^2}{2g\,R\,T}$$

Ist hier nun mit V d. Gasvolumen bezeichnet, welches p. Sek. durch d. fragliche Gasleitungsröhre hindurchströmen soll und zwar gemessen bei d. Druck, welcher zu Anfang d. Leitungsröhre stattfindet, also im Zustand p_1, T_1, dann ist: $u_1 = \frac{4V}{\pi d^2}$ diesen Ausdruck in d. letzte Gl. gesetzt, giebt:

$$d^5 = \lambda s \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{V^2}{2g\,R\,T} \frac{p_1}{p_1 - p}$$

Setzt man hier $g = 9{,}81$ und bezeichnet ferner mit δ d. Dichtigkeit d. Gases verglichen mit d. atm. Luft bei gleicher Temp. u. Pr. (für gewöhnl. Steinkohlengas $\delta = 0{,}4 - 0{,}45$), dann ist: $R = \frac{29{,}27}{\delta}$. Nimmt man ferner d. durchschnittl. Temp. in d. Röhre $= 12°$ C. an, also $T = 285$, so folgt:

$$d^5 = \frac{\lambda \delta}{100960}\, s\, V^2 \frac{p_1}{p_1 - p}.$$

d. Pr. d. Gases pflegen, da es sich nur um kl. Unterschiede handelt, gewöhnl. durch eine Wassersäule gemessen zu werden. Angenommen es sei h diejenige Wassersäule ausgedrückt in mm, welche diese Pr.-Abnahme $p_1 - p$ gemessen wird, so ist: $\frac{p_1}{p_1 - p} = \frac{10096}{h}$, da p_1 ungefähr $=$ d. atm. Druck ist, so können setzen kann 10096. Setzt man dies ein, so erhält man:

$$d^5 = 0{,}1\, \lambda\, \delta \frac{s\,V^2}{h}.$$

Längs d. ganzen Röhrenleitung findet nun hier eine stetige Gasentziehung statt, nimmt man an, daß auch für dieselbe gleichförmig sei u. ist V d. Volumen, welches in d. Zeiteinheit durch d. Anfangsquerschnitt strömt, während d. Volumen, welches im Endquerschnitt ausströmt $= \alpha V$ ist, dann wird dasjenige Gasvolumen, welches durch einen Querschnitt in d. Entfernung s vom Anfang d. Röhrenstrecke hindurchströmt, bestimmt sein durch:

$$\frac{V - \varphi}{(1 - \alpha)V} = \frac{s}{l}$$

wenn nämlich φ d. Gasvolumen ist, welches p. Sek. durch d. Querschnitt in d. Entfernung s hindurchströmt. So ist dann $V - \varphi$ d. Verlust auf dieser Länge, $(1-\alpha)V$ d. Verlust auf d. ganzen Strecke, also:

$$\varphi = V\left(1 - \frac{(1-\alpha)}{l}\, s\right).$$

Bezeichnet man dh d. Minderverlust in Folge d. Reibungswiderstandes für ein unendl. kl. Längenelement ds d. Röhre, dann erhält nun dh aus d. Gl. für d^5, wo nur für V jetzt geschrieben werden muß $V(1-\frac{1-\alpha}{l}s)$ also:

$$dh = 0{,}1\lambda\rho\,\frac{ds}{d^5}\,V^2\left(1-2\,\frac{1-\alpha}{l}\,s+\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{l^2}\,s^2\right)$$

Integriert man diese Gl. von $s=0$ bis $s=l$, so erhält man d. ganzen Druckverlust für d. Strecke l:

$$h = 0{,}1\lambda\rho\,\frac{V^2}{d^5}\left[l-(1-\alpha)\,l+\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{3}\,l\right]$$

od. $$h = 0{,}1\lambda\rho\,\frac{lV^2}{d^5}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Es ergibt sich hier genau so, wie bei d. Wasserleitung, nur daß V^2 d. Faktor $\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$ bekommen hat. Es ist also nun d. ergänzte Formel, welche d. Verlust längs d. ganzen Länge l erhaltene Gebrauchsgleichung [illegible] bringt:

$$d^5 = 0{,}1\lambda\rho\,\frac{lV^2}{h}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Es ist in dieser Formel d. Druckverlust h gemessen durch eine in mm ausgedrückte Wassersäule. Man könnte nun streng genommen in derselben Weise vorgehen, wie bei d. Wasserleitung, daß also d. Anlagekosten ein Min. würden; jedoch würde dies eine sehr umständliche Rechnung liefern, indem einmal für λ sehr wenig bekannt und ferner ρ eine ziemlich wechselnde Größe ist, und schließlich kommen für d. Herstellungskosten auch nicht in demselben Grade in Betracht wie bei d. Wasserleitung, da hier d. Röhren viel weniger weit sind; es wird also zulässig sein eine einfachere Annahme zu machen. Es hat sich nun erfahrungsgemäß herausgestellt, daß man d. wohlfeilsten Anlage ziemlich nahe kommt, wenn man d. Röhrenweite so wählt, daß d. Gas ziemlich gleichförmig von einem bis zum andern Ende strömt; ist also L d. ganze Länge d. zunächst zu berechnenden Hauptstranges d. Röhrenleitung und H d. gesamte zulässige Druckverlust von einem bis zum andern Ende in Folge d. Leitungswiderstandes, dann wird d. Forderung eines gleichförmigen Druckverlustes d. Proportion entsprechen:

$$\frac{l}{h} = \frac{L}{H}.$$

Dabei sind L u. H gegebene Größen, H pflegt = 20 höchstens = 30 mm Wassersäule angenommen zu werden; setzt man dies ein, so folgt:

$$d^5 = 0{,}1\lambda\rho\,\frac{L}{H}\,V^2\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Es sind nun V u. α gegebene Größen für jede Strecke d. Hauptstrangs u. man kann also hiernach d. erforderlichen Durchmesser dieses Hauptstranges berechnen zwischen je zwei Abzweigstellen. Gewöhnlich wird man jedoch nicht an jeder Abzweigstelle einen andern Durchmesser nehmen, um so mehr als d. Preisliste d. Röhrenwerke nur [illegible] Abstufungen u. nicht genau d. Rechnung gemäß angenommen werden kann. – Es fragt sich nun, was man für λ u. ρ einzusetzen hat. Zunächst bleiben zu d. Zweck d. Formeln umgestaltet werden mit Rücksicht auf d. hier zu Grunde liegenden Einheiten. In d. Formel ist vorausgesetzt, daß d. m zu Grunde liegt mit Ausnahme von H, welches in mm ausgedrückt ist; V bedeutet d. Gasvolumen in cbm. p. Sek.; es pflegt jedoch gewöhnl. d. Gasverbrauch in cbm. p. Stunde ausgedrückt zu werden und außerdem pflegt d. Durchmesser in cm ausgedrückt zu werden; dann ist:

$$\frac{d^5}{10^{10}} = 0{,}1\lambda\rho\,\frac{L}{H}\,\frac{V^2}{3600}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$$

also $$d^5 = \frac{\lambda\rho}{0{,}01296}\,\frac{L}{H}\,V^2\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Was nun d. Werth $\frac{\lambda\rho}{0{,}01296}$ betrifft, so ist derselbe durchschnittlich $=2$ also: $d^5 = 2\,\frac{L}{H}\,V^2\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$. $\left\{\right.$ d in cm, L in m, H in mm, V in cbm p. Stund.

Was nämlich λ betrifft, so liegen darüber spezielle Versuche von Blochmann vor, wonach sich für d. Leuchtgas ergab: $\lambda = 0{,}009 + \frac{0{,}0653}{\sqrt{u}}$ also in hohem Grade abhängig von d. Geschw.; letztere ist nun in einer städtischen Röhrenleitung im Allgemeinen nur gering; setzt man $\frac{\lambda\rho}{0{,}01296} = 2$, so würde dies entsprechen $\lambda\rho = 0{,}02592$ u. wenn man durchschnittl. d. Dichtigkeit

d. Leuchtgases als $\varsigma = 0{,}42$ fest, so würde dieser Annahme entsprechen: $\lambda = 0{,}062$ und dies war mit d. Blochmann'schen Versuchen in Übereinstimmung, wenn d. Durchschnitts-Gasgeschw. = 1 m pr. Sek. war. Wenn man also ein für allemal d. Coeff. $\frac{\lambda}{H}$ u. für d. einzelnen Strecken [illegible] d. Werthe von $\frac{1+a}{3}+a^2$ berechnet, so findet man d. Durchmesser d. einzelnen Rohrstrecken in Mm. Findet man, daß d. Durchmesser von einer Strecke zur Anderen nur wenig ändern, so wird man dieselbe Rohrweite beibehalten. —

Nun ist es auch leicht, zu d. abzweigenden Rohrstrecken überzugehen, es seien diese d. Hauptstrange bezeichnet mit $A_0\, A_1\, A_2 \ldots\ldots A_n$. Geht man nun von d. ersten Verzweigungsstelle A_1 aus und verfolgt man die nach d. grösseren d. abzweigenden Leitungen und nimmt man dann Durchgang an, daß H d. zulässige Druckverlust von d. Gasometer bis zu d. äussersten Punkte sei, so wird man für d. hier ins Auge gefassten Seitenstrange dieselbe Formel brauchen können, wenn nur an Stelle von L gesetzt wird $A_0 A_1 + L_1$ unter L_1 d. Länge d. abzweigenden Seitenleitung verstanden; ist L_2 d. Länge d. von A_2 ausgehenden Zweigleitung, so wird man auch von hier ausgehen können, wenn man nur statt L setzt $A_0 A_2 + L_2$. —

Es fragt sich weiter, einen wie grossen Überdruck man im Gasometer d. Gebrauchsstelle erhalten muss. Es d. Hinsicht muss erwogen werden, daß an allen Stellen d. ganzen Leitung ein genügender Überdruck d. Gases [illegible] bleibt, um d. Widerstand zu überwinden, d. d. Gasmesser an d. Häusern hervorrufen und um d. Gasp. in d. Brennern hervorzubringen; mit Rücksicht auf diese Widerstände pflegt man gewöhnlich einen Überdruck von 20 mm Wassersäule zu rechnen. Wird nun zunächst angenommen, es sei d. ganze Leitung horizontal, dann muss d. barometrische Überdruck d. Gases im Gasometer $= H + 20$ mm sein, nimmt man also H auch $= 20$ m, so muss im Gasometer 40 mm Überdruck sein. Ist d. Terrain bedeutend hügelig, so kann es sich in dieser Beziehung wesentlich anders verhalten. Angenommen es liege eine Stelle x in d. Entfernung x vom Gasometer um y m höher als d. Gasfabrik. Es sei nun g_1 d. absolute Gasdruck im Gasometer, derselbe sinkt dann in Folge d. Leit. Widerstand bis zu dieser Stelle ab um $\frac{x}{L}H$. Wenn nun aber d. Gasleitung vom Gasometer bis zu d. betrachteten Stelle ansteigt, so nimmt in Folge d. eigenen Schwere d. Gases auch aus diesem Grunde d. absolute Druck bis zu diesem Punkte ab. Für d. atm. Luft selbst beträgt d. Druckabnahme bei d. Erhebung um 1 m so viel, daß d. Druckhöhe gemessen wird mit einer Wassersäule von 1,24, indem ein Cbm Luft bei 12–15° C — 1,24 Kgr wiegt, wenn man sich in d. untern Regionen d. Atm. um 1 m empor hebt, so nimmt d. Druck auf 1 □m Grundfl. um 1,24 Kgr ab, eine Wasserschicht von 1 mm Höhe entspricht auf 1 □m Grundfl. mit 1 Kgr. also eine Druckabnahme von 1,24 Kgr entspricht einer Wassersäule von 1,24 mm. Höhe. Ist d. Dichtigkeit d. Leuchtgases um ς kleiner als d. d. Luft, wenn man also in einer Leuchtgasmasse sich um 1 m erhebt, so wird daher d. Druck um weniger als 1,24 mm Wassersäule abnehmen, nämlich um $1{,}24\,\varsigma$ mm. Wenn man sich also um y m erhebt, so ist d. Druckabnahme $1{,}24\,\varsigma\, y$. Es ist also d. absolute Druck gemessen in mm Wassersäule an d. fraglichen Stelle, welche um x m von d. Gasometer entfernt liegt und y m höher liegt, ausgedrückt durch:

$$g = g_1 - \frac{x}{L} H \mp 1{,}24\,\varsigma\, y$$

Liegt d. Stelle um y m tiefer, so gilt d. + Zeichen und umgekehrt. Bezeichnet $\mathfrak{L}_1$ d. absoluten, gleichfalls in mm Wassersäule gemessenen Luftdruck unmittelbar an d. Gasfabrik, so ist d. Luftdruck $\mathfrak{L}$ an d. hier betrachteten Stelle:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \mp 1{,}24\, y \qquad \text{da } \varsigma = 1 \text{ ist.}$$

Was man nun unmittelbar mit d. Manometer misst, ist d. Unterschied d. Gasdrucks über d. Luftdruck, derselbe sei mit M bezeichnet $= g - \mathfrak{L}$, an d. betrachteten Stelle wird dieser Unterschied $= M_1$ sein und:

$$M = M_1 - \frac{x}{L} H \pm 1{,}24\,(1-\varsigma)\, y$$

od. für $\varsigma = 0{,}42$:

$$M = M_1 - \frac{x}{L} H \pm 0{,}7\, y.$$

Es ist nun d. erforderliche

Unterdruck d. Gases im Gasometer derart beträgt, daß sein kleinster Wert = 20 sein soll, also muß sein:

$$\min\left(M_1 - \frac{x}{L} H \pm 0{,}7\gamma\right) = 20.$$

Ob dieser ungünstigste Zustand stattfindet, kann man von vornherein nicht angeben, man müßte denselben aufsuchen. Am vorteilhaftesten würde es sein, wenn man es so richten könnte, daß d. Unterdruck in d. ganzen Leitung constant = 20 mm wäre, denn es ist immer ungünstig, wenn ein zu großer Unterdruck in d. Leitung vorkommt. Dieses würde möglich sein, wenn beim Wegstreichen d. Zeichen + gilt und wenn d. Glieder $-\frac{x}{L}H$ und $+0{,}7\gamma$ sich überall tilgen, wenn also überall: $\frac{y}{x} = \frac{H}{0{,}7L}$.

Es könnte dann M_1 selbst = 20 sein, also d. Unterdruck constant in d. ganzen Leitung = 20. Setzt man H wie es gewöhnlich d. Fall ist = 21, so folgt: $\frac{y}{x} = \frac{30}{L}$

ferner ist nun L d. durchschnittl. Luftdruck in mm. Wassersäule = 1000, da derselbe in mtr = 10 ist und somit $\frac{y}{x} = 0{,}003$.

Es würde also am vorteilhaftesten sein, wenn man sich so einrichtet, daß d. Röhren d. Gasleitung vom Gasometer an beständig ansteigen um etwa 3 : 1000, denn dann wäre in d. ganzen Leitung d. Unterdruck constant = 20 mm. Wassersäule. —

Bewegung eines Gases in einer Röhre, deren Wand eine wesentliche Wärmeübertragung nach Aussen hin oder von Aussen her vermittelt.

Diese Fälle kommen namentlich bei d. Bew. d. Gase einer Feuerung vor. D. gasförmigen Verbrennungsprodukte steigen zunächst durch d. Feuerkanal [illegible], welcher äußerlich od. innerlich am Kessel angebracht sein kann u. schließlich strömen sie weiter aufwärts durch d. Kamin ins Freie. Hier handelt es sich also um d. Bew. eines Gasgemenges durch eine Röhre od. Canal, wo ein ganz bedeutender Wärmeverlust stattfindet, es wird also auch d. Zus. d. Gasgemenges auf seinem ganzen Wege bedeutend verändert sein. Es ist dies ein Fall, wo d. Wärmeübergang von Innen nach Außen stattfindet, es können jedoch auch umgekehrte Fälle stattfinden, wie bei einem Hochofen, wo d. Gebläse warme Luft zuführt; hier findet eine Wärmeabnahme von außen nach Innen statt. — Um solche Fälle erfahrungsmäßig zu ersehen, muß auf d. allgemeinen Fundamentalgln. Bezug genommen werden: Es stehen 3 allgemeine Gln. zur Verfügung, um p, T und u als Functionen von s für jeden Querschnitt d. Röhre zu bestimmen. Hier werden wir brauchen:

d. Continuitätsgl.: $$\frac{F u}{G} = \frac{R T}{p}$$

d. Gl. d. Arbeitsvermögens: $$\frac{u\,du}{g} + \frac{\kappa}{\kappa-1} R\,dT = ds\cos\psi + W\,dQ$$

u. d. Gl. d. lebendigen Kraft: $$\frac{u\,du}{g} + R\,dT - RT\,\frac{d(Fu)}{Fu} = ds\cos\psi - \lambda\frac{ds}{d}\frac{u^2}{2g}$$

D. Querschnitt d. Röhre sei = F, d. Umfang derselben = P und d. Winkel ψ, unter welchem d. Mittellinie gegen d. Richtung d. Schwere geneigt ist, sei constant für d. ganze Rohrstrecke, widrigenfalls soll derselbe als Mittelwert eingeführt werden. Es ist nun d. mittlere Durchmesser:

$$d = \frac{4F}{P}$$

und mit d. Glied mit dQ beschäftigt sich namentlich:

$$g\,dQ = k(\vartheta' - \vartheta)\,d\sigma'$$

[illegible]

$$d\sigma' = \vartheta' ds, \text{ also: } \quad g\,dQ = k\vartheta'(\vartheta' - \vartheta)\,ds.$$

[illegible] $W = \frac{1}{A}$ [illegible] R [illegible]:

$$A R = C_1 - c$$

[illegible] c [illegible] C_1 [illegible] A [illegible] W [illegible], also:

$$A R = C_1\left(1 - \frac{1}{n}\right) = C_1 \frac{n-1}{n} \qquad \text{wenn } n = \frac{C_1}{c} \text{ ist.}$$

$$\text{und } \quad W = \frac{1}{A} = \frac{n}{n-1}\,\frac{R}{C_1}$$

[illegible] $W\,dQ$ [illegible]:

$$W\,dQ = \frac{n}{n-1}\,\frac{R\,k\,\vartheta'}{g\,C_1}(\vartheta' - \vartheta)\,ds$$

[illegible] k [illegible] ϑ' [illegible] $\frac{gC_1}{k\vartheta'} = a$ [illegible]:

$$W\,dQ = \div\frac{n}{n-1}(\vartheta - \vartheta')\,\frac{ds}{a}$$

[illegible] $\frac{u^2}{2g} = h$ [illegible]: $\frac{u\,du}{g} = dh$ [illegible] $\frac{du}{u} = \frac{dh}{2h}$ also:

$$2)\quad dh + \frac{n}{n-1} R\,d\vartheta + \frac{n}{n-1} R(\vartheta - \vartheta')\frac{ds}{a} = ds\cos\psi$$

$$\text{und } 3)\quad dh + R\,d\vartheta - R\vartheta\frac{dh}{2h} + 2\frac{ds}{\partial}h = ds\cdot\cos\psi.$$

[illegible] 1. 2. 3. [illegible] 2 [illegible] 3 [illegible] s [illegible] 2 [illegible] s [illegible] h [illegible] ϑ [illegible] s [illegible] 2 [illegible] $h\,h'\,h''\,\vartheta\,\vartheta'\,\vartheta''$ [illegible] 3 [illegible] $\vartheta\,\vartheta'\,\vartheta''$ [illegible] $h\,h'\,h''$ [illegible] s [illegible] h [illegible] s [illegible] h [illegible] $\vartheta\,\vartheta'\,\vartheta''$ [illegible] s. [illegible] 2 [illegible] $\vartheta - \vartheta'$ [illegible] 2 [illegible] dh [illegible] $ds\cos\psi$ [illegible]

d. Temp. d. Gases constant gedacht würde; was zunächst d. Einfluss d. Schwere betrifft, so lässt sich leicht einsehen, dass eine Erhebung um mehr als 100 m erst um 1°C. vermindert; nämlich, wenn etwa H d. Höhe ist, bis zu welcher eine Gasleitung emporsteigt, so wird, um 1 kgr. Gas auf diese Höhe zu heben, eine Arbeit = 1. H verbraucht; d. Wärmewerth dieser Arbeit ist A H Wärmeeinheiten; soll nun diese Arbeit dadurch geleistet werden, dass d. Gas eine entsprechende Wärmemenge entzogen wird, so ist d. Wärmewerth A H dieser zur Erhebung d. Gases verbrauchten Arbeit = d. Product aus spec. Wärme d. Gases und d. entsprechenden Temp.-Erniedrigung: $AH = c_p$ diejenige Erhebung, d. in Folge d. Einflusses d. Schwere auf eine Temp.-Erniedrigung um 1° bedingen würde, so für atm. Luft, wo $c_p = 0{,}2375$: $H = 0{,}2375 \cdot 424 = 100{,}7$ m.

Also erst bei einer Höhendifferenz von 100,7 m würde eine Temp.-Erniedrigung von 1° bedingt werden; eine solche Höhenänderung kommt sehr kaum vor & d. diese Temp.-Änderung ist so gering gegen d. Temp.-Änderung durch d. Wärmeleitung, dass also d. Glied $A\,S\cos\psi$ vernachlässigt werden kann. Ganz dasselbe gilt auch von d. Glied dk; ist nämlich Δk eine gewisse Änderung in d. Geschw.-Höhe, so soll nun eine solche Änderung Δk d. Geschw.-Höhe, wenn sie beispielsweise in d. atm. Luft bei constanter [illegible] eine Temp.-Änderung von 1°C verursacht d. Gl. entsprechen: $A \cdot \Delta k = c_p$ so wäre also auch $\Delta k = 100{,}7$ m u. dem entsprechend $\Delta(u^2) = 1976$; also erst bei dieser Änderung käme eine Änderung um 1° vor; wäre etwa d. Anfangsgeschw. = 20 m. p. Sek. u. sollte durch einen Zuwachs an Geschw. u. d. dadurch bedingten Wärmeverbrauch d. Gases selbst eine Temp.-Änderung um 1° verursacht werden, so müsste d. Geschw.-Zuwachs um $\sqrt{400 + 1976}$ also von 20 m. bis auf 48,7 m wachsen; solche bedeutende Geschw.-Änderungen kommen jedoch nur selten [illegible] demnach bleibt nur d. Gl.:

$$\frac{dT}{T - T'} = \div \frac{ds}{a}$$

d. Temp. T', welche d. Röhre von Außen besitzt, kann an verschiedenen Stellen verschieden sein, es kann T' selbst eine Function von s sein wie T, namentlich wenn d. Wärmeentziehung gleichfalls durch einen Flüssigkeitsstrom stattfindet, d. äußerlich hinfließt; es sei jedoch hier d. Einfachheit wegen angenommen, dass d. Temp. d. Mediums, welches d. Röhre von außen umgibt, so wenig verschieden ist, dass man eine mittlere Temp. T' voraussetzen darf, also constant. Setzt man dies, so ergibt sich aus dieser Gl., wenn T_1 d. absolute Temp. im Anfangsquerschnitt bedeutet, durch Integration:

$$l\left(\frac{T - T'}{T_1 - T'}\right) = \div \frac{s}{a}.$$

oder es ist d. absolute Temp. d. Gasstroms in d. Entfernung s vom Anfang d. Röhre: $T = T' + (T_1 - T')\,e^{-\frac{s}{a}}$

Hierin ist T_1 u. T' gegeben, so dass T für jeden Querschnitt gefunden werden kann. Es soll nun d. Gl. 3 weiter dazu benutzt werden, um d. Pr. d. Gasstroms als Function von s zu finden, od. um p als Function von s u. T zu entwickeln:

Zunächst kann d. 2te u. 3te Glied zusammengefasst werden. Aus d. Continuitätsgl., in welcher T, G u. F constant sind folgt: $T = \text{const.}\, p u$, also $l(T) = \text{Const.} + lp + lu$ differentiirt man dies, so folgt:

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{du}{u} \quad \text{wo} \quad \frac{du}{u} = \frac{dk}{2k} \text{ ist, also:}$$

$$RT\left(\frac{dT}{T} - \frac{dk}{2k}\right) = RT\,\frac{dp}{p}.$$

Wird dies eingesetzt, dann d. Gl. durch k dividirt, und d. rechte Seite auf 0 gebracht, so folgt: $\frac{dk}{k} + \frac{RT}{k}\frac{dp}{p} + \left(\frac{\lambda}{\delta} - \frac{\cos\psi}{k}\right)ds = 0$

Setzt man hier: $\frac{dk}{k} = 2\left(\frac{dT}{T} - \frac{dp}{p}\right)$ u. ferner $ds = \div a\,\frac{dT}{T - T'}$, so folgt:

$$2\,\frac{dT}{T} + \left(\frac{RT}{k} - 2\right)\frac{dp}{p} - \left(\lambda\,\frac{a}{\delta} - \frac{a}{k}\cos\psi\right)\frac{dT}{T - T'} = 0$$

Hierbei lässt sich nun zunächst eine Vernachlässigung vornehmen analog einer schon früher erwähnten: es war schon bei einer Röhre, wo keine Wärmeleitung durch d. Wand stattfindet gezeigt, dass im Allgemeinen $\frac{RT}{2k}$ eine so große Zahl ist, dass man dagegen 1 vernachlässigen kann.

es zeigt sich, daß dieser Coeff. größer als 100 ..., wenn u > 30 m pr. Sek.; im vorliegenden Falle wird diese Vernachlässigung noch kleiner; denn es ist im Allgemeinen d. Temp. größer wegen d. Wärmeleitung durch d. Rohrwand u. es wird durch d. Vernachlässigung von 1 gegen $\frac{R\tau}{2h}$ dasselbe erreicht, wie durch $\frac{R\tau}{h}$ gegen 2. Theilt man dieß und multiplicirt d. ganze Gl. mit τ, so folgt:

$$2\,d\tau + \frac{R\tau^2}{h}\frac{dp}{p} - \left(\lambda\frac{a}{\partial} - \frac{a}{p}\cos\psi\right)\frac{\tau\,d\tau}{\tau-\tau'} = 0$$

Lösen wir d. Klammer auf und setzen $\frac{\tau}{\tau-\tau'} = 1 + \frac{\tau'}{\tau-\tau'}$, so folgt:

$$-\frac{R\tau^2}{h}\frac{dp}{p} = \left(2 - \lambda\frac{a}{\partial}\right)d\tau - \lambda\frac{a}{\partial}\frac{\tau'\,d\tau}{\tau-\tau'} + \frac{a}{h}\cos\psi\frac{\tau\,d\tau}{\tau-\tau'}$$

od. wenn im dritten Glied $\frac{d\tau}{\tau-\tau'} = \div\frac{ds}{a}$ gesetzt wird: $-\frac{R\tau^2}{h}\frac{dp}{p} = \lambda\frac{ds}{\partial}\tau' - \left(\lambda\frac{a}{\partial} - 2\right)d\tau + \frac{a}{h}\cos\psi\frac{\tau\,d\tau}{\tau-\tau'}$

Ferner ist $\frac{R\tau^2}{h} = 2gR\left(\frac{\tau}{u}\right)^2$, und d. Continuitätsgl. ist d. Quotient $\frac{\tau}{u}$ proportional d. Spr. p, wenn also d. Werthe von τ, u u. p im Anfangsquerschnitt mit τ_1, u_1 u. p_1 bezeichnet werden, so ist: $2gR\left(\frac{\tau}{u}\right)^2 = 2gR\left(\frac{\tau_1}{u_1}\right)^2\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = \alpha\tau'\left(\frac{p}{p_1}\right)^2$ wenn $\alpha = \frac{2gR}{\tau'}\left(\frac{\tau_1}{u_1}\right)^2$ ist.

Setzt man dies ein, so folgt:

$$-\alpha\tau'\frac{p\,dp}{p_1^2} = \lambda\frac{ds}{\partial}\tau' - \left(\lambda\frac{a}{\partial} - 2\right)d\tau + \frac{\alpha}{R}\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 a\cos\psi\frac{\tau'\,d\tau}{(\tau-\tau')\tau}.$$

Was d. letzte Größe betrifft, so ist: $\frac{\tau'\,d\tau}{\tau(\tau-\tau')} = \left(\frac{1}{\tau-\tau'} - \frac{1}{\tau}\right)d\tau = \div\frac{ds}{a} - d\,l(\tau)$.

dies eingesetzt u. d. ganze Gl. durch $\alpha\tau'$ dividirt, liefert:

$$-\frac{1}{2}\,d\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = \frac{1}{\alpha}\left\{\lambda\frac{ds}{\partial} - \left(\lambda\frac{a}{\partial} - 2\right)\frac{d\tau}{\tau'}\right\} - \frac{\cos\psi}{R\tau'}\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\left(ds + a\,d\,l(\tau)\right).$$

Bei d. Integration macht nun d. Factor $\frac{p}{p_1}$ einige Schwierigkeit, weßhalb hierfür eine Vereinfachung gemacht werden soll; es soll im letzten Glied statt d. eigentlich veränderlichen Factors $\frac{p}{p_1}$ ein constanter Mittelwerth gesetzt werden. Versteht man nun unter p d. Spr. in d. Entfernung s vom Anfang d. Röhre, so ist d. Mittelwerth von $\left(\frac{p}{p_1}\right)^2$ für d. ganze Rohrlänge $s = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]$, denn für d. Anfang ist $\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = 0$ und am Ende $= \left(\frac{p}{p_1}\right)^2$. Dies eingesetzt, so erhält man durch Integration:

$$\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] = \frac{1}{\alpha}\left[\lambda\frac{s}{\partial} + \left(\lambda\frac{a}{\partial} - 2\right)\frac{\tau_1 - \tau}{\tau'}\right] - \frac{1}{2}\frac{\cos\psi}{R\tau'}\left[1 + \left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]\left(s + a\,l\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right).$$

Setzt man nun: $1 + \left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = 2 - \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]$, so folgt durch Umformung:

$$\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] = \frac{\frac{1}{\alpha}\left[\lambda\frac{s}{\partial} + \left(\lambda\frac{a}{\partial} - 2\right)\frac{\tau_1 - \tau}{\tau'}\right] - \cos\psi\left(s + a\,l\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right)}{1 - \frac{\cos\psi}{R\tau'}\left(s + a\,l\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right)}.$$

Hiernach kann man nun, da τ als Function von s bereits gefunden, auch für jeden Werth von s d. Größe rechts berechnen, wodurch dann auch d. Werth von p gefunden ist. In d. Regel wird hierbei d. Aenderung d. Drucks nur von mäßiger Größe sein wie z. B.: wenn es sich handelt um d. Leit. d. Heizgase in d. Canal einer Dampfkesselfeuerung, so kann d. Spr. vom Rost d. Feuerung bis zum Kamin sich nur wenig ändern, sie kann nur verschieden sein durch d. Aenderung d. Luftdrucks an d. verschiedenen Stellen. Unter solchen Umständen kann $p = p_1(1 - \delta)$ gesetzt werden, wo δ ein sehr kleiner Bruch ist, von welchem d. höheren Potenzen vernachlässigt werden können, so daß also: $\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = 1 - 2\delta$ und $\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] = \delta$.

Ebenso kann im Nenner d. kleine Glied mit $\cos\psi$ gegen 1 vernachlässigt werden. Später werden wir diesen Ausdruck noch näher zu betrachten haben, nämlich bei d. Theorie d. Feuerungen; dabei wird, sofern es sich um d. Leit. d. Heizgase im Canalsystem d. Feuerung selbst handelt, auch d. letzte Glied im Zähler fortzulassen sein, indem dieses Canalsystem gewöhnl. in einer Horizontalebene sich befindet, also $\cos\psi = 0$. Handelt es sich um d. Leit. d. Heizgase im Kamin, so ist $\psi = 180°$ und mithin $\cos\psi = \div 1$ zu setzen. –

Ist nun auf diese Weise d. Pr. bekannt, so findet man auch d. Continuitäts-Gl. d. Geschw., denn es sind d. Geschw. direct proportional d. absoluten Temp. u. umgekehrt proportional d. Pr.; sind also für d. Anfangsquerschnitt u_1, T_1 u. p_1, so ist:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{T}{T_1}\,\frac{p_1}{p}.$$

Was diese Berechnung d. Aenderungsgesetzes d. äusseren u. inneren Zustandes von Querschnitt zu Querschnitt betrifft, so war nur d. allgemeine Leitungswiderstand berücksichtigt worden; es können aber auch hier besondere Widerstände in Betracht kommen, wie z. B.: bei d. Ber. eines Heizgases einer Feuerung an d. Ende d. Rostes, wo d. Kanal eine plötzliche Richtungsänderung erfährt, sowie auch eine Querschnittsänderung; in solchen Fällen ist es in d. Regel notwendig, d. ganze Strecke, auf welche d. Gasbewegung sich erstreckend bezieht, in einzelne Theile zu theilen, die durch diese Stellen, wo Aenderungen eintreten, getrennt sind, u. es muss dann d. Aenderung d. Ber.-Zustandes für jede Strecke für sich behandelt werden. Was d. Zustandsänderung betrifft, d. durch einen besonderen Widerstand hervorgebracht wird, so genügt es, d. Druckänderung zu betrachten, denn auf einer solchen kurzen Strecke wird keine wesentliche Wärmeleitung als stattfindend betrachtet werden können; es kann also ganz dieselbe Näherungsformel benutzt werden, wie bei d. Ber. d. Gasbewegung durch einen Canal, wo keine Wärmeleitung stattfand. D. Formel war folgende:
Geht an einer solchen Stelle d. Pr. von p_1 zu p_2 über und wenn ferner gleichzeitig eine Querschnittsänderung von T_1 zu T_2 vorkommt u. wenn man d. Pr. p_2 an d. folgenden Stelle setzt:

$$p_2 = p_1(1-\delta)$$

so kann man setzen:

$$\delta = \frac{k}{RT}\left[(1+\zeta)\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2-1\right]. —$$

Was d. Ber. d. Dämpfe betrifft, so soll nun eine Formel über d. Ausflussgeschw. u. Ausflussmenge angegeben werden; es können hier ganz analoge Formeln benutzt werden, wie beim Ausfluss d. Gase. Es war bekanntlich d. Ausflussgeschw. eines Gases beim Ausströmen aus einer Mündung:

$$u = \varphi\sqrt{2g\frac{n}{n-1}RT_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

wo p_1 d. Pr. im Innern u. p d. im Äusseren d. Gefässes bedeutet, T_1 d. absolute Temp. im Innern d. Gefässes, n d. Verhältniss d. spec. Wärme bei constantem Pr. zur spec. Wärme bei constantem Volumen, φ d. Geschw.-Coeff. Es war d. Formel auf d. Weise erhalten worden, dass man u_0 berechnete wie es sein würde, wenn keine Widerstände stattfinden u. d. Zustandsänderung nach d. adiabatischen Curve stattfindet und dieser Ausdruck wurde dann mit φ multiplicirt. Bei einer solchen Zustandsänderung d. Gases stehen bekanntlich d. Pr. u. d. spec. Vol. in d. Beziehung zu einander, dass: $p v^n = p_1 v_1^n$ ist.
Nun gilt näherungsweise dieselbe Beziehung für d. Zustandsänderung von Dämpfen ohne Mittheilung u. Entziehung von Wärme, nur dass n eine andere Bedeutung hat. Wenn es sich zunächst um überhitzte Dämpfe handelt, so folgt aus d. Versuchen von Hirn u. Cazin, dass, wenn d. Wasserdampf ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme seinen Zustand ändert, wenigstens auch eine solche Beziehung stattfindet u. zwar ergibt sich für Wasserdampf $n = \frac{4}{3}$. Für gesättigte Dämpfe hatte sich gezeigt, dass man auch hier d. Gesetz zu Grunde legen darf, dass d. Pr. sich proportional ändert einer gewissen Potenz d. spec. Vol., nur hatte d. Potenz wieder einen anderen Werth, sie war nämlich abhängig von d. Mischungsverhältniss. Wenn im Anfangszustand in 1 Kgr. d. Gemenges x_1 Kgr. Dampf enthalten ist, so konnte gesetzt werden:

$$n = 1{,}035 + 0{,}1\,x.$$

Es werden also d. betreffenden Formeln einfach übertragen werden können, so dass nur in d. Formel p u. v vorkommen u. nicht d. Temp. weil letztere bedeutend umständlicher ist.

Es läßt sich nun d. Formel für d. Ausflußgeschw. d. Gase so umgestalten, daß d. Temp. nicht mehr darin vorkommt, da $R.\,T_1 = p_1 v_1$ ist, also:

$$u = \varphi \sqrt{2g\frac{n}{n-1}\,p_1 v_1\left[1-\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

Was nun d. in d. Sek. ausströmende Dampfmenge betrifft, so sei A wie früher d. Flächeninhalt d. Ausflußöffnung; indem aber hier ebenso, wie bei tropfbaren Flüssigkeiten im Allgemeinen auch eine Contraction stattfinden kann, so wird d. kleinste Querschnitt d. entstehenden Strahls auch hier $= \alpha A$ sein und hindurch strömt nun d. Dampf mit d. Geschw. u; es ist also d. hindurchströmende Dampfvolumen $= \alpha A u$. Multiplicirt man dies mit d. Gew. d. Volumeneinheit od. dividirt man durch d. Volumen d. Gewichtseinheit, so erhält man d. pr. Sek. ausfließende Dampfgewicht. Dieses ergibt sich streng genommen nicht aus dieser Gl., in Wirklichkeit findet d. Zustandsänderung nicht ohne Mittheilung von Wärme statt, sondern wenn überhaupt ein Gas-Zustand entsteht, so hat dieselbe zur Folge, daß eine gewisse Arbeit sich in Wärme umsetzt u. diese wird d. ausströmenden Dampf zugeführt. Es ist also streng genommen d. vorliegende Aufgabe die, diejenige Änderung d. spec. Vol. zu ermitteln, welche stattfindet mit Rücksicht auf d. Reibung in d. Wärmemittheilung; jedoch würde es sich kaum verlohnen, hierauf näher einzugehen, wenn man vielmehr setzen: $G = \alpha A u$, dividirt durch d. Vol. u. d. Fehler auf α überträgt, welches doch nicht berechnet werden kann, sondern nur durch Versuchen zu bestimmen ist; d. Vol. ist aber, da $p v^n = p_1 v_1^n$ ist: $v = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}} v_1$, also:

$$G = \alpha A u \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{v_1}.$$

Nun hat α jetzt einen zusammengesetzten Werth; setzt man für u seinen Ausdruck und setzt $\alpha\varphi = \mu$, so folgt:

$$G = \mu A \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} \sqrt{2g\frac{n}{n-1}\,\frac{p_1}{v_1}\left[1-\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

Nicht permanente Bewegung des Wassers.

Es sollen für d. nicht permanente Bew. einige Fälle behandelt werden, nämlich solche, die sich beziehen auf d. Ausfluß d. Wassers aus Gefäßen, d. keinen Zufluß erhalten od. wenigstens nur einen solchen, d. nicht = d. gleichzeitigen Abfluß ist, so daß also d. Wasserhöhe im Gefäß variabel ist.

Es sei wieder A d. Größe d. Ausflußöffnung, d. horizontale Querschnitt d. Gefäßes in d. Höhe h über d. Schwerpunkt dieser Mündung sei $= \Omega$, wobei im Allgemeinen Ω irgend eine gegebene Function von h sein kann. Anfangs liege d. freie Wasseroberfl. in d. Höhe h_0 über d. Schwerpunkt d. Mündung und in dieser Höhe sei d. horizontale Querschnitt d. Gefäßes $= \Omega_0$. Gewöhnlich handelt es sich nun hier um d. Aufgabe, diejenige Zeit t Sek. zu berechnen, welche unter gegebenem Gesetz d. Wasserzuflusses verstreicht von d. Augenblick an, wo d. Wasserstand $= h_0$ ist bis zu d. Augenblick wo d. Wasserstand sich bis zu h_1 vermindert hat. Wenn d. Mündung A einigermaßen klein ist im Vergleich mit d. horizontalen Querschnitt Ω an einer beliebigen Stelle, so kann man sich durch eine specielle Untersuchung davon überzeugen, daß man nur einen kleinen Fehler begeht, wenn man d. Ausflußgeschw. in jedem einzelnen Augenblick gleich derjenigen setzt, wenn d. Wasserhöhe constant bliebe; es würde also dann:

$u = \varphi\sqrt{2gh}$ sein. Im vorliegenden Fall, wo

h nur einen unendlich kleinen, vorübergehenden Werth hat, wird streng genommen dies nicht d. Fall sein, indessen zeigt eine specielle Untersuchung, daß man, falls nur d. Öffnung ziemlich klein ist im Vergleich mit d. Querschnitt Q und natürlich $p_0 = p$ ist, einen geringen Fehler begeht.–

Es soll nun zunächst vorausgesetzt werden, d. Gefäß erhalte keinen Zufluß, es muß dann während d. Ausflusses d. Wasser d. Oberfl. desselben sich senken. Ist in irgend einem Augenblick h d. Wasserstand im Gefäß, so ändert sich derselbe im nächstfolgenden Zeitelement dt um dh und zwar ist dann dh eine negative Größe und es ist $-dh$ d. absolute Senkung d. Wasserspiegels und d. verschwindende Wasservolumen $= + Q\,dh$. Dieses Volumen kann aber auch gleich gesetzt werden $-\mu A\sqrt{2gh}\,dt$ und es ist:

$$dt = -\frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\,\frac{Q\,dh}{\sqrt{h}}$$

und es ist hieraus durch Integration d. Zeit, in welcher d. Wasserstand von h_0 auf h herabsinkt:

$$t = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_h^{h_0}\frac{Q\,dh}{\sqrt{h}}$$

Wird ein Gefäß von constantem Horizontalschnitt vorausgesetzt, so folgt:

$$t = \frac{2Q}{\mu A\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0}-\sqrt{h}\right) = \frac{Q}{\mu A}\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}}-\sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

Es ist also d. Zeit, d. d. Wasser braucht, um bis zur vollen Höhe d. Mündung abzufließen:

$$T = \frac{Q}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Geschieht d. Ausfluß mit einer längeren Ausflußröhre, so ist h d. Höhe d. Wasserspiegels über d. Mündung d. Röhre u. es hätte dann d. Wasserstand in dieser Röhre mit zu berücksichtigen. Natürlich kommt dann, besonders wenn d. Ausflußröhre geneigt ist, d. Wasserspiegel im Gefäß nicht bis $h = 0$ herabsinken.

Hat d. Ausflußgefäß eine beliebige Gestalt, so kann in d. meisten Fällen gesetzt werden:

$$Q = p + qh + rh^2$$

Hierzu gehören alle cylindrischen Gefäße über Grundr. und alle cylinderähnlichen Gefäße; zu d. letzteren gehören alle Gefäße, deren Wände Umdrehungsfl. sind. Unter einem Prismatoid pflegt ein Körper verstanden zu werden, d. auf folgende Art entstanden zu denken ist: Hat man irgend ein ebenes Viel. und legt durch d. Ecken desselben gerade Linien und denkt sich nun d. Viel. so fortbewegt, daß seine Ebene beständig parallel bleibt und seine Eckpunkte beständig auf diesen geraden Linien bleiben, so beschreibt dieses Viel. ein Prismatoid. –

Setzt man letzteren Ausdruck für Q in d. Gl. für T, so folgt:

$$T = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_0^h\left(pz^{-\frac{1}{2}} + qz^{\frac{1}{2}} + rz^{\frac{3}{2}}\right)dz$$

$$= \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\left(\frac{ph^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{qh^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{rh^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)$$

$$T = \frac{1}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(p + \tfrac{1}{3}qh + \tfrac{1}{5}rh^2\right)$$

Hier können d. Coeff. p q u. r auch ersetzt werden durch 3 in gewissen Höhen bekannte Horizontalschnitte d. Gefäßes, dazu eignet sich namentlich d. Horizontalschnitt in d. Höhe h über d. Mündung, in d. Höhe $\frac{h}{2}$ und in d. Höhe 0. Bezeichnet man diese Horizontalschnitte dieser Schnitte mit Q G u. H, so hat man nun:

$$Q = p + qh + rh^2 \qquad G = p + \tfrac{1}{2}qh + \tfrac{1}{4}rh^2 \quad \text{und} \quad H = p.$$

und demnach ergiebt sich:

$$T = \frac{1}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left\{H + \frac{1}{3}(-F + 4G - 3H) + \frac{2}{5}(F - 2G + H)\right\}$$

$$T = \frac{F + 8G + 6H}{15\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Soll d. Zeit t gefunden werden, binnen welcher d. Anfangswasserstand h_0 sich reducirt auf h, so ist

$$t = T_0 - T = \frac{1}{\mu A}\left\{\frac{F_0 + 8G_0 + 6H_0}{15}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \frac{F + 8G + 6H}{15}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right\}$$

Wenn d. Gestalt d. Gefässes noch näher bestimmt ist, so wird man einen dieser 3 Horizontalschnitte durch d. Dimensionen d. beiden andern ausdrücken können, so dass dann, um d. Zeit für d. Niedersinken d. Wasserspiegels zu bestimmen nur d. Kenntniss von 2 resp. 3 verschiedenen Horizontalschnitten nothwendig ist.

Ist jetzt z. B. d. Ausflussbehälter eine obeliskenförmige Gestalt, also ein Körper mit parallelen Seiten, d. aber im Allgemeinen nicht einander ähnlich sind: es sei:

$$F = ab \quad u. \quad H = a'b'$$

dann ist für d. mittleren Querschnitt: $G = \frac{a+a'}{2} \cdot \frac{b+b'}{2}$

und folgt: $F + 8G + 6H = 3ab + 8a'b' + 2(ab' + a'b)$

so dass man nur d. Dimensionen von F u. H zu kennen braucht, um T zu berechnen; um t zu berechnen müsste man noch d. Dimensionen von F_0 kennen. —

Wenn d. Gefäss pyramidal, so würde auch irgend eine Dimension d. Querschnitts d. arithmetische Mittel d. homologen Dimension d. Querschnitte F u. H sein; in einem solchen Falle würden auch d. homologen Dimensionen proportional d. Wurzel aus d. Inhalt d. Querschnitts; wenn also irgend eine Dimension d. Querschnitts G d. arithmetische Mittel d. analogen Dimensionen von F u. H ist, so ist ebenso d. Wurzel aus d. mittleren Querschnitt G d. arithmetische Mittel aus d. Wurzel von F und H, also: $\sqrt{G} = \frac{\sqrt{F} + \sqrt{H}}{2}$

und folgt: $F + 8G + 6H = 3F + 8H + 4\sqrt{FH}$

Es wird mit Rücksicht auf derartige ~~practische~~ Aufgaben nicht selten vorkommen, dass d. Gestalt d. Ausflussbehälters so complicirt ist, dass man sich mit einer angenäherten Berechnung dieses Falles behelfen muss. Dasselbe eine erste Annäherung kann dazu d. Voraussetzung dienen, es seien d. Querschnitte ganz gleich dem [illegible] in gleichem Abstand von je einer Horizontalebene. Wenn es sich also um d. Ausfluss aus einem Teich handelt, so wird in d. Regel d. Gestalt dieses Behälters so complicirt, dass man sich mit einem solchen Näherungsverfahren behelfen muss, dabei kann es d. Fall sein, dass man von d. Teiche weiter nichts kennt, als d. Oberfl. u. allenfalls d. grösste Tiefe desselben. In einem solchen Falle wird man d. Wahrheit ziemlich nahe kommen, wenn man annimmt, dass d. Horizontalschnitte eines solchen Teichs d. Höhen bis zum tiefsten Punkt proportional wären, wie es d. Fall wäre, wenn d. Boden d. Teiches als ein Umdrehungsparaboloid gestaltet wäre. Wenn eine parabolische Parabel sich um d. vertical liegende Axe dreht, so ~~ist~~ beschreibt dieselbe einen Körper, d. d. Eigenschaft hat, dass irgend ein Horizontalschnitt proportional d. Abstande bis zum tiefsten Punkte ist. Kennt man also vom Teich nur d. Grösse d. Oberfl. und d. grösste Tiefe, so wird man meistens am wenigsten fehl greifen, wenn man annimmt, es sei d. Grundfl. d. Teiches annähernd einem Umdrehungsparaboloid gestaltet. Auf Grund dieser Voraussetzung würde man dann folgende Formel herstellen können, um d. Zeit $= t$ zu berechnen, bis zu welcher ein ursprünglicher Wasserstand in einen kleineren übergeht; es sei d. ursprünglich [illegible] Wasseroberfl. $= F_0$ und d. Höhe derselben über d. Schwerpunkt d. Ausflussmündung $= h_0$. Diese Ausflussmündung liege noch um a höher als d. tiefste Punkt d. Teiches, so dass also d. grösste Wassertiefe $= h_0 + a$ ist; es handelt sich nun um d. Grösse $F + 8G + 6H$. Zu dem Ende ist:

$$F_0 : G_0 : H = (a+h_0) : (a+\tfrac{1}{2}h_0) : a$$

also $$G = \frac{a+\frac{1}{2}h_0}{a+h_0}F_0 \quad \text{und} \quad H = \frac{a}{a+h_0}F_0.$$

demnach $$F_0 + 8G_0 + 6H = \frac{15a+5h_0}{a+h_0}F_0$$

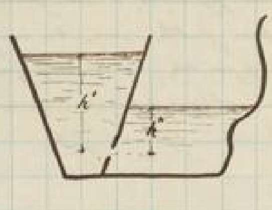
ebenso $$F + 8G + 6H = \frac{15a+5h}{a+h}F = \frac{15a+5h}{a+h_0}F_0$$

also $$t = \frac{F_0}{\mu A}\left(\frac{a+\frac{1}{3}h_0}{a+h_0}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \frac{a+\frac{1}{3}h}{a+h}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

Erfolgt d. Abfluß durch eine Röhre, so muß bei d. Wahl von μ natürlich auf d. Widerstand in d. Ausflußröhre mit Rücksicht genommen werden, es bedeutet dann μ einen resultierenden Geschw.-Coeff.; ist ζ d. resultierende Widerstandscoeff., so ist:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{\mu^2} - 1 \quad \text{also:} \quad \frac{1}{\mu} = \sqrt{1+\zeta}. \text{ –}$$

Es war bei allen diesen Aufgaben vorausgesetzt worden, daß d. Ausfluß aus d. Behälter einfach in d. freie Luft erfolge. Ein anderer Fall, d. auch von Wichtigkeit ist, betrifft d. Ausfluß d. Wassers aus einem Gefäß in ein anderes, welche mit einander communicieren durch eine Öffnung in ihrer gemeinschaftlichen Scheidewand; statt dieser Öffnung kann jedoch auch eine Communicationsröhre vorhanden sein. Wenn d. eine noch d. andere Gefäß hin verschieden für einen Zufluß od. Abfluß, so ist es ein gegenseitiger Austausch stattfindend.



Anfangs stehe in d. ersten Gefäß d. Wasser in d. Höhe h' über d. Schwerpunkt d. Communicationsmündung, im zweiten in d. Höhe h'', d. Differenz dieser beiden Höhen sei h; es fragt sich nun, binnen welcher Zeit wird diese anfängliche Niveaudifferenz übergehen in 0. Es sei irgend ein Horizontalschnitt d. ersten Gefäßes bezeichnet mit F', derselbe ist eine gegebene Function d. Höhe z' dieses Schnittes über d. Schwerpunkt d. Mündung. Es sei ebenso irgend ein Horizontalschnitt d. 2ten Gefäßes in d. Höhe z'' über d. Schwerpunkt d. Mündung mit F'' bezeichnet, u. F'' gleichfalls eine gegebene Function von z'' ist. Irgend eine beliebige Niveaudifferenz d. beiden Wasserspiegel sei mit z bezeichnet; ist während d. Abflusses d. Wassers d. Niveaudifferenz in irgend einem Augenblick $= z$ geworden, dann würde, wenn dieses z eine Zeit lang unverändert bliebe, d. ausfließende Wasservolumen $= \mu A\sqrt{2gz}$ sein; diesen Zustand kann man wenigstens für ein unendl. kleines Zeitelement dt hindurch constant setzen, dann ist dieses Volumen $= A\mu\sqrt{2gz}\,dt$. Dieses Volumen kann aber auch auf eine 2te Weise ausgedrückt werden, wenn nämlich in diesem Augenblick d. Höhe d. Wasserspiegels über d. Schwerpunkt d. Mündung $= z'$ geworden ist, so wird im nächstfolgenden Zeitelement dt d. Wasservolumen, welches aus diesem Gefäß herausfließt, $= -F'dz'$ sein, also:

$$\mu A\sqrt{2gz}\,dt = -F'dz'$$

Aus d. Gl. $z' - z'' = z$, wo z' u. z'' veränderliche Höhen sind, folgt: $dz' - dz'' = dz$. Andererseits kann durch z' u. z'' d. Wasservolumen ausgedrückt werden, welches in einem Zeitelement überfließt; wie schon gezeigt ist dieses Wasserquant. $= -F'dz'$; es ist aber auch $= +F''dz''$, also: $$F'dz' + F''dz'' = 0.$$

Multiplicirt man d. vorletzte Gl. mit F'' und addirt sie zur letzteren, so folgt:

$$(F' + F'')dz' = F''dz$$

also $$F'dz' = \frac{F'F''}{F'+F''}dz$$

und demnach: $$\mu A\sqrt{2gz}\,dt = -\frac{F'F''}{F'+F''}dz.$$

Wenn man hieraus dt entwickelt, so ist nun, um diejenige Zeit zu erhalten, binnen welcher

H2279. —

d. anfängliche Höhe h übergeht in 0, d. Integration zu erstrecken links von $t = 0$ bis $t = T$ und rechts von $z = 0$ bis $z = h$, dann findet man:

$$T = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{T' \cdot T''}{T' + T''} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

Bevor d. Integration ausgeführt werden kann, müssten T' u. T'' als Functionen von z ausgedrückt werden. Hiezu dienen d. Gl.:

$$z' - z'' = z \quad \text{und} \quad \int_{h'}^{z'} T' dz' + \int_{h''}^{z''} T'' dz'' = 0,$$

mit denen z' u. z'' durch z, h' u. h'' ausgedrückt werden können. d. Integration obiger Gl. wird aber gewöhnlich so umständlich, daß man sich mit einem Näherungswerth begnügen muß. Nur wenn d. Querschnitte constant sind, wie bei Schleusenkammern, kann man d. Factor $\frac{T'T''}{T'+T''}$ herausnehmen und erhält dann:

$$T = \frac{2}{\mu A\sqrt{2g}} \frac{T'T''}{T'+T''}\sqrt{h} = \frac{1}{\mu A}\frac{T'T''}{T'+T''}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

dieser Ausdruck unterscheidet sich von d. Formel für d. Ausflußzeit d. Wassers aus einfachen prismatischen Gefäßen nur dadurch, daß an Stelle d. constanten Horizontalschnitts hier d. halbe harmonische Mittel d. constanten Querschnitte beider Gefäße getreten ist. Unter d. harmonischen Mittel verschiedener Größen versteht man nämlich d. Größe, deren reciproker Werth = d. arithmetischen Mittel aus d. reciproken Werthen aller einzelnen Größen ist, also z. B.:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots\ldots \frac{1}{a_n}\right).$$

Es ist also d. harmonische Mittel aus 2 Größen a_1 u. a_2 folgendermaßen zu bestimmen.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \quad \text{also} \quad a = 2\,\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}.$$

Soll wieder d. Zeit t berechnet werden, binnen welcher d. anfängliche Niveaudifferenz h_0 übergeht in h, so hat man $t = T_0 - T$ zu setzen also:

$$t = \frac{1}{\mu A}\frac{T'T''}{T'+T''}\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$$

Diese Formel ist namentlich d. von T wegen wichtig in Anwendung bei d. Entleeren und Füllen von Schleusenkammern; hierbei können dreierlei Fragen vorkommen, wenn ein Schwimmen eine doppelte Schleuse gegeben ist mit 2 Kammern.

nämlich 1) wenn d. obere Schleusenkammer gegen d. Oberwasser abgesperrt ist und d. untere gegen d. Unterwasser, dann dient diese Formel zur Berechnung d. Zeit, binnen welcher d. Höhendifferenz in beiden Kammern = 0 ist.

2) wenn d. untere Kammer gegen d. obere abgesperrt ist, hier aber d. Wasser schon steht wie d. Unterwasserspiegel u. nur d. Schützen an unteren geöffnet werden, so handelt es sich um d. Berechnung d. Zeit, in welcher sich d. Wasserstand in d. untersten Kammer bis zum Unterwasserstand vermindert hat; letzterer ist aber constant, so daß $T'' = \infty$ gesetzt werden kann und demnach ist: $T = \frac{T'}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

3) kann es d. Fall sein, daß d. Zeit berechnet werden soll, binnen welcher d. obere Schleusenkammer, wenn sie gegen d. untere abgesperrt ist, sich bis zum Oberwasserspiegel füllen würde; zu d. Zweck hat man $T' = \infty$ zu setzen u. es wird dann: $T = \frac{T''}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}$, es tritt also nur T'' an Stelle von T'.

Es kann nun ein weiterer complicirter Fall vorkommen, wo sowohl aus ein Gefäß, durch welches Wasser abfließt, zum einen ganz geringen Zufluß hat, d. aber nicht beständig = d. Abfluß an d. Mündung ist. Es sei ein Gefäß gegeben, welches einen constanten Wasserzufluß hat und zwar fließe p. Sek. ein Wasservolumen V ein. Es fließe andererseits durch eine Öffnung Wasser aus d. Gefäße ab. Anfangs sei d. Wasserstand im Gefäß = h_0

und es frägt sich, in welcher Zeit wird sich diese anfängliche Höhe h_0 ändern in h. Ist irgend einem Augenblick bei z d. Höhe d. Wasserspiegels im Gefäß über d. Schwerpunkt d. Mündung oder über d. Unterwasserspiegel. Bliebe diese Höhe z eine Sekunde hindurch unverändert, so würde ein Wasservolumen ausfließen $= \mu A\sqrt{2gz}$; weil aber gleichzeitig d. Wasservolumen V in d. Gefäß hineinfließt, so würde d. Wasserverlust $= \mu A\sqrt{2gz} - V$ sein; ein negativer Werth dieses Verhältnisses würde einem Zuwachs entsprechen. Wenn diese Annahme auch thatsächlich nie eintrifft, so kann man doch annehmen, es bleibe dieser Zustand während eines Zeitelements dt constant, dann erhalten wir d. Wasserverlust in diesem Zeitelement: $(\mu A\sqrt{2gz} - V)\,dt$. Ist nun δ d. Flächeninhalt d. Querschnitts d. Gefäßes in d. Höhe z, so ist d. entsprechende Wasservolumen auch hier $= \div\,\delta\,dz$, also:

$$(\mu A\sqrt{2gz} - V)\,dt = \div\,\delta\,dz.$$

Dividirt man hiermit dt, so muß man, um d. Zeit t zu erhalten, binnen welcher sich z von h_0 bis h ändert, d. Ausdruck rechts integriren von h_0 bis h; statt dessen kann man wieder wie früher integriren von h bis h_0 u. d. $\div$ Zeichen in $+$ verwandeln.

also:

$$t = \int_h^{h_0} \frac{\delta\,dz}{\mu A\sqrt{2gz} - V} = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}} \int_h^{h_0} \frac{\delta\,dz}{\sqrt{z} - \sqrt{k}}$$

wenn $\sqrt{k} = \dfrac{V}{\mu A\sqrt{2g}}$ ist; also $k = \dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{V}{\mu A}\right)^2$.

folglich ist k d. Geschw.-Höhe, welche d. mittleren Geschw. entspricht, vermöge welcher V durch d. Querschnitt μA hindurchfließen würde; es ist also k eine Constante.

Ist δ constant, so ist:

$$t = \frac{\delta}{\mu A}\sqrt{\frac{2}{g}} \int_h^{h_0} \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z} - \sqrt{k}}$$

Nun ist:

$$\frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z} - \sqrt{k}} = \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}} + \sqrt{k}\,\frac{\frac{1}{2}dz\,\sqrt{z}}{\sqrt{z} - \sqrt{k}} = d\sqrt{z} + \sqrt{k}\,d\left[l(\sqrt{z} - \sqrt{k})\right]$$

also:

$$t = \frac{\delta}{\mu A}\sqrt{\frac{2}{g}}\left\{\sqrt{h_0} - \sqrt{h} + \sqrt{k}\,l\left(\frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h}}{\sqrt{h} - \sqrt{k}}\right)\right.\,.$$

Wäre $h = k$, so müßte $t = \infty$ sein d.h.: es nähert sich d. Höhe d. Wasserspiegels asymptotisch d. Größe k. Diese Annäherung kann mit steigendem od. mit sinkendem Wasserspiegel hergestellt werden, je nachdem diese Grenze erreicht wird, dann aber ändert sich d. ganze Zustand d. Wassers eines permanenten Laufs. Setzt man $V = 0$, so muß man wieder auf eine bekannte Formel kommen, dies ist auch thatsächlich d. Fall, denn für $V = 0$ ist auch $k = 0$, also d. ganze letzte Glied $= 0$.