Wärmetheorie & Hydraulik

Pieper, Andreas

Karlruhe, 1872/73

Ueberhitzer Dampf

urn:nbn:de:bsz:31-279864

Ueberhitzter Dampf.

Wie schon früher erwähnt sind d. bekanntesten Zustände d. Gasförmigen und d. gesättigten Dampfes Grenzzustände d. überhitzten Dampfes, unter denen ersterem eine unendlich große und letzterem eine verschwindend kleine Ueberhitzung entspricht. In der That sind in den technischen Anwendungen d. in Gebrauch kommenden Dämpfe meistens immer mehr od. weniger überhitzt, sodaß natürlich auch von besonderer Wichtigkeit ist d. Verhalten überhitzter Dämpfe allgemein zu untersuchen. Um diese Untersuchung unter beliebig gegebenen Umständen etc. mit Hülfe d. allgemeinen Formeln d. mechanischen Wärmetheorie ausführen zu können muß man natürlich d. Zustandsgleichung d. Dampfes kennen, d.h. d. Beziehung zwischen d. spec. Volumen v, d. Pressung p und d. Temperatur t resp. absoluten Temperatur $T = 273 + t$. Jedenfalls muß diese Beziehung, wenn sie allgemein für den ganzen Umfang d. Zustandsgebietes vom Zustand d. Sättigung bis zu entgegengesetzten Grenzzustand d. Gaszustands gelten soll, so derartig beschaffen sein, daß sie in den beiden Grenzzuständen in d. schon bekannten Beziehungen zwischen v p u. t resp. T übergeht.

Um diese allgemeine Zustandsgleichung für überhitzte Dämpfe aufzustellen muß man sich nun erst nach den zu Gebote stehenden versuchsweise gefundenen Grundlagen umsehen. Die erfahrungsmäßigen Thatsachen betreffen zunächst d. Sinn, in welchem d. überhitzten Dämpfe mehr od. weniger von d. Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze abweichen, welche indessen bezeigt, namentlich von Regnault, zugleich sich auch nur für solche Zustände näher untersucht worden sind, welche d. Grenzzustand d. Sättigung nicht nahe kommen. Um nun diese Art d. Abweichung d. Dampfes von den sogenannten beiden Gesetzen bestimmt, so sei

$p_0\, v_0\, t_0$ d. Pressung, d. spec. Volumen und d. Temperatur eines Dampfes für irgend einen Zustand
und $p_1\, v_1\, t_1$ " " " " " " " " " " eines andern —;

setzt man nun:

$$m = \frac{v_1}{v_0} \quad \text{für } t_1 > t_0 \text{ und } p_1 = p_0$$

$$m_1 = \frac{p_1}{p_0} \quad \text{für } t_1 > t_0 \text{ und } v_1 = v_0$$

$$n = \frac{p_1 v_1}{p_0 v_0} \quad \text{für } t_1 = t_0 \text{ und } v_1 > v_0 \text{ also } p_1 < p_0$$

so sollte, wenn d. Dampf nach dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze folgen sollte, sein:

$$m_0 = m_1 = \frac{T_1}{T_0} \quad \text{und} \quad n = 1$$

und zwar unter allen Umständen, denn wenn die Dämpfe d. beiden Gesetzen vollkommen folgen sollen, so müßte auch ihre Zustandsgleichung ganz dieselbe sein wie diejenige für Gase, welche bekanntlich war:

$$pv = RT$$ unter R eine Constante verstanden.

Es müßte also d. Beziehung stattfinden:

$$\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0} = \frac{T_1}{T_0}$$ daraus ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } p_1 = p_0 & \dfrac{v_1}{v_0} = m = \dfrac{T_1}{T_0} \\ \text{für } v_1 = v_0 & \dfrac{p_1}{p_0} = m_1 = \dfrac{T_1}{T_0} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{und für } t_1 = t_0 \text{ also } T_1 = T_0 \\ \dfrac{p_1 v_1}{p_0 v_0} = n = 1. \end{array}$$

In Wirklichkeit ergeben aber d. Versuche von Regnault, daß dies Verhältniß nicht d. Fall ist, indem schon solche luftförmige Körper, welche man gewöhnlich ihrem Verhalten nach zu den Gasen zählt, schon beträchtliche zeigten von sogenannten Dämpfen. Es fand sich nämlich, daß m und m_1 immer $> \frac{\delta_1}{\delta_0}$ und auch auch $m > m_1$ sich ergab:

$$m > m_1 > \frac{\delta_1}{\delta_0}$$

und zwar fanden diese Ungleichheiten um so mehr statt, je größer p_0 ist, bei übrigens gleichen gegebenen Werthen von t_0 und t_1, indem d. Versuche, aus denen diese Resultate gezogen sind, sich immer auf 2 bestimmte Temperaturen, nämlich $t_0 = 0°$ und $t_1 = 100°C$ beziehen.

Ferner ergab sich, daß d. Verhältniß u nicht immer $= 1$ sondern daß u stets mehr od. weniger > 1 und zwar um so mehr je größer p_0 und je größer $p_0 - p_1$ waren. Die Abweichungen d. Dämpfe von den beiden festgesetzten Gesetzen finden also in einem um so größeren Maaßstabe statt, je größer d. Spannung wird und je mehr sich d. Dämpfe dem gesättigten Zustand nähern.

Durch d. angeführten Versuche war auch noch Wasserdampf, welcher für uns von besonderer Wichtigkeit ist, ausgeschlossen, so daß man auch die hieraus erhaltenen Angaben noch nicht als Grundlage für d. Ableitung allgemeiner Formeln verwenden kann. Zwar haben verschiedene Experimentatoren Versuche angestellt über Dämpfe und speziell d. überhitzten Wasserdampf, allein die Angaben, welche früher von den betreffenden Physikern gemacht sind, sind durchaus nicht zutrauenerweckend, indem dieselben sich in hohem Grade widersprechen.

Andere Versuche zur Aufstellung d. allgemeinen Zustandsgleichung für Dämpfe sind hinsichtlich d. spec. Wärme c_p bei constantem Druck angestellt worden und namentlich wurde von Regnault diese Größe c_p für eine große Zahl von Dämpfen bestimmt. Ob und nach welchem Gesetze aber diese Größe c_p mit dem Zustand d. betreffenden Dampfes sich ändert, ist freilich mit Sicherheit noch nicht aufgeklärt. Am wichtigsten wird es natürlich sein dieses Verhalten für den technisch wichtigsten Wasserdampf zu untersuchen. Allerdings ist die spec. Wärme c_p bei constantem Druck für Wasserdampf auch für verschiedene Temperaturen ermittelt worden, so daß man mit ziemlicher Genauigkeit einen Mittelwerth für c_p ableiten kann. So hatte Regnault früher als Mittelwerth für c_p gefunden: $c_p = 0{,}475$.

Nach späteren Versuchen fand er aber im Mittel: $c_p = 0{,}4805$ für $t = 128° - 216°C$.

Vorläufig kann in dieser Beziehung nichts weiter festgestellt werden, als daß dieser Werth immer nur ein Mittelwerth für d. spec. Wärme c_p bei constantem Druck ist, wie sich diese aber mit d. Änderung d. Zustandes d. Wasserdampfes ändert, muß noch dahin gestellt bleiben, indem die von Regnault angenommenen Temperaturintervalle, aus denen er den Mittelwerth 0,4805 fand, zu wenig unter sich verschieden sind, als daß diese Versuche über eine etwaige Veränderlichkeit d. spec. Wärme c_p d. Wasserdampfes mit d. Grade seiner Überhitzung irgend einen Aufschluß geben könnten.

Weiteres über d. Verhalten d. Wasserdampfes liegen ferner genauere besonders erhaltene Versuchsreihen von Hirn in Cassel zu Grunde. Derselbe bestimmte nämlich d. spec. Volumen v d. Wasserdampfes direkt durch Wägungen und zwar für verschiedene Spannungen p und Temperaturen t, welche Resultate i. Jahrgang 1867 zusammengestellt sind. Einen erheblich großen Werth können den durch Wägungen gefundenen Größen d. spec. Volumens v freilich auch nicht beilegen, indem d. sorgfältigsten Wägungen sehr schwierig zu beschaffen sind und dann zugleich keine Menge Versuchsfehler damit verbunden sein können.

Einen weit größeren Werth haben jedenfalls d. späteren in Gemeinschaft mit Cazin von Hirn angestellten Versuche und deren Resultate. Diese letzten Versuche, welche später besonders zu Grunde gelegt werden sollen, um d. allgemeine Zustandsgleichung d. Dämpfe zu bestimmen, beziehen sich auf d. Zustandsänderungen von Dämpfen und speciell überhitzten Dämpfen, nach adiabatischer Curve d. h. ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme, welche Zustandsänderungen wie schon früher erwähnt von besonders technischer Wichtigkeit sind.

Diese Versuche stellten sich d. Aufgabe d. Beziehung zu finden welche zwischen d. Temperatur t_1 und Spannung p_1 in einem Anfangszustand und zwischen d. Spannung p_2 und Temperatur t_2 in einem Endzustand d. fraglichen Zustandsänderung nach adiabatischer Curve stattfinden. Die Resultate wurden in folgender Tabelle zusammengestellt:

Als Behälter zur Aufnahme d. Versuchsdampfes wurden bei diesen Versuchen auch cylindrische Gefäße von Kupfer genommen, dessen ebenfalls kupferne Böden in d. Mitte mit Öffnungen versehen waren, die jedoch mittelst Stöpseln geschlossen wurden, so daß man zur [illegible] im Innern d. Gefäßes [illegible] d. Versuchs [illegible] [illegible]. Dieser kupferne Cylinder wurde nun mit einem [illegible] Dampfkessel in Verbindung gesetzt, mit welchem man Dampf von bekannter Spannung in d. Gefäß [illegible]. Dieser Dampf wurde nun auf eine gewisse Temperatur [illegible] d. Gefäß in ein Ölbad von d. [illegible] Temperatur gebracht wurde, [illegible] d. Gefäßes und [illegible] d. Dampfes [illegible]. Angenommen es sei nun in irgend einem Augenblick d. Temperatur t_1 und d. Spannung p_1 d. im Gefäß befindlichen Dampfes, welche Größen man mit Hülfe eines im Ölbad [illegible] Thermometers und eines mit d. Gefäß verbundenen Manometers bestimmen kann, [illegible] d. Communication mit d. Dampfkessel geschlossen und dafür eine [illegible] Öffnung d. Gefäßes [illegible] Dampf [illegible]. Die Öffnung [illegible] geschlossen werden, damit d. Ausströmen [illegible] nur eine kurze Zeit [illegible] d. Spannung p_1 im Innern d. Gefäßes bis auf d. [illegible] Spannung p_2 [illegible]. [illegible] die Öffnung wieder geschlossen. [illegible] Zusammendrückung [illegible] Zusammendrückung [illegible] d. [illegible] Öffnens und Ausströmens nur eine [illegible] vom Ölbad durch d. Gefäßwandungen [illegible] also d. Dampf [illegible] werden kann.

Es kam nun noch darauf an d. Temperatur t_2 im Sättigungspunkt zu ermitteln unmittelbar nach d. Öffnung und d. Ausströmen d. Dampfes, [illegible] d. Spannung [illegible] Spannung p_2 gesunken war, um dann 2 zusammengehörende Werthe von p und t zu bekommen. Mittelst d. im Ölbad befindlichen Thermometers [illegible] d. Gefäß [illegible] Thermometers ist dies natürlich nicht zu erreichen, indem [illegible] d. Temperaturänderung folgt. Wenn man es aber so einrichtet, daß d. überhitzte Dampf nach dem Ausströmen im Gefäße gerade in d. Zustand d. Sättigung übergegangen [illegible], so konnte man d. Temperatur t_2 im Sättigungspunkt leicht bestimmen, indem [illegible] zwischen Temperatur und Spannung [illegible] Dampfes d. Temperatur [illegible] Spannung [illegible] p_2 d. Dampfes [illegible] d. Manometers [illegible] Temperatur t_2 [illegible] Tabellen [illegible].
Diese Methode wurde auch von Hirn und Cazin angewendet. [illegible] Versuchen, [illegible] Anfangstemperatur t_1 [illegible] Temperatur d. Ölbades entsprechend, wurde [illegible] d. anfängliche Spannung p_1 [illegible] bis der nach d. Ausströmung zurückbleibende Dampf gerade gesättigt war, [illegible] Anfangsspannung, [illegible] im Innern d. Gefäßes zeigten, [illegible] Anfangsspannung d. Gefäß vollkommen durchsichtig blieb. Diese Versuche hat man nun für verschiedene Temperaturen und Spannungen oftmals wiederholt und damit d. entsprechenden Werthe von p_1 t_1 p_2 t_2 bekommen, wie sie in Tabelle 37 zusammengestellt sind.

Wenn man die vorliegenden 10 Gruppen von zusammengehörenden Werthen von p_1 t_1 p_2 t_2 mit einander vergleicht, so findet man, daß dieselben sämtlich genau folgendem Gesetz entsprechen:

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^x$$

, denn wenn man nämlich d. Exponenten x entsprechend d. 10 Gruppen berechnet, so ergeben sich für x in allen 10 Fällen nahezu ganz gleiche Resultate, wenigstens sind dieselben nur so wenig verschieden, daß man d. [illegible] Unterschiede den Versuchsfehlern zuschreiben kann. Es ergibt sich nämlich $x = 0,233 - 0,237$ zwischen welchen Werthen x in 9 Fällen hin und her schwankt und nur in einem Fall wird d. Grenze 0,237 erheblich überschritten nämlich für $p_1 = 1,685$ Atm wird $x = 0,2457$. Im Mittel stellt sich x heraus $= 0,236$ ungefähr.

Mit Rücksicht darauf aber, daß bei den praktischen Versuchen die dem expandierenden Dampfe mitgetheilte Wärme Q nicht genau = 0 gehalten werden konnte, wenn auch sehr klein war, indem während der Ausströmungszeit demselben eine kl. Wärmemenge hinzukommt, so ist t_1 etwas kleiner als es im Falle Q = 0 unter übrigens gleichen Umständen (bei denselben Werthen von p_1 und p_2) hätte sein müssen; also ist ϑ_1 etwas zu klein beobachtet, somit x etwas zu klein gefunden worden, und zwar um so mehr zu klein, je größer p_1 als t_1 war, je mehr Wärme also auch während der kleinen Ausströmungszeit [illegible] an den expandierenden Dampf, entsprechend der [illegible] von O bis $t_1 - t_2$ entsprechenden Temperaturdifferenz, mitgetheilt werden mußte. Man kann daher noch dem gefundenen x [illegible] mit p_1 [illegible] Werth beilegen.

Die hier mitgetheilten Beziehungen sind nur ein [illegible], weil man [illegible] überhitzten Dampfe [illegible] Wege gefunden hat, weil aber [illegible] nicht genügendes Material liefert, um mit Sicherheit die Zustandsgleichung des überhitzten Dampfes allgemein aufzustellen.

Diesen erfahrungsmäßigen Verhältnissen entsprechend kann man eine Menge Zustandsgleichungen aufstellen, deren Coefficienten dann den [illegible] angepaßt werden müssen. Bei der Bestimmung der Form der Zustandsgleichung kann man sich jedoch auch von gewissen Zweckmäßigkeitsgründen leiten lassen. Zunächst ist nämlich zu berücksichtigen, daß der Zustand eines Dampfes in der Praxis meistens durch seine Spannung und seine Temperatur gegeben ist, indem diese Größen mit Hilfe der Manometer und Thermometer leicht bestimmt werden können. Es wäre daher wünschenswerth, die Zustandsgleichung so einzurichten, daß man die unbekannten Größen, spez. Volumen etc. mit der gegebenen Spannung und Temperatur berechnen kann. Zweitens [illegible] kann man sich auch [illegible] leiten lassen, daß die [illegible] Zustandsänderungen [illegible] nach der adiabatischen Curve, also ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme [illegible], [illegible] die Zustandsgleichung eine solche Form zu geben, daß [illegible] die Gleichung der adiabatischen Curve eine möglichst einfache Gestalt annimmt.

Übrigens muss die Zustandsgleichung auch eine solche Form haben, welche den allgemeinen Formeln der mechanischen Wärmetheorie entsprechen. Diese Formeln bestehen nämlich aus 3 Ausdrücken für die Wärmemenge dQ, welche einem Körper pr. 1 kg behufs einer unendlich kleinen Zustandsänderung mitgetheilt werden muß, nämlich:

1 .... $$dQ = c_p \frac{d\vartheta}{dv} dv + c_v \frac{d\vartheta}{dp} dp$$

2 .... $$dQ = c_v d\vartheta + A\vartheta \frac{dp}{d\vartheta} dv$$

3 .... $$dQ = c_p d\vartheta - A\vartheta \frac{dv}{d\vartheta} dp$$

Welche Gleichungen zur Bestimmung von dQ [illegible] werden, je nachdem die Zustandsänderung durch unendlich kl. Änderungen von v u. p, v u. t resp. ϑ, p u. t resp. ϑ gegeben ist.

c_p und c_v bedeuten darin die spez. Wärme bei constanter Spannung resp. bei constantem Volumen;

A = Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit und ϑ = absolute Temperatur = 273 + t.

Außer diesen wurden früher noch 2 allgemeine Bedingungen zwischen den Größen p v u. t aufgestellt, welche mit dem Namen der beiden Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie bezeichnet wurden, nämlich:

4 .... $$A = \frac{d}{dp}\left(c_p \frac{d\vartheta}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(c_v \frac{d\vartheta}{dp}\right)$$

5 .... $$A\vartheta = (c_p - c_v) \frac{d\vartheta}{dv} \frac{d\vartheta}{dp}$$

Es ist also nun die Aufgabe, die Zustandsgleichung des Dampfes so zu entwickeln, daß sie diesen allgemeinen Formeln Rechnung trägt, dann aber auch den allgemein bekannten erfahrungsmäßigen Verhältnissen entspricht und außerdem noch die erwähnten Zweckmäßigkeitsgründe berücksichtigt.

Hiermit sind nun bereits 2 zur Geltung gekommene Zustandsgleichungen überhitzter Dämpfe entwickelt, wenn die eine zusammenfällt mit jener der überhitzten [illegible] Zustand eines Gases [illegible] Dämpfe [illegible] bereits [illegible] überhitzte [illegible] Zustand der Sättigung [illegible] Dämpfe [illegible].

Was die erste betrifft, so [illegible] Zustandsgleichung eines Gases: $pv = R\vartheta$ als Grenzfall enthalten sein; es liegt daher nahe sie [illegible] auf die allgemeinere Form:

$PV = R\vartheta$ zu bringen, unter R und ϑ Constante verstanden und zwar $\vartheta = 273 + t$ = absolute Temperatur, während P eine solche Function von p ist, welche [illegible] mit abnehmendem p sich der Grenze p nähert und V eine solche Function von v, dass mit wachsendem v V schließlich die Grenze v erreicht.

In der That findet man, dass diese allgemeine Form der Formel entspricht:

$$\frac{p(v+a)}{1+bp} = R\vartheta$$

welche bei passender [illegible] Bestimmung der Constanten a, b und R, ganz gut als Zustandsgleichung solcher überhitzter Dämpfe aufgestellt werden kann, welche möglichst weit von dem Zustande der Sättigung entfernt sind.

Für die technischen Anwendungen [illegible] bereits [illegible] eine Zustandsgleichung zu gewinnen, welche [illegible] Sättigungszustand der Dämpfe [illegible] der überhitzten Dämpfe [illegible].

Zu dieser [illegible] kann man auch eine Zustandsgleichung auf Grund der [illegible] von Hirn und Cazin [illegible]. Nach Hirn und Cazin [illegible] die absolute Temperatur [illegible] Zustandsänderung nach [illegible] adiabatischen Curve [illegible] Potenz des Druckes.

Wenn man dieses Gesetz als allgemein gültig für ~~alle~~ Dämpfe überhaupt annimmt, [illegible] dass die Zustandsgleichung der Dämpfe eine [illegible] Form wie die Zustandsgleichung der Gase [illegible] bei der Zustandsänderung nach der adiabatischen Curve [illegible] die absolute Temperatur proportional einer [illegible] Potenz des Druckes [illegible].

Unter der Annahme, dass

$$d\theta = 0$$

kann man als Zustandsgleichung der Dämpfe annehmen:

$$\vartheta = a p^{\text{Exponent}}$$

Da nun diese Zustandsgleichung bereits gilt für Dämpfe in der Nähe des Sättigungszustandes, wenn die Zustandsänderung nach adiabatischer Curve [illegible] in [illegible] Übereinstimmung mit der Zustandsgleichung der Gase zu bringen, ist der Exponent $= \frac{n-1}{n}$ gesetzt, also:

$$\vartheta = a p^{\frac{n-1}{n}}$$

~~[illegible]~~ [illegible] zu bestimmende Constante ebenso wie a bedeutet, während unter n ganz so wie früher das Verhältnis der spec. Wärmen bei constantem Druck und constantem Volumen $= \frac{c_p}{c_v}$ verstanden werden soll. Bei überhitzten Dämpfen [illegible] Verhältnis $\frac{c_p}{c_v}$ nicht wie bei Gasen einen constanten Werth [illegible] n [illegible] Grenzwerth [illegible] Verhältnis $\frac{c_p}{c_v}$ mit fortschreitender [illegible] Grenzzustand [illegible]. Allgemein kann daher für überhitzte Dämpfe n verschiedene Werthe haben.

Durch Differentiation der obigen Gleichung erhält man:

$$\frac{d\vartheta}{dp} = a\frac{n-1}{n} p^{\frac{n-1}{n}-1} = a\frac{n-1}{n}\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{p} = \frac{n-1}{n}\frac{\vartheta}{p}$$

Für diesen Differentialquotienten kann man aber auch auf Grund der [illegible] Formeln der Wärmetheorie mit $dQ = 0$ [illegible] einen anderen Werth ableiten. Nach Gl. 3. Seite 126 ergibt sich nämlich mit $dQ = 0$:

$$\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{A\vartheta}{C_p}\,\frac{dv}{d\vartheta}$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke von $\frac{d\vartheta}{dp}$ einander gleich, so erhalten wir:

$$\frac{n-1}{n}\,\frac{\vartheta}{p} = \frac{A\vartheta}{C_p}\,\frac{dv}{d\vartheta}$$ und somit, da [illegible] $\frac{1}{\frac{dv}{d\vartheta}} = \frac{d\vartheta}{dv}$ setzen kann:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \frac{n}{n-1}\,\frac{Ap}{C_p}$$

[illegible] auf die beiden Gleichungen [illegible] zurückgreifen [illegible]. Setzen wir den oben gefundenen Werth von $\frac{d\vartheta}{dv}$ in Gleichung 4 ein, so erhalten wir:

$$A = \frac{d}{dp}\left(C_p\,\frac{n}{n-1}\,\frac{Ap}{C_p}\right) - \frac{d}{dv}\left(C_v\,\frac{d\vartheta}{dp}\right)$$

$$A = \frac{n}{n-1}A - \frac{d}{dv}\left(C_v\,\frac{d\vartheta}{dp}\right)$$

$$\text{oder}\quad \frac{d}{dv}\left(C_v\,\frac{d\vartheta}{dp}\right) = \frac{A}{n-1} = \text{const}$$

und hieraus durch Integration:

$$C_v\,\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{A}{n-1}\,v + \text{Const}$$

Diese Constante [illegible], welches wie bei der Integration nach v [illegible], [illegible] eine Function von p [illegible] v [illegible] p [illegible]. Setzen wir die Integrationsconstante $= \vartheta(p)$, so erhalten wir:

$$C_v\cdot\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{A}{n-1}\,v + \vartheta(p)$$

[illegible] $C_v\,\frac{d\vartheta}{dp}$ [illegible] Gleichung 5 [illegible] Werth [illegible] $A\vartheta$ [illegible], so ergibt sich [illegible] den oben gefundenen Werthe von $\frac{d\vartheta}{dv}$ einsetzt:

$$A\vartheta = (C_p - C_v)\,\frac{n}{n-1}\,\frac{Ap}{C_p}\,\frac{d\vartheta}{dp}$$

und hieraus:

$$C_v\,\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{n-1}{n}\,\frac{C_p C_v}{C_p - C_v}\,\frac{\vartheta}{p}$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke von $C_v\,\frac{d\vartheta}{dp}$ erhält man nun eine [illegible] Zustandsgleichung, [illegible] Rücksicht [illegible] [illegible] der allgemeinen [illegible] mechanischen Wärmetheorie [illegible] der [illegible] Rechnung [illegible]. Man erhält nämlich:

$$\frac{n-1}{n}\,\frac{C_p C_v}{C_p - C_v}\,\frac{\vartheta}{p} = \frac{A}{n-1}\,v + \vartheta(p)$$ oder durch Multiplication mit $\frac{n-1}{A}\,p$:

$$\frac{(n-1)^2}{n}\cdot\frac{1}{A}\,\frac{C_p C_v}{C_p - C_v}\,\vartheta = pv + \frac{n-1}{A}\,p\,\vartheta(p)$$

$$= pv + \vartheta_1(p)$$ wenn $\frac{n-1}{A}\,p\,\vartheta(p) = \vartheta_1(p)$

Es fragt sich nun noch, welche Werthe der unbekannten Function ϑ_1 beizulegen sind. Diese Frage kann beantwortet unbedingte Forderung, daß die gefundene Zustandsgleichung der überhitzten Dämpfe in die bekannte Zustandsgleichung der Gase übergehen muß, wenn der überhitzte Dampf sich mehr und mehr dem Gaszustande nähert. Bei dem Grenzzustand eines Gases ist bekanntlich: $\frac{c_p}{c_v} = \varkappa$ und ferner $c_p - c_v = AR$ welche Beziehungen bei der betreffenden Gastheorie entwickelt wurden, während die Zustandsgleichung der Gase war: $RT = pv$.

Es frägt sich also, wann der mit dem entsprechenden Coefficient in R übergeht, falls man in den Grenzzustand eines Gases kommt.

Multiplicirt man die linke Seite in Zähler und Nenner mit c_v, setzt dann $\frac{c_p}{c_v} = \varkappa$ od. $c_p = \varkappa c_v$, so bekommt man:

$$\frac{(\varkappa-1)^2}{\varkappa} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\varkappa c_v}{\varkappa-1} = \frac{(\varkappa-1)c_v}{A} = \frac{\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)c_v}{A}$$

$$= \frac{c_p - c_v}{A} = \frac{AR}{A} = R.$$

Die Zustandsgleichung der Dämpfe nimmt also im Grenzzustande die Form an:

$$RT = pv + T_1(p)$$

es soll für ihn die Form haben $RT = pv$, woraus folgt, daß die Function $T_1(p) = \frac{\varkappa-1}{A} p\, \vartheta(p)$ nothwendig $= 0$ sein muß, wenn die gefundene Zustandsgleichung der überhitzten Dämpfe als Grenzfall die Zustandsgleichung der Gase enthalten soll. Wenn aber $T_1(p) = 0$ ist, so ist auch $\vartheta(p) = 0$ indem die beiden Functionen sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Die Zustandsgleichung überhitzter Dämpfe entwickelt sich also aus den früher ebenso entwickelten Gleichungen:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{1}{\varkappa-1} \frac{A}{c_v} v$$

$$\text{und} \quad \frac{(\varkappa-1)^2}{\varkappa} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{c_p c_v}{c_p - c_v} T = pv$$

Als Resultat hat sich folgendes ergeben:
Die gefundene Zustandsgleichung überhitzter Dämpfe bildet eine Beziehung der Größen p v und T und es enthält noch die Wärmen c_p und c_v in bestimmter Beziehung zu constanten Werthen, daß also eine allgemeine Beziehung zwischen den den Wärmezustand charakterisirenden Elementen und den spec. Wärmen, welche letzteren mit den Größen p v u. T durch die gefundenen Differentialgleichungen verbunden sind:

$$\frac{dT}{dv} = \frac{\varkappa}{\varkappa-1} \frac{A}{c_p} p \quad \text{und} \quad \frac{dT}{dp} = \frac{1}{\varkappa-1} \frac{A}{c_v} v \quad — \alpha.$$

Die Zustandsgleichung kann man auch schreiben:

$$\frac{(\varkappa-1)^2}{\varkappa} \frac{T}{pv} = \frac{A(c_p - c_v)}{c_p c_v} = \frac{A}{c_v} - \frac{A}{c_p}$$

Mit Hilfe der eben angeschriebenen beiden Gleichungen kann man nun auch c_p und c_v eliminiren und somit die Zustandsgleichung in einer partiellen Differentialgleichung bekommen, es ist nämlich nach Gleich. α

$$\frac{A}{c_v} = \frac{\varkappa-1}{v} \frac{dT}{dp} \quad \text{und} \quad \frac{A}{c_p} = \frac{\varkappa-1}{\varkappa} \frac{1}{p} \frac{dT}{dv}$$

setzt die Zustandsgleichung:

$$\frac{A}{c_v} - \frac{A}{c_p} = \frac{\varkappa-1}{v} \frac{dT}{dp} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa} \frac{1}{p} \frac{dT}{dv} = \frac{(\varkappa-1)^2}{\varkappa} \frac{T}{pv} \quad \text{od. durch}$$

Multipliciren mit $\frac{pv\varkappa}{(\varkappa-1)^2}$:

$$T = \frac{\varkappa}{\varkappa-1} p \frac{dT}{dp} - \frac{1}{\varkappa-1} v \frac{dT}{dv}$$

Diese Gleichung ist nun eine partielle Differential-Gleichung zwischen p v und ϑ nach t, während die ursprüngliche Zustandsgleichung d. einfache Integral derselben ist.
Nach d. Regeln d. Integralrechnung findet man, daß d. Integral dieser Differentialgleichung von d. allgemeinen Form ist:

$$\varphi(x,y)=0$$

unter φ eine ganz beliebige Function verstanden, während d. unbekannten x u. y bedeuten:

$$x=\vartheta v^{n-1}$$

und

$$y=\frac{\vartheta}{p^{\frac{n-1}{n}}}$$

Es läßt sich diese Behauptung folgendermaßen beweisen:
differenziirt man zunächst $\varphi(x\,y)$ nach v, so hat man da v eine mittelbare Function von x und y ist:

$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{dv}+\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{dv}=0$$

und durch differentiiren nach p, welche ebenfalls eine mittelbare Function von x und y ist:

$$\frac{d\varphi}{dx}\,\frac{dx}{dp}+\frac{d\varphi}{dy}\,\frac{dy}{dp}=0$$

Zwischen diesen beiden Gleichungen kann man nun d. Differentiale von φ eliminiren, wenn man die erste Gleichung mit $\frac{dx}{dp}$ und d. 2te mit $\frac{dx}{dv}$ multiplicirt, dann d. 2te von d. ersten subtrahirt und schließlich durch $\frac{d\varphi}{dy}$ dividirt:

β $$\frac{dx}{dp}\cdot\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{dp}=0$$

Verschafft man nun unter x und y d. ursprünglichen Ausdrücke, so ist zunächst offenbar x eine unmittelbare Function von v und ϑ, indem v und ϑ sich ~~nicht~~ gegenseitig bedingen, also bekommt:

$$\frac{dx}{dv}=\vartheta(n-1)v^{n-2}+v^{n-1}\frac{d\vartheta}{dv}$$

Ebenso ist auch y eine Function von ϑ und p nämlich: $y=\vartheta p^{-\frac{n-1}{n}}$ und folglich:

$$\frac{dy}{dp}=-\vartheta\frac{n-1}{n}p^{-\frac{n-1}{n}-1}+p^{-\frac{n-1}{n}}\frac{d\vartheta}{dp}$$ weil ϑ eine Function von p.

Da v und p unabhängig Veränderliche sind, so folgt:

$$\frac{dx}{dp}=v^{n-1}\frac{d\vartheta}{dp}$$

und weil p umgekehrt keine Function von v ist, ϑ aber mit v schwankt:

$$\frac{dy}{dv}=p^{-\frac{n-1}{n}}\frac{d\vartheta}{dv}$$

Setzt man diese Werthe in d. obige Gleichung β ein, so erhält man:

$$v^{n-1}\frac{d\vartheta}{dp}\,p^{-\frac{n-1}{n}}\frac{d\vartheta}{dv}-\left(\vartheta(n-1)v^{n-2}+v^{n-1}\frac{d\vartheta}{dv}\right)\left(-\vartheta\frac{n-1}{n}p^{-\frac{n-1}{n}-1}+p^{-\frac{n-1}{n}}\frac{d\vartheta}{dp}\right)=0$$

oder:

$$+\vartheta\frac{(n-1)^2}{n}v^{n-2}p^{-\frac{n-1}{n}-1}+(n-1)v^{n-2}p^{-\frac{n-1}{n}}\frac{d\vartheta}{dp}-\frac{n-1}{n}v^{n-1}p^{-\frac{n-1}{n}-1}\frac{d\vartheta}{dv}=0$$

Dividirt man diese durch den mit ϑ verbundenen Factor, erhält man nun:

$$-\vartheta+\frac{n}{n-1}\,p\,\frac{d\vartheta}{dp}-\frac{1}{n-1}\,v\,\frac{d\vartheta}{dv}=0$$

diese Gleichung ist offenbar ganz dieselbe

Differentialgleichung, welche integrirt werden sollte um die Zustandsgleichung in endlicher Form zu bekommen. Die fragliche Differentialgleichung hat als wirkliches einfaches Integral:

$$\varphi(x, y) = 0,$$ wenn φ eine ganz beliebige Function sein kann und unter x und y die angegebenen Ausdrücke verstanden.

Hiemit ist nun zwar die Zustandsgleichung der Körper in einer allgemeinen endlichen Form gefunden, dieselbe enthält aber die Unbekannten Größen auf eine ganz willkürlich zu wählende Function φ und es wird daher zunächst besonders darauf ankommen die eigentliche Gestalt dieser Function näher zu bestimmen. Dies kann nur geschehen auf Grund weiterer Erfahrungen. Außer den schon angewandten erfahrungsmäßigen Thatsachen stehen aber weiter keine genügend und zuverlässig zu Gebote, so dass man, um φ bestimmen zu können, weitere Annahmen machen muß und dann nachher untersuchen ob die damit gezogenen Schlüsse mit anderweitigen Erfahrungsthatsachen übereinstimmen. Als besonders zweckmäßig erweisen sich in dieser Hinsicht 2 Annahmen:

1) Es sei die spec. Wärme C_p bei constantem ~~Volumen~~ Pressung unabhängig von v also eine bloße Function von p

2) Es sei die spec. Wärme C_v bei constantem Volumen unabhängig von der Pressung p und nur eine bloße Function von v.

Wenn man nun zunächst annimmt, daß C_p unabhängig von v und nur eine Function von p ist, so kann man die Gleichung:

$$\frac{dT}{dv} = \frac{n}{n-1}\frac{Ap}{C_p}$$ ohne Weiteres integriren, man erhält:

$$T = \frac{n}{n-1}\frac{A}{C_p}pv + Const$$, diese Integrationsconstante braucht natürlich keine Function von v zu sein, da ja nach Voraussetzung v constant sein, umgekehrt kann sie aber eine Function von p = $f(p)$ sein,

Also: $$T = \frac{n}{n-1}\frac{A}{C_p}pv + f(p).$$

Bezeichnet man nun mit: $R = \frac{n-1}{n}\frac{C_p}{A}$ und multiplicirt mit diesem Werthe die ganze Gleichung so erhält sich:

$$RT = pv + R f(p)$$

da nun C_p eine Function von p ist, so ist auch R eine Function von p, so dass man setzen kann:

$$R f(p) = S p^{\frac{n-1}{n}}$$ wenn S eine auf Grund der vorigen Voraussetzungen zu ermittelnde beliebige Function von p ist, so erhält man nach Substitution:

$$RT = pv + S p^{\frac{n-1}{n}}$$

Diese Zustandsgleichung, in welcher R und S nur bloße Functionen von p sind, muß man aber auch der allgemeinen Form der Zustandsgleichung:

$\varphi(x, y) = 0$ anpassen. Mit Rücksicht hierauf läßt sich dann leicht erkennen, daß R und S nicht nur bloße Functionen von p sind, sondern daß dieselben unveränderliche Größen sind. Denn dividirt man die Zustandsgleichung durch $p^{\frac{n-1}{n}}$ so läßt sich die Gleichung auch schreiben:

$$R\frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}} = p^{\frac{1}{n}}v + S$$

$$R\frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}} = \left(\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{T}\, T v^{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} + S$$

Hier ist aber $\frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}} = y$ und $Tv^{n-1} = x$, so daß die Gleichung auch geschrieben werden kann:

$$Ry = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n-1}{n}} + S$$

[illegible] $\varphi(x, y) = 0$ [illegible] x, y [illegible] R und S [illegible] constant [illegible]

[illegible] $= C_p$ [illegible]

$$R\vartheta = pv + S p^{\frac{n-1}{n}}$$

[illegible] R und S constante Größen sind; [illegible] $R = \frac{n-1}{n}\frac{C_p}{A}$ [illegible] n und A [illegible] constante [illegible]

[illegible] $C_p = f(p)$ [illegible] $C_p =$ constant [illegible].

[illegible] $C_p = f(p)$ [illegible]

[illegible] v, [illegible]

[illegible]: $R\vartheta = pv$.

[illegible] $\frac{C_p}{C_v} = n$ [illegible].

[illegible] Seite 129 ergibt sich:

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{(n-1)^2}{n}\,\frac{C_p}{A}\cdot\frac{\vartheta}{pv}$$

od. da $R = \frac{n-1}{n}\frac{C_p}{A}$:

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + (n-1)\,\frac{R\vartheta}{pv}$$

u. [illegible]:

$$\frac{R\vartheta}{pv} = 1 + S\,\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{pv} = 1 + \frac{S}{p^{\frac{1}{n}}v}, \text{ folgt:}$$

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + (n-1)\left(1 + \frac{S}{p^{\frac{1}{n}}v}\right) = n + \frac{(n-1)\,S}{p^{\frac{1}{n}}v}.$$

[illegible] v [illegible] $\frac{C_p}{C_v} = n$ [illegible] v. [illegible]:

$$\frac{C_p}{C_v} = n \text{ wird.}$$

[illegible] R und S [illegible].

[illegible] $C_p = 0{,}48$, [illegible] Regnault [illegible] Kgr [illegible] qm [illegible] 10333 [illegible] 10333 Kgr [illegible] qm $= 1$ Atm [illegible] R [illegible] $\frac{1}{A} = 424$:

$$R = \frac{0{,}48\cdot 424}{10333}\,\frac{n-1}{n} = 0{,}019696\,\frac{n-1}{n}$$

Mit Rücksicht auf die entwickelten Beziehungen zwischen d. Constanten R, n und S braucht man eigentlich nur 2 zu bestimmen, indem dann d. dritte durch jene [illegible] Gleichungen bestimmt ist.

Um zunächst n zu bestimmen kann man von d. Erwägung ausgehen, daß d. gefundene Zustandsgleichung d. Gesammtheit d. Zustandsänderungen d. Wasserdampfs und also auch d. Grenzzustand d. gesättigten Dampfes umfassen muß; indem nämlich d. Constanten für gesättigten Wasserdampf und damit auch d. zusammengehörenden Werthe von p v und Druck t [illegible] d. früheren Untersuchungen und den citirten Tabellen mit ziemlicher Genauigkeit bekannt sind, kann man d. [illegible] unbekannten Constanten verhältnißmäßig leicht berechnen, wenn man auf d. gefundene Zustandsgleichung auf Grenzzustand d. gesättigten Wasserdampfs bezieht.

Angenommen es seien $p_1\ v_1\ \vartheta_1$ zusammengehörende Werthe für irgend einen Zustand d. gesättigten Wasserdampfs
und $p_2\ v_2\ \vartheta_2$ " " " " irgend einen andern " " "
so sind diese ihren Zahlenwerthen nach bekannt durch d. früheren Tabellen. Setzt man diese Werthe in d. Zustandsgleichung ein, so erhält man:

$$R\vartheta_1 = p_1 v_1 + S p_1^{\frac{n-1}{n}}$$

$$R\vartheta_2 = p_2 v_2 + S p_2^{\frac{n-1}{n}}$$

und somit durch Eliminiren von S:

$$\frac{R\vartheta_1 - p_1 v_1}{R\vartheta_2 - p_2 v_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Setzt man nun d. Zahlenwerthe für $p_1\ v_1\ \vartheta_1$, $p_2\ v_2\ \vartheta_2$ ein und substituirt ferner für R d. oben gefundenen Werth:

$$R = 0{,}019696\ \frac{n-1}{n}$$

so erhält man schließlich eine Gleichung für $\frac{n-1}{n}$, welche freilich [illegible] und [illegible] durch Probiren gelöst werden kann.

Um d. Werth von $\frac{n-1}{n}$ möglichst genau abzuleiten hat natürlich anzunehmen d. Differenzen zwischen p_1 u. p_2, v_1 und v_2, ϑ_1 wie ϑ_2 möglichst groß zu nehmen. Die Ausführung d. Rechnung ergibt dann:

$$\frac{n-1}{n} = 0{,}249$$

Nach Versuchen von Hirn und Cazin findet sich bekanntlich als Mittel für $x = \frac{n-1}{n}$ [illegible]:
$x = 0{,}236$ entsprechend einer [illegible]
Curve, [illegible] der [illegible] Werth [illegible], daß dieser gefundene Werth [illegible] sei, [illegible] $\vartheta = 0$ [illegible] [illegible] d. [illegible] Gesetz [illegible] [illegible] Werth [illegible].

Um d. gefundenen Werth von $\frac{n-1}{n}$ etwas abzurunden kann man setzen:

$$\frac{n-1}{n} = 0{,}25 = \frac{1}{4} \text{ und also } n = \frac{4}{3}$$

und dem entsprechend:

$$R = 0{,}019696\ \frac{n-1}{n} = 0{,}019696 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}004924$$

Es bleibt also nur noch übrig d. Constante S zu bestimmen, natürlich auch für Wasserdampf.

Setzt man zu dem Ende die oben gefundenen Werthe für R und n in d. Zustandsgleichung und entwickelt nach derselben S, so erhält man:

$$S = (0{,}004924\ \vartheta - p v)\sqrt[4]{\frac{1}{p}}$$

[illegible] für 11 verschiedenen Zustände von gesättigtem Wasserdampf von Hirn d. zusammengehörenden Werthe von p v ϑ durch [illegible] bestimmt worden, [illegible]. Setzt man diese als bekannte Größen zusammengehörende Werthe von $p\ v\ \vartheta$ [illegible] ein, so erhält man 11 Werthe für S. Diese Werthe sind freilich ziemlich bedeutend verschieden, die Differenzen sind aber [illegible] Natur, [illegible]

dieselben nach d. Versuchs- und Interpolationsformeln zu berechnen hat.
Im Mittel ergibt sich demnach:

$$S = 0,1829$$

Sucht man aber mit d. Zustandsgleichung nach d. Grenzzustand d. Flüssigkeit, welche für entsprechend zusammengehörige Werthe von $p\,v\,\vartheta$ bekannt sind, genau bekannt sind, so kann man mit Hilfe derselben nicht bestimmt S nicht genau bestimmen, indem man nur zusammengehörige Werthe von $p\,v\,\vartheta$ aufstellt und damit S berechnet. Auf d. Weise stimmen die hieraus gewonnenen Resultate für S viel bedeutend besser überein. d. Mittelwerth ist:

$$S = 0,1877$$

Im Durchschnitt kann man also nach mit ziemlicher Genauigkeit annehmen:

$$S = 0,186.$$

Dieser Werth ist wahrscheinlich derjenige, welcher sich ergibt, wenn man Beobachtungen zu Grunde legt.

Damit kann man nun d. folgende Gleichung als d. Zustandsgleichung d. überhitzten Dampfes beibehalten, wenn man nur d. Werthe d. Constanten einsetzt. Also:

$$pv = 0,004924\,\vartheta - 0,186\sqrt[4]{p}$$

welche freilich vereinfacht werden muss bezüglich d. bestimmten R und S, daß d. Pressung p in Atm. ausgedrückt ist, während d. für n genommen wird. —

Diese Zustandsgleichung stellt sich ergeben aus Grund d. ganz willkürlichen Annahme, daß d. spec. Wärme c_p eine lineare Function von p sei, vorausgesetzt wird, daß dann auch c_p constant sein muß, während c_v eine Function d. d. Wärmezustand charakterisierenden Größen sein müßte.
Diesem Umstand zufolge kann man sich fragen, ob man nicht eine andere Annahme machen kann, welche eine Zustandsgleichung ergibt, die sich d. Erfahrungsresultaten nicht nur besser anschließt als d. früher gefundenen.
In dieser Hinsicht ist eine oft angestellte Annahme die, daß man d. spec. Wärme c_v bei constantem Volumen als eine lineare Function d. spec. Volumens v als unabhängig von d. Pressung p betrachtet, also

$$c_v = f(v)$$

Dieser Annahme entsprechend, bekommt man dann aus d. bekannten Formel:

$$\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{1}{n-1}\frac{A}{c_v}\,v$$ durch Integration sofort:

$$\vartheta = \frac{1}{n-1}\frac{A}{c_v}\,pv + \text{Const.}$$

Da diese Integrationsconstante nur in Bezug auf p constant zu sein braucht, so kann sie immerhin doch noch eine Function von v sein $= V$, so ist also d. Gleichung nun:

$$\vartheta = \frac{1}{n-1}\frac{A}{c_v}\,pv + V$$

Setzt man nun zur Abkürzung $R = (n-1)\cdot\frac{c_v}{A}$, wo dieses R natürlich ebenso wie c_v eine lineare Function von v sein muß, indem n u. A constant sind, so erhält man durch Multiplication mit R:

$$R\vartheta = pv + RV$$

Da R und V beide lineare Functionen von v sind, so kann man jetzt dieses Product auch als eine einfache Function von v setzen:

$$RV = \frac{S}{v^{n-1}}$$ so ergibt man nun als neue Zustandsgleichung erhält.

$$R\vartheta = pv + \frac{S}{v^{n-1}}$$

Es ist jetzt aber leicht einzusehen daß nicht nur R und S letzte Functionen von v sondern unveränderliche Größen sind, denn diese gefundene Zustandsgleichung entspricht keiner allgemeinen Form d. Zustandsgleichung überhaupt, und kann nur entsprechen, wenn R und S constant sind. Multiplicirt man d. obige Gleichung nämlich mit v^{n-1}, so ergibt sich:

$$R\vartheta v^{n-1} = \left(\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{\vartheta}\,\vartheta v^{n-1}\right)^{\frac{n}{n-1}} + S$$

woraus man nun mit d. Bezeichnungen x und y erhält, indem hier man setzt:

$$\vartheta v^{n-1} = x \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta}{p^{\frac{n-1}{n}}} = y :$$

$$Rx - \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{n-1}} - S = 0.$$

d. allgemeinen Form d. Zustandsgleichung $\varphi(x,y) = 0$ zufolge soll aber die Zustandsgleichung nur eine Beziehung zwischen x, y und constanten Größen sein, woraus folgt daß in d. obigen Gleichung auch R und S constant sein müssen.

R war aber $= (n-1)\frac{c_v}{A}$, so daß mit constantem R auch c_v constant sein muß, während d. spec. Wärme c_p in diesem Fall auch nicht nothwendig = 0 sein kann, weil sonst d. überhitzte Dampfzustand identisch würde mit d. Zustand d. Gase, während ja c_p = spec. Wärme bei constantem Druck ein d. den Wärmezustand charakterisirendes Element.

Aus d. ~~Zustands~~ allgemein giltigen Gleichung Seite 129: ergibt sich

$$\frac{(n-1)^2}{n}\,\frac{\vartheta}{pv} = \frac{A}{c_v} - \frac{A}{c_p}$$

ergibt sich durch Multipliciren mit $\frac{c_v}{A}$:

$$\frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{(n-1)^2}{n}\,\frac{c_v}{A}\cdot\frac{\vartheta}{pv}$$

wo $(n-1)\frac{c_v}{A} = R$

$$\frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{n-1}{n}\,\frac{R\vartheta}{pv}$$

und gemäß d. obigen Zustandsgleichung: $R\vartheta = pv + \frac{S}{v^{n-1}}$:

$$\frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{n-1}{n}\,\frac{pv + \frac{S}{v^{n-1}}}{pv} = 1 - \frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{S}{pv^n}\right)$$

$$\frac{c_v}{c_p} = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\,\frac{S}{pv^n}$$

Es zeigt sich nun wie d. gefundenen Resultate mit d. erfahrungsmäßigen Thatsachen übereinstimmen als durch gemäß d. Annahme c_v = constant gefundenen ebenso gut oder noch besser übereinstimmen wie d. vorher gemäß d. Annahme c_p = constant gefundenen Resultate.

Zunächst kann man bemerken, daß d. Bedingung, daß d. Zustandsgleichung d. überhitzten Dampfes bei unendlicher Verdünnung, d. h. mit unendlich wachsendem v in d. Zustandsgleichung für Gase übergeht erfüllt wird, indem mit wachsendem v d. letzte Glied d. Zustandsgleichung immer unbedeutender wird, d. ... verschwindet bis schließlich d. Gleichung wird: $R\vartheta = pv$, welche die bekannte d. Zustandsgleichung d. Gase ist.

[illegible] c_v [illegible] $= \frac{1}{n}$ [illegible] c_v [illegible] v [illegible]

$$\frac{c_v}{c_p} = \frac{1}{n}$$

[illegible] Mariott- und Gay-Lussac'schen Gesetze, [illegible] Regnault [illegible]

[illegible] R und S [illegible]

[illegible] $n = \frac{4}{3}$ [illegible]

[illegible] R [illegible] c_p [illegible] $p\,v\,d$ [illegible] $p_1 v_1 d_1$ und $p_2 v_2 d_2$, [illegible]

$$R d_1 = p_1 v_1 + \frac{S}{v_1^{n-1}} \quad \text{und} \quad R d_2 = p_2 v_2 + \frac{S}{v_2^{n-1}}$$

$$R(d_1 v_1^{n-1} - d_2 v_2^{n-1}) = p_1 v_1^n - p_2 v_2^n$$

$$\text{also } R = \frac{p_1 v_1^n - p_2 v_2^n}{d_1 v_1^{n-1} - d_2 v_2^{n-1}}$$

[illegible] $p_1 v_1 d_1$, $p_2 v_2 d_2$ [illegible] $n = \frac{4}{3}$ oder $n - 1 = \frac{1}{3}$

$$R = 0{,}004792$$

[illegible]:

$$S = (0{,}004792\, d - p v)\sqrt[3]{v}$$

[illegible] S [illegible] $p\,v\,d$ [illegible] S [illegible]:

$$S = 0{,}1413$$

[illegible] $p\,v\,d$ [illegible] S [illegible]:

$$S = 0{,}1459$$

[illegible]:

$$S = 0{,}144.$$

[illegible] c_v = constant [illegible]:

$$p v = 0{,}004792\, d - \frac{0{,}144}{\sqrt[3]{v}}$$

[illegible] R und S [illegible]

Welche von den beiden aufgestellten Formen d. Zustandsgleichung für Dämpfe ist nun d. beste? Was d. Aufschluß d. mit den Zustandsgleichungen gefundenen Resultate betrifft und d. erfahrungsmäßigen Verhältnisse betrifft, so ist keiner von beiden d. Vorzug zu geben, indem zu wenig deutliche Erscheinungen und Versuchsresultate vorliegen und man daraus eine Menge Formen von Zustandsgleichungen aufstellen kann, welche alle gleich gut diesen erfahrungsmäßigen Verhältnissen entsprechen.
Wegen einiger theoretischer Untersuchungen erscheint d. Annahme c_v = const. an und für sich mehr gerechtfertigt als d. Annahme c_p = const. Indem jedoch thatsächlich beide Formen d. Zustandsgleichung nur als Näherungen zu betrachten sind, empfiehlt sich d. Zeuner'sche Gleichung entsprechend d. Annahme c_p = const. durch d. Umstand, daß sie eine direkte Berechnung von v mittelst d. gegebenen Größen p und ϑ gestattet, die Tabelle d. Zustand überhitzter Dämpfe in den Anwendungen allgemein [illegible] zu machen gestattet. Außerdem ergibt sie insbesondere für Wasserdampf im Grenzzustand d. Sättigung eine recht gute Übereinstimmung mit d. früher schon empirisch ermittelten Tabelle im ganzen Umfange darstellt.
Aus diesem Grund soll nun zunächst d. zuerst von Zeuner aufgestellte Gleichung gemäß d. Annahme c_p = constant als Zustandsgleichung überhitzter Dämpfe verwendet werden, nämlich d. Gleichung:

$$R\vartheta = pv + S p^{\frac{n-1}{n}}$$

wobei R, S und n d. früher behandelten Constanten bedeuten.
Für den praktischen Gebrauch empfiehlt es sich d. Gleichung folgendermaßen umzuschreiben:

$$pv = R\left(\vartheta - \beta p^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

wobei $\beta = \frac{S}{R}$ bedeutet, also auch constant.

od. $$pv = R(\vartheta - \mathfrak{P})$$

wobei $\mathfrak{P} = \frac{S}{R} p^{\frac{n-1}{n}}$ ist, also eine Funktion d. Pressung p ist.

Speziell für Wasserdampf ist dann zu setzen mit Rücksicht auf d. früher gefundenen Werthe für d. Constanten:

$$R = 0{,}004924 \qquad \beta = 37{,}774 \text{ und } \frac{n-1}{n} = \frac{1}{4} \text{ also } n = \frac{4}{3}.$$

Um den Gebrauch dieser Formel noch mehr zu erleichtern kann man d. Funktion $\mathfrak{P} = 37{,}774\sqrt[4]{p}$ auch für verschiedene Werthe d. Pressung berechnen und tabellarisch zusammenstellen. (siehe Grashof).
Da d. gefundene Zustandsgleichung allgemein für d. ganzen Umfang d. überhitzten Dämpfe gelten soll, so muß sie auch für den Grenzzustand d. Sättigung gelten. Aus diesem Grund kann sie auch benutzt werden, um d. Beziehung, welche allgemein zwischen Temperatur und Pressung dann stattfindet, genauer und bequemer auszudrücken als dies früher schon geschehen war, welche Formeln bekanntlich [illegible] nicht [illegible] waren.
Es wurde nämlich schon früher darauf hingewiesen, daß die zwischen p u. v stattfindende Beziehung für gesättigten Dampf sehr nahe d. Form hat:

$$pv^m = a$$

wenn man dann für d. Constanten m und a entsprechende Werthe einsetzt. Insbesondere für gesättigten Wasserdampf hatte man zu setzen:

$$m = 1{,}0646 \text{ und } a = 1{,}7049.$$

Setzt man diese Werthe ein, so kann man direkt für gegebene Werthe von p d. entsprechenden Werthe d. spez. Volumens v berechnen, nämlich auch nur für gesättigten Wasserdampf.

Erhält man nun diese allgemeine Gleichung zwischen v und p für gesättigten Dampf $pv^{\frac{1}{m}} = a$ nach Potenz $\frac{1}{m}$ und vereinfacht mit $p^{\frac{m-1}{m}}$ so bekommt man:

$$pv = a^{\frac{1}{m}} p^{\frac{m-1}{m}} = R\alpha p^{\frac{m-1}{m}}$$

wenn man abkürzt $R \cdot \alpha = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{R}$ = constant unter R d. früheren Constant verstanden. Für überhitzte Dämpfe gilt aber als Zustandsgleichung, welche [illegible] mit [illegible] Gleichung:

$$pv = R(\vartheta - \beta p^{\frac{n-1}{n}})$$

folgt aus d. Gleichsetzung folgt:

$$\vartheta - \beta p^{\frac{n-1}{n}} = \alpha p^{\frac{m-1}{m}}$$

$$\text{od.} \quad \vartheta = \alpha p^{\frac{m-1}{m}} + \beta p^{\frac{n-1}{n}}$$

Hiernach haben wir also eine Gleichung gefunden, aus welcher allgemein für gesättigten Dampf d. absolute Temperatur ϑ = d. Summe 2 Glieder ist, welche einzeln verschiedenen Potenzen d. Spannung proportional sind, aus welcher man also direkt für gegebene Spannungen p d. entsprechende Temperatur ϑ und also auch d. thermometrische Temperatur $t = \vartheta - 273$ berechnen kann.

Die Konstanten für gesättigten Wasserdampf erhalten wir mit Rücksicht auf frühere Betrachtungen und Angaben zu schreiben $\vartheta = 273 + t$:

$$t = 335{,}24\, p^{0{,}06068} + 37{,}774\, p^{0{,}25} \div 273.$$

Um den Grad d. Annäherung d. nach dieser Formel gefundenen Resultate mit d. früheren zu sehen, kann man beispielsweise berechnen, z.B. für:

	$p =$ 1	3	6	9	12 Atm
	$t =$ 100,01°	133,04°	159,86°	175,47°	187,08° C
[illegible]	$t =$ 100	133,91°	159,22	175,77	188,41° C
Also eine Differenz von:	+0,01	÷1,13	+0,64	÷0,30	÷1,33

Es ergibt sich also aus d. Tab. diese Formel ziemlich gut mit d. früher entwickelten empirischen Resultaten.

Nachdem nun d. Zustandsgleichung allgemein für Dämpfe aufgestellt ist, handelt es sich nun noch darum, d. bei den Zustandsänderungen vorkommenden Änderungen d. inneren Arbeit [illegible] Wärmezustand [illegible] Element [illegible], um die jeweilige Form d. Wärmegleichung zu entwickeln, welche diesen Fall d. überhitzten Dämpfe am zweckmäßigsten zu gebrauchen ist.

d. 3 allgemeinen Formen d. Wärmegleichung waren bekanntlich:

$$dQ = c_p \frac{d\vartheta}{dv} dv + c_v \frac{d\vartheta}{dp} dp$$

$$dQ = c_v d\vartheta + A\vartheta \frac{\partial p}{\partial \vartheta} dv$$

$$dQ = c_p d\vartheta \div A\vartheta \frac{dv}{d\vartheta} dp$$

welche angewandt werden, je nachdem d. unendlich kl. Zustandsänderungen durch d. unendlich kleinen Änderungen von v u. p, v und ϑ oder p und ϑ gegeben sind.

Um d. praktische Anwendung vorzunehmen, sind d. früher festgestellten Beziehungen erforderlich, nämlich:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \frac{n}{n-1}\,\frac{A}{c_p}\,p \quad \text{und} \quad \frac{d\vartheta}{dp} = \frac{1}{n-1}\,\frac{A}{c_v}\,v$$

welche Formeln hergeleitet wurden auf Grund d. allgemeinen Anschauungen, daß ... d. absoluten Temperatur proportional ... wenn d. Zustandsänderung nach ... Curve ... Setzt man nun diese Werte für $\frac{d\vartheta}{dv}$ und $\frac{d\vartheta}{dp}$ ein allgemeine Formel d. Wärmezuführung, so erhält man:

$$1)\quad dQ = A\left(\frac{n}{n-1}\,p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp\right)$$

$$\text{od. } 2)\quad dQ = c_v\left(d\vartheta + \vartheta\,\frac{n-1}{v}\,dv\right)$$

$$\text{od. } 3)\quad dQ = c_p\left(d\vartheta - \frac{\vartheta}{p}\cdot\frac{n-1}{n}\,dp\right)$$

Diese Formeln gelten also in allgemeinster Form für d. überhitzten Dämpfe, ... Annahme c_p = const. u. c_v = const. ... so entspricht also d. allgemeinsten Form d. Zustandsgleichung überhitzter Dämpfe:

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Setzt man nun ... für Wasserdampf $n = \frac{4}{3}$, so erhält man:

$$1)\quad dQ = A(4\,p\,dv + 3\,v\,dp)$$

$$\text{od. } 2)\quad dQ = c_v\left(d\vartheta + \frac{1}{3}\,\frac{\vartheta}{v}\,dp\right)$$

$$\text{od. } 3)\quad dQ = c_p\left(d\vartheta - \frac{1}{4}\,\frac{\vartheta}{p}\,dp\right)$$

= Wärmemenge, welche 1 kg überhitzten Wasserdampf bei ... einer ... Zustandsänderung mitgeteilt werden muß.

Es fragt sich ferner d. Änderung d. inneren Arbeit ... eines überhitzten Dampfes als Funktion d. ... Um diese festzustellen muß d. erste Form d. Wärmezuführung mit d. allgemeinsten Form derselben verglichen werden. D. allgemeinste Form d. Wärmezuführung war nämlich:

$$W\,dQ = dU + p\,dv \quad \text{od. mit } A = \frac{1}{W}:$$

$$dQ = A\,(dU + p\,dv)$$

d. erste Form d. auf überhitzte Dämpfe angewandten Wärmezuführung hatte also:

$$dQ = A\left(\frac{n}{n-1}\,p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp\right)$$

es muß also sein:

$$dU + p\,dv = \frac{n}{n-1}\,p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp$$

$$\text{od. } dU = \left(\frac{n}{n-1} - 1\right)p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp = \frac{1}{n-1}\,p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp$$

$$= \frac{1}{n-1}\,(p\,dv + v\,dp) \quad \text{u. d. } p\,dv + v\,dp = d(v\,p)$$

$$dU = \frac{1}{n-1}\,d(p.v)$$

; d. i. es ist also d. Änderung d. inneren Arbeit proportional d. Produkt aus Pressung und spez. Volumen.

Sind demnach $p_0\,v_0$ d. Werthe von p und v in einem gegebenen Anfangszustande, so erhält man durch Integration:

$$U - U_0 = \frac{pv - p_0 v_0}{n-1}$$

Wie ersichtlich stimmt diese Gleichung d. inneren Arbeit vollständig ganz mit derjenigen früher für Gase gefundenen überein, wie es auch kaum anders zu erwarten war, indem d. Beziehungen zwischen p und v für gesättigt. überhitzten Dampf und Gase dieselben waren.

Setzt man in dieser Gleichung d. Constante $U_0 - \frac{p_0 v_0}{n-1}$ = einer einzigen Constanten: $U_0 - \frac{p_0 v_0}{n-1} = C$, und multiplicirt dann d. Gleichung mit A so erhält man:

$$AU = AC + \frac{A}{n-1}\,pv$$

nach allgemeiner Zustandsgleichung für überhitzt. Dampf

ferner: $pv = R(T - \mathfrak{T})$

wobei R eine Constante und unter $\mathfrak{T}$ d. bekannte Function d. Pressung verstanden.

d. spec. Körperwärme ist demnach:

$$AU = AC + \frac{AR}{n-1}(T - \mathfrak{T})$$

d. entwickelt, die schon in Anmerkung gelieferte Zeuner'sche Zustandsgleichung benutzt aber mit d. Annahme c_p = constant, indem:

$R = \frac{n-1}{n}\,\frac{c_p}{A}$ ebenfalls eine Constante war;

also: $\frac{AR}{n-1} = \frac{c_p}{n}$

und demnach

$$AU = AC + \frac{c_p}{n}(T - \mathfrak{T})$$

In dieser Form läßt sich also d. spec. Körperwärme AU als Function von Pressung und Temperatur ausdrücken, indem bekanntlich:

$T = 273 + t$ und $\mathfrak{T} = \beta\, p^{\frac{n-1}{n}}$ wobei β eine Constante bedeutet.

Um diese Gleichung zu benutzen ist nun d. Constanten C für Wasserdampf zu bestimmen.

Dieser Werth entwickelt sich abhängig von d. Zustande, von welchem aus man anfängt. Gewöhnlich versteht man unter AU diejenige Größe verstanden, um welche d. Körperwärme von 1 kg Dampf bei t^0 größer ist als d. Körperwärme von 1 kg desselben Flüssigkeit bei 0^0 Temperatur. Nach früherem entspricht dann im besonderen für gesättigten Dampf

$$AU = q + \rho = \text{(spec. Dampfwärme)}$$

wobei q d. Flüssigkeitswärme bedeutet, welche erforderlich wird 1 kg Flüssigkeit als solche bei constanter Pressung von 0^0 auf t^0 zu erwärmen und unter ρ d. innere spec. Verdampfungswärme verstanden.

Aus d. obigen Gleichung erhält man nun:

$$AC = AU - \frac{A}{n-1}\,pv$$

und da diese auch d. Zustand d. Sättigungsgrenze entsprechen muß, kann man $AU = q + \rho$ setzen;

$$AC = q + \rho - \frac{A}{n-1}\,pv$$

also: welche Formel natürlich gilt, wenn p in kg pro qm ausgedrückt ist.

Um nun AC für überhitzten Wasserdampf zu finden, hat man nur d. früher gefundenen Werthe von q, ρ, A einzusetzen und dann noch für pv entsprechend zusammengehörige Größen festzustellen. z. B. erhält man für gesättigten Wasserdampf von 1 Atm. Pressung, wobei man also p mit 10333 zu multipliciren hat, wenn $p = 1$ gesetzt wird, entsprechend d. früher erhaltenen Tabellen:

$$Al = 100,5 + 496,3 - \frac{3 \cdot 10333 \cdot 1,6505}{424}$$

$$Al = 476,13$$

[illegible]

$$AU = 476,13 + 3Apv$$

[illegible] $c_p = 0,48$ [illegible] Regnault'schen [illegible]

$$AU = Al + \frac{c_p}{n}(T - \vartheta) = 476,13 + 0,36(T - \vartheta)$$

[illegible]

[illegible]

$$pv^m = C$$

[illegible]

[illegible]

$$pv = R(T - \vartheta)$$

[illegible]

$$pv = RT$$

[illegible] $T = \beta p^{\frac{m-1}{m}}$ [illegible] $\frac{c_p}{c_v}$ [illegible]

[illegible]

$$AU = Al + \frac{A}{n-1} pv$$

$$AU = Al + \frac{AR}{n-1}(T - \vartheta)$$

$$AU = Al + \frac{c_p}{n}(T - \vartheta)$$

[illegible] $pv^m = C$:

$$v^m dp + p m v^{m-1} dv = 0$$

$$\frac{dp}{dv} = -m\frac{p}{v}$$

[illegible] p_1 [illegible] T_1 [illegible] v_1 [illegible]

$$pv^m = p_1 v_1^m \quad \text{und} \quad pv = R(T - \vartheta):$$

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^m \quad \text{und} \quad \frac{T-\vartheta}{T_1-\vartheta} = \frac{pv}{p_1 v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}} = e^{m-1}$$

[illegible] $\frac{v_1}{v}$ [illegible]

[illegible]

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}} = e^{m-1}$$

Also auch diese Beziehungen zwischen $p\,v$ und ϑ in 2 verschiedenen Zuständen unterscheiden sich für Dampf und Gas nur dadurch, daß einmal ersetzt ϑ (entsprechend Gas) $\vartheta - \mathfrak{T}$ gesetzt ist für Dampf. Wenn also der Exponent nicht weiter in Betracht kommt, wird man ganz dieselben Resultate wie früher für Gase finden, sobald man die betreffenden Entwicklungen nicht als Zustandsgleichung sieht.

Man kann daher auch für Dämpfe den früher gefundenen Ausdruck für die Expansionsarbeit der Gase gelten lassen als deren Expansionsarbeit, nämlich:

$$E = \frac{p_1 v_1}{m-1}\left(1 - \varepsilon^{m-1}\right)$$

Was endlich noch die Wärmemenge Q betrifft, welche dem Dampf per 1 kg zugeführt werden muß, um ihn von dem Zustand $p_1 v_1$ in den Zustand $p\,v$ zu bringen, so gilt für diese Wärmemenge der allgemeine Ausdruck:

$$Q = A\left(U - U_1 + E\right)$$

wobei diese Wärmemenge bekanntlich teils zur Vergrößerung des inneren Arbeitsvermögens, teils zur Verrichtung der Expansionsarbeit verwendet wird.

Was nun die Wärmemenge des Dampfes an innerem Arbeitsvermögen = der Zuwachs der ... $A(U - U_1)$ betrifft, so ist dieselbe noch herzuleiten:

$$A(U - U_1) = \frac{AR}{n-1}\left(\vartheta - \mathfrak{T} - \vartheta_1 + \mathfrak{T}_1\right)$$

$$= \frac{AR}{n-1}\left(\vartheta_1 - \mathfrak{T}_1\right)\left[\frac{\vartheta - \mathfrak{T}}{\vartheta_1 - \mathfrak{T}_1} - 1\right]$$

und da nach der Zustandsgleichung: $R(\vartheta_1 - \mathfrak{T}_1) = p_1 v_1$ ist:

$$A(U - U_1) = \frac{A\cancel{R}}{n-1}\, p_1 v_1 \left[\varepsilon^{m-1} - 1\right]$$

$$= \div\, A\,\frac{m-1}{n-1}\,\frac{p_1 v_1}{m-1}\left(1 - \varepsilon^{m-1}\right)$$

Nun aber ist aber $\frac{p_1 v_1}{m-1}\left(1 - \varepsilon^{m-1}\right) = E$ und folglich:

$$A(U - U_1) = \div\,\frac{m-1}{n-1}\,AE$$

diesen Ausdruck oben eingesetzt gibt:

$$Q = \left(1 - \frac{m-1}{n-1}\right)AE = \frac{n-m}{n-1}\,AE.$$

Wie ersichtlich ist auch diese Formel ganz dieselbe wie sie früher für dieselbe Wärmemenge bei Gasen gefunden wurde. Überhaupt findet man alle entsprechenden Ausdrücke bei Dämpfen und Gasen ... so lange der Exponent nicht mit in Betracht kommt.

Diese allgemeinen Formeln sollen nun auf Spezialfälle von Zustandsänderungen von Dämpfen, welche nach dem allgemeinen Gesetze folgen $p v^m = C$, angewendet werden:

1) Zustandsänderung bei constantem Volumen.

Diese Zustandsänderung erhält man offenbar aus der allgemeinen Zustandsgleichung, wenn man $n = \infty$ setzt; man kann nämlich die Zustandsgleichung $pv^{n} = C$ auch schreiben:

$$p^{\frac{1}{n}} v = C^{\frac{1}{n}} = \text{constant}$$

woraus mit $n = \infty$ folgt: $v = \text{constant}$.

Die Beziehung zwischen Endzustand und Anfangszustand ist in diesem Falle gegeben durch:

$$\frac{\vartheta - \vartheta'}{\vartheta_0 - \vartheta'} = \frac{p}{p_0}$$

Die Expansionsarbeit $\mathfrak{E}$ ist natürlich im vorliegenden Falle bei constantem Volumen $= 0$ also $\mathfrak{E} = 0$.

Die Wärmemenge Q, welche 1 kg Dampf mitgetheilt werden muss um die Spannung von p_0 auf p zu steigern, würde sich aus der allgemeinen Formel mit $n = \infty$ im vorliegenden Falle in unbestimmter Form $= 0 \cdot \infty$ ergeben; indessen kann man auch unmittelbar in diesem Falle die erforderliche Wärmemenge Q berechnen, aus der allgemeinen Formel:

$$Q = A(U - U_0 + \mathfrak{E}) \quad \text{wo } \mathfrak{E} = 0.$$

$Q = A(U - U_0)$ diese Wärmemenge Q dient also bloss nur zur Vermehrung der inneren Energie. Aus der weiter entwickelten Formel für die innere Energie:

$$AU = AJ + \frac{A}{n-1} pv$$ erhält man nämlich mit constantem v:

$$Q = A(U - U_0) = \frac{A}{n-1}(p - p_0) v$$

Insbesondere erhält man z. B. diejenige Wärmemenge welche 1 kg Wasserdampf mitgetheilt werden muss um die Spannung von p_0 Atm. auf p Atm. zu steigern, mit $n = \frac{4}{3}$ also $n - 1 = \frac{1}{3}$:

$$Q = 3A(p - p_0) v$$

2) Zustandsänderung bei constanter Spannung.

Man erhält dieselbe offenbar aus der allgemeinen Zustandsgleichung $pv^{n} = C$ indem $n = 0$ gesetzt wird, denn dann wird $v^{n} = v^{0} = 1$ und also geht die Zustandsgleichung über in:

$$p = \text{constant} = C.$$

Um in diesem Falle den Endzustand aus dem Anfangszustand zu entwickeln, handelt es sich nun um die Beziehungen zwischen Temperatur und Volumen im Anfangs- und Endzustand; diese ist aber aus der Zustandsgleichung, wenn man vorher dieselbe mit constantem p auf die Temperaturfunction ϑ gebracht hat, ersichtlich:

$$\frac{\vartheta - \vartheta'}{\vartheta_0 - \vartheta'} = \left(\frac{v}{v_0}\right) = \frac{v}{v_0}$$

Was die während der Zustandsänderung verrichtete Expansionsarbeit $\mathfrak{E}$ betrifft, so erhält man diese im vorliegenden Falle natürlich am einfachsten:

$$\mathfrak{E} = p(v - v_0)$$

Die Wärmemenge Q, welche 1 kg Dampf mitgetheilt werden muss um bei constanter Spannung p das Volumen von v_0 auf v zu steigern, erhält man aus der allgemeinen weiter entwickelten Gleichung mit $n = 0$:

$$Q = \frac{n}{n-1} A\mathfrak{E} = \frac{n}{n-1} Ap(v - v_0)$$ und insbesondere für

Wasserdampf mit $n = \frac{4}{3}$: $Q = 4Ap(v - v_0)$

3) Zustandsänderung der Gase bei constanter innerer Arbeitswärme oder, was dasselbe ist, bei constanter (absoluter) Temperatur.

Wie der Ausdruck für die innere Arbeitswärme AU erkennen läßt, ist diese constant bei den Änderungen von $p\,v\,T$, wenn das Product pv = constant ist. Dieses ist dann der Fall, wenn in der Zustandsgleichung $m = 1$ ist, da dann:

$$pv = C = \text{constant wird.}$$

Dieser Gleichung gemäß ist die Zustandscurve in diesem Falle, (wie) gemäß bekannt, offenbar eine gleichseitige Hyperbel.

Die Beziehung zwischen Spannung, spec. Volumen und Temperatur im Anfangs- und Endzustande sind im vorliegenden Falle:

$$\frac{T - T'}{T - T_1} = 1 \quad \text{indem } pv = p_1 v_1 = \text{constant sein soll.}$$

Was die Expansionsarbeit E betrifft, so ergibt sich dieselbe nicht durch die vorhin aufgestellten Formeln in entsprechender Gestalt, indem dieselbe mit $m = 1$ übergeht in $E = \frac{0}{0}$.

Setzen kann man die Expansionsarbeit direct mit der allgemeinen Formel berechnen:

$$E = \int_{v_1}^{v} p\,dv \quad \text{wo } p = \frac{p_1 v_1}{v} \text{ in diesem Falle ist und weil } p_1 v_1 \text{ constant ist:}$$

$$= p_1 v_1 \int_{v_1}^{v} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \ln\left(\frac{v}{v_1}\right)$$

Die mitzutheilende Wärmemenge Q dient im vorliegenden Falle nur dazu, um die Expansionsarbeit zu verrichten, so daß:

$$Q = AE = A p_1 v_1 \ln\left(\frac{v}{v_1}\right)$$ ist, wie sich dies auch mit der allgemeinen Gleichung für Q mit $m = 1$ ergibt.

4) Zustandsänderung ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme als Zustandsänderung nach der adiabatischen Curve.

Offenbar erhält man diese besondere Art von Zustandsänderung, wenn man in der allgemeinen Zustandsgleichung $m = n$ setzt, denn soll $Q = 0$ werden, entsprechend keiner Mittheilung oder Entziehung von Wärme, so muß nach der allgemeinen Gleichung für Q, $m = n$ sein.

Die entsprechende Zustandsgleichung heißt demnach:

$$p v^n = C = \text{constant.}$$

Nach der Annahme, welche der ganzen Ableitung der allgemeinen Zustandsgleichung für Dämpfe zu Grunde gelegt wurde, ändert sich gemäß den Versuchen von Hirn und Cazin die absolute Temperatur bei der Zustandsänderung nach der adiabatischen Curve immer proportional einer gewissen Potenz der Spannung, so daß man setzen könnte:

$$T = a\,p^{\frac{n-1}{n}}$$ wenn a eine bestimmte Constante vorstellen würde.

Ebenso aber kann man ja setzen mit $T = \beta\,p^{\frac{n-1}{n}}$ unter β ebenfalls eine Constante verstanden. Demnach ändert sich im vorliegenden Falle der Zustandsänderung die absolute Temperatur T auch immer proportional der Function T. Man kann daher in diesem Falle an Stelle des Ausdrucks $\frac{T - T^{\circ}}{T_1 - T^{\circ}}$ einfach setzen:

$$\frac{T - T^{\circ}}{T_1 - T^{\circ}} = \frac{T}{T_1} \quad \text{und ferner} \quad \frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^n$$

Also: $\frac{\sigma}{\sigma_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = e^{n-1}$

welche Formeln vollkommen mit den entsprechenden für Gase früher entwickelten übereinstimmen.

Die Expansionsarbeit E von 1 kg Dampf ist unter diesen Umständen nach der allgemeinen Formel mit $m = n$:

$$E = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left(1 - e^{n-1}\right)$$

und insbesondere für Wasserdampf $n = \frac{4}{3}$ und $n - 1 = \frac{1}{3}$:

$$E = 3 p_1 v_1 \left(1 - \sqrt[3]{e}\right)$$

Alle diese Formeln gelten natürlich nur so lange, als der Sättigungszustand nicht überschritten ist. Sobald aber dieser Grenzzustand überschritten wird, also der Dampf in ein Gemisch von Flüssigkeit und gesättigtem Dampf übergeht, verlieren die früheren für diesen Spezialfall entwickelten Formeln ihre Kraft.

Für den letzteren Fall ist es nun von besonderem Interesse, den Grad der Überhitzung zu bestimmen, welchen ein Dampf im Anfangszustand haben muss, damit derselbe bei der ~~Ausdehnung~~ Expansion im Verhältnis $\frac{v_1}{v} = e$ im Endzustand gerade gesättigt wird, wobei also ohne Wärme mitzuteilen oder zu entziehen wird.

Angenommen also 1 kg Dampf habe die Anfangsspannung p_1 und die absolute Temperatur desselben Dampfes im Zustand der Sättigung sei $= \sigma$ und die entsprechende Endspannung p, ferner sei im Anfangszustand der Dampf überhitzt, so ist nun seine absolute Temperatur im Anfangszustand gleich dann $\sigma_1 = \sigma + x$, worin x den Grad der Überhitzung im Anfangszustand vorstellt. Dieser Dampf expandiere nun im Verhältnis $e = \frac{v_1}{v}$ ohne Mitteilung oder Entziehung von Wärme. Es handelt sich um die Frage zu beantworten, wie groß muss der Überhitzungsgrad x im Anfangszustand gewesen sein, damit der Dampf im Endzustand gerade gesättigt sein soll. (Wenn der Dampf vorher nicht überhitzt, so würde der Dampf nicht mehr bestehen, sondern es würde ein Gemisch von Dampf und Flüssigkeit, zu dessen Berechnung die früher entwickelten Formeln Anwendung finden müssten.)

In den allgemeinen Formeln hat man diesen Angaben entsprechend zu setzen: $\sigma_1 = \sigma + x$: also die Beziehung:

$$\frac{\sigma}{\sigma + x} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Für die Bedingung, dass im Endzustand der Dampf gerade gesättigt werden soll, haben wir die früher entwickelte Beziehung, welche im gesättigten Zustand von Dampf zwischen p und σ stattfinden muss, nämlich:

$$\sigma = \alpha p^{\frac{m-1}{m}} + \beta p^{\frac{n-1}{n}}$$

oder setzt man der Kürze wegen: $\frac{m-1}{m} = a$ und $\frac{n-1}{n} = b$

$\sigma = \alpha p^a + \beta p^b$. Diese Beziehung muss natürlich auch dem Sättigungszustand entsprechend der Temperatur σ entsprechen, so ergibt man durch Substitution erhält:

$$\frac{\alpha p^a + \beta p^b}{x + \alpha p_1^a + \beta p_1^b} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^b$$

oder durch Multiplizieren mit dem Nenner des links stehenden Quotienten und Dividieren durch p^b:

$$\alpha p^{a-b} + \beta = x p_1^{-b} + \alpha p_1^{a-b} + \beta$$

und wenn man noch durch $\alpha (p_1)^{a-b}$ dividiert:

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{a-b} = \frac{x\,p_1^{-a}}{\alpha} + 1$$

$$\text{also } x = \alpha\, p_1^{a}\left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{a-b} - 1\right]$$

Nun ist aber: $\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n} = e^{n}$

$$\text{Also } x = \alpha\, p_1^{a}\left[e^{n(a-b)} - 1\right] = \alpha\, p_1^{a}\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{n(b-a)} - 1\right]$$

Hiernach kann man nun leicht d. erforderlichen Unterschiebungsgrad berechnen, damit ein Stillstand d. Maschine sicher vermieden wird.

Insbesondere für Wasserdampf erhält man x, wenn man die schon bekannten Zahlen einsetzt:

$$x = 335{,}24\, p_1^{0{,}06068}\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{0{,}2524} - 1\right]$$

wobei aber p_1 in Atm eingesetzt sein muß.

Zur leichteren Ausführung kann man für verschiedene Werte von p_1 d. Werte von x berechnen und tabellarisch zusammenstellen (siehe Graphik).