Wärmetheorie & Hydraulik

Pieper, Andreas

Karlruhe, 1872/73

[Text]

urn:nbn:de:bsz:31-279864

Angewandte Hydraulik
&
mechanische Wärmetheorie.

nach Vorträgen von Prof. Dr. Grashof, Karlsruhe.

A. Pieper.

Da d. Hydraulik und mechanische Wärmetheorie sich eng bedingen, wie im späteren Verlaufe d. Betrachtungen zu ersehen sein wird, so seien zunächst d. Hauptsätze d. mechanischen Wärmetheorie entwickelt, indem manche Erscheinungen in d. Hydraulik von d. Wärme beeinflußt werden.

Das Wesen d. Wärmetheorie beruht nun ganz auf d. Annahme einer atomistischen Constitution d. Materie d. h. sie beruht darauf, daß angenommen wird, daß d. Materie zusammengesetzt aus unendlich kl. discreten materiellen Elementen, welche in kl. Entfernungen von einander gerückt sind, also auch immer Raum zwischen einander befindet.

Anfänglich soll jedoch von dieser Annahme abstrahirt werden, indem noch nicht bei dem heutigen Stand d. Wissenschaften d. Zusammenhang dieser Theilchen vollkommen genug entwickelt ist, um mathematische Betrachtungen mit Hilfe d. höheren Analysis in d. Betrachtungen hereinziehen zu können, da bekanntlich d. mathematischen Untersuchungen mit Hilfe d. höheren Analysis wesentlich darauf beruhen, daß eine Zerlegung d. Körpers in unendlich kleine, aber immer stetig materielle Theile überhaupt denkbar ist. Dies letztere ist aber bei d. Annahme einer atomistischen Constitution d. Materie unmöglich, denn würde man eine Zerlegung in unendlich kl. Theile vornehmen, so würden diese Theile zum Theil Materie, theils halb Materie halb leeren Raum und theils nur leeren Raum sein. Aus diesem Grunde sei daher von d. obigen Annahme vorerst abstrahirt, zumal da ohne diese Abstraction auch schon von vornherein eine strenge Definition d. Dichte und d. Volumens d. Körpers recht schwierig würde.

Unter Voraussetzung dieser Abstraction ist nun d. Zustand eines Körpers bestimmt durch d. augenblicklichen Zustand d. unendlich kl. Elemente, aus denen d. Körper bestehend gedacht werden kann. In Hinsicht d. Körperelemente wird man nun in d. Folge 2 verschiedene Arten Elemente anzunehmen haben:

Wird d. Körperelement betrachtet als d. Inbegriff einer bestimmten immer dieselbe bleibenden Materie, so soll d. Element ein Massenelement genannt werden.

Bei gewissen anderen Untersuchungen muß man sich aber auch d. Körper in verschiedenen Zuständen in Elemente zerlegt denken, so daß ein Element immer verschiedene Materie enthält. Solche Elemente sollen Volumenelemente heißen. Diese Volumenelemente können unbedingt unter Umständen ganz dieselbe Größe und Gestalt haben während d. Massenelement dasselbe als veränderlich gedacht werden müßten sowohl in Bezug auf Größe als auch Gestalt.

Wenn nun auf d. Ursache von Zustandsänderung eines Körpers die Rede ist, so ist diese allemal bestimmt durch d. Anfangs- und Endzustand d. Körpers, während d. Art und Weise d. Übergangs d. Änderung unendlich verschiedener Art sein kann, indem dieselbe durch unendlich verschiedene Gesetze ~~vollzogen~~ vollziehen kann. Diese Veränderungsgesetze sind aber bestimmt durch d. Zustände eines Körpers, welche in Zeitmomenten stattfinden, die um unendlich kl. Zeiträume auseinander stehen.

Zunächst kann man nun d. Zustandsänderungen betrachten als d. Wirkungen von Ursachen so vielfach verschiedener Art als man verschiedene Erscheinungszustände unterscheidet. Diese Erscheinungszustände können aber auch wiederum d. Art sein, daß 2 derselben wieder in d. Beziehung von Ursachen und Wirkungen zu einander stehen, od. daß 2 solche selbst wieder als Wirkungen einer und derselben dritten Ursache erkannt werden. Auf d. Erkenntniß und Unterscheidung von Wirkungen und Ursachen ist nun besonders d. Naturwissenschaft gerichtet und es kommt im Gesammtgebiet d. Naturwissenschaften darauf an, irgend welche Zustandserscheinungen als d. Wirkungen möglichst weniger Ursachen zurückzuführen.

In Hinsicht d. Zustandes eines Körpers unterscheidet man nun einen äußeren und einen inneren Zustand; unter äußerem Zustand eines Körpers soll derjenige verstanden werden, welcher d. Zustand seiner Ruhe od. Bewegung angibt, und zwar derjenigen Bewegung, welche auf d. Masseneinheit zurückgeführt und betrachtet werden kann als eine merkliche continuirliche Ortsveränderung d. Massenelemente. Von dieser Bewegung ist nämlich noch eine andere zu unterscheiden, welche nicht als merklich betrachtet werden kann, nämlich d. [illegible] innere Molekularbewegung d. Körpers.

Bezüglich d. Änderung d. äußeren Zustandes eines Körpers ~~kann~~ gibt d. [illegible] Massenein[illegible] vollständigen Aufschluß, jedoch keinen für d. Grundsätze [illegible] aufgesucht.

Der Bewegungszustand eines Körpers in einem Augenblick ist bestimmt durch d. Richtung und Größe d. Geschwindigkeit ~~[illegible]~~ an seiner d. Massenelemente od. seiner materiellen Punkte, unter materiellen Punkt die im Schwerpunkt vereinigt gedachte Masse d. Massenelements verstanden. Hiermit ist auch zugleich d. Größe d. lebendigen Kraft d. Körpers bestimmt, indem d. lebendige Kraft eines in Bewegung befindlichen Körpers = ist der halben Summe d. Produkte aus den Massen d. materiellen Punkte in den Quadrate ihrer Geschwindigkeiten (früher wurde d. lebendige Kraft allgemein als d. ganze Summe d. Produkte aus Masse und Geschwindigkeitsquadrate hingestellt; gegenwärtig kommt man jedoch immer mehr auf d. erstere zurück, indem sich dadurch manches einfacher gestaltet.) Wenn daher alle augenblicklichen Geschwindigkeiten d. Massenelemente = 0 sind, so ist auch d. lebendige Kraft d. Körpers = 0, und umgekehrt, wenn d. lebendige Kraft d. Körpers = 0 so sind auch alle Geschwindigkeiten d. Massenelemente einzeln = 0. Für den letzteren Fall, wenn d. augenblicklichen Geschwindigkeiten d. materiellen Punkte = 0 sind, so befindet sich d. Körper im Ruhezustand.

Bekanntlich kann d. Bewegung eines Körpers in mannigfach verschiedener Weise betrachtet werden, als bestehend aus d. relativen Bewegung gegen ein am Körper festes Axensystem und aus d. Bewegung dieses Axensystems gegen ein anderes festes Gebilde. Die letztere Bewegung, nämlich d. Bewegung d. am Körper festen Axensystems = Bewegung eines starren Körpers, kann wiederum betrachtet werden in jedem Augenblick als eine unendlich kl. Schraubenbewegung, welche auf unendlich verschiedene Weise zerlegt werden kann in eine Rotation um eine Momentanaxe und eine unendlich kl. Translation nach irgend einer Richtung. Wie man aber auch d. Zerlegung vornehmen mag, immer ist bekanntlich d. Rotation nach Axenrichtung, Winkelgeschwindigkeit u. Sinn

die wirkliche während derselben d. Translation mit d. parallelen festgehaltenen d. Rotationsachse sich nach Größe und Richtung ändert. Hinsichtlich d. Feststellung eines Achsensystems in einem Körper sei noch hinzugefügt, daß es genügend ist das Achsensystem OX OY OZ so anzunehmen, daß d. Ursprung O beständig in demselben materiellen Punkt A liegen bleibt, daß eine d. Achsen z.B. OX durch einen 2ten, immer denselben bleibenden materiellen Punkt B geht und daß endlich eine d. Coordinatenebenen z.B. XOY durch einen dritten materiellen Punkt geht. Offenbar ist durch d. bekannte relative Bewegung d. materiellen Punkte eines Körpers gegen ein solches Achsensystem auch zugleich d. relative Bewegung d. Elemente gegen einander bestimmt. Aus diesem Grunde sei unter relativer Bewegung eines Körpers schlechtweg verstanden d. Bewegung d. Elemente gegen einander od. d. relative Bewegung d. Elemente gegen ein im Körper fixirtes Achsensystem.
(Im Allgemeinen erfordert d. Begriff einer relativen Bewegung eines Körpers auch noch einen, an einem Beziehung welches selbst sich d. Bewegung bezieht, und nur bei d. relativen Bewegung irgend eines (irdischen) Körpers gegen d. Erde spricht man einfach von d. Bewegung d. Körpers.)

Bekanntlich nennt man d. Ursachen d. Änderungen d. äußeren Zustandes od. Bewegung eines Körpers die mechanischen Kräfte. Die auf einen Körper wirkenden Kräfte werden unterschieden in Massenkräfte und Oberflächenkräfte, wovon d. Massenkräfte an d. Massenelemente gebunden sind und gleichsam als an ihnen angreifend gedacht werden müssen, während d. Oberflächenkräfte an d. Elemente d. Oberfläche angreifend gedacht werden können.

Die Arbeit d. Massenkräfte ist bedingt durch d. Bewegung d. Massenelemente und die Arbeit d. Oberflächenkräfte ist bedingt durch d. Bewegung d. Oberflächenelemente.

Bekanntlich wird ferner jede mechanische Kraft gemessen durch d. Masse und d. Beschleunigung, welche sie dem Körper ertheilt od. ertheilen kann. Ist nämlich P eine Kraft, welche einem Körper von d. Masse m eine Beschleunigung φ ertheilen kann, so ist:

$$P = m\varphi$$

Bezüglich d. Einheit, mit welcher Kraft und Masse gemessen werden, kann man entweder zunächst d. Masseneinheit definiren od. man kann zuförderst d. Krafteinheit festsetzen als diejenige Kraft, welche einer Masse eine bestimmte Beschleunigung ertheilt. Mit Hilfe d. obigen Gleichung kann man dann im ersten Falle d. Krafteinheit und im letzteren Fall d. Masseneinheit bestimmen. Von beiden Verfahren erscheint d. erstere recht d. natürlichere; das übliche Verfahren ist jedoch das, daß man d. Krafteinheit annimmt und zwar pflegt man als Krafteinheit d. Schwerkraft zu nehmen, welche auf eine bestimmte Masse an einem bestimmten Orte ausgeübt wird von d. Anziehungskraft d. Erde. Z.B. 1 Kgr = Schwerkraft auf d. Masse eines Cubdcc. Wassers im Zustande d. größten Dichtigkeit an einem bestimmten Orte, wobei aber noch willkürlich ist, an welchem Orte man d. Schwerkraft auf 1 Cubdcc. Wasser als Kgr betrachten will. Würde man an jedem beliebigen Orte d. betreffende Kgr. als Krafteinheit annehmen, so würde man mit den erhaltenen Gewichten, Wagen und Körper je nach d. Orte auch verschiedene Kgr. bekommen, indem d. Schwerkraft mit d. Änderungen auch verschieden ist. Für d. Technik ist jedoch d. Verschiedenheit d. Schwerkraft an d. verschiedenen Erdpunkten genügend klein, um vernachlässigt werden zu können. Man nimmt einfach als Mittelwerth für die durch die Schwerkraft hervorgerufene Beschleunigung $g = 9{,}81$ m an; demnach nimmt man d. Definition d. Kgr. als Krafteinheit also d. Schwerkraft eines Cubdcc. Wassers im dichtesten Zustand an einem Orte wo d. Beschleunigung d. Schwerkraft $= 9{,}81$ m beträgt.

Attractionskräfte nennen diejenigen Kräfte in Betracht, welche man mit d. Namen Gravitation bezeichnet, nämlich d. Kraft, mit welcher sich 2 materielle Punkte in beliebiger Entfernung gegenseitig anziehen. Bekanntlich nimmt diese Gravitation mit d. Quadrate d. Entfernungen d. materiellen Punkte ab. Bei irdischen Körpern unter sich od. von kl. Dimensionen gegen d. Erde, ist diese Gravitation jedoch ganz untergeordnet so daß davon vollkommen abgesehen werden kann.

Was d. äußeren Kräfte anbetrifft, so kommt bei d. Bewegung eines irdischen Körpers nur für allemal d. Schwerkraft in Betracht. Ferner sind jedoch auch noch die von d. Mechanik festgestellten sog. 2 Ergänzungskräfte zu berücksichtigen, wenn es sich nur um d. relative Bewegung eines Körpers gegen einen andern in Bewegung befindlichen Körper handelt, indem diese beiden Ergänzungskräfte hinzuzufügen sind, um d. absolute Bewegung in d. Rechnung hereinziehen zu können. Ist K ein Körper, welcher in relativer Bewegung gegen ein innerhalb in Bewegung begriffenes Achsensystem S steht, so kann man bekanntlich nach d. Mechanik diese eigene Bewegung d. Systems S in jedem Zeitelement als eine unendlich kleine Schraubenbewegung betrachten. Die Bewegung d. Körpers K kann dann als absolute Bewegung angesehen werden, wenn seiner Bewegung 2 sog. Ergänzungskräfte hinzugefügt werden, die folgendermaßen bestimmt sind:
Es sei in irgend einem Augenblick A d. Momentanachse und ω d. Winkelgeschwindigkeit, mit welcher das Achsensystem S um d. Achse A augenblicklich rotirt. Ferner sei dm irgend ein Massenelement d. Körpers K und φ d. Beschleunigung, welche im betreffenden Augenblick d. Element dm besitzen würde, wenn es sich nicht in relativer Bewegung gegen d. Achsensystem S befände, also mit demselben verbunden od. in relativer Ruhe gegen dasselbe wäre. Ferner sei v d. augenblickliche relative Geschwindigkeit d. Massenelements dm gegen d. System S und v' d. Projektion von v auf eine Ebene, welche zur Momentanachse A normal steht. Dies vorausgeschickt sind nun d. Ergänzungskräfte folgendermaßen bestimmt:
Die erste Ergänzungskraft ist dadurch bestimmt, daß sie dem Körperelement dm eine Beschleunigung erteilt, welche aber entgegengesetzt gerichtet ist der früheren Beschleunigung φ des augenblicklich mit d. System S fest verbundenen Punktes.
Die 2te Ergänzungskraft erteilt dem Element dm eine Beschleunigung $2\,\omega v'$, welche senkrecht gegen d. Momentanachse A und senkrecht gegen v und v'; somit ist aber d. Richtung dieser Beschleunigung noch 2deutig bestimmt. Um sie vollkommen zu bestimmen muß noch hinzugefügt werden, daß d. 2te Kraft diejenige Richtung hat, welche man um 90° im Sinne d. Winkelgeschwindigkeit ω um d. Momentanachse A herumdrehen muß, damit sie in d. Richtung von v' gelangt; man erhält also diese Richtung d. 2te Kraft, indem man d. Richtung von v' um d. Achse A ~~um~~ einen Winkel von 90° im entgegengesetzten Sinne von ω herumdreht. Somit sind d. beiden Ergänzungskräfte vollkommen bestimmt.
Im Verlauf von nachstehenden Untersuchungen wird sich zeigen, daß diese beiden Ergänzungskräfte eine wesentliche Rolle spielen.
Diese beiden Kräfte sind also immer senkrecht zu v', also senkrecht zur relativen Bahn d. Massenelements dm gerichtet, also ist in jedem Augenblick ihre relative Arbeit = 0, indem das Produkt mit v in d. Projektion = 0 ist. Diese beiden Ergänzungskräfte haben demnach auf d. Änderung d. relativen lebendigen Kraft keinen Einfluß, sie bestimmen aber nur d. absolute Bewegung mit Ausschluß d. relativen lebendigen Kraft.

Wenn es sich um d. ~~Bewegung~~ Untersuchung d. (schlechthin genannten) Bewegung eines irdischen Körpers gegen d. Erde, also um d. relative Bewegung d. Körpers gegen d. Erde handelt, so verschaffen d. beiden Ergänzungskräfte d. relativen Bewegung zur absoluten erstens d. eigene Schwere od. Anziehungskraft d. Erde und zweitens d. Centrifugalkraftshervorbringung. Indessen ist in d. Beschleunigung d. Schwerkraft immer d. 2te Ergänzungskraft, nämlich d. Centrifugalkraft mit einbegriffen, indem es unmöglich ist, d. Schwerkraft ohne Centrifugalkraft zu beobachten. In dem Werthe $g = 9{,}81\,m$ = Beschleunigung d. Schwerkraft also sehen beide Ergänzungskräfte mit einbegriffen. Man hat also bei d. relativen Bewegung eines irdischen Körpers auf nur d. 1te Ergänzungskraft nämlich d.

Schwerkraft zu berücksichtigen.

Was weiterhin d. Oberflächenkräfte betrifft, welche von irgend einem anderen angrenzenden Körper herrühren und in d. Oberfläche angreifen, so können diese unterschieden werden in normale und tangentiale Oberflächenkräfte. Die normalen Oberflächenkräfte kommen in d. Regel immer nur als normale Druckkräfte in Betracht, so daß etwa entstehende normale Zugkräfte als negative normale Oberflächenkräfte zu bezeichnen sind.
Die tangentialen Oberflächenkräfte kommen für uns als Reibungen in Betracht, d.h. als Widerstandskräfte gegen d. relativ gleitende Bewegung gegen einen anderen berührenden Körper.
Wenn in d. Folge d. Rede sein wird von dem äußeren Druck in einem gewissen Punkt d. Oberfläche, so soll darunter verstanden werden d. Quotient, welchen man erhält, wenn man den auf ein unendlich kl. Flächenelement wirkenden äußeren Druck durch d. Flächeninhalt dieses Flächenelements d. Oberfläche dividirt. Ist dieser Druck in allen Elementen gleich, so soll er d. spec. äußere Druck d. Körpers genannt werden. Wenn ferner in Folge von d. äußeren auf einen Körper wirkenden Kräften d. Rede sein wird, dann sollen darunter im Besonderen alle diejenigen Kräfte verstanden werden, welche als Ursachen d. äußeren Zustandes und dessen Änderungen zu betrachten sind. Es gehören also zu den äußeren Kräften nicht nur d. Oberflächenkräfte d. äußeren Massenelemente im engeren Sinne, sondern auch d. inneren Massenkräfte, also im Allgemeinen d. Gravitation, denn auch diese betheiligt sich ja an den Ursachen d. Änderungen d. äußeren Zustandes.

Nachdem diese, meistens auch d. Mechanik zuzurechnenden Sätze über d. äußeren Zustand eines Körpers definirt sind, kann übergegangen werden zu speciellen Definition d. Begriffs d. inneren Zustandes eines Körpers.

Wenn in d. Folge von inneren Zustande eines Körpers im Gegensatze zu äußerem od. Bewegungszustand die Rede sein wird, so soll dieser nicht im weitesten Sinne d. Wortes verstanden werden, indem vorerst ganz von d. Erscheinungen abgesehen werden soll, welche ihre Ursachen im Licht, Electricität, Magnetismus haben. Der innere Zustand eines Körpers, wie er im folgenden immer verstanden werden soll, ist dann vollkommen bestimmt durch d. chemische Beschaffenheit, den Aggregatzustand, das spec. Volumen und durch d. Spannungszustände d. verschiedenen Elemente d. Körpers.
Diese verschiedenen 4 Argumente, welche den inneren Zustand eines Körpers feststellen, sollen nun näher angesehen werden:

Die chemische Beschaffenheit soll im folgenden als d. Art d. Körpers bezeichnet werden. 2 Körper heißen also gleich- od. ungleichartig, wenn sie von gleicher od. ungleicher Beschaffenheit sind. Ein Körper ist von gleichartiger Form, wenn alle seine Elemente von gleicher chemischer Beschaffenheit sind. Wenn nicht besonders d. Gegentheil besonders hervorgehoben wird, so soll stillschweigend immer ein Körper als gleichartig angesehen werden.
Was d. Aggregatzustände betrifft, welche gleichfalls den Körper charakterisiren, so kann d. Körper entweder fest, flüssig od. luftförmig sein.
Ein fester Körper ist charakterisirt durch d. beschränkte Veränderlichkeit seines Volumens und seiner Gestalt sowie d. Unmöglichkeit einer Mischung seiner Elemente unter einander, wobei unter Mischung verstanden ist, daß d. relative Gruppirungen d. Elemente so verändert werden, daß d. einzelnen Elemente ganz neue Nachbarelemente erhalten. Offenbar ist dies bei einem festen Körper schlechterdings unmöglich. Man kann also auch einen festen Körper dadurch charakterisiren, indem man sagt, daß d. Massenelemente an und für sich einer Veränderung fähig sind, während benachbarte Elemente immer Nachbarelemente bleiben müssen, da benachbarte Massenelemente eines festen Körpers keiner relativ gleitenden Bewegung gegen einander fähig sind.

Was im Gegensatze zu den festen Körper, die flüssigen und luftförmigen betrifft, so haben diese eine unbeschränkte Veränderlichkeit ihrer Gestalt und eine unbeschränkte Verschiebbarkeit gemein, indem d. kleinsten Elemente derselben einer unbeschränkt gleitenden relativen Beweglichkeit gegen einander fähig sind.

Die flüssigen und luftförmigen Körper sind dadurch von einander verschieden, daß d. flüssigen das mit d. festen Körpern gemein haben, daß ihr Volumen nur in einem sehr beschränkten Grade veränderlich ist, während d. luftförmigen Körper auch einer unbeschränkten Volumenveränderung (namentlich Volumenvergrößerung) fähig sind.
In dieser letzten Hinsicht ist jedoch bei den luftförmigen Körpern eine Theilung in 2 Classen vorzunehmen, indem d. Gase einer unbeschränkten Volumenvergrößerung und Verkleinerung, während Dämpfe erst einer unbeschränkten Volumenvergrößerung nicht aber einer unbeschränkten Volumenverkleinerung (sofern dieselben überhaupt noch luftförmig bleiben also ihren Aggregatzustand nicht ändern) fähig sind.
In d. Regel sind d. verschiedenen Aggregatformen eines Körpers ziemlich scharf von einander verschieden. Jedoch gibt es auch einige Körper, bei welchen vom festen zum flüssigen Zustand ein allmäliger Uebergang stattfindet welche man bekanntlich mit d. Namen zähflüssig, plastisch etc. bezeichnet. Am häufigsten treten diese Uebergangsformen bei zusammengesetzten organischen Stoffen auf, insbesondere bei allen Fetten, ferner auch bei solchen Mischungen, welche man als sehr innige Mischungen von festen und flüssigen Theilchen betrachten muß.
In d. Physik wird ein Körper mit homogen bezeichnet, wenn er gleichförmiger Art ist und alle seine Elemente gleiche Aggregatzustände haben, also wenn dessen Elemente alle chemisch gleich beschaffen sind und gleiche Aggregatformen haben. Sie wird streng genommen allerdings eine besondere Definition erforderlich hinsichtlich d. nicht streng geschiedenen Aggregatzustände. Es sei hiervon jedoch abgesehen. Im Folgenden kann man jedoch nicht alle Körper als homogen voraussetzen, indem man bei technischen Aufgaben oft Veranlassung hat, solche Körper zu betrachten, welche eine Mischung von Elementen gleicher Art in verschiedenen Aggregatzuständen sind. Z.B. eine Mischung von Wasser und Eis, Mischung von Wasser und Dampf.
In dieser Hinsicht sind jedoch 2 Unterschiede zu machen, indem man in continuirliche und discontinuirliche Gemenge zu theilen hat. Ein solches Gemenge wird continuirlich genannt, wenn, wie beim feuchten Wasserdampf, wenn es in unzählig kl. Bestandtheile zerlegt werden kann, so zwar, daß von einem Bestandtheil zum andern d. Aggregatzustand sich nur allmälig ändert.

Anders ist es aber bei discontinuirlichen Gemengen, indem hier d. Bestandtheile von verschiedenen Aggregatformen größere voneinanderhängende Gruppen bilden (Wasser und Dampf in einem Dampfkessel) und also d. Aggregatzustand sich unstetig, plötzlich ändert.

Unter dem spec. Volumen in einem gewissen Punkte eines homogenen Körpers od. einer continuirlichen Mischung soll d. Quotient verstanden, welchen man erhält, wenn d. Volumen eines A einschließenden unendlich kl. Körperelements durch dessen Gewicht dividirt wird; es stellt d. spec. Volumen im Punkte A = dem Volumen per Gewichtseinheit des, den Punkt A einschließenden Körperelements. Dieses spec. Volumen soll mit v bezeichnet werden. D. reciproke Werth $= \frac{1}{v}$ ist dann d. spec. Gewicht im Punkte A und sei bezeichnet mit γ. Man kann also d. spec. Gewicht im Punkte A auch definiren als d. Gewicht per Volumeneinheit eines den Punkt A enthaltenden Körperelements.
Endlich wird in d. Lehre noch von spec. Masse d. Rede sein, worunter d. Quotient verstanden werden soll, welchen man durch Division d. spec. Gewichts γ in dem betreffenden Punkte durch d. Beschleunigung g d. Schwerkraft erhält, also

$$\text{spec. Masse} = \mu = \frac{\gamma}{g}. \quad \text{und spec. Gewicht } \gamma = \frac{1}{v}$$

den einem spez. Volumen in einem bestimmten Punkte kann natürlich nur bei homogenen Körpern od. continuirlichen Ausfüllungen d. Raumes sein, während man bei discontinuirlichen Mischungen nur von einem mittleren spez. Volumen sprechen kann, worunter d. Quotient aus dem ganzen Volumen durch d. ganze Gewicht d. Gemisches verstanden wird. D. mittlere spez. Gewicht und d. mittlere spez. Masse sind dann nach den vorigen Beziehungen auch bestimmt.

Eine besonders eingehende Besprechung erfordert d. letzte Criterium d. Zustandes eines Körpers, nämlich d. Spannungszustand:

Bei d. zunächst vorliegenden Voraussetzung einer continuirlichen Raumerfüllung d. Materie (bei Abstraction einer molekularen Constitution) wird d. Wirkung d. äußeren Kräfte dadurch von Körperelement zu Körperelement übertragen, indem diese unendlich kl. Elemente, in die man sich den Körper auf beliebige Weise zerlegt denken kann, an ihren Berührungsflächen mit gewissen Kräften gegenseitig auf einander wirken. Diese Kräfte nennt man d. inneren Flächenkräfte. Dieselben sind natürlich nur als fingierte Kräfte zu betrachten, wenn mit jenen genannten (äußeren) Kräften d. Körpers und mit d. relativen Bewegung d. Körpers auftreten und verschwinden, außerdem aber von d. Art und Gruppierungsform derselben abhängen, indem sie gewissermaßen als d. momentane Ausdruck des durch diese materielle Beschaffenheit bedingten Widerstandes zu betrachten sind, dessen Untersuchung d. Änderung d. Volumens und d. Gestalt d. Massenelemente, sowie d. relativ bleibende Bewegung benachbarter Elemente gegeneinander im Allgemeinen erfordert. Durch d. verschiedenen Körpern verschiedenen Beziehungen, welche zwischen den inneren Flächenkräften und denjenigen Größen stattfinden, wodurch d. Änderungen d. Volumens und d. Gestalt d. Massenelemente sowie d. relativ bleibenden Bewegungen benachbarter Elemente bestimmt sind, wird d. Körperbeschaffenheit, sofern sie hierbei in Betracht kommt, gewissermaßen erst definiert, da sie überhaupt bei d. continuirlichen Abstraction von irgend einer bestimmten Voraussetzung in Betreff d. Wesens und d. Constitution d. Materie an und für sich undefinierbar wäre.

Hinsichtlich dieser inneren Flächenkräfte sind 2 Arten zu unterscheiden: Es sind nämlich diejenigen, welche d. Widerstand gegen eine Volumen und Gestaltänderung entsprechen, verschieden von denen, welche d. Widerstand gegen eine relativ gleitende Bewegung benachbarter Elemente entsprechen. Nur die ersteren, d. sog. Spannungen, charakterisieren d. inneren Zustand eines Körpers direct, während die letzteren, welche in d. Folge mit inneren Reibungen bezeichnet werden sollen, den inneren Zustand nur mittelbar bedingen, indem d. Spannungen von den inneren Reibungen abhängig sind.

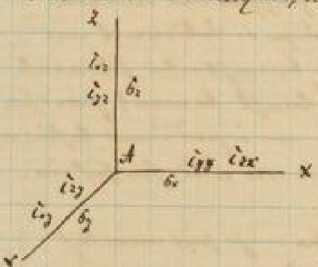
Was d. Spannungen betrifft so sind diese bereits Gegenstand d. ausführlichen Untersuchungen d. Elasticitätslehre gewesen, wo gefunden wurde, daß zwischen d. Spannungen in irgend einem Punkte d. Körpers für verschiedene durch diesen Punkt gehende Ebenen gewisse Beziehungen stattfinden. Gleichartige Beziehungen finden nun auch zwischen d. inneren Reibungen in irgend einem Körperpunkte für verschiedene d. diesen Punkt gehende Ebenen statt, indem die zwischen d. betreffenden Spannungen stattfindenden Beziehungen sich ganz allgemein auf innere Flächenkräfte überhaupt ausdehnen lassen. Diese Wechselbeziehungen d. betreffenden Beziehungen sind im Wesentlichen folgende:

In d. Folge sei ein beliebiger Körper vorausgesetzt und nicht nur wie bei d. Elasticitätslehre speciell ein fester Körper.

Es sei A ein Punkt in einer beliebigen Körperfläche F, u. dF sei ein unendlich kl. Flächenelement dieser Fläche F, welches d. Punkt A umschließt. AN sei eine im bestimmten Sinne genommene Normale d. Ebene F. Unter der inneren, mit S_N zu bezeichnenden

Wenn die Spannkraft im Punkte A der Ebene $\mathfrak{F}$, soll nun der Quotient verstanden werden, welcher erhalten wird durch Division mit dF in diejenige innere Kraft, mit welcher die im Sinne AB an F angrenzenden Körperelemente auf das Flächenelement dF wirken. (Damit in dieser Beziehung keine Verwechslung geschehen kann, wird stets von vornherein gesagt, daß die Normale AB eine bestimmte Richtung habe)
Offenbar stimmt diese Bezeichnung ganz mit derjenigen für die Spannung in einem Punkte einer Ebene der Elastizitätstheorie überein. Diese spezifische, d.h. auf die Flächeneinheit bezogene Spannkraft ϱ, welche mit der Richtung AB im Allgemeinen einen Winkel ω zwischen 0 und 180° od. zwischen 0 und π bilden kann, kann in 2 Komponenten zerlegt werden, eine nach der Normalen und die andere nach der Tangentialebene an F gerichtet. Die Normalkomponente ist dann $= \varrho \cos\omega$ und sei bezeichnet mit σ und die Tangentialkomponente $= \varrho \cdot \sin\omega = \tau$. (entsprechend der Normal- und Tangentialspannung in der Elastizitätslehre) Die Normalkomponente σ ist positiv od. negativ, je nachdem der Winkel ω zwischen 0–90° od. 90–180° liegt, je nachdem sie also nach AB od. nach BA gerichtet ist, entsprechend einem Zug od. Druck auf dF.
Die Tangentialkomponente τ ist jedoch eine absolute Größe, da $\sin\omega$ immer positiv ist, weil ω zwischen 0 – 180° liegt. Dieselbe kann aber in der Tangentialebene wieder in Komponenten nach zwei beliebigen Richtungen zerlegt werden, die dann + od. ÷ sind, je nachdem diese Richtungen mit der Richtung von τ spitze od. stumpfe Winkel bilden.

Es seien nun AX, AY und AZ drei zu einander senkrechte Richtungen parallel den Koordinatenaxen, auf welche der ganze Körper bezogen wird; x y u. z seien die Koordinaten des Punktes A bezüglich d. Koordinatensystems.



Nun kann man sich einen Spannkraft im Punkte A d. Ebene YAZ zerlegt in 2 Komponenten zerlegt denken, in eine Normalkomponente σ_x nach AX und eine Tangentialkomponente nach d. Ebene YAZ, letztere kann man aber wiederum in 2 Seitenkomponenten τ_{xy} und τ_{xz} nach d. Richtungen d. Y und Z Axe zerlegt denken. Ebenso kann man die inneren Spannkräfte im Punkte A d. Ebenen ZAX und XAY in d. entsprechenden Komponenten zerlegt denken. Es sind dann d. Komponenten d. inneren Spannkräfte

		nach Richtungen AX	AY	AZ
1) Für Punkte A d. Ebene YAZ	=	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
2) Für Punkte A d. Ebene ZAX	=	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
3) Für Punkte A d. Ebene XAY	=	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

welche im Sinne derjenigen Kräfte verstanden werden müssen, welche die auf den Seiten d. positiven Achsenrichtungen AX AY AZ gelegenen Körperteile auf d. genannten Ebenen pro Flächeneinheit im Punkte A ausüben.
Denkt man sich nun den Punkt A als den Eckpunkt eines unendlich kl. rechtwinkligen parallelepipedischen Körperelements, dessen von A ausgehenden Kanten mit d. 3 Axen X Y u. Z zusammenfallen, so sollen d. Koordinaten d. gegenüberliegenden Eckpunktes A_1 d. Körperelements $= x + dx$, $y + dy$ und $z + dz$ sein, wenn dx dy und dz d. Kantenlängen d. Parallelepipeds sind. So erhält man offenbar d. Spannkräfte, welche auf d. drei vom d. Eckpunkt A zusammenliegenden Seitenflächen dieses Körperelements von d. Außenseite, also im negativen Sinne d. Axen AX AY u. AZ, angrenzenden Körpermasse ausgeübt werden, indem man d. obigen 3 Gruppen von spezifischen Kräften unter 1) 2) u. 3) resp. mit $\div dy\,dz$, $\div dz\,dx$ und $\div dx\,dy$ multipliziert. Ebenso erhält man d. Spannkräfte, welche auf d. 3 um d. Eckpunkt A_1 zusammenliegenden Seitenebenen von d. Außenseite, jetzt aber im positiven Sinne d. Axenrichtungen,

angrenzenden Körpermasse ausgeübt werden, indem man dieselben Grössen ihrer Kräfte mit $dy\,dz$, $dz\,dx$ und $dx\,dy$ multiplizirt, nachdem sie zuvor um ihre partiellen Differentiale resp. nach x, y und z genommen, vergrössert wurden. In dieser Weise erhält man im Ganzen 18 Kräfte, welche auf d. Oberfläche d. Körperelementes wirken, und dasselbe entweder in Bewegung od. in Ruhe halten. Soll d. Körperelement in relativer Ruhe sein, so müssen d. erhaltenen 18 Oberflächenkräfte d. Elements im Gleichgewicht sein mit den auf seine Masse wirkenden äusseren Kräften und mit d. Beharrungskräften dieser Masse gegen ihre Beschleunigung.

Was die auf d. Masse d. Körperelements wirkenden äusseren Massenkraft betrifft, so sei μ d. spec. Masse d. Körpers im Punkte A = Masse d. Volumeneinheit und X Y Z d. nach d. Axen AX AY AZ gerichteten Componenten d. auf d. Masseneinheit bezogenen, im Punkte A wirkenden Massenkraft, so ist also:

$\mu X\,dx\,dy\,dz$, $\mu Y\,dx\,dy\,dz$ und $\mu Z\,dx\,dy\,dz$ d. 3 Componenten d. äusseren Massenkraft sind, welche auf d. Körperelement $dx\,dy\,dz$ ausgeübt wird.

Bezüglich d. Beharrungskräfte d. Masse gegen d. Beschleunigung d. Körperelements seien φ_x φ_y und φ_z d. Componenten d. Translationsbeschleunigung d. Körperelements im Sinne d. 3 Axen, dann sind offenbar d. Componenten d. ~~[illegible]~~ Beharrungskraft gegen diese Translationsbeschleunigungen:

$$= -\mu\,\varphi_x\,dx\,dy\,dz \qquad -\mu\,\varphi_y\,dx\,dy\,dz \quad \text{und} \quad -\mu\,\varphi_z\,dx\,dy\,dz.$$

Im Allgemeinen besteht d. Bewegung d. unendlich kl. Körperelements ausser in einer Translations~~beschleunigung~~bewegung auch in einer Rotationsbewegung. Diese kommt aber als eine unendlich kl. Grösse höherer Ordnung nicht in Betracht, denn, da d. Trägheitswiderstand gegen d. Rotation um eine durch A gehende Momentenaxe = dem Produkt aus Winkelbeschleunigung und Trägheitsmoment d. Elements bezüglich d. Momentenaxe ist, so ist dieses unendlich kl. von d. 5t. Ordnung, woraus hervorgeht, daß man d. Rotationsbeschleunigung wirkende Kräftepaare gar nicht zu berücksichtigen braucht.

Wenn nun alle diese auf d. Körperelement wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sein sollen, so müssen bekanntlich 6 Bedingungsgleichungen erfüllt werden.

Bildet man zunächst aus, daß d. algebraischen Summen aller Kraftcomponenten im Sinne d. 3 Axen, einzeln = 0 sein müssen, so bekommt man nämlich d. bekannten Gleichungen in d. Elastizitätslehre, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \mu(X - \varphi_x) &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \mu(Y - \varphi_y) &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \mu(Z - \varphi_z) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 1.$$

und aus d. ~~[illegible]~~ Aufstellung d. Momentengleichungen für d. 3 Axen d. Gleichungen:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den bekannten d. Elastizitätslehre nur dadurch, daß d. Reactionen d. Beschleunigungen noch hinzugekommen sind zu den Kräften, und daß damals unter X Y u. Z d. Componenten d. äusseren Massenkräfte pr. Volumeneinheit verstanden wurden, während sie jetzt d. Componenten derselben pr. Masseneinheit bedeuten.

In Folge d. letzten Gleichungen, nach welchen d. Tangentialcomponenten τ immer paarweise einander entsprechend gleich sind, kann man auch eine kürzere Bezeichnung einführen, indem man setzt: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z$; $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_y$ und $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x$. So lassen sich dann die ersten 3 Bedingungsgleichungen auch folgendermassen schreiben:

$$2. \dots \left\{ \begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_y}{dz} + \frac{d\tau_z}{dy} + \mu(X - \varphi_x) &= 0 \\ \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_z}{dx} + \frac{d\tau_x}{dz} + \mu(Y - \varphi_y) &= 0 \\ \frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{d\tau_x}{dy} + \frac{d\tau_y}{dx} + \mu(Z - \varphi_z) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Ebenso wie in der Elasticitätslehre durch die betreffenden 6 Spannungscomponenten der Spannungszustand in einem Punkte vollkommen bestimmt wird, indem diese Componenten die Spannung in dem betreffenden Punkte nach einer beliebigen Richtung bestimmen, ebenso bestimmen auch die vorliegenden 6 Componenten σ – τ die inneren Reibungskräfte in einem Punkte vollkommen die innere Reibungswirkung, indem sie nach Größe und Richtung die innere Reibungskraft in dem Punkte einer beliebigen durchgelegten Ebene bestimmen. Denkt man sich nämlich durch den Punkt A eine Richtung AB gezogen, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ bildet, und in A eine Normalebene zu dieser Richtung AB, so ist die innere Reibungskraft ρ im Punkte A dieser Ebene, wenn a, b, c die Winkel sind welche die im Allgemeinen nicht normal zur Ebene Richtung von ρ mit den Axen bildet, ganz nach den bekannten Formeln der Elasticitätslehre:

$$3 \dots \left\{ \begin{aligned} \rho \cos a &= \sigma_x \cos\alpha + \tau_y \cos\gamma + \tau_z \cos\beta \\ \rho \cos b &= \sigma_y \cos\beta + \tau_z \cos\alpha + \tau_x \cos\gamma \\ \rho \cos c &= \sigma_z \cos\gamma + \tau_x \cos\beta + \tau_y \cos\alpha \end{aligned} \right.$$

welche Formeln erhalten werden, wenn man die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte an einem unendlich kl. tetraedrischen Körperelement aufstellt, welches aus dem körperlichen Eck, dessen Kanten Ax Ay und Az sind, von einer zu AB senkrechten unendlich nahe an A entfernten Ebene abgeschnitten wird. Mit Rücksicht auf die eben gefundenen Gleichungen und die bekannte Relation: $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$ ist dann ρ sowohl der Größe und Richtung nach bestimmt.

Da diese innere Reibungskraft, wie schon erwähnt, im Allgemeinen nicht normal zur Ebene gerichtet ist, so kann man sie in 2 Componenten zerlegen, eine normal zur Ebene in der Richtung von AB und eine in die Ebene selbst fallend. Die Normalcomponente, bezeichnet mit σ, ist dann $= \rho$ mal cos des Winkels, welchen die Richtung von $AB\ (\alpha\ \beta\ \gamma)$ mit der Richtung von $\rho\ (a\ b\ c)$ bildet; nach der analytischen räumlichen Geometrie ist dieser cos aber bestimmt durch:

$$\sigma = \rho(\cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma)$$

Setzt man hierin für $\rho \cos a$, $\rho \cos b$ und $\rho \cos c$ die unter 3 gefundenen Werthe ein, so bekommt man:

$$4 \dots \quad \sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + 2\tau_x \cos\beta\cos\gamma + 2\tau_y \cos\gamma\cos\alpha + 2\tau_z \cos\alpha\cos\beta$$

(eine ganz analoge Beziehung, welche zwischen der Normalspannung und den Spannungscomponenten nach 3 zu einander beliebig senkrechten Richtungen in der Elasticitätslehre stattfinden).

In derselben Weise wie in der Elasticitätslehre lassen sich hieraus 2 wichtige Folgerungen ziehen:
1) die Summe dieser Normalkräfte σ für je drei in einem Punkte A sich rechtwinklig schneidenden Ebenen gleich groß ist.
2) durch jeden Punkt eines Körpers lassen sich immer 3 zu einander senkrechte Ebenen legen, für welche die Tangentialcomponenten der inneren Reibungskräfte $= 0$ sind, ~~letztere~~, ~~nämlich~~ die inneren Reibungskräfte, selbst also normal sind.

Am wichtigsten für die späteren Anwendungen sind jedoch immer die unter 2 genannten 3 Beziehungen zwischen den 6 Componenten σ – τ. Diese 3 Gleichungen zwischen bedingen sich den äußeren Zustand und inneren Zustand gegenseitig, indem in die Formeln sowohl Werthe mit den äußeren als auch inneren Kraft vorkommen. Im Allgemeinen müssen diese beide in Untersuchung gezogen werden.

Dabei sind jedoch die beiden Fälle eines festen und flüssigen Körpers (letzteren im weiteren Sinne als flüssig und luftförmig) genau genommen zu unterscheiden, nicht nur weil im letzteren Falle d. Größen $\mathfrak{S}$ u. t nicht den Spannungscomponenten zugleich d. Componenten d. inneren Reibungen in sich schließen, sondern weil auch den Differentialgleichungen d. Bewegung bei einer Flüssigkeit überhaupt eine andere Auffassung zu Grunde liegt als bei einem festen Körper. Indem nämlich d. Massenelemente einer Flüssigkeit einer ganz beliebigen relativen Bewegung fähig sind, wobei sie zugleich relative und eine unbeschränkte Ausdehnung und Gestaltänderung erfahren können, kann man die Änderungen ihres äußeren und inneren Zustandes nur mittelst derselben verfolgen, daß dieser Zustand für dasselbe Volumenelement zu verschiedenen Zeiten und für verschiedene Volumenelemente zu derselben Zeit bestimmt werden. Während also d. Körperelement, welches d. eigenen Betrachtungen zu Grunde liegt, bei d. Anwendung auf einen festen Körper als ein ~~Massen~~element im strengen Sinne d. Wortes zu betrachten ist, stellen es bei d. Anwendung auf einen flüssigen Körper nur einen Raum eines unendlich kl. Zeitelements als das Körper eines und desselben Masse zu betrachten ist und sich diese Betrachtung noch deutlicher herausstellen, wenn sie auch d. Untersuchungen bei Flüssigkeiten besonders angewendet werden.

Die erhaltenen Differentialgleichungen enth. 2 enthalten nun 10 unbekannte Functionen, $\mathfrak{S}_x\ \mathfrak{S}_y\ \mathfrak{S}_z\ t_x\ t_y\ t_z\ s_x\ s_y\ s_z\ \mu$ der unabhängigen Veränderlichen $x\ y\ z$ u. d. Coordinaten d. betreffenden Punkts. Um diese zur Bestimmung d. Zustandsänderungen (äußeren und inneren) eines Körpers unter gegebenen Umständen geeigneter zu machen, müssen dieselben noch derart ergänzt und erweitert werden, daß man ebenso viele Bestimmungsgleichungen zur Verfügung hat, als man unbekannte Größen vorkommen, welche als Functionen von $x\ y\ z$ und d. Zeit t zu bestimmen sind. Diese können nur abgeleitet werden aus d. allgemeinen Beziehungen, welche zwischen d. Spannungen und d. Deformationen d. Massenelemente bei festen Körpern stattfinden, sowie bei flüssigen Körpern aus d. Beziehungen zwischen d. inneren Reibungen und d. relativen Bewegungen benachbarter Elemente d. Körpers stattfinden.

Zunächst sollen nur <u>feste</u> Körper vorausgesetzt werden.

Die inneren Flächenkräfte sind dann lediglich Spannungen, und enthalten keine inneren Reibungen, weil d. Elemente d. festen Körper keiner relativ gleitenden Bewegung gegeneinander fähig sind der Definition eines festen Körpers gemäß. Die Größen $\mathfrak{S}$ sind Normalspannungen und d. Größen t Tangentialspannungen. Denkt man d. rechtwinklige Coordinatensystem in bekannter Weise am Körper fixiert, seien $x\ y\ z$ d. sogenannten ursprünglichen Coordinaten eines gewissen materiellen Punktes A d. Körpers d. h. diejenigen Coordinaten von A, welche d. Fall entsprechen, daß ~~die äußeren~~ in Betracht gezogenen äußeren Kräfte $= 0$ sind und d. Körper sich in relativer Ruhe befindet und somit auch alle Spannungen $= 0$ sind. Für diesen besonderen Fall soll d. Zustand eines festen Körpers für d. Folge sein <u>ursprünglicher</u> Zustand genannt, und in diesem ursprünglichen Zustand seien $x\ y\ z$ d. Coordinaten d. Punktes A, wodurch dieser Punkt individuell bestimmt ist. Ebenso seien $x + dx\ \ y + dy\ \ z + dz$ d. ursprünglichen Coordinaten eines 2t. materiellen Punktes A_1, welcher unendlich nahe an A liegt. Diese beiden materiellen Punkte A und A_1 seien nun als d. gegenüberliegenden Eckpunkte eines unendlich kl. parallelepipedischen Körperelements betrachtet, dessen Kantenlängen dann im ursprünglichen Zustand $= dx\ dy$ und dz sind. $X\ Y\ Z$ sollen bei d. jetzigen Betrachtung eines festen Körpers d. durch d. Masse d. Axen gerichteten Componenten d. relativen beschleunigenden Kraft für den Punkt A. bei d. eigenen Bewegung d. am Körper fixierten Raumsystems festgesetzt werden, indem d. Zustand d. Körpers nun aufgefaßt werden soll als innerer Zustand und als relativer Bewegungszustand d. Körpers in bezug auf d. Raumsystem.

Sind nun $x + \xi\ \ y + \eta$ und $z + \zeta$ d. Coordinaten d. Punktes A bei d. Zustandsänderung, so ist dieser offenbar in jedem Augenblick bestimmt, wenn diese Coordinatenänderungen $\xi\ \eta$ und ζ als Functionen von $x\ y\ z$ und t entwickelt werden. Im Folgenden sei nun d. Weg dargestellt, wie man zu verfahren hat:

Das kleinste parallelepipedische Massenelement erfährt bei d. Formänderung nur eine kl. Gestaltänderung. Bei d. vorausgesetzten kleinen [illegible] ist diese Deformation eine homogene, [illegible] bei [illegible] unendlich kl. Größen höherer Ordnung [illegible] aus einer kl. Zusammendrückung d. Kanten und einer Änderung d. [illegible] ursprünglich rechten Winkeln. Sind d. ursprünglichen Kantenlängen — dx dy dz [illegible] d. veränderten Kantenlängen [illegible]:

$$dx(1+\varepsilon_x) \qquad dy(1+\varepsilon_y) \qquad dz(1+\varepsilon_z)$$

[illegible] ε_x ε_y und ε_z nichts anderes bedeuten als d. Ausdehnungen, welche im Punkte A nach d. Coordinatenrichtungen stattfinden. Ferner seien d. ursprünglich rechtwinkligen, veränderten Kantenwinkel

$$= \frac{\pi}{2} - \gamma_x \ , \quad \frac{\pi}{2} - \gamma_y \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} - \gamma_z \, ,$$

[illegible] d. rechten Winkels bedeuten.

Bekanntlich werden d. Größen γ [illegible] d. Elasticitätslehre [illegible] als d. Schiebungen [illegible] Punkten A: A_1 [illegible].
Man kann dann γ_x als d. Verschiebung einer zur Y Axe senkrechten Ebene nach d. Richtung d. Z Axe
Dass " — " " " " " Z Axe " " " " — d. Y Axe
γ_y " " " " " Z " " " " " " X "
[illegible] " " " " " X " " " " " " Z "

[illegible]

Diese 3 Größen γ [illegible] Verschiebungscomponenten im Punkte A nach den betreffenden Richtungen genannt.
Diese 6 Größen ε und γ sind nun durch d. [illegible] Coordinatenänderungen ξ η — ζ d. materiellen Punktes A bestimmt, es ist bekanntlich aus d. Elasticitätslehre [illegible]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

und ferner:

$$\gamma_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$\gamma_y = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

$$\gamma_z = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Durch diese 6 Größen [illegible] nämlich den Ausdehnungen ε_x ε_y ε_z im Punkte A nach den Richtungen d. Axen und den Verschiebungen γ_x γ_y γ_z [illegible] dieser Richtungen parallelen Seitenebenen d. parallelepipedischen Elements nach den anderen Axenrichtungen ist d. Ausdehnung ε im Punkte A nach einer beliebigen Richtung bestimmt, [illegible] folgende Gleichung, wenn α β γ d. Winkel sind, welche d. [illegible] Richtung mit den Axen bildet:

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_x \cos\beta\cos\gamma + \gamma_y \cos\gamma\cos\alpha + \gamma_z \cos\alpha\cos\beta .$$

(Ein Ausdruck ganz analog gebildet demjenigen für d. Spannung σ in einem Punkte nach einer beliebigen Richtung)
Dieser Ausdruck für ε gestattet auch ganz analoge Folgerungen, [illegible] wie derjenige für σ: [illegible] nämlich für jeden einzelnen Punkt eines Körpers d. algebraische Summe [illegible] Ausdehnungen ε für je 3 zu einander senkrechte Axen constant. Diese Summe d. Ausdehnungen ε nach 3 zu einander senkrechten Richtungen bedeutet aber nichts anderes als d. [illegible] Volumenausdehnung [illegible] e im betreffenden Punkte. Es ist also,

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

= Vergrösserung zur Volumeneinheit eines diesen materiellen Punkt enthaltenden Massenelements beim Übergange vom ursprünglichen Zustand in d. veränderten Zustand.

Ferner konnte [illegible] d. Elasticitätslehre mit dem Ausdruck für ε gefolgert werden, dass sich [illegible] jeden materiellen Punkt A drei zu einander senkrechte Ebenen [illegible], in welchen d. Verschiebungen $\gamma = 0$ sind, [illegible] ein unendlich kl. parallelepipedisches Massenelement, dessen [illegible] Seitenebenen im ursprünglichen Zustand in diese 3 [illegible] Ebenen hineinfallen, auch nach einer unendlich kleinen Zustand in diese ausgezeichneten Ebenen hineinfallen, und also d. Element noch immer rechtwinklig parallelepipedisch bleibt und nur d. Kantenlängen sich ändern. Diese 3 ausgezeichneten Ebenen fallen mit denjenigen zusammen, in welche d. Tangentialspannungen $t = 0$ sind. Denkt man sich 3 Richtungen normal zu den 3 ausgezeichneten Ebenen gezogen, so sind bekanntlich d. Spannungen und Ausdehnungen im Sinne dieser 3 Richtungen Hauptspannungen resp. Hauptausdehnungen; diese seien bezeichnet mit $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ resp. $\varepsilon_1\ \varepsilon_2$ und ε_3. Unter ihnen befinden sich auch (algebraisch verstanden) die größte und d. kleinste Normalspannung σ resp. Ausdehnung ε, welche im Punkte A nach irgend welchen Richtungen stattfinden.

Was nun d. Beziehungen zwischen d. Größen σ, t und ε etc. betrifft, so enthalten diese Beziehungen verschiedene von d. Beschaffenheit d. Körpers abhängige Constanten, welche sich jedoch für d. Fall eines durchaus isotropen Körpers d.h. eines Körpers, welcher nach allen Richtungen gleich beschaffen ist auf bloß 2 reduciren. Es ist dann nämlich wie d. Elasticitätslehre ja bekanntlich für einen isotropen Körper:

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{e}{n-2}\right) = 2G\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{e}{n-2}\right)$$

$$\sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{e}{n-2}\right) = 2G\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{e}{n-2}\right)$$

$$\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{e}{n-2}\right) = 2G\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{e}{n-2}\right)$$

und ferner:

$$\tau_x = G\gamma_x = G\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

$$\tau_y = G\gamma_y = G\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)$$

$$\tau_z = G\gamma_z = G\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

In diesen Beziehungen zwischen σ, t und ε etc. kommen die beiden Constanten G u. n vor, während e als Volumenausdehnungscoefficient $= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ bekannt ist.

Die letzten d. 6 Beziehungen lassen sich für gewisse Fälle bequemer noch dadurch aufstellen, daß man umgekehrt d. Ausdehnungen $\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z$ als Functionen d. Spannungen $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z$ darstellt mit Hülfe d. Beziehung, welche zwischen G und n zu einer anderen Constanten E, d.h. Elasticitätsmodul stattfindet, nämlich:

$$E = 2\,\frac{n+1}{n}\,G\text{; man bekommt dann:}$$

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{n}$$

$$E\varepsilon_y = \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{n}$$

$$E\varepsilon_z = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{n}$$

Die Bedeutung d. Constanten E und n ist am deutlichsten zu erkennen, wenn man 2 d. 3 Normalspannungen z.B. σ_y u. $\sigma_z = 0$ setzt. Man bekommt dann:

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad \text{und} \quad n = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}$$

Es ist also d. Elasticitätsmodul E = dem Verhältniß einer Normalspannung zu entsprechender Ausdehnung, vorausgesetzt, daß in allen zu ersterer Richtung senkrechten Richtungen d. Normalspannungen $= 0$ sind. n dagegen ist d. reciproke Verhältniß, mit demselben Vorzeichen, d. Ausdehnung nach 1 Hauptrichtung zu den resp. Ausdehnungen d. Richtungen, wo senkrecht zu d. Normalspannungen $= 0$ sein sollen.

Bekanntlich sind die beiden Constanten E u. G für verschiedene Körper sehr bedeutend verschieden, während Constante n für alle Körper nahezu denselben Werth zwischen 3 u. 4 hat. In d. Elasticitätslehre wird schon erwähnt, daß theoretische Untersuchungen auf Grund d. atomistischen Ansicht in Betreff d. Constitution

[illegible]

[illegible] $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_x\ \tau_y\ \tau_z$ [illegible] 2 [illegible]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} = 2g\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x}\right) + g\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) + g\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right)$$

$$= g\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right] + \frac{2}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right\}$$

[illegible]: $\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e$

= [illegible]

Nun hat also:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} = g\left[\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}\right]$$

[illegible] φ_x [illegible]

[illegible] $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ [illegible] A [illegible]

und also $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ — $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$ [illegible] $= \varphi_x$ [illegible] φ_y [illegible] φ_z

[illegible]:

$$g\left(\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) + \mu\left(X - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) = 0$$

$$g\left[\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right] + \mu\left[Y - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right] = 0$$

$$g\left[\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}\right] + \mu\left[Z - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right] = 0$$

[illegible] μ [illegible] $A(xyz)$ [illegible] $X\ Y\ Z$ [illegible] $x\ y\ z$ [illegible] 3 [illegible] 3 [illegible] $\xi\ \eta\ \zeta$ [illegible] $x\ y\ z$ [illegible] $t = 0$ [illegible] $\xi\ \eta$ und ζ [illegible] $x\ y\ z$ [illegible] t. [illegible] 3 [illegible] $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ [illegible] $x\ y\ z$ [illegible] t. [illegible] μ. [illegible] 6 [illegible] $\sigma - \tau$; [illegible] $\xi\ \eta\ \zeta$ [illegible] $x\ y\ z$ [illegible] $x\ y\ z$ [illegible].

Was d. spez. Masse im Punkte A (x y z) betrifft, so ändert sich diese natürlich, da $\mu = \frac{1}{v g}$, ein eingetretener Verschiebung mit d. spez. Volumen sich ändert. Da aber d. spez. Volumen sich in dem Verhältniss $1 : 1+e$ vergrössert hat, so hat d. spez. Masse sich in dem Verhältnisse $1+e : 1$ verkleinert, so dass die spez. Masse im Punkte A bestimmt durch: $\frac{\mu}{1+e} = \mu(1-e)$ bei Vernachlässigung unendl. kl. Grössen. e = Volumenausdehnungscoefficient war aber eine Function der ersten partiellen Ableitungen von $\xi\ \eta\ \zeta$ nach $x\ y\ z$ nämlich $e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ und mithin selbst auch eine Function von $x\ y\ z$, so dass auch die veränderte spez. Masse als eine Function von $x\ y\ z$ bestimmt ist.

Es lässt sich nun leicht übersehen, dass d. vorstehenden Entwickelungen auf grosse Schwierigkeiten stösst, aus welchem Grunde bei d. späteren Anwendungen einige Vereinfachungen vorgenommen werden, und zwar wird in d. Regel allgemein vorausgesetzt, dass d. innere Zustand eines Körpers durch 2 Grössen bestimmt sei.

Bei einem festen Körper ist dies dann d. Fall, wenn derselbe überall durch Kräfte angegriffen wird, dass gar keine Tangentialspannungen sondern nur Normalspannungen vorkommen. Soll dies d. Fall sein, so ist natürlich dazu nöthig, dass d. Oberflächenkräfte nur normale Druckkräfte sind, denn wenn auch tangential an die Oberfläche d. Körpers gerichtete Kräfte vorhanden (z.B. Reibungen) so würden auch Tangentialspannungen entstehen. Dass unter den genannten Voraussetzungen von nur normal gegen d. Oberfläche gerichteten Druckkräften, nämlich d. Fall ist, dass d. innere Zustand überhaupt durch nur 2 Grössen bestimmt ist, lässt sich folgendermassen leicht beweisen.

Ist A ein Punkt d. Körpers mit den Coordinaten $x\ y\ z$, und ρ d. resultirende Spannung mit den Richtungswinkeln $a\ b\ c$ gegen d. Axe, in einer durch A gehenden Ebene, deren Normal AB mit den Axen d. Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ bildet, dann ist nach Seite 10.3:

$$\rho \cos a = \sigma_x \cos \alpha + t_y \cos \gamma + t_z \cos \beta$$

etc. etc. etc. etc.

Wenn nun aber alle Tangentialspannungen t für beliebige Ebenen d. Körpers $= 0$ sein sollen, also

$$t_x = t_y = t_z = 0$$

so wird auch $a = \alpha$, $b = \beta$ und $c = \gamma$ für jede Richtung $\alpha\ \beta\ \gamma$, da dann d. resultirende Spannung σ immer normal zur Spannungsebene gerichtet sein muss. Gleichzeitig ist dann auch:

$$\rho = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z.$$

Wenn also in einem Körper durchaus keine Tangentialspannungen vorkommen, so ist d. Normalspannung in irgend einem Punkte für alle Ebenen gleich gross. In diesem Falle ist diese Normalspannung einzig mit Spannung eines betreffenden Punktes bezeichnet. Durch diese für jeden Punkt nach allen Richtungen constante Spannung σ ist dann auch d. Spannungszustand in d. betreffenden Punkte vollkommen bestimmt. Mit Rücksicht auf d. spez. Masse μ und diese Spannung σ ist demnach bei gegebener Art und Spannungsform d. Körpers sein innerer Zustand vollkommen bestimmt in dem betreffenden Punkte, wozu also nur 2 Grössen σ und μ nöthig sind. Die Fundamentalgleichungen Seite 10.2 nehmen unter diesen Umständen dann folgende einfachere Form an:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \mu(X - \varphi_x) = 0\ ;\quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \mu(Y - \varphi_y) = 0 \text{ und } \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \mu(Z - \varphi_z) = 0.$$

Hervorzuheben ist dabei insbesondere d. Fall, dass d. Körper sich in relativer Ruhe gegen d. Axensystem befindet, also dann: $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ und welcher d. Grössen $\mu\ \xi\ \eta\ \zeta$ und Functionen von $x\ y\ z$, man hat dann durch Addition:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = d\sigma.$$

Da nun d. rechte Seite dieser Gleichung ($d\sigma$) das vollständige Differential einer Function von $x\ y\ z$ ist, so gilt dasselbe auch von d. linken Seite. Es muss also eine gewisse Function F von $x\ y\ z$ geben, welche so beschaffen sein muss, dass:

$$\mu X = \frac{\partial F(x y z)}{\partial x}\ ;\quad \mu Y = \frac{\partial F(x y z)}{\partial y} \text{ und } \mu Z = \frac{\partial F(x y z)}{\partial z} \text{ ist.}$$

Aus der oben gefundenen Gleichung für $d\sigma$ folgt demnach: →

$$d\sigma = -\,d\mathfrak{F}(x\,y\,z)$$

$$\text{also } \sigma = -\,\mathfrak{F}(x\,y\,z) + \text{Constante.}$$

Diese Constante wird dadurch bestimmt, daß man den Werth von σ für einen gewissen Punkt d. Körpers kennt. Sind z. B. $x_0\, y_0\, z_0$ d. Coordinaten eines Punktes an d. Oberfläche des Körpers und p_0 d. zugehörige Oberflächendruck in dem betreffenden Punkt, so ist an dieser Stelle $\sigma = -p_0$

und also d. Constante $= \mathfrak{F}(x_0\, y_0\, z_0) - p_0$

Der Körper kann in diesem Fall durch Flächen gleicher Spannung, die man sich schon nicht durch den Körper hindurchgelegt denkt, in unendlich dünne Schichten zerlegt gedacht werden, so daß d. Spannung an jeder dieser Flächen gleich groß, dieselbe sich jedoch von Schicht zu Schicht ändert.

Die Gleichung einer solchen Fläche gleicher Spannung ist dann offenbar:

$\mathfrak{F}(x\,y\,z) = C$ wenn C als eine Constante bedeutend, welche entsprechend d. verschiedenen Flächen verschiedene Werthe zugetheilt werden kann.

Bemerkenswerth erscheint dabei noch d. Specialfall, daß nicht nur $\mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ ein vollständiges Differential d. Coordinaten $x\,y\,z$ ist, sondern daß schon $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ allein das vollständige Differential einer Function von $x\,y\,z$ ist, daß also:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d f(x, y\,z) \text{ ist.}$$

In diesem Falle ist dann:

$$d\sigma = -\mu\, df(x,y,z)$$

und da nun d. linke Seite ein vollständiges Differential von $x\,y\,z$ ist, so muß auch rechte Seite ein vollständiges Differential sein, d. h. es muß μ eine Function d. Function f sein.

Wenn man also sich den Körper wieder in unendlich dünne Schichten zerlegt denkt durch Flächen, deren Gleichungen sind: $f(x\,y\,z) = C$ unter C verschiedene Constanten verstanden, so ist allen Punkten dieser Flächen nicht nur d. Spannung σ sondern auch d. spec. Masse μ constant.

Wenn nun noch specielle Fall eintritt, daß die Körper äußeren Massenkräfte und also auch deren Componenten $X\,Y\,Z = 0$ sind, so daß nur d. äußere Oberflächendruck vorhanden ist, so ist auch d. vollständige Differential d. Function $f = 0$; die Function f hat also dann einen constanten Werth für den ganzen Körper. Dementsprechend muß dann auch in allen Punkten d. Körpers gleiche Spannung σ und eine gleiche spec. Masse vorhanden sein; ferner müßte dann auch der äußere Druck p_0 für alle Punkte d. Oberfläche constant sein, es müßte also d. Körper von allen Seiten einen gleich starken Druck auszuhalten haben. Wenn jedoch umgekehrt gegeben ist, daß p_0 in allen Punkten d. Oberfläche gleich groß ist, so ist damit durchaus nicht zu entnehmen, daß in allen Punkten d. Körpers gleiche Spannungen und gleiche spec. Massen vorhanden sind, sondern es würde nur daraus folgen, daß d. Oberfläche d. Körpers eine Fläche gleicher Spannung ist.

Anwendung d. Fundamentalgleichungen auf einen flüssigen Körper im weiteren Sinne d. Wortes.

Zunächst wird es nun darauf ankommen die Seite 10 gefundenen fundamentalen Differentialgleichungen zur Untersuchung d. Zustandsänderung einer Flüssigkeit (im weiteren Sinne) auf eine solche Form zu bringen, wie sie sich für Flüssigkeiten eignet. Es wurde damals gefunden:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_y}{dz} + \frac{d\tau_z}{dy} + \mu(X - \varphi_x) = 0$$
etc.

In den Größen σ und τ sind jedoch jetzt nicht nur Spannungscomponenten sondern auch Componenten d. inneren Reibungen enthalten.

In Betreff d. Coordinatenaxen, worauf d. Flüssigkeit bezogen werden soll, ist zu bemerken, daß man dieselbe nicht in derselben Weise auffassen kann wie vorher, wenigstens würde dieses keinen Nutzen bringen da bei einem Körper seine [illegible] mit der Bewegung d. Körpers natürlich selber eine sehr schwer zu sehende Bewegung annehmen könnte. Man nimmt deshalb jetzt an, d. Flüssigkeit in relativer Bewegung ist, an, daß d. Continuitäten [illegible] außerhalb derselben sofort gebracht wird an d. Gefäß, d. Röhre, den Kanal, überhaupt an d. festen Wände, innerhalb welcher d. Flüssigkeit bewegt wird. $x\ y\ z$ seien d. augenblicklichen Coordinaten irgend eines Punktes A; diese Coordinaten können in zweifacher Weise aufgefaßt werden, je nachdem man den Punkt A als einen räumlichen Punkt oder als den materiellen Punkt d. Flüssigkeit betrachtet, welcher sich augenblicklich im Punkte A d. Raumes befindet. Im ersteren Falle sind d. Coordinaten $x\ y\ z$ von einander unabhängige Variable, die sich ändern, wenn man von einem zu einem andern Punkte fortschreitet. Betrachtet man aber d. Punkt als den materiellen Punkt d. Flüssigkeit, welcher sich zur Zeit t im Punkte A d. Raumes befindet, so sind d. Coordinaten $x\ y\ z$ Functionen d. Zeit t.

Es seien ferner für den Punkt A d. Raumes zur Zeit t, die spezifische Masse $= \mu$, die Componenten d. beschleunigenden Massenkraft $= X, Y, Z$, d. Componenten d. Beschleunigung $= \varphi_x\ \varphi_y\ \varphi_z$ und d. Componenten d. Geschwindigkeit $= u\ v\ w$, alle Componenten im Sinne d. Coordinatenaxen genommen. Alle diese Größen sind, wenn man sie auf den räumlichen Punkt d. Raumes bezieht, Functionen der bei dieser Auffassung unabhängigen Variabeln $x\ y\ z$ u. t. Betrachtet man jedoch d. Größen als sich beziehend auf den materiellen Punkt d. Flüssigkeit, welcher sich zur Zeit im Punkt $A(x\,y\,z)$ d. Raumes befindet, so sind $x\ y\ z$ Functionen von t und ebenso mittelbar auch d. anderen Größen Functionen von t. In dem letzteren Sinne sollen nun d. Größen aufgefaßt werden, in welchem also d. Coordinaten $x\ y\ z$ Functionen d. Zeit t und d. anderen fraglichen Größen mittelbare Functionen von t sind.

Die Geschwindigkeitscomponenten sind dann offenbar:

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt} \quad \text{und} \quad w = \frac{dz}{dt}$$

Ferner ist bekanntlich d. Beschleunigungscomponente: $\varphi_x = \frac{du}{dt}$, da nun u eine Function von $x\ y\ z$ ist, diese Werthe selbst aber wieder Functionen von t sind, so ist also u nur eine mittelbare Function von t, so folgt nach bekannten Formeln d. Differentialrechnung:

$$\varphi_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

oder für d. Quotienten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ d. Geschwindigkeitscomponenten eingesetzt:

$$\varphi_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

Analog erhält man:

$$\varphi_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varphi_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Was nun in den früheren Fundamentalgleichungen die Componenten d. inneren Flächenkräfte σ und τ betrifft, so schließen diese Größen jetzt im Allgemeinen Componenten d. Spannungen und d. inneren Reibungen in sich. Hinsichtlich d. Spannungen, welche in den inneren Flächenkräften vorkommen, hat d. [illegible] Flüssigkeit dadurch ergeben, daß ihre Massenelemente nicht nur einer unbeschränkten Gestaltänderung fähig sind, sondern daß einer solchen [illegible] d. einer gleichzeitig stattfindenden Volumenänderung und relativ gleitenden Bewegung, sich auch kein Widerstand entgegensetzt. Wenn man dann, wenigstens was tropfbare Flüssigkeiten betrifft, die mathematische Untersuchung auf solche vollkommene Flüssigkeiten beschränkt, welche (wie luftförmige Flüssigkeiten [illegible]) jener [illegible] vollkommenen widerstandslosen Gestaltänderung d. Massenelemente entsprechen, so sind d. Tangentialspannungen = Null und also d. Größen τ lediglich innere Reibungen, während d. Größen σ außer Normalspannungen auch von d. inneren Reibungen bedingt sind, unter d. Spannungen aber natürlich lediglich Normalspannungen sind. Da diese aber bei Flüssigkeiten der bisherigen Erfahrung zufolge meistens negativ sind, wenigstens nur bei tropfbar flüssigen Körpern kleine positive Werthe haben können, so erscheint es am passenden zweckmäßiger, um diese mit positiven Werthen rechnen zu können, statt dieser Normalspannungen d. entgegengesetzten Pressungen einzuführen.

Es seien daher p_x p_y p_z d. Spannungen, welche nach d. Flüssigkeit stattfinden in einem Punkte $A (x\, y\, z)$ für Ebenen, welche zu den Richtungen Ax Ay Az senkrecht sind. Legt man durch diesen Punkt A eine beliebige Ebene, deren Normale AB mit den Axen die Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ bildet, so sei p d. Spannung im Punkte A auf diese beliebige Ebene.
Die früher eingeführten Bezeichnungen σ_x σ_y und σ_z für die Componenten d. inneren Reibungskräfte, sollen jetzt nur für d. Normalcomponenten d. inneren Reibungen im Punkte A für die zu Ax Ay und Az senkrechten Ebenen bezeichnen, sodass dieselben Größen, welche früher mit $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z$ bezeichnet wurden, jetzt sind:

$$\sigma_x = -p_x + \sigma_x \qquad \sigma_y = -p_y + \sigma_y \quad \text{und} \quad \sigma_z = -p_z + \sigma_z$$

Es haben also jetzt die neuen Bezeichnungen $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z$ eine beschränktere Bedeutung bekommen, indem sie sich nur auf d. inneren Reibungen und nicht mehr auf d. inneren Flüssigkeitskräfte überhaupt beziehen. Nach den Formeln 3 Seite 10 sind dann d. 3 Componenten d. inneren Flüssigkeitskraft, welche im Punkte A d. Ebene $(\alpha\, \beta\, \gamma)$ nach den resp. Coordinatenaxen stattfinden:

im Sinne d. x Axe $= (-p_x + \sigma_x) \cos\alpha + \tau_y \cos\gamma + \tau_z \cos\beta$

im Sinne d. y Axe $= (-p_y + \sigma_y) \cos\beta + \tau_z \cos\alpha + \tau_x \cos\gamma$

im Sinne d. z Axe $= (-p_z + \sigma_z) \cos\gamma + \tau_x \cos\beta + \tau_y \cos\alpha$

Während wir früher diese innere Flüssigkeitskraft im Punkte A d. beliebigen Ebene mit ϱ bezeichnet haben, und seine Richtungswinkel gegen d. Axen mit $a\, b\, c$, soll jetzt unter ϱ nur d. innere resultierende Reibung verstanden werden, welche im Punkte A d. Ebene $\alpha\, \beta\, \gamma$ stattfindet. Die resultierende innere Flüssigkeitskraft im Punkte A d. Ebene $\alpha\, \beta\, \gamma$ besteht demnach aus zwei Teilen, nämlich aus d. Spannung und inneren Reibungen. Die Spannung p aber ist Normalspannung und $=$ negativem Druck p. Letztere Spannung $-p$ normal zur Ebene $(\alpha\, \beta\, \gamma)$ gerichtet ist entsprechend d. Voraussetzung einer vollkommenen Flüssigkeit, so sind auch ihre Richtungswinkel mit d. Axen $= \alpha\ \beta\ \gamma$, und demnach ihre Componenten im Sinne d. Axen $= -p\cos\alpha \quad -p\cos\beta \quad -p\cos\gamma$.
Hierzu kommen noch, um d. Componenten d. inneren resultierenden Flüssigkeitskraft im Sinne d. Axen zu bekommen, d. Componenten der inneren Reibungen $\varrho\cos a$ $\varrho\cos b$ $\varrho\cos c$, und demnach d. Componenten d. inneren Flüssigkeitskraft im Sinne d. Axen mit Rücksicht auf d. obigen Gleichungen sind:

$$-p\cos\alpha + \varrho\cos a = (-p_x + \sigma_x)\cos\alpha + \tau_y\cos\gamma + \tau_z\cos\beta$$

$$-p\cos\beta + \varrho\cos b = (-p_y + \sigma_y)\cos\beta + \tau_z\cos\alpha + \tau_x\cos\gamma$$

$$-p\cos\gamma + \varrho\cos c = (-p_z + \sigma_z)\cos\gamma + \tau_x\cos\beta + \tau_y\cos\alpha$$

Wenn man nun d. Annahme macht, wie sie den theoretischen Untersuchungen über d. Flüssigkeitsbewegung fast allgemein zu Grunde gelegt werden, dass die Spannung und die innere Reibung sich unmittelbar nicht gegenseitig bedingen, aber natürlich innere Reibung noch von den äusseren Reibungen zu unterscheiden ist, indem erstere z. B. bei festen Körpern sich nach d. Spannung richten bedingen können, dass also wie es auch durch Versuchungen bestätigt wurde p und ϱ sich und mithin auch deren Componenten sich nicht gegenseitig bedingen, so müssen die obigen 3 Gleichungen von den Spannungen unabhängig von den Werthen d. inneren Reibungen, und ebenso von letzteren unabhängig von den Werthen d. ersteren erfüllt werden. Sie müssen also auch von d. inneren Reibungen erfüllt werden, wenn man d. ~~[illegible]~~, inneren Reibungscomponenten $= 0$ setzt, wie es d. Fall ist, wenn d. Flüssigkeit sich in relativer Ruhe befindet. Die 3 Gleichungen geben dann mit $\varrho = 0$:
$$p = p_x = p_y = p_z$$

demnach sind d. Spannungen in d. betreffenden Punkte gleich groß für alle Ebenen, welche man durch den Punkt hindurch legen kann. Man bezeichnet daher auch p schlechtweg als d. Spannung d. Flüssigkeit in dem betreffenden Punkte. Sie bestimmt natürlich zusammen mit d. spez. Masse μ (o. dem spez. Volumen resp. d. spez. Gewicht) den inneren Zustand in diesem Punkte.

Mit Rücksicht darauf, daß d. 3 Gleichungen auch für d. Spannungen $p = 0$ von den inneren Reibungen erfüllt werden müssen, lauten d. Beziehungen:

$$p \cos a = \sigma_x \cos\alpha + \tau_y \cos\gamma + \tau_z \cos\beta$$

$$p \cos b = \sigma_y \cos\beta + \tau_z \cos\alpha + \tau_x \cos\gamma$$

$$p \cos c = \sigma_z \cos\gamma + \tau_x \cos\beta + \tau_y \cos\alpha$$

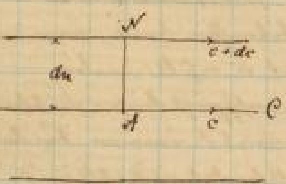
Wegen dieser vollkommenen Übereinstimmung d. Gleichungen für d. inneren Reibungen mit den Seite 10. u. aufgestellten Gleichungen für die inneren Spannkräfte überhaupt, wird man auch ganz analoge Folgerungen hinsichtl. d. inneren Reibungen ziehen können wie solche ebenmäßig früher hinsichtl. d. inneren Spannkräfte im Allgemeinen gezogen wurden, und die Sätze direkt auf d. entsprechenden inneren Reibungen übertragen. Wenn man also mit σ d. Normalkomponente d. inneren Reibung für eine beliebige Ebene $\alpha\,\beta\,\gamma$ bezeichnet, so ist:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + 2\tau_x \cos\beta\cos\gamma + 2\tau_y \cos\alpha\cos\gamma + 2\tau_z \cos\alpha\cos\beta$$

und können dann wieder d. bekannten analogen Schluß wieder ziehen, daß in jedem Punkte A d. Summe d. Normalkomponenten d. inneren Reibungen für je drei sich rechtwinklig schneidende Ebenen constant ist.

Es handelt sich nun darum Ausdrücke zu finden für d. Komponenten d. inneren Reibungen und zwar zunächst für d. tangentialen Reibungskomponenten $\tau_x\ \tau_y\ \tau_z$.

In dieser Beziehung ist eine Annahme zu Grunde zu legen, welche schon von Newton gemacht wurde, und seitdem von fast d. meisten Autoren beibehalten und durch zahlreiche Erfahrungen bestätigt worden ist, von denen in d. Hydraulik später d. Rede sein wird:

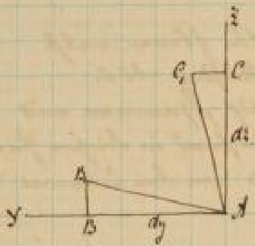


Denkt man sich 2 benachbarte unendlich kleine dünne Flüssigkeitsebenen, von d. Dicke dn, von denen d. untere oben in d. Richtung d. Pfeils eine Geschwindigkeit $= c$ und die andere in derselben Richtung eine Geschwindigkeit $= c + dc$ hat, so daß also d. obere Schicht sich gegen d. untere mit einer relativen Geschwindigkeit $= dc$ bewegt, so wird durch diese relativ gleitende Bewegung Reibungen wachgerufen. Die betreffende Annahme ist nun die, daß diese Reibungen zwischen 2 solchen Flüssigkeitsschichten proportional dem Differentialquotienten $\frac{dc}{dn}$ sei, also proportional d. Schnelligkeit, mit welcher sich d. Geschwindigkeit von einer zur anderen Schicht ändert. Dreht man nun sich d. Normalen AN um A um den dc fortschreitend, dann ist dieser Quotient $\frac{dc}{dn}$ auch d. Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich AN gegen AC hin dreht, oder d. Winkelgeschwindigkeit mit welcher sich d. rechte Winkel NAC verkleinert. Bezeichnet man nun analog den früheren Bezeichnungen für d. Tangentialspannungen, die innere Reibung im Punkte A für die zu AN senkrechten Ebene im Sinne d. Richtung AC mit τ_{nc}, so ist diese nach der Newtonschen Annahme:

$$\tau_{nc} = R\,\frac{dc}{dn}$$

und zwar d. innere Reibung betrachtet als d. Kraft, welche die im Sinne AN an die betreffende Ebene grenzende Flüssigkeitsschicht auf d. Flächeneinheit d. Ebene ausübt. Hierin ist R eine durch Erfahrung und Versuche zu bestimmende Constante, welche jedoch für verschiedene Flüssigkeiten und auch vielleicht für verschiedene Zustände ders. Flüssigkeit verschiedene Werte annehmen kann.

C



Es sei nun A ein beliebiger materieller Punkt d. Flüssigkeit, dessen Coordinaten zur Zeit t = $x\ y\ z$ sind. Von A aus seien zur Zeit t 2 Richtungen gezogen parallel der Y und Z Axe d. Coordinatensystems innerhalb d. Flüssigkeit gegen [illegible]. B sei ein materieller Punkt auf AY in d. Entfernung $AB = dy$ von A, und C ein materieller Punkt auf AZ in d. Entfernung dz von A.

In dem betreffenden Augenblick t sei nun ferner angenommen worden d. Geschwindigkeit d. Punktes A im Sinne d. Y Axe $= v$. Die Geschwindigkeit d. Punktes C also im Sinne d. Y Axe $= v + \frac{dv}{dz} dz$, und demnach d. relative Geschwindigkeit von C gegen A im Sinne d. Y Axe $= \frac{dv}{dz} dz$. Vermöge dieser relativen Geschwindigkeit wird C gegen A im Zeitelement dt um ein kl. Stück CC_1 verschoben und offenbar ist:

$$CC_1 = \frac{dv}{dz} dz\, dt$$ = gesuchte relative Verschiebung von C gegen A im Sinne AY im Zeitelemente dt.

Ebenso ist in demselben Augenblick t d. Geschwindigkeit von A im Sinne d. Z Axe $= w$ und also d. Geschwindigkeit von B im Sinne d. Z Axe $= w + \frac{dw}{dy} dy$, demgemäß d. relative Geschwindigkeit von B gegen A im Sinne d. Z Axe $= \frac{dw}{dy} dy$ und somit im Zeitelemente dt d. gesuchte relative Verschiebung BB_1 von B gegen A im Sinne d. Z Axe:

$$BB_1 = \frac{dw}{dy} dy\, dt$$

Es wird nun d. unendlich kl. Winkel $C\hat{A}C_1 = \frac{CC_1}{AC} = \frac{CC_1}{dz} = \frac{dv}{dz} dt$

und d. unendlich kl. Winkel $B\hat{A}B_1 = \frac{BB_1}{AB} = \frac{BB_1}{dy} = \frac{dw}{dy} dt$.

Es ist offenbar d. Verkleinerung d. rechten Winkels BAC = d. Summe dieser beiden kl. Winkel also:

$$= B\hat{A}B_1 + C\hat{A}C_1 = \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) dt$$

und demgemäß d. Winkelgeschwindigkeit mit welcher diese Verkleinerung d. rechten Winkels BAC augenblicklich d. h. zur Zeit t stattfindet:

$$= \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$$

Diese Verkleinerung d. rechten Winkels BAC kann man nun (einerseits) betrachten als d. resultierende relative Bewegung d. Punktes C gegen A in d. Richtung AB_1, oder da BAB_1 und CAC_1 unendlich kl. Winkel sind, man also d. Verschiebung CC_1 als parallel zu AB betrachten kann, kann man d. Verkleinerung d. rechten Winkels BAC auch betrachten als das Resultat d. resultierenden relativen Bewegung von C gegen A im Sinne AB. Bei dieser Auffassung entspricht dieser Verkleinerung d. rechten Winkels dem Newton'schen Gesetz zu Folge eine Tangentialcomponente d. inneren Reibung, welche im Punkte A in d. zur Z Axe senkrechten Ebene im Sinne d. Y Axe stattfindet und also mit t_{zy} zu bezeichnen wäre.

Andererseits kann d. Verkleinerung d. rechten Winkels BAC auch betrachtet werden, als d. relative Verschiebung d. Punktes B gegen AC, welche Auffassung eine Tangentialcomponente t_{yz} d. inneren Reibung im Punkte A in d. zur Y Axe senkrechten Ebene im Sinne d. Z Axe stattfindend bedingen würde.

Natürlicherweise demnach muss $t_{yz} = t_{zy}$ sein, es kommen also auch hier ebenso wie früher d. Tangentialcomponenten d. Spannungen, d. Tangentialcomponenten d. inneren Reibungen immer paarweise vor und zwar sind sie auch hier paarweise einander gleich.

Man kann also für $t_{zy} = t_{yz}$ auch d. bekannte Bezeichnung t_x einführen.

Nach dem Newton'schen Princip ist dann, da $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$ d. Winkelgeschwindigkeit ist, mit welcher d. Verkleinerung d. rechten Winkels BAC zur Zeit t vor sich geht,

$$t_x = R\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)$$ und ähnlich demnach auch für t_y und t_z durch Buchstabenvertauschung:

$$t_y = R\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)$$

$$t_z = R\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)$$

Damit wären also d. Tangentialcomponenten d. inneren Reibungen durch d. Geschwindigkeitscomponenten ausgedrückt.
Es fragt sich nun wie nochmals auch d. Normalcomponenten d. inneren Reibungen in derselben Weise auszudrücken. Jedenfalls sind nach dem Newton'schen Princip die Normalcomponenten $6x\ 6y\ 6z$ d. inneren Reibungen im Punkte A für d. betreffenden Coordinatenebenen yAz, zAx und xAy auch als lineare Functionen d. partiellen Differentialquotienten der Geschwindigkeitscomponenten $u\ v\ w$ nach $x\ y\ z$ auszudrücken. Damit ist aber nicht viel gewonnen, indem jede d. Normalcomponenten aus 9 Gliedern bestehen könnte (d. $u\ v\ w$ nach $x\ y\ z$ partiell differenzirt neun verschiedene Differentialquotienten ergibt). Eine Entscheidung in dieser Hinsicht ergibt sich jedoch zunächst mit folgender Betrachtung:

Man denke sich von A aus eine beliebige Richtung AS gezogen, bestimmt durch d. Richtungswinkel $\alpha\ \beta\ \gamma$, dann von A aus ein unendlich kl. Stück $AA_1 = dS$ abgetragen; C sei d. Geschwindigkeit d. Punktes A nach d. Richtung AS zur Zeit t. Diese Geschwindigkeit C ist aber nach d. Mechanik bekanntlich dargestellt durch d. algebraische Summe d. aus den Geschwindigkeitscomponenten $u\ v\ w$ gebildeten Parallelprojection, also:

$$C = u\cos\alpha + v.\cos\beta + w.\cos\gamma. \quad — \mathrm{I}$$

Die gleiche Formel bekommt man nun d. Geschwindigkeit d. Punktes A_1, $= C + dC$ in Richtung AS, wenn man für $u\ v\ w$ die Geschwindigkeitscomponenten von A_1 substituirt.
Die Geschwindigkeitscomponente von A_1 im Sinne d. X Axe ist aber offenbar $= u +$ d. partiellen Ableitung von u nach $x\ y\ z$, indem beim Übergang von A auf A_1 sich gleichzeitig $x\ y\ z$ ändern.
Man hat also in d. obigen Formel zu setzen

anstatt $u.\cos\alpha$ — $\left(u + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)\cos\alpha$

ebenso anstatt: $v.\cos\beta$ — $\left(v + \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz\right)\cos\beta$

und $w.\cos\gamma$ — $\left(w + \frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz\right)\cos\gamma$

demnach ist die Geschwindigkeit d. Punktes A_1 zur Zeit t im Sinne d. Richtung AS:

$$C + dC = \left\{\begin{array}{l} \left(u + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)\cos\alpha \\ \left(v + \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz\right)\cos\beta \\ \left(w + \frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz\right)\cos\gamma \end{array}\right\} \quad — \mathrm{II}$$

Zieht man nun Gleichung I von II ab, so bekommt man, wenn man noch berücksichtigt daß $\frac{dx}{dS} = \cos\alpha$ $\frac{dy}{dS} = \cos\beta$ und $\frac{dz}{dS} = \cos\gamma$ ist, und wenn man noch durch dS dividirt:

$$\frac{dC}{dS} = \frac{du}{dx}\cos^2\alpha + \frac{dv}{dy}\cos^2\beta + \frac{dw}{dz}\cos^2\gamma + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\cos\beta\cos\gamma$$
$$+ \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\cos\alpha\cos\beta \quad — \mathrm{III}$$

Wie man sieht ist dieser Ausdruck für $\frac{dC}{dS}$ vollständig was d. Abhängigkeit von den Richtungswinkeln $\alpha\ \beta\ \gamma$ anbetrifft, genau derselbe, wie die Seite 10 u. 12 gefundenen Ausdrücke für d. Normalspannung 6 und Ausdehnung ε, welche im Punkte A nach d. Richtung AS $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ stattfinden. Man kann deshalb auch in dieser Hinsicht ganz analoge Folgerungen ziehen, d. h. es folgt aus dieser Analogie daß für d. Geschwindigkeiten $C_1\ C_2\ C_3$ im Punkte A nach irgend 3 zu einander senkrechten Richtungen $AS_1\ AS_2\ AS_3$ die folgende constante Relation besteht, wie man auch unmittelbar d. Ausdruck ansehen mag:

$$\frac{de_1}{ds_1} + \frac{de_2}{ds_2} + \frac{de_3}{ds_3} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

Diese constante Summe für je 3 zu einander senkrechte Richtungen in demselben Punkte der partiellen Ableitungen der Geschwindigkeitscomponenten nach den Coordinaten $x\ y\ z$, welche in der Folge mit Δ bezeichnet werden soll, hat eine leicht einzusehende besondere Bedeutung:

$$\Delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

Denkt man sich von A als Eckpunkt aus ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepiped mit den Kanten $dx\ dy\ dz$ construirt, dessen dem gegenüberliegender Eckpunkt von A — A', die Coordinaten $x + dx$ $y + dy$ und $z + dz$ hat, so strömt in der zur x Axe senkrechten, durch A gehenden Seitenebene $dy.dz$ augenblicklich die Geschwindigkeit u in Richtung der x Axe also senkrecht zur Ebene $dy.dz$. Es ist daher das Volumen der Flüssigkeit, welche in dem Zeitelement dt durch diese Ebene $dy\,dz$ in das Parallelepiped hineinfließt $= dy.dz\ u.dt$. Andererseits hat die durch den Punkt A' gehende senkrecht zur x Axe gerichtete Ebene eine Geschwindigkeit in Richtung der x Axe erlangt: $u + \frac{du}{dx} dx$, und daher das Volumen der Flüssigkeit, welches im Zeitelement dt durch diese Ebene $dy.dz$ aus dem Parallelepiped herausfließt:

$$= dy.dz \left(u + \frac{du}{dx} dx\right) dt.$$

und also die Differenz der Volumina, welche im Zeitelement dt durch die von A' begrenzte Ebene $dy\,dz$ aus dem parallelepipedischen Raumelement mehr herausfließt, als durch die von A begrenzte Ebene $dy\,dz$ hineinfließt:

$$= dy\,dz \frac{du}{dx} dx.dt$$

Ebenso ist:

$$dz\,dx.\frac{dv}{dy} dy\,dt$$

und

$$dx.dy \frac{dw}{dz} dz.dt$$

= dasjenige Flüssigkeitsvolumen welches in Richtung der y Axe resp. z Axe also durch die zur y Axe resp. z Axe senkrechten Seitenebenen während des Zeitelements mehr aus dem Raumelement $dx\,dy\,dz$ heraus als hineinfließt.

Die Summe aller dieser Ausdrücke ergiebt:

$= dx\,dy\,dz\,\Delta\,dt$ ist das Flüssigkeitsvolumen, welches im Zeitelemente dt mehr aus dem parallelepipedischen Raumelement heraus- als hineinfließt.

Man kann demnach Δ als die Ausdehnung bezeichnen, welche dieses Raumelement $dx\,dy\,dz$ pro Volumeinheit in der Zeiteinheit ~~dt~~ erfahren würde, wenn es um das Volumen der ausfließenden Flüssigkeit vergrößert und um das der hineinfließenden Flüssigkeit verkleinert würde, und wenn der augenblickliche Bewegungszustand der Flüssigkeit während der Zeiteinheit unverändert bliebe. Da nun diese Größe Δ für jedes bei A liegende Raumelement gleich groß ist, so ist Δ ein Maaß für die Geschwindigkeit, mit welcher die Volumenänderung der Flüssigkeit im Punkte A stattfindet. Da nun weiter auch die Summe der Normalcomponenten der inneren Reibungen nach 3 zu einander senkrechten Richtungen $= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ für den betreffenden Punkt einen constanten Werth behalten muss, wie man nach der Herleitung dieser ersieht, so können mit Rücksicht auf die gleichartige Ableitung der erschienenen Gleichungen, da ja nicht etwa eine Axe vor der andern bevorzugt ist, da man eine Flüssigkeit als vollkommen isotropen Körper ansehen kann, die Normalcomponenten der inneren Reibungen im Allgemeinen folgende Ausdrücke haben:

(σ_x entsprechend x, σ_y entsprechend y und σ_z entsprechend z gebildet sind)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= S \frac{du}{dx} + T\Delta \\ \sigma_y &= S \frac{dv}{dy} + T\Delta \\ \sigma_z &= S \frac{dw}{dz} + T\Delta \end{aligned}\right\}$$

wenn S und T noch zu bestimmende Constante sind. Bildet man die Summe $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ so bekommt man auf der andern Seite der Gleichung offenbar $= S\Delta + 3T\Delta = (S + 3T)\Delta =$ constante Summe.

daß diese Normalcomponenten d. inneren Reibungen keine andere Ausdrücke annehmen können, ist [illegible], wenn sie [illegible] sein sollen, daß ihre Summe $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ immer [illegible] ist und daß man den einen Ausdruck aus dem andern durch [illegible] [illegible] [illegible] kann.

Ferner kann man [illegible] noch weiter schließen, daß d. letzten mit Δ verbundenen Glieder [illegible] [illegible] dürfen:

Denkt man sich nämlich, daß d. Bewegung d. Flüssigkeit im Punkte A nur in Sinne d. YZ Ebene stattfindet, daß also d. Bewegung in d. Richtung d. X Axe $= 0$ also $u = 0$ und $\frac{du}{dx} = 0$ ist, so müßte offenbar d. innere Reibung im Punkte der Ebene YZ eine Richtung in d. Ebene YZ [illegible] [illegible], annehmen und demnach d. Normalcomponente d. inneren Reibung im Sinne d. X Axe also $\sigma_x = 0$ sein. Wenn aber $\sigma_x = 0$ werden soll mit $u = 0$ und $\frac{du}{dx} = 0$, so darf natürlich d. letzte Glied mit Δ gar nicht vorkommen, es muß also ~~[illegible]~~ $T = 0$ sein und [illegible]:

$$\sigma_x = S'\frac{du}{dx}$$

ebenso ergeben sich d. [illegible] [illegible] mit den andern Ausdrücken für d. Normalcomponenten und [illegible]: $\sigma_y = S\frac{dv}{dy}$ und $\sigma_z = S\frac{dw}{dz}$

Es fragt sich nun noch, nach welcher Beziehungen zwischen d. Constanten S' und d. Constanten R besteht. Um diese zu erkennen, sei von A aus eine beliebige Richtung $AS(\alpha\,\beta\,\gamma)$ gezogen, c sei d. Geschwindigkeit d. Punktes A nach AS zur Zeit t; nach dem Obigen ist dann d. Normalcomponente σ d. inneren Reibung im Punkte A für die zu AS senkrechte Ebene:

$$\sigma = S'\frac{dc}{ds}$$

wenn man unter dc d. Änderung d. Geschwindigkeit c begreift, welche diese erfährt, wenn man auf d. Richtung AS um ds fortschreitet.

Mit Rücksicht auf den Seite 21 III gefundenen Werth von $\frac{dc}{ds}$ ist nun aber:

$$\sigma = S\left[\frac{du}{dx}\cos^2\alpha + \frac{dv}{dy}\cos^2\beta + \frac{dw}{dz}\cos^2\gamma\right] + \frac{S}{R}\left[l_x\cos\beta\cos\gamma + l_y\cos\gamma\cos\alpha + l_z\cos\alpha\cos\beta\right]$$

indem man für die drei [illegible] Ausdrücke $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \frac{l_x}{R}$ für $\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{l_y}{R}$ etc. setzt mit Rücksicht auf die Seite 20 gefundenen Werthe von l_x l_y und l_z.

Seite 10, 4 wurde aber schon ein anderer Gleichung für σ gefunden, welche bezüglich d. Richtungswinkel $\alpha\,\beta\,\gamma$ [illegible] wie diese gebildet ist, nur aber enthält d. Coefficienten S im ersten Glied 1 und statt des Coefficienten $\frac{S}{R}$ — 2 steht. Damit also d. oben gewonnene Gleichung, wie es sein muß, für alle Werthe von $\alpha\,\beta\,\gamma$ mit d. Seite 10, 4 gefundenen übereinstimmen, muß $S' = 2R$ sein und demnach d. Normalcomponenten:

$$\sigma_x = 2R\frac{du}{dx} \qquad \sigma_y = 2R\frac{dv}{dy} \quad \text{und} \quad \sigma_z = 2R\frac{dw}{dz} \qquad\text{——— a}$$

wo R eine nur auf experimentellem Wege zu bestimmende Constante ist.

Hiermit wären nun d. Vorbereitungen beendigt, die nöthig waren um d. früheren Fundamentalgleichungen auf d. zweckmäßigste Form zu bringen, in welcher dieselben für d. Untersuchung d. [illegible] flüssiger Körper am zweckmäßigsten ist.

Die erste Fundamentalgleichung war:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{dl_y}{dz} + \frac{dl_z}{dy} + \mu(X - \varphi_x) = 0$$

In diese hat man nun nach Seite 18 für σ_x — $\div p + \sigma_x$; für σ_y — $\div p + \sigma_y$ und für σ_z — $\div p + \sigma_z$ zu setzen, wenn p d. [illegible] ~~[illegible]~~ d. Flüssigkeit und σ die Normalcomponenten d. inneren Reibungen bedeuten. Die Größen l_x l_y und l_z bedeuten jetzt nur d. Tangentialcomponenten d. inneren Reibungen. Für $\frac{d\sigma_x}{dx}$ hat man also mit Rücksicht auf den unter a gefundenen Werthen σ_x zu setzen: $= -\frac{dp}{dx} + 2R\frac{d^2u}{dx^2}$ ebenso für $\frac{d\sigma_y}{dy}$ — $-\frac{dp}{dy} + 2R\frac{d^2v}{dy^2}$ etc.

Ferner ist zufolge Seite 17 für φ_x zu setzen: $\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}$ etc. und endlich auch für l_y l_z d. Seite 20 gefundenen Werthe einzusetzen. Führt man dieß aus, so bekommt man die erste d. Fundamentalgleichungen in folgender Form:

$$-\frac{dp}{dx} + 2R\frac{d^2u}{dx^2} + R\left(\frac{d^2w}{dx\,dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + R\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2v}{dx\,dy}\right) + \mu\left(X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}\right) = 0$$

oder durch μ dividirt und umgeformt in geformt:

$$X - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} + \frac{R}{\mu}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right] = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}$$

da $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy\,dx} + \frac{d^2w}{dz\,dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)$ ist. Nach Seite 22 ist aber dieser letzte Coefficient $= \Delta$ und demnach:

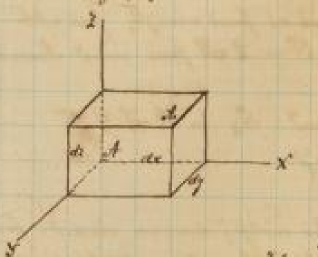
$$X - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} - \frac{R}{\mu}\left[\frac{d\Delta}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right]$$

Die beiden anderen Fundamentalgleichungen werden natürlich ganz analoge Umformungen erleiden, wenn betrachtet durch einfach durch Buchstabenvertauschung aus d. vorliegenden, also:

$$Y - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} - \frac{R}{\mu}\left[\frac{d\Delta}{dy} + \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right]$$

$$Z - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz} - \frac{R}{\mu}\left[\frac{d\Delta}{dz} + \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right]$$

In diesen Ausdrücken kommen nun 5 Größen u v w μ p vor welche als Functionen von x y z t bestimmt sein werden müssten, um den innern und äußern Zustand d. Flüssigkeit mit Rücksicht auf d. Oberflächenbedingungen und den gegebenen Anfangszustand bestimmen zu können. Der äußere Zustand ist nämlich, wie bekannt, bestimmt durch d. Geschwindigkeitscomponenten u v w und d. innere Zustand bestimmt durch d. spec. Masse μ und d. spec. Druck p. Um diese 5 Größen als Functionen von x y z t zu entwickeln, haben wir jedoch erst d. 3 obigen Gleichungen; es müssen also 2 andere Bestimmungsgleichungen aufgestellt werden. Eine derselben findet man durch folgende Betrachtung:



Denkt man sich im Punkte $A(x\,y\,z)$ zur Zeit t 3 zu einander senkrechte Richtungen Ax Ay Az gezogen, parallel den Coordinatenaxen, womit d. ganze Flüssigkeit bezogen ist, und von A aus betrachtet nun ein unendl. kl. rechtwinklig parallelepipedisches Raumelement, dessen Kanten dx dy dz mit den Richtungen x y z zusammenfallen resp. parallel sind, so sind d. Coordinaten d. gegenüberliegenden Eckpunktes A_1 dieses, als unveränderlich zu denkenden Raumelements $= x + dx$ $y + dy$ und $z + dz$.

Ist nun d. spec. Masse zur Zeit t im Punkte $A = \mu$, so ändert sich diese im Laufe d. Zeitelements dt um $\frac{d\mu}{dt}dt$; die Masse d. ganzen Volumenelements $dx\,dy\,dz$ erfährt also im Zeitelement dt eine Änderung $= dx\,dy\,dz \cdot \frac{d\mu}{dt}dt$ = Masse, um welche d. Masse des Raumelement zur Zeit $t + dt$ größer ist als zur Zeit t. Diese Massenänderung kann man aber auch anders ausdrücken. Betrachtet man nämlich d. Flüssigkeitsmassen, welche durch d. Seitenflächen d. Raumelements theils hinein theils hinaus fließen, so ist in Hinsicht d. zur x Axe senkrechten Flächen zu sagen, daß durch diese Fläche $dy\,dz$, deren Geschwindigkeit im Sinne d. x Axe also senkrecht zu dieser selbst $= u$ ist, während d. Zeitelements dt ein Flüssigkeitsvolumen $= dy\,dz\,u\,dt$ in d. Raumelement hineinfließt also eine Flüssigkeitsmasse $= \mu\,dy\,dz\,u\,dt$. Aus der gegenüberliegenden Fläche fließt dagegen eine Flüssigkeitsmasse heraus, welche man bekommt, wenn man d. ebengefundene Masse um d. partielle Differential nach x vergrößert, indem man um von A nach A_1 zu kommen um dx fortschreiten muß. Das partielle Differential d. obigen Masse nach x ist also d. Unterschied derjenigen Flüssigkeitsmasse, welche im Zeitelement dt aus dem Raumelement hinausfließt, gegen diejenige, welche in demselben Zeitraum dt in d. Volumenelement hineinfließt.

also $dy\,dz \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} dx \cdot dt$ = Masse, welche im Zeitelement dt in Richtung d. x Achse mehr hinaus als hineinfließt.

Ebenso ist: $dx\,dz \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} dy \cdot dt$ und $dx \cdot dy \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} dz \cdot dt$ der Unterschied derjenigen Flüssigkeitsmenge, welche im Sinne d. Y. resp. d. Z Achse im Zeitelement dt aus dem Volumenelement hinausfließt, gegen diejenige, welche in demselben Zeitraum dt in d. Volumenelement hineinfließt. Die Summe dieser 3 Unterschiede giebt offenbar auch die Massenänderung d. Volumenelements im Zeitraum dt an; man hat also d. Gleichung:

$$-dx\,dy\,dz \frac{\partial \mu}{\partial t} dt = dy\,dz \frac{\partial(u\mu)}{\partial x} dx\,dt + dx\,dz \frac{\partial(v\mu)}{\partial y} dy\,dt + dx\,dy \frac{\partial(w\mu)}{\partial z} dz\,dt.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $dx\,dy\,dz$, so bekommt man ~~nun~~ die zweite der wichtigsten Differentialgleichungen zur Bestimmung d. 5 Größen $u\ v\ w\ \mu\ p$ als Functionen von $x\ y\ z\ t$. Man bekommt:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} = 0.$$

Da dieser Betrachtung d. Annahme einer continuierlichen Raumerfüllung durch d. Flüssigkeit zu Grunde gelegt ist, so nennt man diese Gleichung auch noch d. Continuitätsgleichung d. Flüssigkeit.

Eine weitere Beziehung kann nicht aus mechanischen Betrachtungen mehr gezogen werden, es müssen daher zur Aufstellung d. noch fehlenden 5t Gleichung noch gewisse andere Verhältnisse herbeigezogen werden, welche auf Wärme und Temperatur Rücksicht zu nehmen haben.

Ehe jedoch diese Verhältnisse näher untersucht werden, sollen erst folgende Betrachtungen gemacht werden:

Deformationsarbeit und Gleichung d. lebendigen Kraft eines Körpers im Allgemeinen.

Zunächst soll aus den 3 Fundamentalgleichungen eine Gleichung für d. lebendige Kraft eines Körpers entwickelt werden. Die 3 Fundamentalformeln waren:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \mu(X - \varphi_x) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \mu(Y - \varphi_y) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \mu(Z - \varphi_z) = 0$$

Denkt man sich nun bei einem in continuierlicher Zustandsänderung begriffenen Körper ein Massenelement, welches zur Zeit t d. Gestalt eines unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipeds hat, dessen einer Eckpunkt A d. Coordinaten $x\ y\ z$ hat und dessen Kantenlängen $= dx\ dy\ dz$ sind, so ist d. Volumen dieses Elements zur Zeit $t = dx\ dy\ dz$ und sei bezeichnet mit δV.
$u\ v\ w$ seien ferner d. 3 Geschwindigkeitscomponenten d. fraglichen Punktes $A(x\,y\,z)$ im Sinne d. Coordinatenaxen zur Zeit t. Wenn man nun von einer Deformation dieses Massenelements abs. Gestaltänderung absieht, so sind diese Größen $u\ v\ w$ auch zugleich d. Geschwindigkeitscomponenten d. ganzen Volumenelements, ferner sind $X\ Y\ Z$ die Componenten d. beschleunigenden Massenkraft und μ d. spez. Masse zur Zeit t.

Es soll jetzt die erste Gleichung mit $\delta V\, u\, dt$, d. 2te mit $\delta V \cdot v\, dt$ und d. 3te mit $\delta V \cdot w\, dt$ multipliziert werden, und hierauf alle 3 zusammen addiert werden. Vorher sollen d. Glieder mit $\mu\varphi_x$ $\mu\varphi_y$ und $\mu\varphi_z$ auf d. andere Seite gebracht werden, wenn für φ_x φ_y und φ_z die bekannten Werte $\frac{du}{dt}$ usw. $\frac{dv}{dt}$ $\frac{dw}{dt}$ zu setzen sind. Führt man dies aus, so bekommt man:

$$\mu\,\delta V(u\,du + v\,dv + w\,dw) = \mu\,\delta V(X.u + Y.v + Z\,w)\,dt + dQ_1$$

wenn dQ_1 bedeutet:

$$dQ_1 = \delta V\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)u + \left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)v + \left(\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}\right)w\right]dt.$$

Das auf d. linken Seite d. ersten Gleichung stehende Glied kann man offenbar auch folgendermaßen schreiben:

$$= \mu\,\delta V.\ d\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right).$$

$u^2+v^2+w^2$ ist aber d. augenblickliche Geschwindigkeitsquadrat und $\mu\,\delta V$ d. Masse d. Elements.

Nach Seite 2 ist demnach jenes Produkt die lebendige Kraft $= dL$ des Massenelements zur Zeit t. Die ganze linke Seite d. Gleichung ist also nichts anderes als d. Differential d. lebendigen Kraft d.h. d. Zunahme d. lebendigen Kraft des Massenelements während d. Zeitelements dt.

Da ferner d. Massenelement zur Zeit t sich im Sinne d. Axen mit d. Geschwindigkeiten u v w fortbewegt, so ist das erste Glied der rechten Seite d. Gleichung offenbar d. Summe d. Arbeiten dM, welche d. Massenkraftkomponenten X Y Z auf d. Massenelement während d. Zeit dt verrichten.

Also: $\mu\,\delta V(Xu + Yv + Zw)\,dt = dM.$

Demnach kann man jetzt obige Gleichung auch schreiben:

$$dL = dM + dQ_1$$

Was nun d. Größe dQ_1 anbelangt, so ist diese offenbar nichts anderes als d. Arbeit d. Flächenkräfte während d. Zeitelements dt, mit welcher d. das Massenelement umgebende Körpermasse auf seine Oberfläche wirkt, vorausgesetzt insofern, als diese Arbeitsleistung nur von einer gleichzeitig stattfindenden Deformation d. Massenelements, indem d. Geschwindigkeitskomponenten u v w als für das ganze Massenelement constant angenommen werden. Die obengefundene Gleichung entspricht dann dem bekannten Satze, daß für einen unendlich kleinen Zeittheil für ein ganzes Massensystem d. Zuwachs d. lebendigen Kraft = d. Summe d. Arbeiten aller äußeren Kräfte ist. Die ganze Arbeit d. Oberflächenkräfte des Massenelements sei bezeichnet mit dO; es ist also dQ_1 nur ein Theil von dO, während der andere Theil dQ_2 ist. Man kann also setzen:

$$dQ_1 = dO - dQ_2,$$

wenn dQ_2 d. Arbeit d. Oberflächenkräfte d. Massenelements ist, welche durch d. Deformation d. Massenelements bedingt ist.

Die ganze Arbeit dO d. Oberflächenkräfte läßt sich folgendermaßen bestimmen:

Zunächst wird zur X Axe senkrechten und durch A hindurchgehenden Ebene $dy\,dz$ d. parallelepipedischen Massenelements wirkt eine Flächenkraft, welche als auf d. Flächeneinheit bezogen in 3 Komponenten σ_x τ_{xy} τ_{xz} zerlegt werden kann. Diese Ausdrücke bezeichnen die Komponenten d. inneren Flächenkräfte, welche im Sinne d. positiven Richtungen wirken. Will man also Kräfte haben, mit welchen d. auf d. Ebene $dy\,dz$ angrenzende Körpermasse auf das Element wirkt, so muß man dieselben mit $-\sigma_x$ $-\tau_{xy}$ $-\tau_{xz}$ bezeichnen, da dieselben in negativer Richtung d. Axen wirken. Die ganzen Flächenkräfte auf d. Ebene $dy\,dz$ sind also: $dy\,dz.(-\sigma_x)$ $dy\,dz.(-\tau_{xy})$ $dy\,dz(-\tau_{xz})$

Dieses Flächenelement hat nun aber d. Geschwindigkeit u v w im Sinne d. Axen; es bewegt sich also während d. Zeitelements dt im Sinne d. Axen um d. Strecken $u\,dt$ $v\,dt$ und $w\,dt$ fort. Die Arbeit dieser Flächenkraft ist also:

$$-\sigma_x\,u\,dy\,dz - \tau_{xy}\,v\,dy\,dz - \tau_{xz}\,w.\,dy\,dz.$$

für ganz ähnliche Arbeit wird von denjenigen Kräften verrichtet, welche auf die gegenüberliegenden Seitenflächen d. Elements angreifen. Man bekommt diese offenbar, wenn man mit d. oben gefundenen nur ihr partielles Differential genommen nach x vereinigt, da beide Flächen um dx von einander entfernt sind. Die Summe ~~derjenigen~~ d. Arbeiten derjenigen Kräfte, welche auf beide zu x senkrechten Seitenebenen wirken, ist demnach:

$$-dy\,dz\left\{-\sigma_x u\,dt+\left[\sigma_x u+\frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x}dx\right]dt-\tau_{xy} v\,dt+\left[\tau_{xy} v+\frac{\partial(\tau_{xy} v)}{\partial x}dx\right]dt-\tau_{xz} w\,dt+\left[\tau_{xz} w+\frac{\partial(\tau_{xz} w)}{\partial x}dx\right]dt\right\}$$

oder wenn man d. kürzere Bezeichnung $\tau_{xy} = \tau_z$ und $\tau_{xz} = \tau_y$ wieder einführt und Reductionen vornimmt und für $dx\,dy\,dz$ das Volumen δV einführt:

$$-\delta V\left(\frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_y w)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_z v)}{\partial x}\right)dt.$$

Ebenso sind d. Summen d. Arbeiten derjenigen Kräfte, welche auf beide zu y resp. z senkrechten Seitenebenen d. Elements wirken:

$$-\delta V\left(\frac{\partial(\sigma_y v)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_z u)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_x w)}{\partial y}\right)dt \quad \text{resp.:} \quad -\delta V\left(\frac{\partial(\sigma_z w)}{\partial z}+\frac{\partial(\tau_x v)}{\partial z}+\frac{\partial(\tau_y u)}{\partial z}\right)dt.$$

Demnach ist d. Gesammtarbeit d. Oberflächenkräfte:

$$dO = \delta V\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_y w)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_z v)}{\partial x}\\+\frac{\partial(\sigma_y v)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_z u)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_x w)}{\partial y}\\+\frac{\partial(\sigma_z w)}{\partial z}+\frac{\partial(\tau_x v)}{\partial z}+\frac{\partial(\tau_y u)}{\partial z}\end{array}\right\}dt.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorhin für dA gefundenen und bedenkt, daß $dO_2 = dO - dO_1$ ist, so folgt:

$$dO_1 = \delta V\left\{\begin{array}{l}\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_x\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_y\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\+\sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_z\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{array}\right\}dt$$

Demnach hat man jetzt d. Formel für d. lebendige Kraftzunahme: $dL = dM + dO - dO_1$

Diese Arbeit dO_1 ist der Theil von dO, welcher zur Deformation des Volumenelements verbraucht wird; mit entgegengesetztem Zeichen gleich d. Arbeit $dE = -dO_1$, welche d. Volumenelement selbst durch seine Deformation verrichtet, und welche d. Deformationsarbeit desselben bei d. fraglichen unendlich kleinen Zustandsänderung genannt werden soll. Indem diese Deformationsarbeit nur von den Spannungen, nicht von den äußeren Kräften an d. Oberfläche d. Volumenelements verrichtet wird, sind unter den Größen σ u. τ, welche in Gleichung für dO zugleich Spannungen und äußere Kräfte sein können, in Gleichung f. dO_1 nur Spannungen zu verstehen; in d. That beziehen sich die in diesen Gleichungen vorkommenden Differentialquotienten von $u\ v\ w$ nach $x\ y\ z$ nur auf solche Geschwindigkeitsänderungen, welche innerhalb d. betrachteten Volumenelements stattfinden, während d. äußeren Kräfte durch d. relativen Geschwindigkeiten benachbarter Volumenelemente bedingt sind.

Wenn nun mit $\xi\ \eta\ \zeta$ die Abscissen bezeichnet werden, welche d. materielle Punkt, der sich zur Zeit t im Raumpunkte A befindet, während dieser Zeit t nach den Coordinatenaxen durchlaufen hat, so sind natürlich $\xi\ \eta\ \zeta$ Functionen von $x\ y\ z\ t$, und zwar ist offenbar:

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t}\ ,\quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{und} \quad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Sind nun ferner $\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \ \gamma_x\ \gamma_y\ \gamma_z$ die Ausdehnungen und Verschiebungen, welche den Deformationszustand des Körpers im Punkte A zur Zeit t bestimmen und welche mit $\xi\ \eta\ \zeta$ in der bekannten Beziehung stehen, so ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}$$

$$\text{ebenso} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}$$

$$\text{ferner:} \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t\, \partial z} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = \frac{\partial \gamma_x}{\partial t}$$

$$\text{ebenso:} \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_z}{\partial t}$$

Nach der Gleichung für dO_i ist somit:

$$dE = -\,dV\left[\sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \sigma_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} + \tau_x \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} + \tau_y \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} + \tau_z \frac{\partial \gamma_z}{\partial t}\right] dt.$$

d. Massenelements

Demnach kann man also die Differentialgleichung der lebendigen Kraft auch schreiben:

$$dL = dM + dO + dE.$$

Durch Addition der entsprechenden Gleichungen für alle Massenelemente des Körpers erhält man dieselbe oben gefundene Gleichung, wenn aber nun:

dL = die Zunahme der lebendigen Kraft des ganzen Körpers

dM die Arbeitssumme aller Massenkräfte

und dO die Arbeitssumme aller Oberflächenkräfte und inneren Flächenkräfte

dE die Deformationsarbeit des ganzen Körpers für die unendlich kleine Zustandsänderung im Zeitelemente dt bedeutet. Dabei kann dO in verschiedene Theile zerlegt werden. Zunächst besteht die Arbeit der Oberflächenkräfte aus der Arbeit dJ der äußeren Massenelemente, welche zugleich die ... für ... wie dM, und aus der Arbeit der Reibung an der Oberfläche oder der äußeren Reibung, welche stets negativ ist und absolut genommen mit dR bezeichnet sei. Was die inneren Flächenkräfte betrifft, so sind sie je zu zwei entgegengesetzt gleich, und es ist deshalb ihre Arbeitssumme = 0, falls die Geschwindigkeitsänderungen im Körper überall continuirlich stattfinden; in Folge der entgegengesetzten inneren Flächenkräfte, womit 2 benachbarte Körperelemente auf einander wirken, wird dann das eine beschleunigt, das andere verzögert, indem die lebendige Kraft des einen um ebensoviel zunimmt wie die des anderen abnimmt. Wenn aber discontinuirliche, plötzliche Geschwindigkeitsänderungen vorkommen, — so ist, daß 2 benachbarte Massenelemente eine Linie der Normalen zu ihrer Berührungsfläche eine relative Geschwindigkeit von endlicher Größe besitzen und somit einen Stoß auf einander ausüben (was selbst bei festen und flüssigen Körpern vorkommen kann), so ist, daß (bei Flüssigkeiten) ihre relative Geschwindigkeit längs der Berührungsfläche von endlicher Größe ist — so ist damit ein Verlust an lebendiger Kraft, eine negative Arbeitssumme der inneren Flächenkräfte verbunden. Wird letztere absolut genommen für die unendlich kleine Zustandsänderung des Körpers mit dS bezeichnet, so ist also nun:

$$dO = dJ - dR - dS$$

und also die Gleichung der lebendigen Kraft des Körpers:

$$\text{I.} \qquad dL = dM + dJ - dR - dS + dE$$

wenn die Deformationsarbeit dE allgemein bedeutet:

$$dE = -\int dV\left[\sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \sigma_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} + \tau_x \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} + \tau_y \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} + \tau_z \frac{\partial \gamma_z}{\partial t}\right] dt$$

Sind alle Tangentialspannungen = 0 und sind alle Normalspannungen im betreffenden Punkte gleich groß = σ, so wird natürlich:

$$dE = -\int \delta V\, \sigma\, \frac{d(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{dt}\, dt = -\int \delta V\, \sigma\, \frac{d\varepsilon}{dt}\, dt$$

oder wenn mit $d\,\delta V = \delta V \frac{d\varepsilon}{dt}\, dt$ die unendlich kleine Volumenänderung d. Körperelements und mit $p = -\sigma$ d. Pressung bezeichnet wird:

$$dE = \int p\, d\,\delta V$$

Zweckmäßig sollte jetzt d. Deformationsarbeit mit Expansionsarbeit benannt werden, indem sie nur von den Volumenänderungen d. Körperelemente abhängt; d. Arbeit durch eine negative Expansionsarbeit soll eine Compressionsarbeit genannt werden.

Ist d. Pressung in allen Punkten d. Körpers gleich groß, also = dem spez. äußeren Druck p, so wird, unter V das ganze Körpervolumen verstanden,

$$dE = p\, d\int \delta V = p\, dV$$

Die Geschwindigkeitscomponenten nach den Richtungen d. Coordinatenaxen, welche bisher mit $u\ v\ w$ bezeichnet wurden, sollen i. d. Folge mit $u_x\ u_y\ u_z$ bezeichnet werden, die resultierende Geschwindigkeit mit u, so ist nach bekanntem d. lebendige Kraft eines Körpers der Ausdruck für:

$$L = \int \mu\, \delta V \frac{u^2}{2} = \int \gamma\, \delta V \frac{u^2}{2g}$$

während d. Buchstabe v stets zur Bezeichnung d. spez. Volumens gebraucht werden soll, welches in d. Regel statt d. spez. Gewichtes $\gamma = \frac{1}{v}$ u. d. spez. Masse $\mu = \frac{\gamma}{g} = \frac{1}{gv}$ zur Kennzeichnung des inneren Zustandes benutzt wird.

Wärme & Temperatur.

Dem Vorhergehenden zufolge findet im Allgemeinen eine gegenseitige Abhängigkeit statt zwischen den Änderungen d. inneren und des äußeren Zustandes eines Körpers, indem d. letztere im Allgemeinen mit einer Deformation d. Körpers verbunden ist, wodurch Änderungen d. spez. Volumens und d. Bewegungszustandes in den verschiedenen Punkten desselben bedingt werden, entsprechend jede Spannung sich ändert, sofern d. Möglichkeit d. Bestehens einer gewissen Spannung bei gegebenem Bewegungszustande an einen gewissen Spielraum d. spez. Volumens, bei gegebenem spez. Volumen an gewisse Spielraum d. Bewegungen gebunden sein kann. Es können indessen Änderungen d. inneren Zustandes auch ohne d. gleichzeitige Deformationsarbeit d. Körpers und ohne Änderung d. äußeren Zustandes (ohne Arbeit äußerer Kräfte) stattfinden, so daß sie als Wirkungen einer anderen Ursache erscheinen, als d. Änderungen d. äußeren od. Bewegungszustandes. Es kann z. B. d. Pressung eines luftförmigen Körpers bei unverändertem Volumen in hohem Grade veränderlich sein; eine Mischung von Eis und Wasser kann ganz in Wasser übergehen, so daß d. Volumen während d. Schmelzens d. Eises abnehmend und später zunehmend, schließlich dem Anfangsvolumen wieder gleich ist. Bei Voraussetzung einer in allen Punkten gleichen Pressung ist in beiden Fällen d. Deformationsarbeit = 0, während übrigens auch d. äußeren Teile d. Gleichung für d. lebendige Kraft Seite 23 vorkommenden Arbeiten = 0 sein, gleichwohl hat sich d. innere Zustand geändert. In d. Regel ist mit solcher Änderung eine Deformationsarbeit verbunden; wenn aber letztere, wie es freilich d. Fall sein kann, gegenüber d. Arbeit d. äußeren Kräfte ohne Änderung d. lebendigen Kraft überwiegend ist (z. B. bei d. Reibung eines rotierenden Körpers, auf dessen Oberfläche d. Atmosphäre ruht), so kann man nun so nach d. Ursache fragen, welche

zugleich d. Änderung d. inneren Zustandes und d. Volumenänderung zur Folge hat.
Diese Ursache heißt Wärme. Heißt also Wärme d. Ursache solcher Änderungen d. inneren Zustandes eines Körpers, welche in Änderungen d. Aggregatform, d. spec. Volumens od. d. Spannungszustandes bestehen. Ist somit d. innere Zustand durch diese 3 Faktoren (Aggregatform, spec. Volumen und Spannungszustand) in den verschiedenen Punkten eines Körpers bestimmt, also durch d. Wärme bedingt, soll er d. Wärmezustand heißen. Ein Körper von gleichförmigem Wärmezustande ist ein homogener Körper, dessen spec. Volumen und Spannungszustand in allen Punkten gleich sind.

Um d. Wärme als Größe d. Messung und Rechnung zugänglich zu machen, wird folgende Definition aufgestellt: Zwei Wärmen od. Wärmegrößen verhalten sich wie 1 : n, wenn d. Massen gleichartiger Körper von gleichförmigen und gleichen Wärmezuständen sich wie 1 : n verhalten, in denen sie gleichartige Änderungen d. Wärmezustände hervorrufen. In Folge d. üblichen Auffassung vom Wesen d. Wärme als eine mit gewissen Eigenschaften ausgestatteten Materie ist statt Wärmegröße d. Bezeichnung Wärmemenge gebräuchlich geworden und geblieben. Die Wahl d. Wärmeeinheit knüpft an den Begriff d. Temperatur.

Man sagt: 2 Körper von gleichförmigen Wärmezuständen haben gleiche Temperatur, wenn beliebig in sehr ausgedehnter Berührung ihre Wärmezustände sich nicht ändern. Fänden hierbei d. festen äußeren Wärmemitteilung statt, müßte eine Änderung d. Wärmezustandes des einen Körpers mit einer entgegengesetzten d. anderen verbunden sein, so daß mit d. Unveränderlichkeit des Wärmezustandes des einen Körpers auch auf d. des andern, somit auf d. Gleichheit d. Temperaturen kein geschlossen werden kann. Desgleichen, ein Körper hat d. Temperatur d. schmelzenden Eises od. siedenden Wassers, wenn in Berührung mit einem Gemisch von Eis und Wasser sein Wärmezustand sich nicht ändert.

Wenn 2 Körper sich nicht unmittelbar berühren, sondern durch feine Scheidewand getrennt sind, so kann d. Gleichheit ihrer Temperaturen mit Hilfe d. Grundsatzes beurteilt werden, daß 2 Größen, welche einer dritten gleich sind, auch einander gleich sein müssen. Wenn z. B. d. Wärmezustand d. Quecksilbers eines in eine Flüssigkeit eingetauchten Quecksilberthermometers unter Ausschluß fremder Wärmemitteilung sich nicht ändert, ob man d. Volumen d. Quecksilbers bei möglichst geringer Berührung ermittelt hält, so gilt dasselbe von dem Glase und somit auch von d. Flüssigkeit, welche durch das Glas vom Quecksilber getrennt ist; es haben also Quecksilber und Glas, Glas und Flüssigkeit, folglich auch Quecksilber und Flüssigkeit gleiche Temperaturen.

Ist nun bei gleichförmigem Wärmezustande und bei normalem Atmosphärendruck, gemessen durch eine 0,76 m hohe Quecksilbersäule von d. Temperatur d. schmelzenden Eises,:

V_0 d. Volumen einer gewissen Menge einer d. von ihren veränderlichen und zufälligen Bestandtheilen befreiten atmosphärischen Luft, bei d. Temperatur des unter normalem atmosphärischen Druck schmelzenden Eises,

V_n ihr Volumen bei d. Temperatur d. unter normalem Atmosphärendruck siedenden Wassers

V ihr Volumen in irgend einem anderen Wärmezustand, so wird als Maßzahl d. Temperatur oder kurzweg als Temperatur d. Luft in diesem letzten Zustande diejenige Zahl t definiert, welche d. Gleichung entspricht:

$$V = V_0 + \frac{V_n - V_0}{n}(t - t_0) = V_0\left[1 + \frac{V_n - V_0}{n V_0}(t - t_0)\right]$$

woraus $V = V_0$ für $t - t_0 = 0$ und $V = V_n$ für $t - t_0 = n$ ist.
Dabei sind t_0 und n willkürlich zu wählende Zahlen, welche auch je nach d. angenommenen Temperaturskala verschieden gewählt werden, nach Celsius: $t_0 = 0$ und $n = 100$

nach Réaumur $t_0 = 0$ „ $n = 80$

nach Fahrenheit $t_0 = 32$ „ $n = 180$

Im Folgenden wird stets d. Celsius'sche, 100 theilige Skala zu Grunde gelegt, so daß d. Temperatur d. unter atmosphärischen Druck schmelzenden Eises = 0, die des unter normalem Atmosphärendruck siedenden Wassers = 100, d. h. = 0 Grad (0°) resp. = 100 Grad (100°) ist, indem ein Temperaturunterschied $\Delta t = 1$ ein Temperaturgrad genannt und mit 1° bezeichnet wird.

Aus dem somit festgestellten Begriffe der Lufttemperatur für einen gewissen gleichförmigen Wärmezustand der Luft und dem Gleichheitsbegriffe der Temperaturen zweier Körper von gleichförmigem Wärmezustande ergiebt sich sofort auch die Definition der Temperatur eines beliebigen Körpers von gleichförmigem, dann auch der Temperatur in einem gewissen Punkte eines Körpers von im Allgemeinen ungleichförmigem Wärmezustande. Die praktische Messung der Temperatur vermittelst eines sogenannten Thermometers beruht dann auf dem Grundsatze von der Gleichheit zweier Temperaturen, welche beide einer dritten gleich sind; die Zweckmässigkeit irgend eines Thermometers als Messwerkzeug [illegible] mit der Beziehung, welche zwischen seinen Angaben und denen eines [illegible] atmosphärischer Luft von [illegible] normalem Atmosphärendruck enthaltenden Luftthermometers stattfindet. Mit dem Begriffe der Temperatur pflegt man den der Wärme [illegible] zu verbinden und demgemäß von hoher und niedriger resp. von grosser und kleiner Temperatur zu sprechen.

Als Wärmeeinheit oder Calorie wird jetzt diejenige Wärmemenge angenommen, wodurch die Temperatur von 1 Kgr. reinen Wassers unter einem konstanten, dem normalen Atmosphärendruck gleichen äusseren Druck von 0° auf 1° erhöht wird. Die Unterscheidung [illegible] bestimmten [illegible] Druckes ist [illegible] unwesentlich, [illegible] Zusammendrückbarkeit des Wassers; dagegen ist wesentlich, nicht nur ein bestimmtes Temperaturintervall, sondern auch eine bestimmte Anfangstemperatur bei dieser Definition der Wärmeeinheit vorauszusetzen, weil die zur Erhöhung der Temperatur eines Kgr. Wasser von t° bis $(t+1)^{\circ}$ erforderliche Wärmemenge wesentlich von t abhängt.

Nachdem nun somit der Temperatur als ein neuer Begriff in die Betrachtungen eingeführt ist, der [illegible] wird, ist es nun zunächst notwendig, die Beziehungen zu bestimmen, in welchen die Temperatur eines Körpers von gleicher Art und Gewicht zu dem [illegible] Volumen und Spannungszustand steht. Dabei soll [illegible] für alle [illegible] die einfache Voraussetzung zu Grunde gelegt werden, dass Temperaturänderungen ~~[illegible]~~ [illegible], als [illegible] Formänderungen [illegible] sind, die dann [illegible] für irgend einen Punkt [illegible] desselben [illegible], so ist [illegible] Formänderungen der Spannungszustand des Körpers in dem betreffenden Punkte vollkommen bestimmt ist. [illegible] Voraussetzung und die Allgemeingültigkeit der zu entwickelnden Sätze in Bezug auf flüssige Körper im [illegible] Sinne des Wortes nicht beschränkt, und wird nur in Betreff fester Körper eine [illegible] erleiden. Die Untersuchung wird aber wesentlich vereinfacht, indem dann der Spannungszustand, [illegible] eines Punktes statt im Allgemeinen 6 Größen, [illegible] Spannung 6. Für diese Spannung 6 soll [illegible] $= \div 6$ in die Rechnung eingeführt werden, ~~weil diese~~ [illegible], in einem gewissen Punkte [illegible]. Der Wärmezustand eines Körpers ist demnach [illegible] und Gewicht vollkommen bestimmt durch nur 2 Größen, nämlich durch sein Volumen v und die Pressung p, während ohne die gemachte Voraussetzung hierzu 7 Größen, nämlich die den Spannungszustand [illegible] 6 Größen und das spez. Volumen nötig wären.

[illegible] soll mit t die Temperatur eines Körpers von gleichförmigem Wärmezustande resp. in einem Punkte eines Körpers von ungleichförmigem Wärmezustande bezeichnet werden, [illegible] t zur Bezeichnung der Zeit, so soll die betreffende Temperatur mit τ bezeichnet werden.

Ferner sollen, wenn nicht ausdrücklich andere Bestimmung getroffen werden, zum Messen der in Betracht kommenden Größen als: Längen, Flächen, Volumina, Zeiten, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte, Arbeiten, Temperaturen und Wärmemengen als Maßeinheiten zu Grunde gelegt werden: das meter, Kgr., Sekunde, Kgrm., 1° Celsius und 1 Wärmeeinheit = 1 Calorie.

Was nun die zu entwickelnden Beziehungen betrifft, so kommt dabei [illegible] zu Statten:

Wenn irgend 2 Körper von gleicher Art sich in gleichförmigen und gleichen Wärmezuständen befinden, wenn sie also auch d. nämlichen Dichtigkeiten, gleiche Aggregatform, gleiches spez. Volumen und gleiche Pressung haben, so haben sie erfahrungsmäßig auch dieselbe Temperatur d. h.: ihre Wärmezustände werden schließlich, wenn sie in Berührung gebracht werden, ohne fernerhin äußeren Wärmemitteilungen unterworfen zu werden. Dieses Gesetz bestätigt sich mit nur geringen Ausnahmen, welche (insbesondere z. B.: bei Wasser) in dem Falle beobachtet werden können, daß d. Wärmezustand sich nahe d. Grenze befindet, welche d. Zustandsgebiete d. festen und flüssigen Aggregatform trennt. Z. B. kann man beobachten, daß 2 Wassermengen, welche gleiche spez. Volumen besitzen und sich unter gleichen Pressungen befinden, dennoch verschiedene Temperaturen haben können (die eine eben größer als 4° und die andere eben niedriger als 4°).

Abgesehen von diesen wenigen Ausnahmen, hält sich das obige Gesetz jedoch immer wieder bestätigt.

Die Temperatur t eines Körpers von bestimmter Art ist also durch seinen Wärmezustand d. h. durch d. Aggregatform, dessen Volumen v und d. Pressung p im Allgemeinen bestimmt, es ist also t eine Function von v u. p, ~~wobei~~ deren Form und Coefficienten von d. Körperart und von d. Aggregatform d. Körpers abhängig sind, die natürlich d. Inhalt eines homogenen Körpers gemäß, für alle Elemente eines homogenen Körpers dieselbe ist, falls man denselben sich in verschiedenen Wärmezuständen befinden. Wenn nun zunächst ein homogener Körper vorausgesetzt wird, so soll diese bezügliche Gleichung, welche zwischen d. Elementen v p u. t stattfindet, d. Zustandsgleichung d. homogenen Körpers für d. betreffende Aggregatform genannt werden.

Den gegenwärtig zu Gebote stehenden Kenntnissen zufolge, hat man Grund anzunehmen, daß die Form dieser Zustandsgleichung (abgesehen von den Ausnahmen, welche gewisse Körper in d. Nähe d. Grenze zwischen 2 Aggregatformen zeigen) nur von d. Art d. Aggregatform und nicht von d. Körperart abhängig ist, dass vielmehr d. Körperart nur d. Coefficienten d. Zustandsgleichung bedingt. Es hätten also demgemäß verschiedenartige homogene Körper bei gleicher Aggregatform solche Zustandsgleichungen von d. nämlichen Form, wenn d. Coefficienten nur entsprechend d. verschiedenen Körperarten verschieden sind. Wenn man also für d. Coefficienten als allgemeine Buchstabengrößen einführt, so kann man auch kurzweg von d. Zustandsgleichung einer Aggregatform sprechen. So z. B. würde für Gase gelten: $pv = R(a+t)$ d. Zustandsgleichung eines Gases, wenn freilich d. Coefficienten R u. a nach d. Art d. Gases bestimmt werden müssen.

Diese Zustandsgleichung einer Aggregatform kann, abgesehen von speculativen Untersuchungen in Betreff d. Molekularconstitution d. Materie, nur durch Interpolation aus einer großen Zahl zuverlässig experimenteller Bestimmungen d. Größen v p t abgeleitet werden, wobei es Sache d. Fall sein kann, daß man sich vielleicht mit solchen Gleichungen behelfen muß, welche nur für einen gewissen Theil d. Umfangsgebietes einer Aggregatform entsprechender Annäherung gelten, z. B.: für luftförmige Körper in d. Nähe desjenigen Grenzzustandes, welcher dem Übergange zur tropfbar flüssigen und festen Aggregatform entspricht (Dämpfe) od. in d. Nähe d. entgegengesetzten Grenzzustandes (vollkommene Gase).

Durch bezügliche Zustandsgleichung wird d. Temperatur t im Allgemeinen nur eindeutig bestimmt, in den meisten Ausnahmefällen jedoch 2deutig. Wenn z. B.: bei gewissen Werthen von v u. p d. Temperatur d. Wassers kleiner als 4° ist, so kann sie bei denselben Werthen von v u. p daneben einen andern Werth größer als 4° haben, indem bei $t = 4°$ ungefähr d. spez. Volumen bei gegebener Pressung ein min. ist.

Im Allgemeinen ist d. Zustandsgleichung von solcher Art, daß:

wenn v constant ist, p und t stets in gleichem Sinne gleichzeitig ändern
" p " " v " t " " " " " "
" t " " v " p stets in entgegengesetztem Sinne gleichzeitig ändern.

Mit Hülfe dieser Zustandsgleichung kann natürlich jede d. 3 Größen v p t als Function d. beiden anderen ausgedrückt werden. Der Wärmezustand eines homogenen Körpers von gegebener Art und gegebener Aggregatform kann deshalb auch nicht nur durch v und p sondern auch durch v u. t od. durch p und t, überhaupt durch irgend 2 Größen d. 3 Elemente v p t bestimmt werden.

In d. Physik und Technik ist d. gewöhnliche Verfahrung am gebräuchlichsten und dasjenige am meisten üblich geworden, d. Wärmezustand bei flüssigen Körpern immer durch p u. t zu charakterisieren, indem Pressung und Thermometer mittelst d. bekannten Instrumente Manometer und Thermometer am leichtesten meßbar sind.

In diesen Betrachtungen wurde immer d. Begriff eines homogenen Körpers vorausgesetzt; bei den speziellen Untersuchungen kommen jedoch auch nicht homogene Körper in Betracht, wenigstens Gemische von Körpern gleicher Art und verschiedenen Aggregatformen. Z.B. Gemische von Flüssigkeiten mit luftförmigen Körpern derselben Art (Wasser und Wasserdampf). Diese Gemische können nun bekanntlich entweder continuierlich od. discontinuierlich sein. Auf solche Gemische kann nun eine Zustandsgleichung d. Art sein.

Was zunächst d. continuierliche Gemisch betrifft, so sei v d. spec. Volumen dieses Gemisches in einem bestimmten Punkte, also d. Volumen pro 1 Kgr an dieser Stelle, d. h. das Verhältnis aus dem Volumen d. den Punkt einschließenden Elements durch d. Gewicht desselben. Da d. Definition eines continuierlichen Gemisches zufolge dasselbe 2 Bestandtheile in gleicher Art aber verschiedenen Aggregatformen enthält, so sei w d. spec. Volumen des einen und $w + \Delta$ d. spec. Volumen d. andern Bestandtheils. Das Mischungsverhältnis sei ausgedrückt durch y d. h. in einem Kgr d. Gemisches seien y Kgr d. letzt. Bestandtheils enthalten; es ist also $1 - y$ d. Gewichtsmenge d. ersten Bestandtheils pr. 1 Kgr.

Unter diesen Umständen kann d. spec. Volumen v in einem Kgr d. Gemisches wie folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$v = (1-y)w + y(w+\Delta) = w + y\Delta.$$

In dieser Gleichung sind w und Δ jedenfalls im Allgemeinen Functionen von p u. t, und somit auch d. spec. Volumen v eine Function von p u. t entsprechend den bestehenden Zustandsgleichungen welche den Aggregatformen d. beiden Bestandtheile entsprechen; sie sind jedoch p u. t nicht unabhängig von einander, sondern sind durch eine gewisse Beziehung $f(p\,t) = 0$ mit einander verbunden, indem d. Wärmezustände d. beiden Bestandtheile nicht beliebige Zustände für d. betreffenden Aggregatformen, sondern Grenzzustände bezüglich auf den Übergang aus der einen in d. andere Aggregatform sind. Z.B. ist bei gesättigten Wasserdampf bekanntlich eine so genau untersuchte Beziehung zwischen Pressung und Temperatur, daß man aus d. gegebenen Pressung auf d. Temperatur genau mittelst Rechnung schließen kann. In der obigen Gleichung können demnach entweder w und Δ als Functionen von p oder als Functionen von t betrachtet werden, und mithin die Gleichung selbst als Beziehung zwischen $v\,p\,y$ oder als Beziehung zwischen $v\,t\,y$ aufgefaßt sein. Diese Gleichung soll in dem vorliegenden Falle die Zustandsgleichung eines solchen continuierlichen Gemisches genannt werden. Sind irgend zwei d. 4 Größen $v\,p\,t\,y$ gegeben und genommen p u. t, welche schon durch d. Beziehung $f(p\,t) = 0$ von einander abhängen, so sind durch d. Zustandsgleichung und d. Beziehung $f(p\,t) = 0$ nicht eindeutig d. beiden anderen bestimmt.

Was endlich d. discontinuierliche Gemisch betrifft, d. h. eine einfache Zusammensetzung d. beiden gleichen Körper in verschiedenen Aggregatformen, so können diese nur in Betracht unter d. Voraussetzung daß p u. t in allen Punkten dieselben Werthe haben, während sonst d. Zustandsänderungen d. beiden Bestandtheile verschiedener Aggregatformen einzeln für sich untersucht werden müßten. Es bedeute jetzt v d. mittlere spec. Volumen d. discontinuierlichen Gemisches und y d. Mischungsverhältnis d. ganzen Volumens d. h. y d. Gewichtsmenge d. letzt. Bestandtheils per 1 Kgr d. ganzen Körpers. w und Δ haben dieselben Bedeutungen: so ist nun auch wieder: $v = w + y\Delta$ etc.

Hatte also in beiden Fällen eines homogenen Körpers und eines Gemisches d. Wärmezustand durch d. unmittelbar beiden Größen als unabhängig Veränderliche charakterisiert werden, so können diese entweder v u. p od. v u. t sein. Im Folgenden wird allgemein v u. p als unabhängige Variable zu den Entwicklungen zu Grunde gelegt, indem dadurch bekanntlich d. Anschaulichkeit sich am einfachsten erreichen läßt. Bei d. Anwendung auf einzelne bestimmte Fälle kann man natürlich auch d. anderen beiden Größen v u. t als unabhängige Variable zur Charakterisierung d. Wärmezustandes wählen.

Die vorigen aus d. Erfahrung hervorgegangenen neuen Begriffe von Wärme und Temperatur, haben uns zunächst Anwendung d. Vorgänge bei d. Uebertragung d. Wärme von einem Körper zum andern näher zu untersuchen. Dieselben lassen nämlich die [illegible] nicht aufgestellte 5. Differentialgleichung entnehmen, zur vollständigen Lösung eines Zustandes eines Körpers nöthig sind, indem die 4 Differentialgleichungen aus den umgekehrten Vorgängen abgeleitet werden konnten, diese 4 Gleichungen aber 5 Unbekannte enthalten. Diese 5te Differentialgleichung, od. diese Ergänzung [illegible] von den neu eingeführten Begriffen von Wärme und Temperatur und [illegible] auch von den Uebertragung d. Wärme von einem zum andern Körper od. von verschiedenen Theilen eines und desselben Körpers.

Wärmemittheilung durch Berührung.

Werden 2 Körper von verschiedenen Temperaturen mit einander in Berührung gebracht, so zeigt erfahrungsmäßig d. Temperatur des einen einen zu und die des andern Körpers eine ab, bis schließlich d. Temperaturdifferenz = 0 geworden ist. Man sagt dann es geht Wärme von dem Körper höherer Temperatur zu dem Körper niederer Temperatur über, od. auch es gehe diese Wärme selbst von höherer zu niederer Temperatur über. Diesen Vorgang nennt man Wärmeleitung; es ist dabei [illegible] ein gewisser Bewegungszustand d. Wärme zu verstehen, welche von einem Körper zum andern, oder auch in einem Körper selbst vor sich geht. Ist nun K d. Körper von ursprünglich höherer Temperatur und K_1 d. Körper von ursprünglich niederer Temperatur, welche beide sich in einer Fläche F berühren. Sobald d. beiden Körper in Berührung gebracht werden, so tritt offenbar in K eine Wärmeleitung nach F hin aus dem Körper hinaus und in K_1 eine Wärmeleitung von F weg in den Körper hinein ein. Auf diesem Grund werden d. Temperaturen in den verschiedenen Theilen d. Körper nicht verschieden sein, nämlich offenbar entsprechend eine Temperaturabnahme im Körper K gegen F hin und in K_1 eine Temperaturabnahme von F weg. Denkt man sich nun einen solchen Körper in irgend einem Augenblick durch eine Anzahl von Flächen geschnitten, so soll diese möglichen Flächen durch Punkte gleicher Temperatur gehen, also d. augenblickliche Temperatur in allen Punkten einer solchen Fläche gleich groß ist und nehmen wir je 2 benachbarten Flächen eine [illegible] gleich großen Abstand verschieden ist, so liegen diese Flächen unter sich [illegible] je größer d. Leitungsfähigkeit d. Körpers für d. Wärme ist, einen um so größeren Weg also d. Wärmeleitung im Zeitelement dt zurücklegt. Diese Wärmeleitungsfähigkeit kann im Allgemeinen sowohl in verschiedenen Punkten d. Körpers als auch in demselben Punkt nach verschiedenen Richtungen verschieden sein; [illegible] sie wird gemessen durch den sogenannten Wärmeleitungscoefficienten, welcher durch d. folgende Definition bestimmt ist.

Angenommen A sei ein Punkt eines Körpers, in welchem zur Zeit t d. Temperatur T herrscht; von A aus sei eine beliebige Richtung AX gezogen und durch A senkrecht zur AX eine Fläche gelegt. dF sei ein unendl. kl. Flächenelement dieser Fläche, welches d. Punkt A einschließt. Auf AX sei ein anderer Punkt A_1 angenommen um d. unendl. kl. Strecke dx von A entfernt. Ändert sich nun d. Temperatur in d. Richtung AX stetig, und soll zur selben Zeit t in A_1 d. Temperatur $T + \frac{dT}{dx}dx$ sein. Infolge d. Wärmeleitung, welche im Körper stattfindet, geht während d. Zeitelements dt in d. Richtung AX eine unendl. kl. Wärmemenge dQ durch d. Flächenelement dF (senkrecht zu AX) hindurch, od. einen negativen Werth in entgegengesetzter Richtung, x abnehmend wird. Bestimmt man d. folgende Gleichung an:

$$dQ = -k\,dF\,\frac{dT}{dx}\,dt$$

so versteht man unter k den Wärme~~leitungsfähig~~leitungscoefficienten eines Punkts A d. Körpers nach d. Richtung AX.

Die durchgeleitete Wärmemenge dQ wird offenbar um so größer, je schneller d. Temperatur von A aus nach AX hin abnimmt, je größer also d. Absolutwerth von $\frac{dT}{dx}$ ist.

Dividirt man d. obige Gleichung durch $dF\,dt$, so bekommt man:

$$\frac{dQ}{d\sigma\,dt} = \div\, k\,\frac{d\iota}{dx}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist offenbar die per Flächeneinheit und Zeiteinheit durchgeleitete Wärmemenge d.h. die Wärmemenge, welche per Flächeneinheit in der Zeiteinheit hindurch gehen würde, wenn die Umstände gleich bleiben würden. Den Ausdruck auf der rechten Seite kann man gewissermaßen betrachten als die Geschwindigkeit der Wärmeleitung im Punkte A nach der Richtung AX.

Wie schon erwähnt kann der Wärmeleitungscoefficient k in verschiedenen Punkten und in denselben Punkte nach verschiedenen Richtungen im Allgemeinen verschieden sein. Ist der Körper homogen, so kann k in der Regel in allen Punkten gleich angenommen werden. Der gewöhnlich ist auch k in allen Richtungen als constant. In der Folge wird k immer als unabhängig von der Richtung angenommen werden, weil bei den Wärmeleitungen in Flüssigkeiten nicht in Betracht kommt, während es bei festen Körpern (namentlich krystallisirten) nach verschiedenen Richtungen sehr verschieden sein kann. Genau genommen ist k jedoch auch bei Flüssigkeiten als Funktion vom Wärmezustand zu betrachten, indem die Wärmeleitung dieses Elements beeinflußt wird durch den Wärmezustand, namentlich durch v u. s. w. Da diese aber von Punkt zu Punkt verschieden sein können auch bei homogenen Körpern, so ist der Leitungscoefficient k streng genommen auch bei homogenen Körpern im Allgemeinen in jedem Punkte verschieden.

Es seien nun x y z die Coordinaten des Punktes A, in welchem sich der Wärmeleitungscoefficient k befindet, und x + dx y + dy z + dz seien die Coordinaten eines unendlich nahe benachbarten Punktes A_1. Durch beide unendlich nahe zusammenliegenden Punkte A und A_1 seien die den Coordinatenebenen parallelen Ebenen ein unendl. kl. rechtwinkliges Parallelepipedum gelegt, dessen Kantenlängen also dx dy dz sind. ι sei die Temperatur im Punkte A zur Zeit t und also bei Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung auch ι die Temperatur des ganzen parallelepipedischen Elements zur Zeit t. Um nun die enthaltene Wärmemenge dQ zu bekommen, welche dem Volumenelement während des unendl. kl. Zeitraums dt durch Leitung mitgetheilt wird, stellen wir folgende Betrachtung an:

Durch jede der 6 Seitenflächen des parallelepipedischen Elements ~~wird~~ findet eine Wärmeleitung von den benachbarten Theilen statt. Betrachtet man zunächst diejenige Fläche, welche durch A geht und senkrecht zur X Axe steht, deren Inhalt also dy dz ist, so ist nach dem Vorhergehenden die Wärmemenge, welche im Zeitelemente dt durch diese Fläche dy dz in der Richtung der X Axe dem Elemente dx dy dz = dV mitgetheilt wird: —

$$\div\, k\,dy\,dz\,\frac{d\iota}{dx}\,dt$$

und zwar bedeutet diese Wärmemenge offenbar eine Zunahme an Temperatur des Elements, weil sie im positiven Sinne der X Axe einströmt. Die Wärmemenge nun, welche durch die gegenüberliegende Fläche durch A_1 gehend, im Zeitelemente dt im Sinne der negativen X Axe dem Elemente mitgetheilt wird, findet man offenbar, wenn man nur die oben gefundene um ihr Differential nach x vermehrt, weil man um dx im Sinne der X Axe fortschreiten muß um von einer Fläche zur andern zu kommen. Es ist also diese Wärmemenge:

$$- k\,dy\,dz\left(\frac{d\iota}{dx} + \frac{d^2\iota}{dx^2}\,dx\right)dt.$$

und also die Zunahme an Wärmemenge, welche dem parallelepipedischen Elemente im Zeitelemente dt im Sinne der X Axe mitgetheilt wird durch die beiden zur X Axe senkrechten Seitenflächen:

$$- k\,dy\,dz\left[\div\frac{d\iota}{dx} + \left(\frac{d\iota}{dx} + \frac{d^2\iota}{dx^2}\,dx\right)\right]dt.$$

Analog ist die Zunahme an Wärmemenge, welche dem Elemente dV im Zeitelemente dt im Sinne der Y und Z Axe mitgetheilt wird:

$$- k\,dx\,dz\left[\div\frac{d\iota}{dy} + \left(\frac{d\iota}{dy} + \frac{d^2\iota}{dy^2}\,dy\right)\right]dt$$

$$\text{und} - k\,dx\,dy\left[\div\frac{d\iota}{dz} + \left(\frac{d\iota}{dz} + \frac{d^2\iota}{dz^2}\,dz\right)\right]dt.$$

die Summe dieser 3 Ausdrücke stellt demgemäß diejenige resultierende Wärmemenge dQ, welche dem parallelepipedischen Körperelement im Zeitelement dt durch Leitung mitgetheilt wird. Dabei ist nun k unveränderlich, entsprechend d. Voraussetzung, daß d. Wärmeleitungscoefficient nach d. Richtung unabhängig sei und desgleichen sich nicht von Punkt zu Punkt ändere.

Berücksichtigt man dann noch daß $dx \cdot dy \cdot dz = dV$, so bekommt man nach d. Summierung:

$$dQ = k\, dV \left[\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \right] dt.$$

Diese Gleichung kann man später zur Herleitung d. nachfolgenden Fourier'schen Differentialgleichung dienen. Bevor aber diese Anwendung gemacht werden soll, sind noch hinsichtlich d. Wärmeleitung einige ergänzende Mittheilungen zu machen.

Zunächst muß noch hervorgehoben werden, daß im Innern eines homogenen Körpers od. auch eines continuierlichen Gemisches die Temperatur eine continuierliche Function d. Coordinaten ebenso wie d. [illegible] ist und d. Strömung im Falle d. homogenen Körpers nach d. [illegible] und d. [illegible] im Falle d. continuierlichen Gemisches, mindestens zum Theil d. Zusammensetzung verbunden ist. Dasselbe gilt auch für den Fall eines discontinuierlichen Gemisches, sofern die einzelnen Bestandtheile homogen sind und an ihren Berührungsflächen sich im Gleichgewicht zwischen 2 Aggregatformen befinden, so zu 2 Punkten eines [illegible] Körpers, welche einander unendlich nahe liegen, sind also d. Temperaturen [illegible] unendlich verschieden von einander.

Anders verhält es sich aber bei 2 verschiedenartigen, sich berührenden Körpern, wenn nämlich unter beiden Körpern K und K_1, die verschiedenen Aggregatzustand haben und sich in d. Fläche F berühren, K eine höhere Temperatur als K_1 hat, so daß eine Wärmeleitung von K nach K_1 stattfindet, so ändert sich zwar d. Temperatur innerhalb d. Körpers K continuierlich abnehmend gegen F und ebenso continuierlich zunehmend gegen F im Körper K_1. Für d. an d. Berührungsfläche F angrenzenden unendlich dünnen Oberflächenschichten d. beiden Körper K und K_1 können aber während d. Wärmeleitungsprozesses von K nach K_1 die Temperaturen um eine endliche Größe verschieden sein. Ist dF ein Element d. Berührungsfläche d. Körper K und K_1 und $\Delta\tau$ d. endliche Temperaturunterschied der in d. Oberflächenschicht von K herrschenden Temperatur gegen diejenige in d. an F angrenzenden Oberflächenschicht von K_1 und ferner dQ d. Wärmemenge, welche im Zeitelement dt von K zu K_1 übergeht, so kann man jetzt d. Gleichung für d. Geschwindigkeit d. Wärmeleitungsprozesses schreiben:

$$\frac{dQ}{dF \cdot dt} = k_1 \cdot \Delta\tau$$

; hierin stellt nun k_1 d. Wärmeleitungscoefficient an d. Stelle d. Elements dF d. Berührungsfläche, welche in diesem Falle wesentlich von d. chemischen Beschaffenheit d. beiden sich berührenden Körper abhängig ist. Ebenso wie an d. Berührungsfläche zweier verschiedener Körper kann auch im Innern eines nicht homogenen Körpers, innerhalb von d. Grenze zwischen Bestandtheilen von verschiedener Art d. Temperatur sich discontinuierlich von einem Punkte zum andern ändern. Man erhält sich in dieser Hinsicht gegenwärtig d. Strömung, welche bekanntlich sich innerhalb nur continuierlich ändert sowohl im Innern eines homogenen Körpers als auch an den Berührungsflächen zweier sich berührender Körper. Ein endlicher Strömungsunterschied könnte nur dann an d. Berührungsflächen d. beiden sich berührenden Körper stattfinden, wenn d. Aether überhaupt [illegible] Körper habe. Daß d. Temperaturänderung so verschieden ist von dem Verhalten d. Strömung von einem Punkt zu andern, ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß d. Strömung nur abhängig von d. Masse d. Körper ist und nicht von d. chemischen Beschaffenheit ihrer Oberflächen, dagegen d. Temperatur wesentlich bedingt ist von d. chemischen Beschaffenheit d. Berührungsflächen und d. Intensität d. Berührung. Unbedingt muß bemerkt werden, daß d. Wärmeleitung im Innern einer Flüssigkeit od. in einem Gemische von festen und flüssigen Bestandtheilen die Wärmeleitung wesentlich beeinflußt werden kann durch allerlei Strömungsbewegungen, welche letztere unmöglich verfolgt werden können. Ehe denn die ganze Mischung dieselbe Temperatur in allen Punkten angenommen hat, kann eine längere Zeit vergehen, so daß

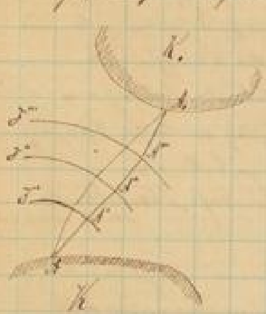
d. Wärmeleitungscoefficient k sehr [illegible]. Wenn insbesondere einer homogenen Flüssigkeit [illegible] Wärme von unten her mitgetheilt od. von oben her entzogen wird, so kann durch d. Änderung d. spec. Gewichts eine so lebhafte Wirbelbewegung in d. Flüssigkeit hervorgebracht werden, daß d. Temperatur in demselben Augenblicke in je 2 Punkten nur wenig verschieden, d. Wärmeleitungscoefficient k also [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Gemisch von 2 [illegible] Bestandtheilen [illegible] [illegible] [illegible] Bestandtheile [illegible] [illegible] [illegible] Flüssigkeit [illegible] Wirbelbewegungen [illegible] [illegible]. Nur bei [illegible] festen Körpern hat k unter allen Umständen einen [illegible] Werth.

Bei d. Anwendung auf eine Flüssigkeit muß noch besonders [illegible] werden, daß δV u. d. Gleichung für δQ nur das Volumen eines solchen Körperelements bedeutet, [illegible] [illegible] [illegible] Flüssigkeit [illegible] [illegible] Temperatur während d. Zeitelements δt [illegible] [illegible] [illegible] Wärmeströmungen [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. Die Gleichung für δQ hat dann nur [illegible] [illegible] Werth [illegible] [illegible], [illegible] den Wärmeleitungscoefficienten k einen solchen Werth beilegen, [illegible] [illegible] Wärmeleitungs[illegible] [illegible] [illegible] Flüssigkeit [illegible] [illegible] [illegible].

Wärmemittheilung durch Strahlung.

Außer durch Wärmeleitung kann d. Wärmeübertragung von einem zum anderen Körper auch noch auf anderem Wege vor sich gehen:

[illegible] [illegible] [illegible] d. [illegible] in [illegible] befindliche Körper, wenn sie [illegible] in dem betreffenden Medium sind, gegenseitig Wärme mittheilen, ohne daß das Medium selbst in seiner Temperatur eine Änderung erfährt. Diese Wärmeübertragung nennt man bekanntlich Wärmestrahlung. [illegible] [illegible] [illegible] Gesetzen [illegible] [illegible] d. Lichtstrahlen [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] d. Wesen von Lichtstrahlen, die folgende Vorstellung von d. Wärmestrahlung:



Es seien K und K' die Wärme [illegible] Körper und A irgend ein Punkt d. Oberfläche von Körper K; die von diesem Punkte ausgestrahlte Wärme erreicht [illegible] Zeitelemente δt [illegible] [illegible] Punkten einer gewissen Fläche S'. Nun kann man [illegible] [illegible] Punkte d. Fläche S' [illegible] [illegible] [illegible], von wo aus sich d. Wärmestrahlen weiter verbreiten. Diese Wärmestrahlen erreichen [illegible] 2te Zeitelement δt [illegible] [illegible] Flächen S'', welche eine gemeinschaftliche Umhüllungsfläche S'' [illegible]. Alle Punkte d. Umhüllungsfläche S'' [illegible] Flächen S'' [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] dritten Zeitelement δt die Wärmeausstrahlung [illegible] [illegible] Flächen S''' [illegible] gemeinschaftlichen Umhüllungsfläche S''' [illegible] u. s. f. Diese verschiedenen [illegible] Umhüllungsflächen S' S'' S''' etc. [illegible] d. vom Punkte A ausgehenden Wärmewellenflächen und [illegible] A [illegible] Linie, welche alle diese Wärmewellenflächen normal durchschneidet, heißt ein von A ausgehender Wärmestrahl z. B. AA'. Die Wärmestrahlen können im Allgemeinen keine geraden [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], da dieselben durch [illegible] [illegible] Beschaffenheit d. Mediums [illegible] [illegible] reflectirt werden können. Z. B. [illegible] Medium [illegible] [illegible] [illegible] d. Wärmestrahl [illegible], wenn er auf seinem Wege eine [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] Wärmestrahlen [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] bekanntlich, entsprechend wie d. Lichtstrahlen in [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], die Wärmestrahlen [illegible] Fortpflanzungsgeschwindigkeit in demselben Medium. [illegible] A [illegible] den Körper K' in A' [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Weg, [illegible] [illegible] d. [illegible] Wärme von A ausgehend den Punkt A' in d. kürzesten [illegible] Zeit erreicht. Es kann natürlich auch auf [illegible] anderen Wege Wärme [illegible] den Körper K' von A mitgetheilt werden, entsprechend d. [illegible] [illegible] Wärmestrahls, [illegible] aber alle Elemente d. Wärmestrahls ~~AA'~~ senkrecht zu den Wärmewellenflächen. [illegible] AA' [illegible] [illegible] so kann es offenbar nicht gleichzeitig von einem andern Körper gehen, welcher fortwährend zu der Wärme … statt und auf den Punkt A, wenigstens A nicht. Es stellt sich daher … Gesetz nicht allgemein gültig.

Diese Auffassung … nicht eine … Untersuchung zu.

Für jede Wärmestrahlung zwischen 2 sich nicht berührenden Körpern findet gegenseitig, indem der eine dem andern und dieser wieder dem ersteren Wärmestrahlen zusendet. Die Wärmemenge welche … Unterschied, welche dem einen Körper mehr mitgetheilt wird als er ausgibt. Die Wärmemengen, welche 2 solche Körper in einem bestimmten Zeitraum zustrahlen, ist begreiflicherweise abhängig von d. Beschaffenheit d. Oberflächenschichten, von den Temperaturen d. Oberflächenschichten und von der Beschaffenheit und Durchlässigkeit d. Mediums. Es fragt sich nun ob dieselben Bedingungen, welche ~~[illegible]~~ für d. Wärmeleitung hinsichtlich d. Temperaturgleichgewichts für 2 sich berührende Körper gelten, auch angenommen sind auch … Temperaturgleichgewichtszustand 2 sich nicht berührende Körper, die sich gegenseitig durch Strahlung Wärme mittheilen. 2 Körper, die sich berühren, befinden sich bekanntlich im Gleichgewichtszustand d. Temperatur, wenn d. Temperaturen ihrer Oberflächenschichten und d. Berührungsfläche gleich groß sind, entsprechend d. Definition d. Gleichheit 2 Temperaturen. Aber nun d. Beschaffenheit d. Oberflächenschichten und d. Mediums ganz unwesentlich. Es fragt sich nun ob auch 2 Körper K und K', ein Temperaturgleichgewicht sich befinden hinsichtlich d. Wärmestrahlung, wenn ihre Oberflächenschichten gleiche Temperaturen haben unabhängig von d. Beschaffenheit d. Oberflächenschichten und d. Mediums, d. h. ob d. eine Körper unter diesen Voraussetzungen von dem andern Körper in derselben Zeit ebensoviel Wärme empfängt als er an diesen mittheilt. Dies läßt sich jedoch nicht ohne Weiteres behaupten, indem d. Definition d. Gleichheit zweier Temperaturen stattfindende Wärmeleitung durch Berührung voraussetzt. Um also dieses zu behaupten müßte man diese Definition entsprechend erweitern, was jedoch nicht ohne Willkürlichkeit geschehen kann. Auf … Wege kann man nun dazu eine Feststellung d. Bedingungen, unter denen d. Temperaturgleichgewicht durch Strahlung stattfindet, gelangen, indem … d. Mannigfaltigkeit d. Erscheinungen und … zu solchen Resultaten … ist. Erfahrungsmäßig angestellt ist es jedoch zu behaupten, daß ein d. Temperaturgleichgewicht stattfindet, wenn d. Oberflächenschichten d. beiden Körper gleiche Temperaturen und gleiche Beschaffenheiten haben und d. Medium … dasselbe bleibt. Um aber für alle möglichen anderen Fälle die betreffenden Bedingungen zu bestimmen müßte man eingehende Versuche anstellen, deren Resultat aber … sind. Es erscheint deshalb eine … Untersuchung in dieser Beziehung ~~[illegible]~~ … als einzige Mittel diese Bedingungen zu bestimmen. Diese … Untersuchung wurde von Clausius ausgeführt. (Siehe: Grashof, Theoretische Maschinenlehre) Dieselbe sind folgende:

Wenn es allgemein als … gilt, daß d. Temperaturgleichgewicht zweier sich Wärme mittheilender Körper durch die Gleichheit ihrer Oberflächentemperaturen charakterisirt ist, nämlich nicht nur im Falle d. Wärmemittheilung durch Berührung, wofür diese Gleichheit durch Definition stattfindet, sondern auch im Falle d. Wärmestrahlung, so daß also auch niemals im Falle eine überschüssige Wärmeübertragung von einem kälteren in einen wärmeren Körper stattfinden kann, so muß man annehmen, daß d. specifische Wärmeausstrahlung vollkommen schwarzer Körper von gleicher Oberflächentemperatur durch Unterschiede d. Fortpflanzungsgeschwindigkeiten d. Strahlen in den angrenzenden Mitteln … verschieden sind, wobei es keinen Unterschied macht, ob d. Strahlen durch Brechung oder Reflexion in beliebiger Weise verändert werden oder nicht. Hinsichtlich eines schwarzen Körpers ist folgendes zu bemerken. Wenn irgend einem Körper von Außen Wärme mitgetheilt wird, so wird ein Theil derselben von d. Oberfläche d. Körpers reflectirt, ein Theil durch die Oberflächenschicht hindurchgelassen und ein dritter Theil endlich wird von d. Oberflächenschicht zurückgehalten (im Allgemeinen) oder verschluckt. Unter einem schwarzen Körper versteht man nun einen solchen, bei welchem die ersten beiden Fälle nicht vorkommen, bei welchem also d. Oberflächenschicht d. ganze Wärmemenge verschluckt. Unter Absorptionscoefficienten eines Körpers versteht man d. Verhältniß d. von einem Körper verschluckten Wärmetheils zu der ihm überhaupt zugestrahlten Wärmequantität, wenn … dieser auf

Körper einen schwarzen Körper als einen solchen definiren, dessen Absorptionscoefficient = 1 ist. Versteht man unter d. ganzen Wärmeausstrahlung eines Körpers für ein Punkt A d. Oberfläche eines Körpers diejenige Wärmemenge, welche per Flächeneinheit und per Zeiteinheit in diesem Punkte ausgestrahlt wird. Diese hängt im Allgemeinen von d. Beschaffenheit d. Oberflächenschichten beider Körper, von den Temperaturen derselben und von d. Beschaffenheit d. Umhüllung ab. Bezüglich d. ersten Umstandes führt man einen Coefficienten ein und versteht unter diesem Wärmeemissionscoefficienten d. Verhältniss d. ganzen Wärmeausstrahlung eines beliebigen Körpers zu d. ganzen Wärmeausstrahlung eines vollkommen schwarzen Körpers bei gleichen Umständen. D. Emissionscoefficient für einen schwarzen Körper ist also auch = 1. Aus den obigen Umständen geht dann auch ferner hervor, daß d. Emissions- und Absorptionscoefficienten verschiedener Körper auch in einem constanten Verhältniss zu einander stehen.

Aequivalenz von Wärme & Arbeit. Wärmegleichung & Gleichung d. Arbeitsvermögens.

Nach einzelnen Erfahrungen wird durch Aufwendung von Arbeit Wärme gewonnen, aber auch umgekehrt durch Aufwendung von Wärme Arbeit od. lebendige Kraft gewonnen. Als Beispiel d. ersten Art kann man Entstehen d. Erzeugung von Wärme durch Reibung, durch Compression von Gasen etc., wozu unbedingt Arbeit erforderlich ist; als Beispiel d. 2. Art sind besonders d. calorischen Maschinen anzuführen, vermittelst welcher Arbeit unter Verbrauch von Wärme gewonnen wird. Nach Vorhergehendem wurden d. Kräfte als d. Ursachen d. Änderungen d. äusseren Zustandes eines Körpers definirt; wenn man nun, wie oben bemerkt, sieht, daß d. Wärme ganz dieselbe Wirkung haben kann, so müssen Wärme und Arbeit offenbar gleichartige Größen sein. Ferner wurde d. Wärme als eine d. Ursachen d. Änderungen d. inneren Zustandes definirt, nach obigen Erfahrungen können aber Kräfte und Arbeiten ganz dieselben Wirkungen zeigen, woraus wieder ersichtlich, daß sich beide Größen gegenseitig ersetzen können. Es handelt sich also gewissermaßen Wärme in Arbeit verwandeln, indem man findet, daß d. lebendige Kraft eines Körpers durch Wärme vergrößert wird. Wärme und Arbeit sind also vergleichbare Größen. Dieser Begriff führt nun zu einem bestimmten Verhältniss, dessen Zahlenwerth nur von den Einheiten abhängt, durch welche d. Größen gemessen werden. In d. That lehrt d. Erfahrung, daß wenn man durch Aufwendung von Arbeit den Wärmezustand verändert, und d. aufgewendete od. verbrauchte Arbeit mit d. Wärmemenge vergleicht, welche d. Körper zur Bewirkung derselben Änderung d. Wärmezustandes hätte mitgetheilt werden müssen, od. wenn umgekehrt durch Änderung d. Wärmezustandes Arbeit verrichtet wird, und d. verrichtete od. gewonnene Arbeit mit d. Wärmemenge vergleicht, welche dem Körper zur Bewirkung derselben Änderung hätte entzogen werden müssen, daß dann jene Arbeit dieser Wärme stets in demselben Verhältniss 1 : A proportional ist. Die Wärmemenge A, welche d. Arbeitseinheit entspricht, nennt man den Wärmewerth d. Arbeitseinheit od. das calorische Arbeitsäquivalent. Die Arbeit $\frac{1}{A} = W$, welche d. Wärmemenge = 1 entspricht, heißt d. Arbeitswerth d. Wärmeeinheit od. das mechanische Wärmeäquivalent. Die Zahlenwerthe von A und W sind am zuverlässigsten durch Reibungsversuche zu ermitteln. Nimmt man bei d. Messung von Arbeiten 1 kgmeter und bei d. Messung von Wärme 1 Calorie zu Grunde, so hat man gefunden:

$$\frac{1}{A} = W = 424 \text{ kgm.}$$

$$\text{also } A = \frac{1}{W} = \frac{1}{424} \text{ Calor.} =$$

Diesen vorstehenden Bemerkungen zufolge hat irgend ein Körper in Folge seines augenblicklichen Zustandes aus einem doppelten Grunde d. Vermögen, Arbeit zu verrichten: einmal in Folge seines äusseren od. Bewegungszustandes und andererseits in Folge seines Wärmezustandes. Das Arbeitsvermögen, welches dem ersten Grund entspricht, ist bekannt als d. lebendige Kraft L und sei benannt mit d. äusseren Arbeitsvermögen; das dem Wärmezustand entsprechende Arbeitsvermögen heisse d. innere Arbeitsvermögen und sei mit U bezeichnet, sodass das Gesammtarbeitsvermögen d. augenblicklichen Zustandes also $L + U$. Der Wärmewerth d. inneren Arbeitsvermögens $= AU$ sei d. Körperwärme genannt. Was nun den Ausdruck d. ersten Arbeitsvermögens betrifft, also L, so ist dieser sich absolut durch Vergleichung d. Bewegungszustandes und d. Ruhe zu finden. Diese [illegible] bei U, es lässt sich kein Wärmezustand angeben, welcher einer weiteren Änderung durch Wärmeentziehung [illegible] und für welchen also d. Körperwärme resp. d. innere Arbeitsvermögen $= 0$ wäre. Man kann also 2 verschiedene Wärmezustände mit einander vergleichen und sagen, in einem Zustand ist d. Wärmemenge um so und so viel grösser als in dem anderen, aber wenn man d. Arbeitsvermögen angeben will, so werden [illegible] willkürlich zu bestimmende Constanten in d. Rechnung einzuführen sein.

Auf diesen Anschauungen kann man nun d. sogenannte Princip d. lebendigen Kraft dahin erweitern, dass man sagt: es ist für irgend eine unendlich kleine Zustandsänderung eines Körpers d. Zuwachs an Arbeitsvermögen desselben = d. Arbeitssumme d. auf ihn einwirkenden äusseren Kräfte + dem Arbeitswerth d. ihm von aussen mitgetheilten Wärme. Die Kräfte, welche dabei auf den Körper wirken, sind theils Massenkräfte, zum Theil die auf d. Oberfläche wirkenden Drücke und endlich auch noch d. etwa vorkommenden Reibungen an d. Oberfläche. Wenn man von den letzteren absehen will, so ist d. Gleichung, welche d. fraglichen Satz ausdrückt:

$$d(L+U) = dM + dP + W\,dQ$$

wo dM, dP und dQ d. von früher her bekannte Bedeutung haben.

Was d. an d. Oberfläche stattfindende Reibung betrifft, so verursacht diese offenbar eine negative Arbeit, indem durch sie theils dem Körper selbst theils dem angrenzenden Körper Wärme entzogen wird; es wäre also noch ein Glied $+ dR$ hinzuzufügen. ~~Wenn~~ man kann aber d. oben bezeichneten Wärmewerth negativen Arbeitstheil in d. Wärmemenge dQ einrechnen, welche dem Körper bei seiner unendlich kleinen Zustandsänderung von aussen mitgetheilt, resp. auch mitgetheilt [illegible] wird, indem man sich vorstellen kann, dass zunächst d. ganze äussere Reibungswärme an den betrachteten Körper übergeht und erst nachträglich ein Theil derselben ihm wieder entzogen wird. Unter dieser Annahme bekommt man dann d. obige sogenannte Gleichung d. Arbeitsvermögens.

Verbindet man diese Gleichung mit d. schon früher gefundenen (Seite 28, I) Gleichung für d. Zuwachs d. lebendigen Kraft:

$$dL = dM + dP - dR - dS + dE$$

so bekommt man dann:

$$dU = W\,dQ + dR + dS - dE.$$

Hierin bedeutet nun $W\,dQ$ den Arbeitswerth der d. Körper von aussen mitgetheilten [illegible] Wärme und dR und dS d. Arbeitswerth d. theils durch d. Reibung [illegible] und theils durch innere Widerstände erzeugten Wärme. Es ist also

$W\,dQ + dR + dS$ der Arbeitswerth der Gesammtwärme,

welche dem Körper im Zeitelement dt mitgetheilt wird. Die eben gefundene Gleichung, welche d. Wärmezunahme [illegible] sein soll, drückt also aus, dass die Wärme $dU + dE$ theils zur Vermehrung d. inneren Arbeitsvermögens d. Körpers (resp. d. Körperwärme AU) theils zur Verrichtung von [illegible] arbeit [illegible] verwendet wird, entstehenden zur Vermehrung von Expansionsarbeit, wenn in d. Körper durchaus keine Tangentialspannungen vorkommen, wie dies in d. Folge vorausgesetzt wird, und bei den hauptsächlich in Betracht kommenden flüssigen Körper auch vorausgesetzt werden darf. In diesem Falle wird nach Seite 29 d. h. die Deformationsarbeit dE die Expansionsarbeit genannt, welche dann durch d. einfache Formel:

$$dE = \int p \cdot d(\delta V)$$

Nach den oben gemachten Bemerkungen findet also überhaupt die Verwandlung von Wärme in Arbeit immer nur durch Vermittlung einer Deformationsarbeit statt, indem die Wärme sich zunächst in Deformationsarbeit verwandelt und diese Deformationsarbeit dann nach d. Gleichung für d. lebendige Kraft theils zur Vermehrung d. lebendigen Kraft theils zur Ueberwindung von Widerständen gebraucht wird. Diese sich in Deformationsarbeit verwandelnde Wärme kann dabei theils solche Wärme sein, welche dem Körper erst mitgetheilt wird, sei es von äußeren Körpern durch Leitung od. Strahlung, sei es an der Oberfläche durch d. Verwandlung von Reibungsarbeit (dR) od. im Innern durch d. Verwandlung innerer Widerstandsarbeit (dS) in Wärme; theils kann sie dem Körper selbst entnommen sein, entsprechend d. Falle, dass in d. Wärmegleichung dQ negativ und dE positiv ist, wie es einer Verwandlung von Wärme in Deformationsarbeit zukommen würde. Umgekehrt kann aber auch sich Deformationsarbeit in Wärme umsetzen entsprechend dem Falle, dass in d. Wärmegleichung dE einen negativen Werth annimmt.

Es ist also d. ~~Verwandlung~~ gegenseitige Verwandlung von Wärme und Deformationsarbeit in einander eine umkehrbare Verwandlung, indem sie in dem einen od. andern Sinne stattfinden kann. Es besteht jedoch auch eine Art d. Verwandlung von Arbeit od. lebendiger Kraft überhaupt in Wärme, welche ohne Vermittlung von Deformationsarbeit stattfinden kann, nämlich durch Vermittlung d. passiven Bewegungswiderstände d. äußeren Oberflächenreibung und d. inneren Widerstände. Die Verwandlung d. Arbeit passiver Bewegungswiderstände in Wärme ist also eine nicht umkehrbare Verwandlung, indem es im Wesen d. passiven Bewegungswiderstände liegt, dass sie immer eine negative Arbeit verrichten d. h. Arbeit od. entsprechende lebendige Kraft verbrauchen, welche indem sie als solche verschwindet, als Wärme erhalten wird.

Der Definition d. Körperwärme und d. inneren Arbeitsvermögens entsprechend sind diese Größen U u. AU offenbar bestimmt durch d. Wärmezustand, es werden also auch U u. AU durch dieselben bekannten Größen wie d. Wärmezustand charakterisirt. Kommen z. B. entstehende Tangentialspannungen nicht vor, so sind diese charakterisirenden Größen v und p, d. h. d. spec. Volumen und d. Pressung. In d. Regel bedeutet U nicht sowohl d. inneren Arbeitsvermögen d. ganzen Körpers sondern vielmehr d. spec. d. h. inneren Arbeitsvermögen d. Körpers. Handelt es sich um einen homogenen Körper von gleichförmigem Wärmezustand, so kann man jede Bestimmung von d. spec. inneren Arbeitsvermögen d. Körpers sprechen, ebenso auch bei einem continuirlichen Gemisch von durchaus denselben Mischungsverhältnissen und gleichförmigem Wärmezustand. Handelt es sich aber um einen homogenen Körper von ungleichförmigem Wärmezustand od. um ein continuirliches Gemisch von veränderlichen Mischungsverhältnissen, so kann man nur von d. spec. inneren Arbeitsvermögen in einem bestimmten Körperpunkte sprechen od. endlich auch noch von dem mittleren spec. inneren Arbeitsvermögen eines discontinuirlichen Gemisches. Wie schon oben bemerkt wird das innere Arbeitsvermögen durch dieselben Größen bestimmt wie d. Wärmezustand. Allgemein muss man eigentlich sagen, dass d. innere Arbeitsvermögen U mit jenen den Wärmezustand charakterisirenden Größen in eine Gleichung zusammen, die, eine Ergänzung d. Zustandsgleichung, ebenso wie diese in d. Form von d. Aggregatform und in den Substanzeigenschaften von dem Körper abhängt. Diese Gleichung soll d. Gleichung d. inneren Arbeitsvermögens genannt werden.

Dieses sogenannte Princip d. Äquivalenz und gegenseitigen Umwandelbarkeit von Wärme und Arbeit od. lebendige Kraft ist offenbar unvereinbar mit d. Ansicht, welche man früher von d. Wärme als einer Materie hatte, indem man sich diesen Unterschied als unveränderliche Größe zu denken hat. Dieselbe ist diesem Princip gemäß d. Ansicht gewichen, nach welcher man die Wärme [illegible] dass die

Wesen d. Wärme in dem Molekularzustande d. atomistisch constituierten Materie zu suchen sei. Um denn alle alle vorkommenden Wärmeerscheinungen genügend erklären zu können müßte man außerordentlich nähere Begriffe d. Art d. Bewegung, den gegenseitigen inneren Kräften und einer [illegible] Bezug d. die Körper in bekannter Weise mit keinem Zusammenhang constituierenden kleinsten Massentheilchen. Indessen lassen sich bei dem heutigen Zustand d. Wärmelehre auf solche Weise d. mannigfaltigen Wärmeerscheinungen nur in unvollkommener Weise erklären, während jener Punkt der mech. [illegible] nicht zu Grunde gelegt werden soll, das Prinzip d. Äquivalenz von Wärme und Arbeit [illegible] d. sehr vielen Erscheinungen und Beziehungen [illegible] als auch [illegible] gefundenen Thatsachen einheitlich zu betrachten.

Nach diesen ausführlichen Auseinandersetzungen, kann nun auf d. Ableitung d. allgemeinen Differentialgleichungen übergegangen werden, welche dazu dienen sollen d. Zustandsänderung einer Flüssigkeit zu bestimmen. Es waren zu dem Zweck schon 4 allgemeine Gleichungen aufgestellt,
(Kirchh. Seite 24 25) nämlich 3 Gleichungen, welche in d. Folge d. Fundamentalgleichungen genannt werden sollen und welche d. Ausdruck waren des Gleichgewichts welches in jedem Massenelement zwischen der äußeren Kraft und den Geschwindigkeiten stattfinden muß. Außer diesen wurde noch d. sog. Continuitätsgleichung aufgestellt. In diesen 4 Gleichungen waren aber 5 Größen, welche als Functionen d. Coordinaten d. betreffenden Punktes und als Function d. Zeit bestimmt werden müßten, nämlich d. Größen $u\ v\ w\ \mu\ p$ als Functionen von $x\ y\ z\ t$. Es muß also noch eine weitere Gleichung aufgestellt werden, um diese [illegible] Aufgabe allgemein auflösbar zu machen. Diese Gleichung ~~kann~~ nun angenommen werden.

In d. Folge sollen statt $u\ v\ w$ für d. Geschwindigkeitscomponenten die Bezeichnungen $u_x\ u_y\ u_z$ und für die resultierende Geschwindigkeit u eingeführt werden.

Ferner wird statt in d. Gleichungen d. [illegible] Zustand [illegible] d. Dichtigkeit μ und die [illegible] spez. Volumen v eingeführt werden. Man hat also zu setzen: $\mu = \frac{1}{gv}$ wenn v d. spez. Volumen und g d. Beschleunigung d. Schwere ist.

Durch diese Bezeichnungen eingeführt, gehen die erste d. 3 Fundamentalgleichungen:

$$X - gv\frac{dp}{dx} = \frac{du_x}{dt} + u_x\frac{du_x}{dx} + u_y\frac{du_x}{dy} + u_z\frac{du_x}{dz} - Rgv\left(\frac{d\Delta}{dx} + \frac{d^2u_x}{dx^2} + \frac{d^2u_x}{dy^2} + \frac{d^2u_x}{dz^2}\right)$$

Die anderen beiden Fundamentalgleichungen ergeben sich in ganz analoger Weise aus dieser durch entsprechende Buchstabenvertauschungen.

In diesen Gleichungen bedeutet:

$$\Delta = \frac{du_x}{dx} + \frac{du_y}{dy} + \frac{du_z}{dz}$$

Die 4 Gleichung, d. Continuitätsgleichung war: $\frac{d\mu}{dt} + \frac{d(\mu u)}{dx} + \frac{d(\mu v)}{dy} + \frac{d(\mu w)}{dz} = 0$

in d. jetzigen Bezeichnungsweise also:

$$\frac{d\frac{1}{v}}{dt} + \frac{d\frac{u_x}{v}}{dx} + \frac{d\frac{u_y}{v}}{dy} + \frac{d\frac{u_z}{v}}{dz} = 0$$

Eine fünfte Bestimmungsgleichung zur Bestimmung von $u_x\ u_y\ u_z\ v$ und p als Functionen von $x\ y\ z\ t$ erhalten wir nun mit Rücksicht auf die, durch die Temperaturänderungen hervorgerufenen Zustandsänderungen d. Flüssigkeit.

Bezeichnet nämlich T die Temperatur im beliebigen Punkte $x\ y\ z$ zur Zeit t, so ist auf Seite 36 die Wärmemenge dQ, welche dem sogenannten Flüssigkeitselemente δV im Zeitelement dt durch Leitung von den umgebenden Flüssigkeitstheilchen mitgetheilt wird:

$$dQ = k\,\delta V\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}\right)dt$$

wobei k den Wärmeleitungscoefficienten bezeichnet, welcher allgemein als nach allen Richtungen hin gleich groß angenommen werden muß. Dabei muß jedoch vorausgesetzt werden, daß im Innern der Flüssigkeit die Wärme nur durch Leitung und nicht durch Strahlung übertragen wird, so daß man die bekannte Wärmeleitung auf das ganze Volumelement δV beziehen kann. Ferner muß weiter vorausgesetzt werden, ... also $dR = 0$ setzen, da das betrachtete Volumelement im Innern der Flüssigkeit liegt und man auch von den Wirbelerscheinungen, welche an discontinuirlichen Geschwindigkeitsänderungen hervorgerufen werden, absehen muß, indem diese sich in Elementen zeitlich rasch ~~...~~ ihre Wirkungen nur im Ganzen beobachtet werden können. Es ist also dann auch $dS = 0$ (Man könnte sich nur aber denken, daß diese Vernachlässigungen in dem Wärmeleitungscoefficienten k entsprechend berücksichtigt wären.)

Unter diesen Voraussetzungen ist dann nach der bekannten Wärmegleichung die oben gefundene Wärmemenge dQ auch: (siehe Seite 40)

$$dQ = \frac{dU + dE}{W} \quad \text{oder mit } W = \frac{1}{A}:$$

$$dQ = A(dU + dE)$$

worin dU die Zunahme der inneren Arbeitsenergie und dE die Expansionsarbeit des Elementes bedeutet. Nach Seite 29 ist aber in diesem Falle:

$$dE = p\, d(\delta V).$$

Wenn nun weiter unter U nicht mehr die innere Gesamtarbeitsenergie sondern die innere Arbeitsenergie per Gewichtseinheit, per 1 kgr verstanden wird, so ist offenbar zu setzen anstatt dU:

$$\frac{\delta V}{v}\, dU$$

Ferner kann man offenbar setzen:

$$d(\delta V) = \frac{\delta V}{v}\, dv$$

da sich die Änderung des Volumens des Elementes während des Zeitelementes dt ~~...~~ jetzt natürlich in demselben Verhältniß verhält wie die Änderung des spec. Volumens v.

Setzt man alle die gefundenen Werthe in die Gleichungen für dQ ein und setzt dann diese beiden Seiten einander gleich, multiplicirt mit $\frac{dv}{d(\delta V)}$ und dividirt durch dt, so bekommt man:

$$A\left(\frac{dU}{dt} + p\frac{dv}{dt}\right) = k\,v\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{A}$$

Hierin sind $\frac{dU}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ vollständige Differentialquotienten, indem U und v natürlich sich immer auf Änderungen eines bestimmten Volumens, nicht auf ein Raumelement bezogen werden, welches zur Zeit t den festen Raumpunkt $(x\ y\ z)$ ausfüllt. Genau nach der Entwicklung der Beschleunigungscomponenten $\varphi_x\ \varphi_y\ \varphi_z$ Seite 17, kann man also auch setzen:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + u_x\frac{\partial U}{\partial x} + u_y\frac{\partial U}{\partial y} + u_z\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\text{und}\quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u_x\frac{\partial v}{\partial x} + u_y\frac{\partial v}{\partial y} + u_z\frac{\partial v}{\partial z}$$

Durch Gleichung $\mathfrak{A}$ haben wir nun die gesuchte 5te Bestimmungsgleichung gefunden; mit derselben sind aber 2 neue Unbekannte in die Rechnung eingeführt worden, nämlich τ und U, welche ebenfalls als Functionen von $x\ y\ z\ t$ zu bestimmen sind. Nun besitzen wir bekanntlich zwischen der Temperatur τ und der inneren Arbeitsenergie sowie den, den Zustand charakterisirenden Größen v und p 2 Beziehungen, nämlich die sogenannte Zustandsgleichung $f(p\,v\,T) = 0$ (Seite 32) und die Gleichung der inneren Arbeitsenergie $F(v\,p\,T\,U) = 0$ (Seite 41). Diese beiden Gleichungen im Zusammenhange mit den 5 früheren Gleichungen nämlich die 3 hydrodynamischen Gleichungen, der Continuitätsgleichung und der oben gefundenen Gleichung A geben uns 7 Gleichungen zur Bestimmung der 7 Größen u, v, w, v, p, T, U als Funktionen von $x\,y\,z\,t$ vorausgesetzt, daß die übrigen in den Gleichungen vorkommenden Größen entweder als Constante oder als Funktionen von $x\,y\,z\,t$ gegeben sind. Da aber weiter die Gleichungen theils partielle Differentialgleichungen sind, so müssen zur vollständigen Bestimmung der Aufgabe außerdem die Werthe für die bei der Integration auftretenden Integrationsconstanten, nämlich noch der Anfangszustand und die Oberflächenbedingungen gegeben sein, nämlich der Zustand (äußerer und Wärmezustand) zu einer bestimmten Zeit, die Oberflächenkräfte und der Verlauf von welchem der Wärmezustand zwischen der Flüssigkeit und ihrer Umgebung abhängt. Die vollständige Durchführung [illegible] kann diese nicht allgemein weiter geschehen sondern muß nur für specielle Fälle behandelt werden.

Ehe jedoch diese behandelt werden, sollen noch einige andere wichtige Begriffe erörtert werden.

Umkehrbare und nicht umkehrbare Verwandlungen und Zustandsänderungen.

Nach den Bemerkungen Seite 41 geschieht die Verwandlung von Wärme in Arbeit oder entsprechend lebendige Kraft immer durch Vermittlung von Deformationsarbeit, indem die mit Wärme gewonnene Arbeit oder lebendige Kraft stets als Deformationsarbeit erhalten wird, wobei noch besonders zu bemerken ist, daß diese Deformationsarbeit stets Expansionsarbeit sei, wenn eine Flüssigkeitsmasse [einem] oder ein fester Körper verliert, in welchem keine Temperaturschwankungen vorkommen. Umgekehrt geht die Verwandlung von Arbeit oder lebendige Kraft in Wärme auch durch Vermittlung von Deformationsarbeit vor sich. Jedoch kann auch Wärme unmittelbar aus den Arbeiten [illegible] Geschwindigkeitsunterschied entstehen, nämlich äußerer Reibung und selbst innerer Widerstand, welche durch [illegible] Geschwindigkeitsänderungen bedingt sind. In umgekehrter Weise kann dieser letzte Vorgang aber nicht stattfinden. Aus diesem Grunde wird die gewöhnliche Umsetzung von Deformationsarbeit und Wärme in einander eine **umkehrbare Verwandlung**, dagegen die Umsetzung der Arbeit [illegible] Geschwindigkeitsunterschied in Wärme eine **nicht umkehrbare Verwandlung** genannt.

In ähnlicher Weise kann man auch die Übertragung von Wärme von einem Körper von der höheren Temperatur t zu einem andern von der Temperatur t_0 als eine Verwandlung auffassen, nämlich so daß die Wärme selbst von der Temperatur t_1 in die Temperatur t_0 übergeht oder sich in solche verwandelt. Eine solche Übertragung oder eine solche Verwandlung von Wärme kann nun entweder unmittelbar durch Leitung, durch Strahlung oder durch Vermittlung eines andern Körpers stattfinden, welcher letztere dann eine Zustandsänderung erleidet und dadurch die Übertragung der Wärme vermittelt. Eine unmittelbare Wärmemittheilung durch Leitung (Wärmeleitung) kann der Erfahrung entsprechend gewiß nur von einem Körper höherer Temperatur zu einem Körper niedrigerer Temperatur stattfinden. Ganz dasselbe gilt auch für den Fall einer Wärmemittheilung durch Strahlung wenn nur die unter Seite 38–39 aufgestellten Bedingungen erfüllt sind. Die letzteren kann man nicht [illegible] als erfüllt ansehen, jedoch lehren die damit gegebenen Erfahrungen hinsichtlich der Übereinstimmung mit der [illegible], daß man dieselbe [illegible] allgemein voraussetzen darf. Nachdem kann also ganz allgemein eine unmittelbare Übertragung der Wärme immer nur von höherer zu niederer Temperatur stattfinden, so ist also diese Wärmeübertragung als eine nicht umkehrbare Verwandlung zu bezeichnen ist.

Damit nun die Zustandsänderung eines Körpers mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden sei, ist hiernach also zunächst erforderlich, daß 1) nur verschwindend kleine [illegible] Geschwindigkeitsunterschiede vorkommen, wodurch also nur unendlich kleine Mengen lebendiger Kraft oder Arbeit in Wärme umgesetzt werden und daß 2) ein nur unendlich kleiner Wärmeübergang von höherer zu niederer Temperatur stattfindet.

für unendlich kleine Wärmezuleitung ist freilich streng genommen unvermeidlich, sofern überhaupt Wärmemitteilungen nicht ausgeschlossen werden sollen; denn der Begriff d. Unendlichkleinen als eines Grenzbegriffs genügt zwar jedoch zur Charakterisierung einer Zustandsänderung mit nur umkehrbaren Veränderungen, ist bei einer Zustandsänderung von endlicher Größe eine endliche Wärmemenge eine nur unendlich kleine Temperaturänderung erfahren. Damit dies d. Fall sei, ist nun zunächst mit Rücksicht auf den Wärmeaustausch an d. Körperoberfläche erforderlich, daß d. Differenz zwischen d. Oberflächentemperatur t_1 und d. äußeren Temperatur t_0 durchweg unendlich klein sei, wobei unter äußerer Temperatur t_0 d. Körpers die Temperatur d. unmittelbar angrenzenden Körper verstanden, mit welchen eine Wärmemitteilung durch Berührung, sowie d. Oberflächenelemente entfernter Körper, mit denen ein Wärmeaustausch durch Strahlung stattfindet. Also könnten diese entsprechenden Temperaturen t_1 und t_0 jede für sich an verschiedenen Stellen ganz beliebig verschieden sein. Wenn man denn aber durch Flächen gleicher Temperatur d. Körper in unendlich dünne Schichten zerlegt denkt, so würde zwar d. bei d. endlichen Zustandsänderung d. Körpers von einer solchen Schicht zur benachbarten geleitete endliche Wärmemenge nur eine unendlich kleine Temperaturänderung erfahren, ebenso wie d. durch d. Oberfläche zugeführte Wärme; sofern aber d. Körper aus unendlich vielen solchen Schichten besteht, würde im Ganzen eine unendlich große Wärmemenge eine unendlich kl. Temperaturänderung od. eine endliche Wärmemenge eine endliche Temperaturänderung erfahren können. Damit also auch mit Rücksicht auf Wärmeleitung im Innern d. Körpers seine Zustandsänderung nur mit umkehrbaren Veränderungen verbunden sei, müssen noch, wenn d. Körper homogen ist, die Temperaturdifferenzen zwischen je 2 unendlich nahen Körperpunkten als unendlich klein höherer Ordnung d. zwischen je 2 beliebigen Körperpunkten als unendlich klein vorausgesetzt werden, so daß dann auch d. äußeren Temperaturen t_0 an verschiedenen Stellen nur um unendlich wenig von einander verschieden sein dürfen. Besteht d. Körper aus einem [illegible] Gemisch od. aus Gemisch mit Bestandteilen gleicher Art und verschiedenen Aggregatformen, welche sich im Grenzzustande bezüglich auf den Übergang aus d. einen in d. andere Aggregatform befinden, so ist bei Temperaturungleichheit hinsichtlich Wärmemitteilung im Innern d. Körpers nicht eine gleichförmige, sondern eine ganz bestimmte Verteilung d. Temperaturen gefordert, so daß dieselbe [illegible] d. betreffenden Mischung in einem bestimmten Verhältnis steht, zu Herbeiführung nur umkehrbarer Veränderungen muß also in diesem Falle d. Körpertemperatur in jedem Punkte d. Mischung entsprechend sein, während d. Oberflächentemperaturen t_0 an verschiedenen Stellen ganz beliebig verschieden sein können unbeschadet d. unendlich kleinen Differenzen zwischen den sich entsprechenden Temperaturen t_1 und t_0.

Die Zustandsänderung eines Körpers heißt nun im Ganzen umkehrbar, wenn d. Umkehrung d. Änderungsgesetzes ihrer Ursachen (äußeren Kräfte und mitgeteilten resp. entzogenen Wärmemengen) genügt, um seine umgekehrten [illegible] d. h. stattfinden zu lassen, so daß dabei d. Körper mit allen seinen Elementen durch dieselben äußeren und Wärmezustände in genau umgekehrter Aufeinanderfolge hindurchgeht, die äußeren od. Bewegungszustand betreffend zugleich mit d. entgegengesetzten Geschwindigkeitsrichtungen. Dazu ist offenbar erforderlich, daß mit d. Zustandsänderung nur umkehrbare Veränderungen verbunden sind und daß zu jeder derselben, also in d. Augenblick, in welchem d. Umkehrung stattfinden soll, d. Differenz $t_0 - t_1$ zwischen d. äußeren und d. Oberflächentemperatur d. Körpers an jeder Stelle seiner Oberfläche, wo ein Wärmeaustausch mit d. Umgebung stattfinden kann, $= 0$, sowie daß d. Körper selbst in Ruhe, sowie auch d. Differenz $p_0 - p_1$ zwischen d. äußeren Druck und d. Körperspannung p_1 an jeder in normaler Richtung beweglichen Stelle d. Oberfläche $= 0$ ist. Während d. Zustandsänderung kann dann d. Körper nicht streng genommen beständig in Ruhe und also jene Differenzen $t_0 - t_1$ und $p_0 - p_1$ nicht streng genommen beständig $= 0$ sein; sie sind vielmehr unendlich klein und von entgegengesetzten Zeichen, jenachdem d. Änderung durch d. betreffenden Zustand in dem einen od. im umgekehrten Sinne stattfindet. Gleichwohl kann d. Begriff einer nicht nur im Ganzen, sondern auch [illegible] d. h. in jedem Augenblicke umkehrbaren, einer kurzweg sogenannten umkehrbaren Zustandsänderung als der eines Grenzfalles aufgestellt werden, dessen Betrachtung von besonderem theoretischen Interesse ist.

Es ist demnach eine Zustandsänderung zu verstehen, welche mit nur umkehrbaren Veränderungen verbunden ist und mit verschwindend kleiner Geschwindigkeit stattfindet, indem dann freilich auch d. Voraussetzung einer vorzugsweisen unendlich kleinen Änderung d. äußeren Temperatur t_0, d. äußeren Druckes p_0

und d. Geschwindigkeiten gemessen werden muss, wenn von irgend einem Augenblicke an d. Veränderung d. Zustandsänderung durch d. ~~[illegible]~~ Veränderung d. [illegible] [illegible] bewirkt werden soll.

Durch d. Voraussetzung von unendlich kleinen Geschwindigkeiten kommt nun noch eine [illegible] hinzu [illegible] d. Körper [illegible]. Im Allgemeinen ist [illegible] Gesetz [illegible] von Punkt zu Punkt d. Körpers ändert, [illegible] d. Verhältnissen und d. äußeren Bedingungen. [illegible] Voraussetzung einer Zustandsänderung mit umkehrbaren Verwandlungen mit [illegible] unendlich kleinen Geschwindigkeiten [illegible] in diesem Falle d. Gesetz nur von d. Verhältnissen abhängig. [illegible]

[illegible]

Wenn also in d. [illegible] Körper d. [illegible] umkehrbaren Zustandsänderung unterworfen ist, so ist bei [illegible] (Ebene) in allen Punkten d. Körpers d. augenblickliche Temperatur und [illegible] gleich groß.

Wenn allgemein d. augenblickliche [illegible] in allen Punkten [illegible] in allen Punkten [illegible] klein und [illegible] in allen Punkten d. Oberfläche gleich groß sein. [illegible] d. augenblickliche [illegible] in allen Punkten d. Körpers und [illegible] in allen Punkten d. Oberfläche gleich groß.

Betrachtet man nun d. allgemeine Differentialgleichung d. [illegible] (Seite 28)

$$dL = dM + dP - dR - dS + dE$$

[illegible] unendlich kl. Zustandsänderung [illegible] unendlich kl. [illegible], [illegible] d. Voraussetzung, dass d. Zustandsänderung mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden ist, $dR = 0$ und $dS = 0$, [illegible] umkehrbaren Verwandlungen.

[illegible]:

$$dL = dM + dP + dE.$$

Ist d. Zustandsänderung eine umkehrbare, so tritt zu d. Bedingung, daß dieselbe nur mit unendlich kleinen Veränderungen geschieht, noch d. Bedingung, daß sie mit verschwindend kleinen Geschwindigkeiten stattfindet, so daß dann auch offenbar d. Änderung d. lebendigen Kraft $= 0$ ist, also $d\mathfrak{L} = 0$ ist; d. betreffende Gleichung geht dann über in:

$$d\mathfrak{L} = \div(dU + dP)$$

Diese Gegenarbeit $d\mathfrak{L}$ (d. wichtigste, wenn wir Zugehörigkeiten nicht erkennen) ist aber nach Seite 29:

$$d\mathfrak{L} = \int p\, d\delta V$$ wenn δV d. Volumen eines unendlich kleinen Körperelements, $d\delta V$ also d. Änderung dieses Volumens in d. Zeitelement dt bedeutet und wenn p d. eigentliche Pressung bezeichnet.

Abstrahirt man nun noch weiter von Massenkräften, so ist auch $dU = 0$ und angenommen, d. Pressung in allen Punkten d. Körpers in demselben Augenblick gleich groß. Demnach kann man dann schreiben mit Weglassung [illegible]:

$$d\mathfrak{L} = p\int d\delta V = p\, dV.$$

Also schließlich:

$$d\mathfrak{L} = \div dP = p\, dV.$$

In diesem wichtigsten Falle ist also d. Gegenarbeit gleich dem Gegengewichte d. Arbeit d. äußeren Drucks, also gleich d. Arbeit d. Drucks, welchen d. Körper vermöge seines Pressungszustandes auf seine unmittelbare Umgebung ausübt. Im Allgemeinen ist diese Arbeit nur ein Theil d. Gegenarbeit; sie soll deshalb mit dem Namen „äußerliche Gegenarbeit" od. „Ausdehnungsarbeit d. Körpers" bezeichnet werden.

Bei solchen umkehrbaren Zustandsänderungen eines Körpers kann es sich offenbar immer nur um d. Änderungen seines Wärmezustandes handeln, indem d. Änderungen d. äußeren od. Bewegungszustandes durch d. Definition d. umkehrbaren Zustandsänderungen außer Betracht gestellt sind, da dieselben [illegible] mit unendlich kleinen Geschwindigkeiten vor sich gehend gedacht werden müssen; im Ganzen beziehen sich diese Aufgaben also auf d. Bestimmung d. Wärmemenge, welche einem Körper mitgetheilt od. entzogen werden muß, behufs einer gegebenen und nach gegebenem Gesetze stattfindenden Änderung seines Zustandes, d. h. einer nur Wärmezustandsänderung. Hier dient im Allgemeinen d. Wärmegleichung, welche nach Seite 40 d. allgemeine Form hat:

$$dU = W\,dQ + dK + dS - d\mathfrak{L}.$$

Wendet man mit Rücksicht auf eine umkehrbare Zustandsänderung $dK = 0$ und $dS = 0$ ist, so kann man d. Wärmegleichung auch schreiben:

$$W\,dQ = dU + d\mathfrak{L} = dU + \int p\, d\delta V$$

wenn d. Integral sich auf δV bezieht und über d. ganzen Körper auszudehnen ist. Diese Gleichung drückt also unmittelbar den Arbeitswerth d. Wärme aus, welche d. Körper mitgetheilt werden muß, um eine unendlich kleine Änderung seines Wärmezustandes zu bewirken.

Bezieht man diese Gleichung nicht auf d. ganzen endlichen Körper sondern auf 1 kgr eines ~~[illegible]~~ Körperelements, welches unter Umständen unendlich klein [illegible] angenommen werden muß, damit man seinen Zustand als gleichförmig [illegible], d. h. d. Pressung und Temperatur in allen Punkten als gleich betrachten zu dürfen, so ist offenbar, wenn man mit v d. spez. Volumen d. Elements, mit p seine Pressung und mit U = einer Funktion von v u. p seine spez. innere Arbeitsmenge bezeichnet:

$$W\,dQ = dU + p\,dv.$$

= die Wärmezufuhr bezogen auf 1 kgr eines unendlich kleinen Elements unter d. Voraussetzung einer umkehrbaren Zustandsänderung

= dem Arbeitswerth d. Wärme, welche dem Körperelement pr. 1 kgr behufs einer unendlich kleinen Zustandsänderung mitzutheilen ist, bei welcher sich dessen Volumen v um dv und d. innere spez. Arbeitsmenge U sich um dU ändert und wobei einem negativen Werth von dQ offenbar eine zu entziehende Wärmemenge entspricht.

Wenn wegen d. Abwesenheit von Widerstandskräften die augenblickliche Pressung in allen Punkten gleich ist, können wir auch d. oben gefundenen Gleichung nicht nur auf 1 kg d. unendl. kleinen Körperelements beziehen sondern auch auf 1 kg d. ganzen Körpers, wobei jedoch, wenn derselbe nicht homogen sondern ein Gemisch ist, unter v und U d. mittlere spec. Volumen resp. d. mittlere spec. innere Arbeitsvermögen pr. 1 kg zu verstehen ist.

Handelt es sich nun darum d. Wärmemenge dQ zu ermitteln, welche d. Körper mitgetheilt resp. entzogen werden muss resp. dem Körperelement per 1 kg mitgetheilt werden muss, um eine Zustandsänderung von endlicher Größe zu erzeugen, so hat man durch Integration d. vorhin gefundenen Wärmegleichung:

$$WQ = U_2 - U_1 + \int_{v_1 p_1}^{v_2 p_2} p\,dv$$

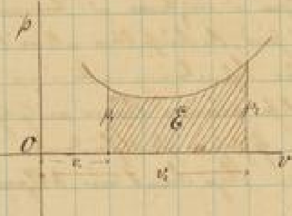
wenn unter $v_1\ p_1\ U_1$ d. spec. Volumen, d. Pressung und d. spec. innere Arbeitsvermögen d. Anfangszustandes
und unter $v_2\ p_2\ U_2$ " " " " " " " " " d. Endzustandes
verstanden wird.

Um d. Integral bestimmen zu können muss man d. Gesetz kennen, nach welchem sich v und p gleichzeitig ändern, nämlich d. spec. Form d. Beziehung, welche beliebig zwischen v und p stattfindet. Man kann also d. vorhin gestellte Aufgabe allgemein nicht weiter durchführen, wenn nicht d. Gesetz gegeben ist, nach welchem d. gleichzeitige Änderung von v und p erfolgt.

Dieses Gesetz kann im Allgemeinen gegeben sein durch eine Gleichung zwischen v u. p von d. Form:

$$f(v, p) = 0$$

Diese Gleichung kann man auch offenbar als d. Gleichung einer ebenen Curve betrachten welche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem (v als Abscissenaxe und p als Ordinatenaxe) bezogen ist.



d. Integral

$$\int_{v_1 p_1}^{v_2 p_2} (p\,dv)$$

, welches nichts anders als d. ... bei solcher Zustandsänderung ist, wird in d. Figur offenbar durch den Inhalt d. Fläche dargestellt, welche von d. Abscissenaxe v, d. Curve und den Ordinaten p_1 und p_2 begrenzt wird, welche letztere d. Anfangs- und Endzustand entsprechen.

Da diese geometrische Darstellung d. Beziehung zwischen d. spec. Volumen v und d. Körperpressung p im weiteren Verlauf von wesentlichem Nutzen sein wird, soll dieselbe mit einem besonderen Namen „Zustandscurve" bezeichnet werden.

Die oben entwickelten 3 Gleichungen, bezogen auf 1 kg eines unendl. kl. Körperelements resp. auf 1 kg d. ganzen Körpers, wurden aus d. allgemeinen Form d. Wärmegleichung entwickelt, indem dR und $dS = 0$ gesetzt wurden, entsprechend einer Zustandsänderung mit umkehrbaren Verwandlungen. Eine umkehrbare Zustandsänderung ist damit noch nicht bestimmt, indem eine solche, wie wir d. sie mit nur umkehrbaren Verwandlungen ~~stattfindet~~ verbunden ist, auch noch mit unendl. kleinen Geschwindigkeiten stattfinden muss. Diese letzte Bedingung wurde aber ganz ... und welchem Grunde jene Gleichungen allgemein für umkehrbare Änderungen d. Wärmezustandes gelten d. h. für d. Änderungen d. Wärmezustandes bei solchen Zustandsänderungen, welche nur mit umkehrbaren Verwandlungen verbunden sind, sonst aber mit beliebig großen Geschwindigkeiten stattfinden können. Nur kann man in solchen Fällen, wo d. Zustandsänderungen mit umkehrbaren Verwandlungen verbunden sind aber mit Geschwindigkeiten von endlicher Größe erfolgen, durch Abwesenheit von Widerstandskräften auf eine gleichförmige Pressung und ... nicht schliessen, so dass selbst bei d. Abwesenheit von Widerstandskräften, zur Untersuchung d. Änderung d. Wärmezustandes eines Körpers im Allgemeinen eine Zerlegung desselben in unendl. kleine Elemente nöthig ist, und also d. beiden letzten Gleichungen nur auf 1 kg eines solchen Elements bezogen werden können.

Mit dieser Einschränkung gelten alle Gesetze, welche wir soeben d. Einfachheit wegen für umkehrbare Zustandsänderungen aufgestellt haben, allgemein für d. Änderungen d. Wärmezustands bei Zustandsänderungen mit nur umkehrbaren Verwandlungen d. h. für umkehrbare Änderungen d. Wärmezustands. Bei d. Ableitung dieser Gesetze kann man übrigens immer einen Körper von gleichförmiger Temperatur und Pressung voraussetzen von 1 kg Gewicht, dessen Volumen also = d. spec. Volumen v ist, wie ihre Anwendung ist an Einschränkungen gebunden, nämlich im Allgemeinen auf unendlich kl. Körperelemente beschränkt, wenn nicht d. Geschwindigkeiten und Massenkräfte verschwindend klein sind, wobei außerdem noch ein Fall nicht gegeben Körper von endlicher Größe v und U als d. gemittelte spec. Volumen und mittlere spec. innere Arbeitsvermögen zu verstehen sind.

Es gibt nun besondere Arten umkehrbarer Zustandsänderungen, welche von hauptsächlicher Bedeutung sind, nämlich:

1) Umkehrbare Zustandsänderungen, welche bei constantem Volumen stattfinden, also gekennzeichnet sind durch $dv = 0$. Die Zustandscurve ist in diesem Falle offenbar eine zur p Axe parallele Gerade.

2) Umkehrbare Zustandsänderungen, welche bei constanter Pressung stattfinden, welche also gekennzeichnet werden durch $dp = 0$, in welchem Falle d. Zustandscurve natürlich eine zur v Axe parallele Gerade ist.

3) Umkehrbare Zustandsänderungen bei constanter Temperatur entsprechend $dt = 0$ unter t d. Temperatur verstanden. Die Zustandscurve ist in diesem Falle allgemein eine krumme Linie und wird bezeichnet mit d. Namen: isothermische Curve.

4) Umkehrbare Zustandsänderung bei constantem innerem Arbeitsvermögen also constanter Körperwärme entsprechend $dU = 0$. Die im Allgemeinen als krumme Linie erscheinende Zustandscurve heißt nun isodynamische Curve.

5) Umkehrbare Zustandsänderungen ohne Mittheilung od. Entziehung ~~von~~ von Wärme, welcher Fall, gekennzeichnet durch $dQ = 0$, von besonderer Wichtigkeit ist. Die Zustandscurve heißt in diesem Falle: adiabatische Curve.

Die unter 3 ausgesprochene, nach einer isothermischen Curve vor sich gehende Zustandsänderung kann man sich dadurch vermittelt denken, daß d. betreffende Körper mit einem andern Körper in andauernder Berührung steht, welcher d. festgesetzte constante Temperatur besitzt (d. letztere Körper kann etwa von so großen Dimensionen gegenüber dem betrachteten sein, daß eine Temperaturänderung d. ersteren von dem letzteren ohne Einfluß auf d. Temperatur d. großen Körpers ist). Die unter 5 angegebene und nach einer adiabatischen Curve vor sich gehende Änderung kann man sich dadurch vermittelt denken, daß d. Versuchskörper in eine Hülle eingeschlossen ist, welche für Wärme undurchdringlich ist ohne d. Volumenänderung d. Körpers zu hindern.

Was nun im Gegensatz zu den erwähnten die andersartigen Zustandsänderungen betrifft, welche nicht nur mit umkehrbaren Änderungen d. äußeren Zustands d. Körperzustands, sondern auch mit nicht umkehrbaren Verwandlungen verbunden sind, so lassen sich diese häufig selbst durch Zerlegung d. Körpers in unendlich kleine Elemente nicht in ihren einzelnen Theilen bezüglich auf Raum und Zeit verfolgen. Man muß oft ganz und gar absehen, solche Zustandsänderungen mathematisch zu untersuchen, besonders wenn diese mit Wirbelbewegungen, Stößen, Molekularbewegungen etc. überhaupt die innerlichen Geschwindigkeitsänderungen im Innern verbunden sind, deren Gesetzmäßigkeit nicht mathematisch auszudrücken od. gar vollständig unbekannt ist. Jedoch kann man in solchen Fällen, die sich freilich allgemein nicht in ihrem ganzen Verlauf verfolgen lassen, specielle Fragen dennoch mit Hülfe d. bekannten allgemeinen Gleichungen (unter Anwendung von Wärme und Arbeit und Wärmezuführung und Steigerung d. Arbeitsvermögens) leicht beantworten. Von besonderem Interesse ist in dieser Hinsicht d. Aufgabe betreffend d. Bestimmung d. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens für den Fall, daß vorausgesetzt für d. Anfangs- und Endzustand d. Körper sich in äußerer Ruhe befindet, wenn ferner bekannt gegeben ist die mitgetheilte Wärme = Q, die Volumenänderung d. Körpers und d. äußeren Druck so in den momentan zur Oberfläche benachbarten Punkten d. letzteren während d. Dauer dieser Bewegung. Ein specieller solcher Fall ist z. B. folgender:

Es seien 2 communicirende Gefäße vorhanden, deren Communication aber durch einen Hahn gesperrt werden kann und in diesem Punkt [illegible], in dem einen Gefäß befinde sich eine gasförmige Substanz, aber Dampf, während das andere luftleer gepumpt ist. Vor dem Öffnen d. Hahns befindet sich d. Dampf dann offenbar in äußerer Ruhe entsprechend d. vorher gemachten Voraussetzung. Wenn nun aber d. Hahn geöffnet wird, so strömt d. Dampf mit sehr großer Geschwindigkeit von dem einen zum andern Gefäß über und es entstehen dabei Wirbel, Wechselbewegungen etc., deren Geschwindigkeit man nicht sehen kann. Nachdem aber in beiden Gefäßen Gleichgewicht eingetreten ist, ist der Dampf wieder zur Ruhe gekommen und demgemäß auch d. 2te Bedingung, daß der Endzustand Ruhe entsprechen solle, erfüllt, man kann also auch d. ~~ganze~~ Änderung d. innern Arbeitsmenge bestimmen, welche auch mit d. Zustandsänderung verbunden ist, wenn man nur auf d. vorgeschriebenen Größen kennt. Es muß also d. mitgetheilte Wärme Q gleich Null sein; d. Volumenänderung d. Körpers (Dampfs) kennt man, weil d. Volumen d. einen Gefäßes und d. Volumen d. beiden Gefäße zusammen bekannt ist. Ferner ist auch d. äußere Druck so gegeben, welcher in den einzelnen zur Oberfläche [illegible] Punkten d. letzteren während d. Dauer d. Zustandsänderung stattfindet, und ist dieser nämlich in diesem speciellen Fall $= 0$ zu setzen, denn so lange ein Element einer normal zur Oberfläche gerichteten Bewegung d. Dampfes möglich war, so [illegible] infolge d. Gefäßwandungen [illegible], ist äußerer Druck offenbar $= 0$. [illegible] d. Gleichgewichtszustand wieder eingetreten ist. Als dann Bewegung in normaler Richtung zur Oberfläche möglich ist, kann man nicht von äußerem Druck sprechen. In diesem speciellen Fall ist also $p_0 = 0$. Wenn man also d. Wärmemenge kennt, welche d. Dampf durch d. äußeren Gefäßwand hindurch mitgetheilt od. entzogen wird, so könnte man d. Änderung d. Arbeitsmenge auch bestimmen.

Um diese Frage allgemein zu beantworten kann man ausgehen von d. bekannten Gleichung d. ~~innern~~ Arbeitsmenge (Seite 40):

$$d(L+U) = dM + dP + W\,dQ$$

Wenn man diese Gleichung mit Bezug auf d. Vorgang d. oben erwähnten Art integrirt und zwar für d. ganze Dauer d. Zustandsänderung, dann ist offenbar d. Summe von dL: $\int dL = 0$, indem dieses dL [illegible] gesetzt wird und [illegible] sich alle [illegible] gegenseitig aufheben. Als Integral ergiebt also:

$$U_2 - U_1 = M + P + WQ$$

unter U_2 u. U_1 d. ~~innern~~ Arbeitsmengen im End- u. Anfangszustand, unter M d. Gesammtarbeit d. Molecularkräfte, unter P d. Gesammtarbeit d. äußeren Drucks und unter Q d. Gesammtbetrag d. von außen mitgetheilten Wärme verstanden. Was nun d. Arbeit P d. äußeren Drucks betrifft, so sei p_0 d. augenblickliche [illegible] äußere Druck für ein Element $d\sigma$ d. Oberfläche, also $p_0\,d\sigma$ d. auf [illegible] Flächenelement wirkende äußere Druck. Wenn dieses Element $d\sigma$ während d. Zeitelements dt sich in normaler zur Oberfläche gehender Richtung um d. Strecke ds nach außen bewegt, so ist offenbar $p_0\,d\sigma\,ds$ für d. unendl. kl. Zustandsänderung d. [illegible] d. Arbeit d. äußeren Drucks auf d. Oberflächenelement $d\sigma$ und demgemäß d. Summe dieser Werthe bezüglich d. ganzen Oberfläche — d. [illegible] d. Gesammtarbeit d. äußeren Drucks auf d. Körperoberfläche also:

$$\iint p_0\,d\sigma\,ds = -P$$

worin sich d. eine Integration über den in normaler Richtung bewegten Theil $d\sigma$ d. Körperoberfläche, das andere über den ganzen Verlauf dieser Bewegung zu erstrecken hat.

Wenn man nun noch wie es gewöhnlich [illegible] d. Fall sein darf von Molecularkräften absieht, also $M = 0$ setzen kann, so ist d. Änderung d. innern Arbeitsmenge:

$$U_2 - U_1 = WQ - \iint p_0\,d\sigma\,ds.$$

Ein solcher stattfindender Vorgang ist nun folgender [illegible]

Zur Leistung d. Zustandsänderung wird Körperwärme in [illegible] umgewandelt, von welcher ein Theil sich in [illegible] umwandelt, indem derselbe zur Überwindung d. auf d. Oberfläche wirkenden äußeren Drucks dient; d. Rest verwandelt sich in lebendige Kraft. Im andern

Dadurch geht diese lebendige Kraft durch Reibung von Flüssigkeitstheilchen und Oberflächenreibungen wieder in Wärme über, der Arbeitswerth derselben ist d. innern Arbeitsmengen, wird also schließlich um den Betrag d. Oberflächenarbeit abgenommen haben, wenn nicht inzwischen von Außen her Wärme = Q mitgetheilt wurde, welche d. Körperwärme um einen ebenso großen Betrag und d. innere Arbeitsmenge um ihren Arbeitswerth = WQ vergrößert.

Wenn nun ferner bei d. Zustandsänderung d. äußere Druck p_0 in dem normal zur Oberfläche sich bewegenden Theile d. letzteren in jedem Augenblick gleichförmig vertheilt ist, d.h. in jedem Augenblick in jedem Punkt gleich groß ist, so kann man nach d. vorhin gefundenen Gleichung schreiben:

$$U_2 - U_1 = WQ - \int p_0 \int d\sigma\, ds$$

Die Summe d. Produkte von $d\sigma$ und ds ist aber offenbar nichts anderes als d. Volumenänderung d. ganzen Körpers also $= dV$; folglich:

$$U_2 - U_1 = WQ - \int p_0\, dV.$$

Ist ferner aber d. äußere Druck p_0 nicht nur in jedem Augenblick in allen Punkten gleich, sondern während des ganzen Verlaufs d. Zustandsänderung in allen Oberflächenpunkten constant, so ist natürlich:

$$U_2 - U_1 = WQ - p_0 \int dV = WQ - p_0 (V_2 - V_1)$$

wobei V_1 d. Volumen d. Körpers im Anfangszustand und unter V_2 d. Volumen im Endzustand verstanden.

In dem noch einfacheren Fall d. in ein luftleeres Gefäß sich ausbreitenden gasförmigen Flüssigkeit (Dampf) ist d. äußere Druck p_0 während d. ganzen Dauer constant und zwar constant = 0. So hängt ein Theil d. Oberfläche überhaupt nicht in normaler Richtung zur Oberfläche beschäftigt. In diesem Falle ist also:

$U_2 - U_1 = WQ$ d.h. d. Änderung d. innern Arbeitsmenge = dem Arbeitswerth d. Arbeit d. mitgetheilten Wärme.

Wenn man nun auch noch von dieser Wärmemittheilung absieht, wenn d. Wärmeleitung d. Gefäßwände mit ausreichenden Rücksichten abgesehen (schließlich durch Schiffsprozess, wegen unbedeutender Differenz d. innern und äußern Temperaturen während d. ganzen Zustandsänderung) also $Q = 0$ setzt, so bekommt man:

$U_2 - U_1 = 0$; unter diesen Umständen hat also eine Änderung d. innern Arbeitsmenge nicht stattgefunden.

Die Wärmetheorie gestattet überhaupt verschiedene Umformungen um sie zur Berechnung von Aufgaben von besonderem bestimmten Interesse zu brauchen. Ehe diese Umformungen vorgenommen werden, soll noch vorher ein wichtiger Begriff behandelt werden, nämlich derjenige der:

Aequivalenz von Verwandlungen.

Im Vorhergehenden war schon d. Rede von unmittelbaren Verwandlungen von Arbeit od. lebendige Kraft in Wärme und umgekehrt und d. Verwandlung d. Wärme von einer bestimmten Temperatur in eine andere von anderer Temperatur. Zur kürzeren Bezeichnung soll d. erste Verwandlung eine Verwandlung d. ersten Art und d. Verwandlung von Wärme in eine solche von andrer Temperatur eine Verwandlung d. 2ten Art genannt werden. Jede dieser beiden Verwandlungen kann in 2facher Weise stattfinden, wenn auch d. 2 Art nicht unmittelbar so doch mittelbar. Die Verwandlung von Wärme in Arbeit soll eine positive und d. umgekehrte von Arbeit in Wärme eine negative Verwandlung d. ersten Art genannt werden. D. Verwandlung d. 2ten Art kann stattfinden indem Wärme von einer höheren zu tieferer und umgekehrt von tieferer zu höherer Temperatur übergeht. D. erste Übergang soll eine positive und d. letzte Übergang eine negative Verwandlung d. 2ten Art genannt werden.

Aus dem Vorhergehenden ist es bekannt, daß eine positive Verwandlung d. ersten Art nie unmittelbar stattfinden kann, daß vielmehr die Wärme sich immer erst in Disgregationsarbeit eines andern Körpers verwandelt, welche d. Verwandlung von Wärme in Arbeit vermittelt. Ebenso ist es auch bekannt, daß eine positive Verwandlung d. 2ten Art auch nicht unmittelbar durch Leitung od. Strahlung stattfinden kann, sondern daß immer d. Vermittlung eines dritten Körpers nöthig ist. Umgekehrt können also positive Verwandlungen nie unmittelbar stattfinden, während d. negativen Verwandlungen auch unmittelbar stattfinden können ohne Zuthun eines dritten Körpers, indem sich bekanntlich lebendige Kraft od. Bewegungsenergie Arbeit unmittelbar durch Reibung(?) in Wärme umsetzen können und ebenso Wärme von höherer Temperatur zu solcher von niederer Temperatur übergehen kann. Jede positive Verwandlung erfordert also d. Zustandsänderung eines vermittelnden Körpers. Hierbei ist besonders d. Fall von Interesse, daß d. Zustandsänderung ein sogenannter Kreisprozeß ist, daß eine solche Zustandsänderung stattfindet, welche d. vermittelnden Körper nach und nach wieder in seinen Anfangszustand zurückführt. Auf diesen Fall bezieht sich ein wichtiger, von Clausius aufgestellter Satz: Princip d. Aequivalenz von Verwandlungen, welches in folgendem Satz besteht:

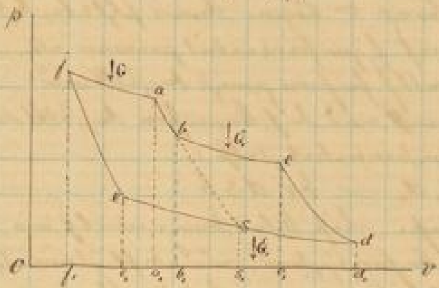
Wenn ein solcher Kreisprozeß eines vermittelnden Körpers mit irgend einer positiven Verwandlung verbunden ist, so muß nothwendig derselbe auch zugleich mit einer negativen Verwandlung stattfinden, welche letztere zu d. positiven Verwandlung in einer solchen Beziehung steht d. Art, daß wenn man jede Verwandlung bezüglich ihrer Art, Größe und Sinn durch eine algebraische Größe, durch ihren sogenannten Verwandlungswerth ausdrückt, stets die Summe aller dieser Verwandlungswerthe = 0 oder negativ ist (nie aber positiv) und zwar = 0 in dem Grenzfall, daß d. Kreisprozeß umkehrbar ist d.h. wenn derselbe aus lauter umkehrbaren Zustandsänderungen besteht.

Die Herleitung dieses Princips knüpft sich an eine Erweiterung d. früher gemachten Vorstellungen betreffs d. Wärmemittheilungen durch Leitung und Strahlung. Wie bekannt ist d. Definition richtig, daß eine unmittelbare Wärmeübertragung von niederer zu höherer Temperatur durch Leitung nicht stattfinden kann. Es wird ~~aber weiter~~ unmittelbar gesagt, daß auch durch Strahlung solche Übergänge von niederer zu höherer Temperatur nicht möglich seien. d. Aequivalenz d. Verwandlungen knüpft man an d. Erweiterung dieser Vorstellungen, indem man annimmt, daß ein Übergang von niederer zu höherer Temperatur d.h. also eine positive Verwandlung d. 2ten Art, auch mittelbar niemals stattfinden kann, wenn nicht gleichzeitig damit eine Änderung d. Zustandes d. vermittelnden Körpers od. eine sonstige Verwandlung verbunden ist. Allgemein läßt sich dies freilich nicht beweisen, die vielfache Übereinstimmung d. hieraus gezogenen Folgerungen mit den gemachten Erfahrungen kann aber wohl als Rechtfertigung d. obigen Annahme angesehen werden.

Um nun d. fragliche Princip herzuleiten, denkt man sich ~~mit~~ einen Körper einem umkehrbaren Kreisprozeß unterworfen von besonderer Art. Zunächst ist zuvorderst zu bemerken, daß d. Zustandscurve, welche d. Gesetz d. Zustandsänderung (Änderung d. Wärmezustandes) graphisch durch v u. p darstellt, für einen Kreisprozeß natürlich eine in sich zurücklaufende ebene Curve ist. Die Art d. Kreisprozesses soll nun d. Art sein, daß d. entsprechende Zustandscurve abwechselnd aus isothermischen und adiabatischen Curvenstücken besteht und zwar aus je 3 Stücken d. einen und d. andern Art, d.h. also der Körper einem solchen umkehrbaren Kreisprozeß unterworfen d. Art, daß d. Körper erst eine Zustandsänderung bei constanter Temperatur entsprechend d. isothermischen Curve, dann eine umkehrbare Zustandsänderung ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme entsprechend d. adiabatischen Curve und so abwechselnd weiter erfährt, bis er schließlich wieder in seinen Anfangszustand zurückgekehrt ist. Die umkehrbare Zustandsänderung ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme entsprechend einer adiabatischen Curve kann man sich in so fern erfüllt(?) vermittelt denken, daß man d. betreffenden Körper in eine für die Wärmeleitung undurchdringliche Hülle einschließt, welche also der Wärmeübertragung keine Hindernisse(?) entgegensetzt. d. umkehrbare Verwandlung bei constanter Temperatur entsprechend einer isothermischen Curve kann man sich dadurch vermittelt denken, daß d. betreffende Körper fortwährend an einem Theile seiner Oberfläche von einer d. Wärme nicht durchlassenden Wand begrenzt ist, am übrigen Theile dagegen mit einem anderen Körper von constanter Temperatur in Berührung sich befindet, welche also auf den Wärmeträger erhalten bleibt, so lange d. Berührung dauert.

Was d. Art d. Wärmeträgers K betrifft, so soll über dieselbe nichts Specielles festgesetzt werden außer den folgenden 2 Voraussetzungen: 1) der Körper K soll von solcher Art sein, daß bei gleichem Volumen seine Spannung um so größer wird, je höher seine Temperatur ist und daß 2) bei constanter Temperatur d. Volumenzunahme eine Mittheilung von Wärme erfordert und einer Wärmeentziehung eine Volumenabnahme entspricht. (Im Allgemeinen gelten diese Voraussetzungen nicht für alle Körper, od. doch für d. meisten)

Der Wärmeträger K habe ein Gewicht = 1 kg, sodaß d. spec. Volumen v zugleich d. Volumen d. ganzen Körpers ist. Im Anfangszustand sei d. Volumen = v und d. Spannung = p; bei Abstrahirung von Nebenkräften kann man dann bekanntlich bei einer solchen umkehrbaren Zustandsänderung von d. Spannung und Temperatur in einem Augenblick überall sprechen. Die augenblickliche Temperatur sei = t. Den Anfangszustand kann man sich nun dargestellt denken durch einen Punkt A, dessen Coordinaten in Bezug auf d. Achsen Coordinatensystem v und p sind.



Die umkehrbare Zustandsänderung d. Körpers K erfolge nun zuerst nach einer adiabatischen Curve ab d.h. diese Curve stellt diejenige umkehrbare Zustandsänderung ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme vor. Die Temperatur sinkt bis zum Zustand b auf t_1 herab; d. jetzige Zustand ist dargestellt durch d. Abscisse Ob_1 als Volumen und b_1b als Spannung. Die weitere Zustandsänderung erfolge nach d. isothermischen Curve bc als bei constanter Temperatur, so daß d. Temperatur im Zustand c noch = t_1 ist; die Zustandsänderung soll unter Volumenzunahme erfolgen, es muß also d. Körper K_1, mit welchem man sich den Wärmeträger verbunden denkt um eine constante Temperatur zu erhalten, eine gewisse Wärmemenge Q_1 abgeben und dem Körper K mitgetheilt werden. Diese d. Wärmeträger von Außen mitgetheilte Wärmemenge ist in d. Zeichnung dargestellt durch einen Pfeil welcher von Außen gegen d. Curve gerichtet ist. Im Zustand c ist nun d. Spannung dargestellt durch cc_1 und d. Volumen durch Oc_1. Hierauf erfolge wieder d. Zustandsänderung nach einer adiabatischen Curve cd und zwar in einem solchen Sinne, daß die Temperatur abnimmt, etwa bis t_2. Im Zustand d ist also d. Volumen entsprechend Od_1, d. Spannung = dd_1 und d. Temperatur = t_2 ($t_2 < t_1$). Die weitere Zustandsänderung erfolge nach einer isothermischen Curve de indem man sich d. Wärmeträger K mit einem Körper K_2 von constanter Temperatur t_2 in Berührung befindend denkt. Die Zustandsänderung erfolge, wie es auch d. Zeichnung andeutet, unter Volumenabnahme, so daß also d. Körper K_2 eine gewisse Wärmemenge abgegeben wird und zwar soll diese Abgabe so lange erfolgen bis im Zustand e eine ebenso große Wärmemenge Q_2 an diesen Körper K_2 abgegeben ist, wie zuvor bei d. Zustandsänderung nach d. isothermischen Curve bc d. Wärmeträger K von dem Körper K_1 erhalten. Angedeutet sei dies durch einen Pfeil welcher von d. Curve weg nach Außen hin gerichtet ist. D. Volumen ist also nun geworden = Oe_1, d. Spannung = ee_1, während d. Temperatur constant = t_2 geblieben ist. Jetzt erfolge d. Zustandsänderung nach einer adiabatischen Curve ef in solchem Sinne und so lange bis d. Körper K wieder seine Anfangstemperatur t erlangt hat. Die Spannung ist nun = ff_1, d. Volumen = Of_1 und d. Temperatur wieder = d. Anfangstemperatur t. Endlich erfolge d. letzte d. ausgeführten Zustandsänderungen nach einer isothermischen Curve fa und zwar in solchem Sinne und so lange bis auch d. Volumen d. Wärmeträgers K wieder = Anfangsvolumen v geworden ist. Insofern nun d. Wärmezustand durch v und t vollkommen bestimmt ist, und da diese wieder = dem Anfangsvolumen und Anfangstemperatur geworden sind, muß auch d. Spannung wieder = Anfangsspannung geworden sein, überhaupt d. Wärmeträger wieder in seinen Anfangszustand zurückgekehrt sein. Die ausgeführte Zustandsänderung ist also nun ein Kreisprozeß geworden, d. d. Zustand wieder zurückkehrt, und zwar ein umkehrbarer Kreisprozeß, weil alle vorkommenden Zustandsänderungen umkehrbar wären. Auf Grund d. im Verlaufe d. Untersuchung gemachten Voraussetzungen ist es offenbar leicht einzusehen, daß d. Volumen Of, das d. Körper im Zustande f besitzt, kleiner sein muß als das Volumen Oa_1 im Anfangszustand a, und dieß deshalb, weil wir im Anfang vorausgesetzt haben, daß einer Volumenzunahme eine Wärmemitteilung entspricht. Wird dann nach d. gesetzt gemachte Zustandsänderung nach d. isothermischen Linie fa, welche bei constanter Temperatur t_1 vor sich geht, die Mitteilung einer gewissen Wärmemenge Q an den Versuchskörper K. Denn denkt man sich d. adiabatische Linie ab und isothermische Linie dc bis zu ihrem Schnittpunkt s verlängert, und stellt sich dann so daß d. Kreisprozeß nicht in d. entgegengesetzten Weise sondern in dem Sinne abcdsa erfolge, also nach d. isothermischen Linie von d bis s, so ist Q_2 die Wärmemenge, welche bei d. Zustandsänderung ~~abgegebene Temperatur~~ d. Körper nach d. isothermischen Linie ds mit Volumenabnahme bei constanter Temperatur t_2 an den Wärmereservoir K_2 mitgeteilt wird. Festgehalten d. im Anfang ausdrücklich gemachten Voraussetzung, daß bei gleichem Volumen einer höheren Temperatur auch immer ein höherer Druck entspreche, und da d. Temperatur t_2 kleiner als t_1 (entsprechend d. isothermischen Linie bc) angenommen wird, muß notwendig d. Linie ds zwischen d. Curve bc und d. Abscissenaxe v liegen. Daraus folgt aber, daß bei dem Kreisprozeße abcdsa notwendig mehr Gesamtarbeit gewonnen als verbraucht wird, indem d. Arbeit welche gewonnen wird bekanntlich [illegible] dargestellt wird durch d. Fläche $a_1abcdd_1a_1$ und d. Arbeit welche verbraucht wird durch [illegible] dargestellt durch d. Fläche $d_1dsaa_1d_1$, die gewonnene überschüssige Gesamtarbeit ist also:

$$a_1abcdd_1a_1 - d_1dsaa_1d_1 = bcdsb$$

d. h. = d. von d. Zustandscurve bcdsb eingeschlossenen Fläche. Diese Arbeit kann natürlich nur aus Wärme entstanden sein; da aber d. Körper K in seinen Anfangszustand zurückgekehrt ist und also auch seine Anfangs [illegible] wieder erlangt hat, so muß diese gewonnene Arbeit offenbar d. Überschuß einer dem Körper K mehr mitgeteilten als entzogenen Wärme sein. Dem Körper wird jedoch im betrachteten Falle nur d. Wärmemenge Q_1 mitgeteilt und d. Wärme Q_2 entzogen, so ist natürlich Q_2 kleiner als Q_1 sein müßte. Damit [illegible] daß d. Körper seine Wärmemenge wie im Anfang wieder erlange, damit also $Q_2 = Q_1$ wird muß d. Wärmeabgabe bei d. constanten Temperatur t_2 d. Körper K nach d. isothermischen Linie länger als bis s erfolgen, daß d. isothermische Linie nicht über den Schnittpunkt mit d. adiabatischen Linie ab im Sinne einer Volumenabnahme hinausgehen. Da nur ferner, entsprechend d. Unter[illegible] [illegible] Zustandscurven derselben Art, sich [illegible] sich nie schneiden können, also auch d. beiden adiabatischen Linien ab und ef sich nicht schneiden können, so muß d. Volumen Of im Zustand f kleiner sein als d. Volumen Oa_1 im Anfangszustand a und mithin muß d. nach gemachter Behauptung [illegible] während d. Zustandsänderung nach d. isothermischen Linie fa erfolgte Wärmemitteilung = Q richtig sein. Bei dem ursprünglich vorausgesetzten Kreisprozeß abcdefa wird also wirklich eine Wärmemenge gewonnen

nämlich: $Q_1 - Q_2 + Q - Q$, welche jedoch, da d. Körper wieder wieder denselben wie im Anfangszustand geworden ist, als Arbeit erhalten wird, welche der durch d. Zustandscurve eingezogenen Fläche abcdefa entspricht und also $= E$ sei. Es ist also nach früheren d. gewonnene Wärmemenge:

$$Q = AE$$ unter A d. [illegible] Wärmemenge d. Arbeitseinheit verstanden. Mit d. Kreisprozeß ist also eine positive Verwandlung d. ersten Art nämlich eine Verwandlung von Wärme in Arbeit verbunden. Außerdem kommt aber gleichzeitig noch eine andere Verwandlung vor, indem nämlich d. Wärmemenge Q_2 von d. Körper K zum Körper K_2 von d. Temperatur t_1 zur Temperatur t_2, wobei $t_2 < t_1$ von höherer zu niederer Temperatur übergeht, entsprechend einer negativen Verwandlung d. 2ten Art. Mit dem vorliegenden Kreisprozeße ist also eine positive Verwandlung d. ersten Art und eine negative Verwandlung d. 2ten Art verbunden. Diese beiden Verwandlungen bedingen sich natürlich gegenseitig. Ein solcher Kreisprozeß soll ein umkehrbarer genannt werden, wenn d. Verlauf im Sinne d. entgegengesetzten Umlaufs stattfinden kann im entgegengesetzten Falle dagegen nicht umkehrbar.

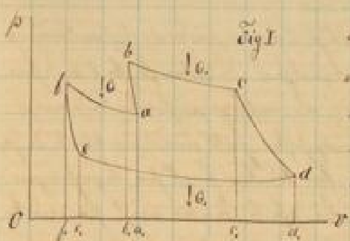


Fig I.

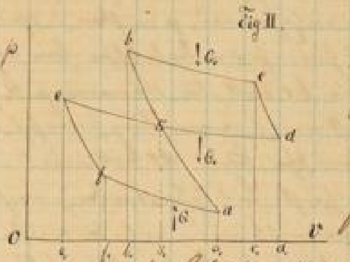


Fig II.

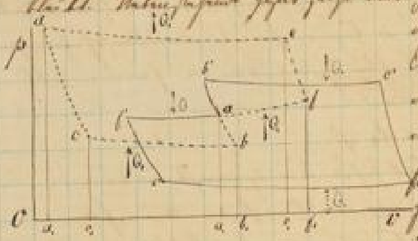
Bei dieser Betrachtung ist d. Höhe d. Anfangstemperatur t, bei welcher zuerst Wärme d. dem Körper K entzogen wird [illegible] gleichgültig. Die früheren [illegible] bezogen sich auf den Fall daß: $t > t_1$; in anderen Fällen ändert sich nur d. Figur, ohne daß d. Schlussfolgerungen ändern würden. Fig I zeigt z. B. den Zustandsverlauf für den Fall, daß $t_1 > t > t_2$ ist und

Fig II auf den Fall daß: $t < t_2$ ist.

In dem letzteren Falle teilt sich d. Kreisprozess in einen rechtläufigen $sbcds$ und einen rückläufigen $asefa$ [illegible]; bei ersterem wird Arbeit gewonnen, bei letzterem verbraucht. [illegible] im Ganzen Arbeit: $E = sbcds - asefa = WQ$ [illegible]

[illegible]

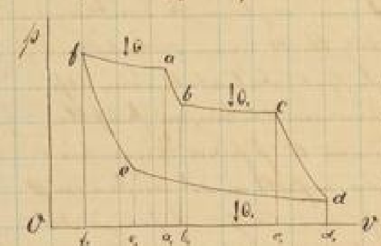
daß [illegible] wirklich d. Fall ist, geht aus dem Umstande hervor, daß [illegible] d. Zustandskurve [illegible] Richtungen haben wie im ursprünglich umkehrbaren Fall, [illegible] Wahrscheinlichkeit [illegible] bleibt. Nebenstehende Figur zeigt [illegible] z. B. für den Fall, daß $t_1 > t > t_2$ ist. [illegible] d. Zustandskurve für d. ursprünglich umkehrbaren Fall und d. [illegible] Zustands[illegible] für den Fall, in welchem [illegible]



[illegible] Wärmemenge [illegible] d. Zustandsänderung [illegible] Körper K [illegible] Linie ab [illegible] t_1. [illegible] Linie bc [illegible] Wärmemenge Q_2 [illegible] t_2 [illegible] Linie cd [illegible] t_2 [illegible] Linie de [illegible] Wärme Q [illegible] Temperatur [illegible] Zustandsänderung [illegible] Linie ef [illegible] Temperatur [illegible] t_2 [illegible] t [illegible] Linie fa [illegible] Zustandsänderung [illegible] bc [illegible] Körper K [illegible] Wärme Q [illegible] dc Q [illegible] fa [illegible] Q [illegible]

[illegible]

Betrachten wir den im Anfang [illegible] Kreisprozeß mit demselben Körper K und mit Hilfe derselben [illegible] Körper K_1 und K_2 [illegible] Linie af edcba [illegible] Zustandsänderung auf af [illegible] Temperatur t und d. Wärme Q [illegible] Körper K [illegible] Zustandsänderung auf cd bei constanter Temperatur t_2 und d. Wärme Q_2 [illegible] Körper K an K_2 [illegible] cb bei [illegible] constanter Temperatur t, [illegible] K_1 d. Wärme Q_1 an K_1 ab. [illegible] Wärme Q [illegible] K_2 [illegible] Temperatur t_2 [illegible] Temperatur t [illegible] Körper K [illegible] Wärme Q [illegible] Temperatur t [illegible] Körper K [illegible]



[illegible] Körper K [illegible] Arbeit $E \cdot WQ$ [illegible] Zustandskurve afedcba [illegible] Kreisprozeß [illegible] 2ter Art [illegible]

[illegible] Kreisprozesse [illegible] Temperaturen t_1 t und t_2 [illegible] mit Q und Q_1 [illegible] Wärmemengen [illegible] Körper K [illegible] Temperatur t [illegible] v u. p [illegible] 3 Zustandsänderungen bei constanter Temperatur t_1, t, t_2 [illegible] Zustandskurve [illegible] Kreisprozess [illegible] Körper K [illegible] Körper K_2 [illegible] Kreisprozesse [illegible] Körper K'' [illegible] Q'' und Q_1'' [illegible] Wärmemengen [illegible] Temperaturen t t_1 und t_2

entsprechenden solchen Kreisprocesse d. Körpers K mit Q und Q_2 bezeichnet würden, so ist es nun wichtig zu bemerken, daß, wie auch Q und Q', Q_2 und Q_2' verschieden sein mögen, doch d. Verhältniß dieser Wärmemengen immer constant derselbe ist, also:

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{Q_2}{Q_2'} \text{ ist od. } \frac{Q}{Q_2} = \frac{Q'}{Q_2'}.$$

Um dies zu beweisen, setze man $\frac{Q}{Q'} = \frac{m}{n}$ wobei m und n ganze Zahlen vorstellen; diese Bruchzahl $\frac{m}{n}$ kann also bei hinreichender Größe von m und n jedes rationale Verhältniß darstellen und jedes irrationale, wenn m und n unendlich groß werden. Der Beweis für d. Richtigkeit d. genannten Verhältnisses kann nun in d. Weise geführt werden, daß man annimmt d. Behauptung d. Gleichheit eines solchen Verhältnisses sei falsch und es soll dann gezeigt werden, daß man mit dieser letzten Annahme auf Widersprüche stößt.

Angenommen nun $\frac{Q}{Q'} = \frac{m}{n}$ und $\frac{Q_2}{Q_2'} < \frac{m}{n}$.

Stellt man d. Kreisprocess n mal hintereinander rückläufig mit d. Körper K ausgeführt, so daß bei einem jeden dieser Kreisprocesse d. Wärmemenge Q in Arbeit verwandelt wird entsprechend d. früheren Auseinandersetzungen. Infolgedessen wird also bei d. n Kreisprocessen d. Wärmemenge nQ in Arbeit verwandelt und es geht außerdem d. Wärmemenge nQ_2 vom Körper K_1 zum Körper K_2 über, d.h. es wird d. Temperatur t_1 in d. Temperatur t_2 verwandelt. Wenn jetzt ein anderer Körper K' zwischen d. Temperaturen t, t_1 und t_2 einen m maligen rückläufigen Kreisprocess ausführt, so wird d. Wärmemenge mQ' aus Arbeit durch Verwandlung erzeugt und es geht dabei d. Wärmemenge mQ_2' in umgekehrtem Sinne wie vorhin über von d. Temperatur t_2 zur Temperatur t_1, d.h. es wird d. Wärmemenge mQ_2' vom Körper K_2 zum Körper K_1 übergeführt. Nachdem d. $n + m$ Kreisprocesse ausgeführt sind, befinden sich die beiden Verwandlungskörper K und K' in ihrem anfänglichen Zustande; außerdem ist weder Wärme in Arbeit noch Arbeit in Wärme verwandelt und es ist eine gewisse Wärmemenge $mQ_2' - nQ_2$ von d. Körper K_2 zu dem wärmeren Körper K_1 ohne Compensation d.h. ohne irgend eine gleichzeitige Veränderung übergeführt worden, also vom Körper von d. Temperatur t_2 zu dem von d. Temperatur t_1, wo $t_2 < t_1$, indem $mQ_2' - nQ_2$ positiv ist. Ein solcher Übergang von Wärme von einem Körper niederer Temperatur zu einem Körper höherer Temperatur ist aber nach d. von Clausius aufgestellten Sätzen unmöglich, folglich ist ein Widerspruch mit d. willkürlichen Annahme vorhanden, daß $\frac{Q_2}{Q_2'} < \frac{m}{n}$ sein soll und daß daher $\frac{Q_2}{Q_2'} = \frac{m}{n}$ richtig sei.

Denselben Widerspruch bekommt man mit d. Annahme, daß:

$\frac{Q}{Q'} = \frac{m}{n}$ und gleichzeitig $\frac{Q_2}{Q_2'} > \frac{m}{n}$ sei, wenn man dann nur den n maligen Kreisprocess d. Körpers K rückläufig und den m maligen Kreisprocess d. Körpers K' rechtläufig stattfinden läßt. Wenn also:

$\frac{Q}{Q'} = \frac{m}{n}$ ist, kann nicht gleichzeitig $\frac{Q_2}{Q_2'} \gtrless \frac{m}{n}$ sein, es muß also $\frac{Q_2}{Q_2'} = \frac{m}{n} = \frac{Q}{Q'}$ sein. D. Verhältniß ist somit constant, welches auch immer d. Anfangszustand ist und welches auch d. vermittelnde Körper auch sei, wofern nur d. Temperaturen t, t_1 und t_2 in allen Fällen dieselben sind.

Mit Hilfe eines umkehrbaren Kreisprocesses von d. hier vorausgesetzten Art, d.h. d. jedesmal nur aus 3 adiabatischen und 3 isothermischen Curven besteht, kann jede d. 2 verschiedenen positiven Verwandlungen, nämlich Wärme Q von d. Temperatur t in Arbeit und Arbeit in Wärme von d. Temperatur auf unendlich mannigfache Weise durch eine andere Verwandlung derselben Art od. durch eine Verwandlung d. anderen Art ersetzt werden. Ist z.B. d. Verwandlung einer gewissen Wärmemenge Q von d. Temperatur t in Arbeit gegeben, so kann ein rückläufiger solcher Kreisprocess auf unendlich mannigfaltige Weise herangezogen werden, daß dabei Arbeit in dieselbe Wärmemenge Q von derselben Temperatur t verwandelt, also d. gegebene Verwandlung rückgängig gemacht würde, d. zu entsprechen würde mit Hilfe eines vermittelnden Körpers. Dazu wird dann aber eine gewisse Wärmemenge Q_2 von d. Temperatur t_2 in d. höhere Temperatur t_1 versetzt, wobei Q_2 unendlich mannigfach verschieden sein kann, weil t_2 und t_1 verschieden gewählt werden, indem d. constante Verhältniß zwischen Q und Q_2 wesentlich auf d. Voraussetzung beruht, daß t, t_1 und t_2 in den verschiedenen Fällen dieselben Werthe haben. Die ursprünglich gegebene positive Verwandlung d. ersten Art findet sich somit ersetzt durch eine positive Verwandlung d. 2ten Art, ohne sonstige zurückbleibende Veränderung. Nun kann ferner d. rechtläufige Kreisprocess herangezogen werden, daß d. soeben erhaltene Verwandlung wieder aufgehoben, nämlich d. Wärmemenge Q_2 von d. Temperatur t_1 auf d. Temperatur t_2 zurückbringt, dafür aber eine gewisse Wärmemenge Q' von d. Temperatur t' in Arbeit verwandelt wird, wobei Q' je nach d. Werthe von t' unendlich mannigfach verschieden sein kann. Die ursprünglich gegebene Verwandlung d. ersten Art findet sich also durch eine [illegible] Clausius [illegible]

[illegible] Q [illegible] t [illegible] $f(Q,t)$ [illegible] Q [illegible] t [illegible] Q [illegible] t [illegible]

$\div f(Q,t)$ [illegible]

[illegible] 3 [illegible] Q [illegible] t_1 [illegible] t_2. [illegible] ϑ [illegible] Q [illegible] t_1 [illegible] $t_2 = \vartheta(Q\,t_1\,t_2)$. [illegible] Q [illegible] t_2 [illegible] t_1, [illegible] $= \div\,\vartheta(Q\,t_1\,t_2)$, [illegible] Q [illegible] t_2 [illegible] t_1 [illegible] $\vartheta(Q\,t_1\,t_2)$, [illegible] $+\,\vartheta(Q,\,t_2\,t_1)$, [illegible]

$$\div\,\vartheta(Q\,t_1\,t_2) = \vartheta(Q\,t_2\,t_1)$$

[illegible] ϑ [illegible] A [illegible] B [illegible] A [illegible] B [illegible] A [illegible] $-B$ [illegible] B [illegible] $\div A$. [illegible] $\div A$ [illegible] $+A$ [illegible] $-B$ [illegible] B [illegible] $\div B$ [illegible] B [illegible] $\div A$. 2 [illegible] $= 0$ [illegible] 6 [illegible]

[illegible] t t_1 [illegible] t_2 [illegible] Q [illegible] t [illegible] Q_1 [illegible] t_1 [illegible] t_2. [illegible]

$= f(Q\,t)$ [illegible] $= \vartheta(Q_1\,t_1\,t_2)$ [illegible] $= 0$ [illegible]

$$f(Q\,t) + \vartheta(Q_1\,t_1\,t_2) = 0.$$

[illegible] t t_1 [illegible] t_2 [illegible] Q [illegible] Q' [illegible] Q_1 [illegible] Q_1' [illegible] $\frac{Q}{Q'} = \frac{Q_1}{Q_1'}$. [illegible] ϑ [illegible] t t_1 [illegible] t_2 [illegible] $\frac{Q_1}{Q}$ [illegible] $f(Q\,t)$ [illegible] Q [illegible] $f(t)$. [illegible] $f(Q\,t) = Q\,f(t)$. [illegible] ϑ, [illegible] $\vartheta(Q_1\,t_1\,t_2) = Q_1\,\vartheta(t_1\,t_2)$.

[illegible]

$$\text{I} \quad Q\,f(t) + Q_1\,\vartheta(t_1\,t_2) = 0$$

Diese Beziehung ist also unter d. Bedingung gefunden, daß d. Quotient $\frac{Q}{Q_1}$ constant sei:

Man denkt sich nun einen rückläufigen Kreisprozeß mit Hilfe eines vermittelnden Körpers so durchgeführt, daß dabei d. Wärmemenge Q_1 von d. Temperatur t_2 zur höheren Temperatur t_1 übergeht, also eine Verwandlung d. 2ten Art stattfindet, und eine gewisse Wärmemenge Q' von d. Temperatur t' durch Verwandlung aus Arbeit erhalten wird; d. Summe d. Verwandlungswerthe muß dann auch hier wieder $= 0$ sein. $\div Q' f(t')$ ist d. Verwandlungswerth d. Arbeit in d. Wärmemenge Q'; d. Werth d. Verwandlung d. Wärmemenge Q_1 bei d. Temperatur t_2 in Arbeit ist $\div Q_1 \delta(t_1 t_2)$ und somit hat man d. Gleichung:

$$\div Q' f(t') - Q_1 \delta(t_1 t_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II}$$

Da man nun nach d. früheren aussprechen kann: $\div Q_1 \delta(t_1 t_2) = + Q_1 \delta(t_2 t_1)$ so ist auch:

$$\div Q' f(t') + Q_1 \delta(t_2 t_1) = \div Q' f(t') - Q_1 \delta(t_1 t_2) = 0.$$

Durch Addition d. beiden Gleichungen I und II findet man:

$$Q f(t) - Q' f(t') = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III}$$

D. rückläufige Kreisprozeß kann nun, unbeschadet gegebener Werthe von Q t und t_2 auf unendlich mannigfaltige Weise verändert werden (entsprechend verschiedener Lage d. Punktes a auf d. adiabatischen Curve ab d. letzten Figur, während d. Isothermenstücke bc de für einen bestimmten vermittelnden Körper gegeben sind); und besonders kann es so eingerichtet werden, daß $Q' > Q$ ist. Dann ist aber d. Resultat d. beiden entgegengesetzten Verwandlungen d. ersten Art, welche durch d. beiden Kreisprozesse zusammengenommen bewirkt werden, nämlich d. Verwandlung d. Wärme Q von d. Temperatur t in Arbeit und d. Verwandlung von Arbeit in d. Wärme Q' von d. Temperatur t' ganz dasselbe, als ob d. Wärme $(Q - Q')$ von d. Temperatur t in Arbeit und d. Wärme Q' von d. Temperatur t in eine solche von d. Temperatur t' verwandelt worden wäre. Diese beiden Verwandlungen sind zusammengenommen den beiden angenommenen Verwandlungen erster Art, deren Verwandlungswerthe nach Gleichung III d. Summe 0 haben, äquivalent, so daß auch d. Summe d. Verwandlungswerthe $= 0$ sein muß. Damit muß also sein:

$$(Q - Q') f(t) + Q' \delta(t t') = 0$$

indem d. Werth d. letzteren Wärmemenge $Q - Q'$ von d. Temperatur t in Arbeit $= (Q - Q') f(t)$ und d. Werth d. Verwandlung d. Wärme Q' von d. Temperatur t in solche von d. Temperatur t' gleich ist: $Q' \delta(t t')$.

Aus d. letzten Gleichung folgt:

$$\div \frac{Q - Q'}{Q'} f(t) = \delta(t t') = f(t) - \frac{Q}{Q'} f(t)$$

Nach Gleichung III ist nun $f(t') = \frac{Q}{Q'} f(t)$; dies eingesetzt gibt:

$$\delta(t t') = f(t) \div f(t')$$

D. Function δ ist somit auf d. Function f zurückgeführt und es ist daher f noch zu bestimmen, welche durch Zweckmäßigkeit geschehen kann.

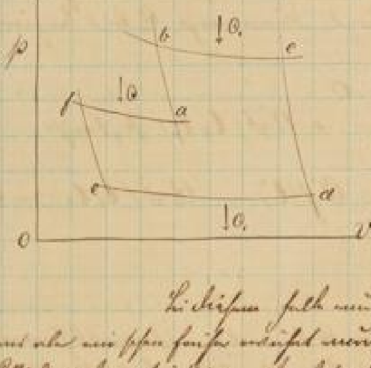
Zur einfacheren Bezeichnung soll gesetzt werden: $f(t) = \frac{1}{T}$, wenn also T eine Function d. Temperatur vorstellt, unabhängig von d. Art d. Körpers, mit dem d. Verwandlung vorgenommen wird, sofern d. Zustand d. Körpers nur durch d. Temperatur allein bestimmt ist. Sodann seien T_1 und T_2 .... d. zugehörigen Werthe dieser Function T, welche den Temperaturen t_1 t_2 .... entsprechen. Damit ist dann $\frac{Q}{T}$ resp. $\div \frac{Q}{T}$ d. Verwandlungswerth, welcher d. Umsetzung d. Wärme Q von d. Temperatur t in äquivalente Arbeit, resp. d. Umsetzung von Arbeit in Wärme Q von d. Temperatur t entspricht und

$$Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \frac{Q}{T_1} \div \frac{Q}{T_2}$$

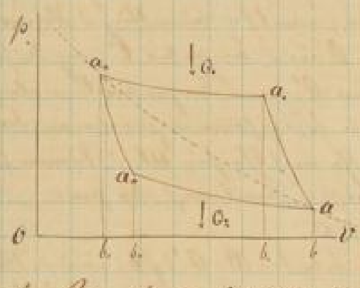
d. Verwandlungswerth d. Wärme Q beim Übergange von d. Temperatur t_1 zur Temperatur t_2.

Jede Verwandlung d. 2ten Art kann, wie schon ersichtlich, immer als Combination einer positiven und einer negativen Verwandlung d. ersten Art für dieselbe Wärmemenge betrachtet werden und umgekehrt.

Bisher wurde nur einer Kreisprocesse von d. bestimmten Art vorausgesetzt, bestehend nur je aus 2 isothermischen Curven und 2 adiabatischen Curven entsprechenden Zustandsänderungen. Die Zustandscurve stellt in diesem Falle immer ein Viereck mit zu je schneidenden isothermischen und adiabatischen Curven wie z. B. abcdefa. Geschieht d. Kreisprocess im umkehrbaren Sinne, so wird d. Körper während d. Zustandsänderung nach isothermischer Curve bc d. Wärmemenge Q_1 mitgetheilt bei constanter Temperatur t_1, bei d. Änderung nach isothermischer Curve ed bei constanter Temperatur t_2 d. Wärmemenge Q_2 entzogen und endlich nach isothermischer Curve fa d. Wärmemenge Q bei constanter Temperatur t = Anfangstemperatur mitgetheilt, welche Wärmemenge als solche jedoch nicht erhalten wird, sondern sich als Aequivalent erhalten wird nach d. bekannten Formel: $Q = AE$ wobei A d. Wärmewerth d. Arbeitseinheit bedeuten. Die Arbeit E wird dabei bekanntlich durch d. Inhalt d. von d. Zustandscurve umgrenzten Fläche dargestellt.



In diesem Falle wird angenommen, daß d. Anfangstemperatur t zwischen t_1 und t_2 liege, um aber nicht schon hier weitläufig werden zu müssen, genügt es, einen d. Fall zu betrachten, aber d. Gültigkeit d. folgenden Schlüsse zu beeinträchtigen. Der besondere Fall ist nun d. Fall, daß $t = t_2$ ist, indem nun offenbar d. isothermische Curve af nur eine Verlängerung d. isothermischen Curve bc wird. Man erhält dadurch eine Zustandscurve bestehend aus nur 2 isothermischen und 2 adiabatischen Curven; d. dieser Zustandscurve entsprechende Kreisprocess soll ein einfacher umkehrbarer Kreisprocess genannt werden. Die Zustandsänderung erfolgt also nun nach den beiden isothermischen Curven $a_0 a_1$ und $a a_2$ bei den constanten Temperaturen t_1 resp. t_2 und nach den beiden adiabatischen Curven $a_1 a$ und $a_2 a_0$.



Findet d. Kreisprocess im umkehrbaren Sinne statt, so wird dabei nach früheren allgemein dem Körper eine überschüssige Wärmemenge mitgetheilt, welche als äquivalente Arbeit erhalten wird. Ist demnach Q_1 die dem Körper während d. Zustandsänderung nach d. isothermischen Curve $a_0 a_1$ mitgetheilte Wärme bei constanter Temperatur t_1 und Q_2 d. dem Körper während d. Zustandsänderung nach d. isothermischen Curve $a a_2$ entzogene Wärme bei constanter Temperatur t_2 $(t_2 < t_1)$, so muß offenbar $Q_1 > Q_2$ sein, weil d. Unterschied $Q_1 - Q_2$ die erhaltene überschüssige Arbeit hervorbringen muß, indem d. Körper selbst keine Wärme dazu hergiebt, da er seinen Anfangszustand wieder erlangt hat. Es muß also sein:

$$Q_1 - Q_2 = AE$$

wobei E d. von d. Fläche d. Zustandscurve dargestellte überschüssige gewonnene Arbeit und unter A d. Wärmewerth d. Arbeitseinheit verstanden.

Außer dieser Umsetzung d. Wärme $Q_1 - Q_2$ in Arbeit, ist d. Wärmemenge Q_2 von d. Temperatur t_1 zu Temperatur t_2 übergegangen, d. h. es sind mit d. umkehrbaren Kreisprocess 2 Verwandlungen verbunden, nämlich d. Wärmemenge $Q_1 - Q_2$ bei d. Temperatur $t_1 = t$ in Arbeit verwandelt und d. Wärme Q_2 von d. Temperatur t_1 zu Temperatur t_2 übergegangen.

Dem Vorhergehenden zufolge ist demnach d. Werth d. entsprechenden Verwandlung:

$$= \frac{Q_1 - Q_2}{T_1} = \text{Werth d. Verwandlung d. Wärme } Q_1 - Q_2 \text{ in d. äquivalente Arbeit } E.$$

d. Werth d. Uebergangs d. Wärme Q_2 von d. Temperatur t_1 zu Temperatur t_2 ist ebenso:

$$Q_2\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right).$$

Bekanntlich müssen beide Verwandlungswerthe addirt als d. Summe 0 geben, es muß also sein:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{T_1} + Q_2\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = 0$$

od.

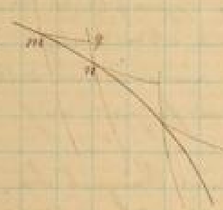
$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

$\frac{Q_1}{T_1}$ ist offenbar d. Verwandlungswerth, welcher d. Zustandsänderung nach Curve $a_0\, a_1\, a$ entspricht, indem die bei d. Temperatur t_1 dem Körper mitgetheilte Wärme Q_1 als in Arbeit verwandelt betrachtet werden muss; $-\frac{Q_2}{T_2}$ ist d. Verwandlungswerth, welcher d. Zustandsänderung $a\, a_2\, a_0$ entspricht, indem die bei d. Temperatur t_2 dem Körper entzogene Wärme Q_2 als aus Arbeit entstanden zu betrachten ist.
Auf folgende einfache umkehrbare Kreisprocesse erhalten wir besonders wichtige Anwendung bei d. Betrachtung d. calorischen Arbeitsmaschinen.
Findet d. einfache Kreisprocess in umgekehrter Weise statt, so wird derselbe [illegible], so kehren natürlich alle Buchstaben ihre Zeichen um, indem alle Vorgänge in umgekehrter Weise stattfinden, und diesem Sinne wird nun d. Wärmemenge $Q_1 - Q_2$ [illegible] mitgetheilt und also bedeutet E eine aufgewandte Arbeit. Die betreffenden Verwandlungswerthe für den Zustandsänderungen $a_0\, a_2\, a$ und $a\, a_1\, a_0$ sind dann $\frac{Q_2}{T_2}$ und $-\frac{Q_1}{T_1}$; die Summe dieser beiden Verwandlungswerthe muss natürlich auch wieder $= 0$ sein

also: $\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0$.

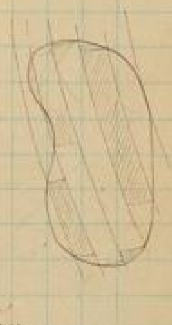
Bis jetzt wurden immer nur ganz bestimmte Zustandsänderungen vorausgesetzt, nämlich abwechselnd umkehrbare Zustandsänderungen bei constanter Temperatur, entsprechend auch isothermischen Zustandscurven und umkehrbaren Zustandsänderungen ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme entsprechend adiabatischen Zustandscurven.

Im weiteren Verlauf sollen nunmehr umkehrbare Zustandsänderungen zu Grunde gelegt werden, welche nach einem ganz beliebigen Gesetz vor sich gehen, entsprechend einer ganz beliebigen Zustandscurve. Indem man jede Curve als d. Grenze eines unendlich vielseitigen gebrochenen Linienzuges ansehen kann, wenn diese Linienstücke unendlich klein werden, so kann man auch eine jede beliebige Zustandscurve als d. Grenzform eines gebrochenen Linienzugs ansehen, dessen einzelne Theile isothermische und adiabatische Linientheile sind; für jedes Element d. Zustandsänderung kann man sich abwechselnd d. Wärmemittheilung und d. Temperaturänderung nacheinander statt gleichzeitig stattfindend denken.



Es sei nun mn ein unendlich kl. Bogenelement d. Zustandscurve, t d. Temperatur entsprechend d. Zustand m, und nehme man d. Temperatur dt im Allgemeinen als gleichzeitig ändernd voraus, also $t + dt$ d. Temperatur entsprechend d. Zustand n; dQ sei d. Wärmemenge welche d. Körper bei constanter Temperatur t mitgetheilt wird während d. Zustandsänderung nach mn und zwar sei sie mit dt [illegible], so dass d. [illegible] dQ eine [illegible] Wärmemenge bedeutet. Anstatt d. unendlich kleinen Zustandsänderung nach Curvenelement mn, während welcher zu gleicher Zeit d. Temperatur t in $t + dt$ übergeht und d. Wärmemenge dQ d. Körper mitgetheilt wird, kann man sich also abwechselnd isothermische Curve mq und darauf folgende adiabatische Curve qn stattfindend denken. Bei d. Zustandsänderung nach isothermischer Curve mq bei constanter Temperatur t ist als Wärmemittheilung eine Verwandlung entstanden; d. Verwandlungswerth ist: $\frac{dQ}{T}$ wobei T d. absolute Temperatur [illegible]. Mit d. adiabatischen Curve ist aber keine Verwandlung verbunden, so dass d. Verwandlungswerth $= 0$ ist.
Ebenso verhält es sich mit jedem anderen Element d. Zustandsänderung.
D. Verwandlungswerth für eine Zustandsänderung von endlicher Größe und beliebigem Charakter ist also:

$$N = \int \frac{dQ}{T}$$



Handelt es sich nun um einen beliebigen umkehrbaren Kreisprocess, entsprechend einer beliebigen geschlossenen Zustandscurve, so kann man sich diesen Kreisprocess in eine unendliche Reihe von einfachen Kreisprocessen zerlegt denken, welche jedesmal offenbar einer Zerlegung d. von d. Zustandscurve eingeschlossenen Fläche entspricht; denkt man sich nämlich durch d. gegebene Zustandscurve unendlich viele [illegible] von einer Gruppe unendlich naher adiabatischer Curven geschnitten und durch d. [illegible] adiabatischen Curven mit d. gegebenen Zustandscurve kleine Stücke isothermischer Curven gelegt, so kann man d. gegebene Curve wieder als d. Grenzform d. unendlich gebrochenen Linienzugs betrachten, welcher in einer Zusammensetzung von adiabatischen und isothermischen Curven besteht. Die einzelnen Felder kann man als [illegible] d. Zustandscurve einfache Kreisprocesse unendlich kleinen Kreisprocessen zerlegen. Da nun für jeden dieser elementaren einfachen Kreisprocesse d. Verwandlungswerth $= \int \frac{dQ}{T}$ ist, so ist d. resultirende Verwandlungswerth eines ganzen gegebenen Kreisprocesses $N = \int \frac{dQ}{T}$, wobei aber d. Integral sich nun über d. ganzen Kreisprocess auszudehnen hat.

Haben wir für jeden einfachen umkehrbaren Kreisprocess d. Summe d. Verwandlungswerthe $= 0$ gefunden, so muss auch hier d. Verwandlungswerthsumme d. beliebigen umkehrbaren Kreisprocesses $= 0$ sein, also:

$$N = \int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Ferner war bei jedem einfachen umkehrbaren Kreisprocess d. überschüssig mitgetheilte Wärmemenge = d. Wärmewerth d. überschüssig gewonnenen Arbeit. Dasselbe muss natürlich auch hier gelten, da der allgemeine Kreisprocess aus einfachen umkehrbaren Kreisprocessen zusammengesetzt ist; für d. beliebigen umkehrbaren Kreisprocess gilt also:

$\int dQ = AE$ wobei E d. überschüssig gewonnene Arbeit bedeutet, welche ... durch d. ... unendlich kleinen Stücke und wobei A d. Wärmewerth d. Arbeitseinheit bedeutet.

Gewöhnlich ist man bestrebt ... dQ ... , so dass man ... und ... endlich ... Kreisprocess entspricht. Setzt man $\int dQ = Q$ so hat man:

$Q = AE$ wenn also Q und E d. überschüssig mitgetheilte Wärme und gewonnene Arbeit, wenn ... mitgetheilte ... Wärme, und gewonnene ... Arbeit, gleichzeitig ... sind. ... also d. beiden Fälle ... $+$ und $\div Q$ nicht ... zu unterscheiden, wenn man nur ... Q $\pm$ sein kann und ... $E \pm$ ist.

Als Zusammenfassung hat man also, dass bei jedem umkehrbaren Kreisprocesse eines Körpers die demselben überschüssig mitgetheilte Wärme = d. Wärmewerth d. überschüssig gewonnenen od. verbrauchten Arbeit und d. resultirende Werth aller ... Verwandlungen $= 0$ ist.

... bei diesen Untersuchungen ... , ... d. Verwandlungswerthe ... in allen Punkten d. Körpers ... allen Punkten d. Oberfläche ... Integral N nicht über den ganzen Körper ... . einen homogenen Körper, ... , ... d. Unterschied ... d. ... in allen Punkten ... . Bezeichnet $d\omega$ ein Element d. Oberfläche und dQ d. Wärmemenge, welche pro Flächeneinheit d. Körperoberfläche ... d. Flächenelement $d\omega$ im Zeitelement mitgetheilt wird, dann ist $dQ \cdot d\omega$ d. ... Wärmemenge ... , welche durch d. Flächenelement $d\omega$ ... d. Körper mitgetheilt wird; ist ferner t d. Temperatur an d. Stelle d. Flächenelements $d\omega$, dann ist ... d. ... Verwandlungswerth d. ... $= \frac{dQ \cdot d\omega}{T}$ wobei aber t und ... T für jeden Punkt ... sein können.

D. resultirende Verwandlungswerth ist also:

$$N = \int\int \frac{dQ \cdot d\omega}{T}$$

für einen Kreisprocess gelten aber d. vorhin gefundenen Gleichungen allgemein und ist also entsprechend auch in diesem Falle d. resultirende uncompensirte Verwandlungswerth $N = -\int \frac{d\theta}{T} = 0$.

Wenn man mit dem Kreisprocess eine resultirende Verwandlung verbunden, deren Werth positiv ist, wie also d. Verwandlungswerth positiv, so könnte man diesen positiven Werth entsprechend d. resultirende Verwandlung als einen Uebergang von Wärme von niederer zu höherer Temperatur betrachten, ohne dass derselbe unter einer Bedingung verbunden wäre; nach dem von Clausius aufgestellten Grundsatz d. Aequivalenz von Verwandlungen ist dies aber unmöglich. Ebenso kann man auch keinen negativen Werth für den resultirenden Verwandlungswerth zulassen, indem bei Umkehrung d. Kreisprocesses d. Verwandlungswerth N positiv werden würde und somit derselbe Widerspruch sich ergeben würde.
Also bei einem jeden umkehrbaren Kreisprocesse ist d. resultirende Verwandlungswerth $= 0$, selbst wenn die ursprüngliche Temperatur nicht in allen Punkten gleich ist.

Zum Schluss ist noch zu bemerken, dass d. abgeleiteten Gesetze nicht nur für einen umkehrbaren Kreisprocess gelten, sondern auch für einen Kreisprocess, welcher, ohne in jedem Augenblick umkehrbar zu sein, mit nur umkehrbaren Zustandsänderungen verbunden ist, sonst aber mit beliebiger Geschwindigkeit stattfinden kann. Die soeben genannten Gesetze gelten aber nicht mehr, wenn d. Kreisprocess mit nicht umkehrbaren Verwandlungen verbunden ist, also wenn Reibung, Temperatursprünge und unmittelbare Wärmeleitung im Innern d. Körpers vorkommen; denn ist entsprechend d. resultirende Verwandlungswerth negativ, indem die Werthe von nicht umkehrbaren Verwandlungen mit negativen Werthen begabt werden sollten und d. Summe d. (Werthe d.) umkehrbaren Verwandlungen nur immer $= 0$ ist.

Hiemit ist also d. allgemein zu im Anfang dieses Abschnittes aufgestellte Satz bewiesen, dass nämlich bei jedem Kreisprocesse d. Summe aller Verwandlungswerthe $= 0$ od. negativ ist, und zwar Null für den Grenzfall eines umkehrbaren Kreisprocesses, d. h. eines solchen, welcher in allen seinen Theilen aus umkehrbaren Zustandsänderungen besteht.

Verschiedene Formen d. Wärmegleichung.

Hauptgleichungen.

Es waren früher 3 allgemeine Gleichungen gefunden worden, nämlich d. Gleichung d. lebendigen Kraft, d. Wärmegleichung und d. Gleichung d. inneren Arbeitsvermögens. D. Aufstellung d. Gleichung d. lebendigen Kraft erfordert weiter keine Betrachtungen, indem diese direct aus d. mechanischen Wissenschaft bekannt war. Die Wärmegleichung wurde zuletzt aus unseren Untersuchungen gefunden; bezogen auf eine unendlich kleine Aenderung d. Wärmezustandes stellt sie d. folgende allgemeine Form:

$$W\,d\theta = dU + p\,dv.$$

Sie drückt d. Arbeitswerth d. Wärmemenge aus, welche d. Gewichtseinheit eines Körpers bedarf, um eine unendlich kleine Aenderung d. Wärmezustandes mitzutheilen, wenn dieser Wärmezustand hauptsächlich nur durch d. Aenderung dv d. spec. Volumens, durch d. Aenderung dU d. spec. inneren Arbeitsvermögens und wenn p d. ursprünglichen Pressung bedeutet. D. spec. innere Arbeitsvermögen U ist durch d. Wärmezustand bestimmt, als eine Function von v u. p, wenn v u. p als d. unabhängig Veränderlichen angenommen werden, welche d. Wärmezustand characterisiren. Damit man also mittels obiger Wärmegleichung etwas anfangen kann auf mathematischem Wege, muss d. abzuleitende Function U von v u. p ausdrücklich bekannt sein. Diese Bedingung lässt sich leider nicht zu Stande und auch auf empirischem Wege ist es mit großen Schwierigkeiten verbunden und kaum möglich U direct als Function von v und p auszudrücken. Aus diesem Grunde erscheint es nützlich, andere Grössen statt d. unbekannten Function einzuführen, welche ebenfalls d. Wärmezustand bestimmen, aber deren Abhängigkeit man direct aus Versuchen ableiten kann und deshalb sogar schon bekannt sind; dann wird man es gestatten, dass d. Wärmegleichungen auf andere Formen zu bringen. Schreibt dieser Umformungen kann man nun setzen:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial v} dv + \frac{\partial U}{\partial p} dp$$ nach den bekannten Regeln d.

Differentialrechnung, indem U jedenfalls eine Function von v u. p ist.

Setzt man diesen Ausdruck, welcher U als Function von v u. p charakterisirt wird, in d. Wärmegleichung, die sich auf eine unendlich kleine Zustandsänderung bezieht, so kann man die beiden Glieder mit d. Coefficienten dv in 1 Glied zusammenziehen und d. Summe:

$$\frac{\partial U}{\partial v} + p = Y$$ setzen, und weiter mit d.

partielle Ableitung von U nach p:

$$\frac{\partial U}{\partial p}$$ mit X bezeichnen.

d. Wärmegleichung hat dann d. Form: $$W dQ = Y dv + X dp$$

In dieser neuen Form d. Wärmegleichung sind natürlich X u. Y wieder Zustandsfunctionen von v u. p, diese beiden Functionen sind aber nicht unabhängig von einander, sondern sind durch eine Gleichung mit einander verbunden, wenn man nämlich den Ausdruck für Y nach p ableitet und davon abzieht d. nach v genommene Ableitung von X, so ergibt sich:

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial^2 U}{\partial v \, \partial p} + 1 - \frac{\partial^2 U}{\partial v \, \partial p} = 1$$

also $$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1$$

Diese Gleichung stellt eine allgemeine, Beziehung zwischen den zwei Zustandsfunctionen X und Y von v u. p dar, welche in d. neuen Form d. Wärmegleichung an d. Stelle von U getreten sind.

Nach **Zeuner** nennt man diese Gleichung auch d. erste Hauptgleichung d. mechanischen Wärmetheorie. Diese erste Hauptgleichung läßt schon unmittelbar erkennen, daß d. Wärmegleichung nicht ohne Weiteres integrabel ist. Solange nämlich nicht d. Gesetz bekannt sind, nach welchem d. Zustandsänderungen erfolgen, so lange also nicht d. Abhängigkeit von v u. p von einander d. folge nicht d. Charakter d. Zustandsänderung, kennt, so kann man nicht d. Wärmemenge Q bestimmen, welche d. Gewichtseinheit eines Körpers mitgetheilt werden muß um eine gegebene Zustandsänderung zu bewirken, ohne d. Gesetz zu kennen, nach welchem diese Zustandsänderung erfolgen soll, indem ihre rechte Seite kein vollständiges Differential ist, weil dann:

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 0$$ statt = 1 sein müßte.

Bekanntlich kann man nun aber eine solche Function $\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1$ mit einem gewissen Factor multipliciren, den man so wählen kann, daß d. Product ein vollständiges Differential wird und es ist bewiesen worden, daß d. reciproke Werth d. sogenannten [illegible] Temperaturfunction T für eine solche Function ein sogenannter integrirender Factor d. rechten Seite von Gl. 1. ist. Ist nämlich eine [illegible] und für einen unendlich kleinen Kreisproceß ist $\int \frac{dQ}{T} = 0$, indem d. Integral immer denselben Werth wieder bekommen muß, wenn d. Körper in seinen Anfangszustand zurückkehrt ist, somit muß auch d. Größe $W \int \frac{dQ}{T}$ wie sie sich auch im Verlaufe d. unendlich kleinen Zustandsänderung eines Körpers ändern mag, ebenfalls immer denselben Werth wieder annehmen, wenn d. Körper in seinen Anfangszustand zurückkehrt. Da ferner d. Zustand d. Körpers durch v u. p bestimmt ist, so muß $\frac{dQ}{T}$ immer ein vollständiges Differential sein von v u. p. Ist aber $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differential, so muß es sicher auch $\frac{W dQ}{T}$ sein also $\int \frac{W dQ}{T} = 0$. Es ist nun noch klar:

$$W dQ = Y dv + X dp$$

und durch Multiplication mit $\frac{1}{\vartheta}$:
$$\frac{W\,dQ}{\vartheta} = \frac{Y}{\vartheta}\,dv + \frac{X}{\vartheta}\,dp$$
wodurch d. Gleichung integrabel ist. Hierzu ist noch zu bemerken, daß d. Ableitung von $\frac{Y}{\vartheta}$ ebenso nach v genommen ist wie X von $\frac{X}{\vartheta}$ nach p, so daß also sein muß:
$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Y}{\vartheta}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X}{\vartheta}\right)$$
od. wenn man d. Differentiation ausführt:
$$\left(\vartheta\frac{\partial Y}{\partial p} - Y\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\right)\frac{1}{\vartheta^2} = \left(\vartheta\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)\frac{1}{\vartheta^2}$$
od.
$$\vartheta\frac{\partial Y}{\partial p} - Y\frac{\partial\vartheta}{\partial p} = \vartheta\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial\vartheta}{\partial v}$$
od.
$$\vartheta\left(\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v}\right) = Y\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial p} - X\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)$$
Nach d. ersten Hauptgleichung war nun: $\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1$

Also:
$$\vartheta = Y\frac{\partial\vartheta}{\partial p} - X\frac{\partial\vartheta}{\partial v}$$
diese Gleichung soll nach Zeuner d. 2te Hauptgleichung genannt werden, sie ist ein besonderer Ausdruck d. Princips d. Aequivalenz d. Verwandlungen, während d. erste Hauptgleichung eine unmittelbare Folge d. Aequivalenz von Wärme und Arbeit ist.

Man kann diese Gleichung nun auch verschiedenartig umgestalten. Wenn man in d. Gleichung $W\,dQ = Y\,dv + X\,dp$ den Ausdruck für Y, den sich aus d. 2ten Hauptgleichung ergibt, substituirt, so findet sich:
$$W\,dQ = \frac{X\frac{\partial\vartheta}{\partial v} + \vartheta}{\frac{\partial\vartheta}{\partial p}}\,dv + X\,dp = \frac{X\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}dv + \frac{\partial\vartheta}{\partial p}dp\right) + \vartheta\,dv}{\frac{\partial\vartheta}{\partial p}}$$

Da nun ϑ eine Function von t und t wiederum eine Function von v und p ist, so muß auch ϑ eine Function von v und p sein, so daß d. Ausdruck auf d. rechten Seite in d. Klammer ein vollständiges Differential ist, partiell nach v u. p genommen von ϑ, also ist:
$$\frac{\partial\vartheta}{\partial v}dv + \frac{\partial\vartheta}{\partial p}dp = d\vartheta$$
und folglich:
$$W\,dQ = \frac{X.\,d\vartheta + \vartheta\,dv}{\frac{\partial\vartheta}{\partial p}}$$

Setzt man ebenso in d. ersten Hauptgleichung d. Werth für X ein, d. sich aus d. 2ten Hauptgleichung ergibt, so findet sich:
$$W\,dQ = Y\,dv + \frac{Y\frac{\partial\vartheta}{\partial p} - \vartheta}{\frac{\partial\vartheta}{\partial v}}.\,dp = \frac{Y\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial p}dp + \frac{\partial\vartheta}{\partial v}dv\right) - \vartheta\,dp}{\frac{\partial\vartheta}{\partial v}}$$

Da nun auch $\frac{\partial\vartheta}{\partial p}dp + \frac{\partial\vartheta}{\partial v}dv$ das vollständige Differential von ϑ ist, da ϑ eine Function von v u. p $= d\vartheta$, so muß auch sein

$$W\,dQ = \frac{Y\,d\tau - \tau\,dp}{\frac{d\tau}{dp}}$$

Es haben sich also somit drei verschiedene Formen der Wärmegleichung ergeben, nämlich:

I. $$W\,dQ = Y\,dv + X\,dp$$

II. $$W\,dQ = \frac{X\,d\tau + \tau\,dv}{\frac{d\tau}{dp}}$$

III. $$W\,dQ = \frac{Y\,d\tau - \tau\,dp}{\frac{d\tau}{dv}}$$

In d. ersten dieser Gleichungen sind X und Y Functionen von v u. p, und durch die erste Hauptgleichung

IV. $$1 = \frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv}$$ gegebenen Beziehung zu einander stehen und übrigens von d. Natur und Aggregatzustand d. Körpers abhängen. Diese Gleichung entspricht dem Fall, daß d. unendlich kl. Zustandsänderung, für welche d. Wärmemenge dQ bestimmt werden soll, unmittelbar durch v und p bestimmt ist; die 2te und dritte Gleichung entsprechen dem Fall, daß d. Zustandsänderung durch d. Pressung p und d. Temperatur t bestimmt ist. In d. 2ten und 3ten Gleichung kommen außer X und Y noch d. Größe τ vor. Sie ist unmittelbar eine unter allen Umständen gleiche Temperaturfunction und dadurch mittelbar eine Function von d. Pressung und Aggregatform und d. von ihnen abhängigen Größen v u. p. Sie steht einerseits mit X und Y in Beziehung, gemäß d. 2ten Hauptgleichung:

V. $$\tau = Y\frac{d\tau}{dp} - X\frac{d\tau}{dv}$$

Wäre τ als Function d. Temperatur t bekannt, desgleichen t als Function von v u. p (durch d. Zustandsgleichung im Falle eines bestimmten Körpers) so könnten d. Gleichungen IV und V zur Bestimmung von X und Y dienen, es auch zur Lösung d. Gleichung d. einen Arbeitsbetrag Namen ermittelst d. Differentialgleichungen:

VI. $$\frac{dU}{dv} = Y - p \quad \text{und} \quad \frac{dU}{dp} = X.$$

Es sollen jetzt d. Gleichungen I bis V schon jetzt umgeformt werden durch Einführung 2 anderer Größen von einfacher physikalischer Bedeutung statt X und Y, wenn auch diese Bedeutung erst später nach Bestimmung d. Temperaturfunction τ vollständig hervortreten wird; diese Größen stehen mit d. spez. Wärme in Zusammenhang.
Der Differentialquotient $\frac{dQ}{d\tau}$, unter d. Voraussetzung daß v constant also $dv = 0$ sei, werde bezeichnet mit c_v und $\frac{dQ}{d\tau}$ mit d. Voraussetzung, daß d. Pressung p constant also $dp = 0$ sei, werde mit c_p bezeichnet. Offenbar stehen d. eingeführten Größen c_v und c_p in einfacher Beziehung zu d. sogenannten spez. Wärme. Unter d. spez. Wärme eines Körpers für einen gewissen gleichförmigen Wärmezustand und eine gewisse Änderungsweise desselben versteht man nämlich d. Verhältniß d. Wärme, welche an d. Gewichtseinheit d. Körpers behufs einer unendlich kleinen gewissem Gesetze folgenden Änderung d. seitherigen Wärmezustandes mitzutheilen ist, zu d. entsprechenden Temperaturzunahme, also den Differentialquotienten:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}.$$

dieser Quotient wird, wenn ich bezeichnen C d. spez. Wärme für constantes Volumen und C_1 d. spez. Wärme für constanten Druck bedeutet:

$$C = C_v \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \text{ und } C_1 = C_p \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$$

indem für den ersten Fall $C = \frac{dQ}{dt}$ entsprechend $dv = 0$ ist, dessen Werth aber ist $= \frac{dQ}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ und da $\frac{dQ}{d\vartheta} = C_v$, so hat man für C den angegebenen Werth. Im zweiten Falle ist:

$$C_1 = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = C_p \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \text{ entsprechend } dp = 0.$$

Sobald also nun ϑ näher bestimmt ist, werden d. neu eingeführten Größen eine bestimmte Bedeutung haben. Man kann hierbei bemerken, daß es sich in d. Folge zeigen wird, wie ϑ eine lineare Function von t ist, so daß d. Ableitung von ϑ nach t eine Constante ist. Die Größen C_v und C_p, die im Allgemeinen auch als Functionen von v und p zu betrachten sind, sollen nun für d. Gleichungen, wo schon vorerst für X und Y eingeführt werden, zu dem Zweck müssen nun erst X und Y durch C_v und C_p ausgedrückt werden.

Wenn man in Gleichung II d. Voraussetzung $dv = 0$ macht, also d. Glied ... dv streicht, und dann d. Gleichung durch $W \cdot d\vartheta$ dividirt, so hat man links den Quotienten $\frac{dQ}{d\vartheta}$, welcher entsprechend d. Voraussetzung $dv = 0$, $= C_v$ sein muß; somit hat man also:

$$C_v = \frac{X}{W \frac{d\vartheta}{dp}} \text{ od. } X = W C_v \frac{d\vartheta}{dp} \qquad \text{VII}$$

Setzt man in Gleichung III d. Voraussetzung $p =$ einer Constanten also $dp = 0$ so daß d. dp wegfällt, so bekommt man, wenn mit $W \cdot d\vartheta$ dividirt wird:

$$C_p = \frac{Y}{W \frac{d\vartheta}{dv}} \text{ od. } Y = W C_p \frac{d\vartheta}{dv} \qquad \text{VII}$$

diese Ausdrücke sind nun in d. Gleichungen einzuführen, wobei zu bemerken ist, daß $A = \frac{1}{W}$ und folglich $AW = 1$ ist gemäß den früheren Bezeichnungen. Die Gleichung I wird nun mit A multiplicirt (um d. Wärme nach d. Arbeitseinheit auszudrücken) und man bekommt dann mit $AW = 1$:

$$dQ = C_p \frac{d\vartheta}{dv} dv + C_v \frac{d\vartheta}{dp} dp \qquad \text{VIII}$$

Multiplicirt man Gleichung II mit A und setzt d. Werthe für X und Y ein, so bekommt man:

$$dQ = C_v\, d\vartheta + \frac{A\vartheta}{\frac{d\vartheta}{dp}} dv \qquad \text{IX}$$

Aus Gleichung III findet man in derselben Weise:

$$dQ = C_p\, d\vartheta - \frac{A\vartheta}{\frac{d\vartheta}{dv}} dp \qquad \text{X}$$

Ferner ergiebt sich mit Hilfe derselben Manipulation aus d. ersten Hauptgleichung: $\frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv} = 1$:

$$A = \frac{d}{dp}\left(C_p \frac{d\vartheta}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(C_v \frac{d\vartheta}{dp}\right) \qquad \text{XI}$$

und aus d. 2ten Hauptgleichung:

$$A\vartheta = C_p \frac{d\vartheta}{dv} \cdot \frac{d\vartheta}{dp} - C_v \frac{d\vartheta}{dp} \cdot \frac{d\vartheta}{dv} = (C_p - C_v) \frac{d\vartheta}{dp} \cdot \frac{d\vartheta}{dv} \qquad \text{XII}$$

In dieser Form werden die allgemeinen Gleichungen am meisten angewendet.

[illegible] hatten wir nun das Volumen v und den Druck p als unabhängige Veränderliche zur Charakterisierung des Körperzustandes gebraucht, dementsprechend kamen auch in den allgemeinen Gleichungen die Differentialquotienten $\frac{d\vartheta}{dv}$ und $\frac{d\vartheta}{dp}$ vor. Man kann jedoch auch verschiedene andere Größen zur Charakterisierung des Körperzustandes wählen; unter den in dieser Hinsicht möglichen verschiedenen Fällen sind besonders 2 bemerkenswerth, nämlich wenn eine der Größen v und p und die Temperatur t, oder was dasselbe ist die Temperaturfunction ϑ als unabhängige Veränderliche angenommen werden, also wenn v und ϑ und p und ϑ zu dieser Charakterisierung des Körperzustandes [illegible]. Darauf [illegible] statt der unabhängigen Veränderlichen v und p auch v und ϑ oder p und ϑ auftreten, würden natürlich auch für die obigen Differentialquotienten $\frac{d\vartheta}{dv}$ und $\frac{d\vartheta}{dp}$ andere einzuführen sein und zwar erhalten

wenn man v und ϑ wählt: $\frac{dp}{dv}$ und $\frac{dp}{d\vartheta}$ } für $\frac{d\vartheta}{dv}$ und $\frac{d\vartheta}{dp}$ in den allgemeinen Gleichungen.

" " p und ϑ " : $\frac{dv}{dp}$ und $\frac{dv}{d\vartheta}$

Um dies jedoch durchführen zu können muss man die Beziehungen zwischen diesen 6 Differentialquotienten kennen, um durch je 2 derselben, welche sich auf eine der unabhängigen Veränderlichen v, p, v, ϑ, oder p, ϑ beziehen, die 4 übrigen ausdrücken zu können. Es sind nämlich 4 Relationen zwischen diesen 6 Differentialquotienten vorhanden, welche sich wie folgt aufstellen lassen.

Zunächst ist ersichtlich, dass von diesen 6 Differentialquotienten immer 2 zu 2 reciprok sind, nach allgemeinen Grundsätzen ist bekannt, dass wenn von einer der Größen v p ϑ als [illegible] [illegible], von den übrigen jede durch die andere allein bestimmt ist. Es sind die 6 Differentialquotienten [illegible] reciprok, nämlich diejenigen, welche dieselben Größen v p ϑ als constant voraussetzen. Diese [illegible] geben schon 3 Relationen, nämlich:

$$\text{XIII}\left\{\begin{aligned} &\frac{dp}{d\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dp} = 1 \\ &\frac{dv}{dp}\cdot\frac{dp}{dv} = 1 \\ &\frac{d\vartheta}{dv}\cdot\frac{dv}{d\vartheta} = 1 \end{aligned}\right.$$

Die noch mangelnde 4te Beziehung gewinnen wir auf folgendem Wege; welche Beziehung offenbar jetzt nur noch eine Relation zwischen den Differentialquotienten

$\frac{dp}{d\vartheta}$, $\frac{d\vartheta}{dv}$, $\frac{dv}{dp}$ und $\frac{d\vartheta}{dp}$, $\frac{dv}{d\vartheta}$, $\frac{dp}{dv}$ zu sein braucht, um durch 2 der 6 Differentialquotienten die übrigen 4 auszudrücken.

Angenommen man betrachtet nun zunächst ϑ als Function von v und p, so ist, da v und p die unabhängigen Veränderlichen sind, natürlich nach der Differentiation:

$$d\vartheta = \frac{d\vartheta}{dv}dv + \frac{d\vartheta}{dp}dp.$$

Setzen wir nun ϑ als constant voraus, also $d\vartheta = 0$, so wird natürlich v eine Function von p und umgekehrt p eine Function von v, also:

$dv = \frac{dv}{dp}dp$ und [illegible] dies in die obige Differentialgleichung mit $d\vartheta = 0$ und dividiren mit dp:

$$0 = \frac{d\vartheta}{dv}\frac{dv}{dp} + \frac{d\vartheta}{dp}.$$

Wenn man nun diese Gleichung durch den Differentialquotienten von ϑ nach p $\frac{d\vartheta}{dp}$ dividirt, so [illegible] [illegible], [illegible] man mit dem Differentialquotienten von p nach $\vartheta = \frac{dp}{d\vartheta}$ multiplicirt, [illegible] folgt:

$$0 = \frac{dp}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dv}\cdot\frac{dv}{dp} + 1$$

od: $$\frac{dp}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dv}\cdot\frac{dv}{dp} = -1 \qquad\text{XIV}$$

Mit dieser Gleichung hat man nun auch d. 4. Relation gefunden; nach Gleichung XIII, wird nämlich der negative Werth auch = d. negativen Werthe −1 sein, welcher aber auch = −1 ist, so kommen wir auf:

$$\frac{d\sigma}{dp}\cdot\frac{dv}{d\sigma}\cdot\frac{dp}{dv} = -1$$

Diese 4 Beziehungen (XIII u. XIV) zeigen nun allerdings nur, daß je 2 v. 6 partiellen Differentialquotienten, welche sich auf 2 unabhängige Variabeln v – p, v u. σ oder p – σ beziehen, d. übrigen 4 ausdrücken zu können, und welche also auch in die Gleichungen entsprechend einzuführen, wenn man entweder v u. p, entweder v u. σ oder p u. σ als die den Wärmezustand charakterisirenden unabhängigen Variabeln annimmt.

Zur Bestimmung d. Wärme dQ, welche d. Gewichtseinheit eines Körpers behufs einer unendlich kleinen willkürlichen Zustandsänderung mitzutheilen ist, haben wir 3 verschiedene Gleichungsformen gefunden (I II III und VIII IX X). Werden nun v u. p als unabhängige Variable zur Bestimmung d. Wärmezustandes angenommen, so ist zum Zweck d. Ausdruckes d. fraglichen Wärme dQ d. Gleichung I und VIII am vortheilhaftesten. Werden aber v und σ zur Charakterisirung d. Wärmezustandes zu Grunde gelegt, so sind zur Bestimmung von dQ die beiden Gleichungen II und IX am besten zu verwenden, nur müssen dann d. entsprechenden Beziehungen d. partiellen Differentialquotienten angenommen werden, so ist d. entsprechende Gleichungen nach d. Form haben mit Rücksicht auf Beziehungen XIII:

$$W\,dQ = \frac{dp}{d\sigma}\left(X\,d\sigma + \sigma\,dv\right)$$

$$dQ = c_v\,d\sigma + A\sigma\frac{dp}{d\sigma}\,dv$$

Werden endlich p und σ als unabhängige Variable zur Charakterisirung d. Wärmezustandes zu Grunde gelegt, so werden am vortheilhaftesten d. Gleichungen III und X zur Bestimmung d. Wärme benutzt, nachdem auch hier entsprechenden Relationen d. partiellen Differentialquotienten, mit Rücksicht auf Beziehungen XIII sind dann also d. Gleichungen III und X zu schreiben:

$$W\,dQ = \frac{dv}{d\sigma}\left(Y\,d\sigma - \sigma\,dp\right)$$

$$dQ = c_p\,d\sigma - A\sigma\frac{dv}{d\sigma}\,dp.$$

In ähnlicher Weise werden auch d. beiden Hauptgleichungen XI und XII für d. verschiedenen Fälle Umformungen erleiden müssen.

Bemerkenswerth in dieser Hinsicht ist d. Umgestaltung d. 2ten Hauptgleichung XII, wenn man p und σ als unabhängige Variable annimmt zur Charakterisirung d. Wärmezustandes. In Gleichung XII hat man dann entweder σ als Function von p u. v, v als Function von p und σ zu betrachten und also ersetzt d. partiellen ~~Abl.~~ Ableitungen von σ nach p u. v d. partiellen Ableitungen von v nach p und σ zu ersetzen, was gemäß d. vorhin erwähnten Beziehungen (XIII u. XIV) zwischen d. fraglichen 6 Differentialquotienten [illegible]. Man bekommt dann aus Gleichung XII:

$$c_p - c_v = A\sigma\frac{dv}{d\sigma}\cdot\frac{dp}{d\sigma}.$$

Hierin ist nämlich $\frac{dv}{d\sigma}$ eine Ableitung, wie sie leicht gefunden werden kann, während $\frac{dp}{d\sigma}$ eigentlich auch als Function von v ausgedrückt werden müsste, dies geschieht mit Hülfe d. 4ten Relation XIV, welche nämlich ergiebt während mit Rücksicht auf Gleichung XIV:

$$\frac{dp}{d\vartheta} = -\frac{\frac{dv}{d\vartheta}}{\frac{dv}{dp}}$$

dieser Werth eingesetzt, so bekommt man d. 2. Hauptgleichung in folgender Form:

$$c_p - c_v = A\vartheta \frac{\left(\frac{dv}{d\vartheta}\right)^2}{-\frac{dv}{dp}}$$

[illegible] zunächst ist daraus ersichtlich, daß c_p immer $>$ c_v ist, [illegible] $\frac{dv}{d\vartheta}$ [illegible] $\frac{dv}{dp}$ [illegible] $(dt = d\vartheta = 0)$ [illegible] $\frac{dv}{dp}$ [illegible] $-\frac{dv}{dp}$ [illegible] $c_p > c_v$ sein.

[illegible]

[illegible]

Die geometrische Darstellung d. Vorgänge bei umkehrbaren Zustandsänderungen

[illegible]

[illegible] 1 kg [illegible] $a_1\ a_2$ [illegible] a_1 d. Anfangszustand und a_2 d. Endzustand d. Zustandsänderung [illegible]

Im Anfangszustand seien $v_1\ p_1\ t_1\ \vartheta_1\ U_1$ und im Endzustand $v_2\ p_2\ t_2\ \vartheta_2\ U_2$ d. resp. Werthe von $v\ p\ t\ \vartheta$ und U. v_1 und v_2 sind in d. Figur [illegible] dargestellt durch d. Abscisse Ob_1 resp. Ob_2 und p_1 und p_2 dargestellt durch d. Ordinaten a_1b_1 resp. a_2b_2.

Für eine unendlich kleine umkehrbare Zustandsänderung gilt nun d. Wärmegleichung:

$$W\,dQ = dU + p\,dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{I}$$

welche Gleichung d. Zunahme d. Arbeitswerthes d. Wärme ausdrückt, welche d. Körper bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung aufgenommen hat. Durch Integration erhält man hieraus:

$$WQ = U_2 - U_1 + \int p\,dv$$

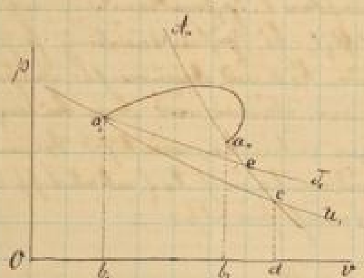
u. wenn man mit E die vom Körper während d. Zustandsänderung verrichtete Arbeit bezeichnet, also $E = \int p\,dv$:

$$WQ = U_2 - U_1 + E,$$ wenn Q d. dem Körper mitgetheilte Wärme bedeutet. Die in dieser Formel vorkommende Expansionsarbeit E wird bekanntlich durch d. von d. Zustandscurve $a_1 a_2$, von d. Abscissenaxe Ov und den beiden Ordinaten $p_1 p_2$ eingeschlossenen Fläche graphisch dargestellt, also kann man setzen:

$$E = b_1 a_1 a_2 b_2$$

Es fragt sich nun noch, wie man d. übrigen Bezüge, nämlich Änderung d. inneren Arbeitsvermögens, d. mitgetheilte Wärme Q und den Verwandlungsinhalt N graphisch zur Anschauung bringen kann.

Um d. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens also $U_2 - U_1$ zur Darstellung zu bringen, zieht man durch den Anfangspunkt a_1 d. isodynamische Curve U_1, welche also eine Zustandsänderung darstellt, bei d. d. Körper vom Anfangszustand a_1 an einer umkehrbaren Zustandsänderung bei constantem innerem Arbeitsvermögen U_1 (constanter Energie) unterworfen wird; ferner legt man zu dem Endpunkt d. Endzustand a_2 eine adiabatische Curve A_2 als eine Zustandscurve, welche ferner d. Gesetz d. Zustandsänderung darstellt, wenn vom Endzustand a_2 ausgehend d. Änderung fortgesetzt wird ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme. Denkt man sich nun d. Änderung nach d. adiabatischen Curve A_2 vom Endzustand ausgehend fortgesetzt bis zum Zustand, welcher d. Schnittpunkt c d. adiabatischen Curve mit d. isodynamischen Curve U_1 entspricht, so kann man natürlich d. obige allgemeine Wärmegleichung I auf diese umkehrbare Zustandsänderung anwenden, wobei jedoch entsprechend d. Charakter d. Zustandsänderung nach einer adiabatischen Curve $dQ = 0$ zu setzen ist, also auch d. Arbeitswerth d. mitgetheilten Wärme $WQ = 0$ zu setzen ist. Dieser Werth [illegible] nach Oben gleich sein d. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens + d. bei d. Zustandsänderung gewonnenen Arbeit. D. Arbeitsvermögen im Anfangszustand a_2 d. Änderung nach d. adiabatischen Curve A_2 ist voraussetzungsgemäß $= U_2$ und d. Arbeitsvermögen im Endzustand $c = U_1$, da c ein Punkt d. isodynamischen Curve U_1 ist, d. Änderung d. Arbeitsvermögens also $= U_2 - U_1$ für d. vorliegende Zustandsänderung; d. gewonnene Arbeit ist aber veranschaulicht durch d. Fläche $b_2 a_2 c d$, so erhält man d. Gleichung folg.:



$$U_2 - U_1 + b_2 a_2 c d = 0$$

Also $U_2 - U_1 = b_2 a_2 c d$ = Änderung d. inneren Arbeitsvermögens.

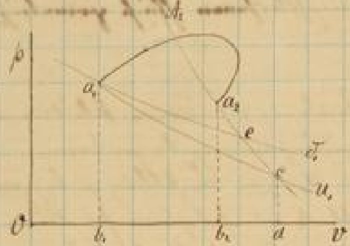
Mit Hilfe dieser Darstellung und d. obigen Gleichung: $WQ = U_2 - U_1 + E$ hat man also, weil nach Oben $E = b_1 a_1 a_2 \cancel{b_2}$:

Arbeitswerth d. mitgetheilten Wärme Q: $WQ = b_2 a_2 c d + b_1 a_1 a_2 b_2 = b_1 a_1 a_2 c d$

D. Arbeitswerth d. während d. Zustandsänderung nach d. gegebenen Zustandscurve $a_1 a_2$ dem Körper mitgetheilten Wärme Q ist also = d. Inhalt d. Fläche, welche begrenzt wird 1) von d. v Axe, 2) von d. Zustandscurve $a_1 a_2$ und d. durch d. Endpunkt a_2 derselben gehenden adiabatischen Curve A_2, 3) von d. Ordinate d. Punktes c, in welchem d. adiabatische Curve A_2 von d. durch d. Anfangspunkt a_1 gehenden isodynamischen Curve U_1 geschnitten wird und 4) von d. Ordinate d. Punktes Anfangspunktes a_1.

Diese Fläche wird durch d. Ordinate d. Endpunktes a_2 d. Zustandscurve in 2 Theile getheilt, von welchen d. eine, begrenzt von d. Zustandscurve $a_1 a_2$ = d. äußeren Arbeit L, d. andere, begrenzt von d. adiabatischen Curve A_2 = $U_2 - U_1$ = d. Zunahme d. inneren Arbeitsvermögens in Folge d. Zustandsänderung ist. Dabei sind die Inhalte dieser Flächen positiv od. negativ zu setzen, je nachdem sie von einem [illegible] Ordinate beschrieben gedacht werden, welche zur Erzeugung d. Flächen = L und = WQ von d. Ordinate d. Anfangspunktes a_1 und zur Erzeugung d. Fläche = $U_2 - U_1$ von d. Ordinate d. Endpunktes a_2 d. Zustandscurve ausgeht, diese Ordinate positiven od. negativen Flächeninhalt beschreibt, je nachdem sie sich im Uhrzeigersinne od. umgekehrt bewegt.

Will man nun auch noch d. Verwandlungswerth $N = \int \frac{dQ}{T}$, welcher d. Zustandsänderung nach d. Zustandscurve $a_1 a_2$ entspricht, auf eine geometrische Darstellung zurückführen, so gelingt ~~[illegible]~~ [illegible] U_1 [illegible] d. Curve [illegible] eine isothermische Curve ~~[illegible] Anfangspunkt a_1~~ gezogen, welche d. adiabatische Curve A_2 in c trifft. Denn man kann sich vorstellen, wenn d. Körper von 1 kg nach isothermischer Curve d. [illegible] bei constanter Temperatur T_1 seinen Zustand ändert, müssen, entsprechend d. Stücke d. Änderung nach einer isothermischen Curve, eine gewisse Wärmemenge Q_1 mitgetheilt werden, und so muß diese Wärmemenge Q_1 natürlich diejenige sein, welche d. Körper bei d. umgekehrten Zustandsänderung nach $c a_1$ abgegeben werden muß.



Nimmt man nun an, daß nachdem d. Zustandsänderung nach d. Zustandscurve $a_1 a_2$ beendigt ist, die Zustandsänderung fortgesetzt wird nach d. adiabatischen Curve $A_2 c$ und dann nach d. isothermischen Curve $c a_1$, also fortgesetzt wird [illegible] Mittheilung von Wärme und dann bei constanter Temperatur T_1 = Anfangstemperatur, so sind dabei 2 Verwandlungen entstanden, nämlich d. Verwandlung d. Wärme von d. Temperatur T_1 in solche von T_2 und dann umgekehrt zurück von T_2 auf T_1 (adiabatische Curve $A_2 c$) d. bei d. Zustandsänderung $a_1 a_2 c a_1$ entsprechenden Verwandlungswerthe sind also:

$$N = \int \frac{dQ}{T} \quad \text{und} \quad N_1 = -\frac{Q_1}{T_1}$$

[illegible] d. Zustandsänderung nach d. isothermischen Curve $c a_1$ d. Temperatur constant = T_1 ist, so kann man d. Verwandlungswerth schreiben:

$$N_1 = \frac{1}{T_1} \int dQ = -\frac{Q_1}{T_1}$$ wobei Q_1 nun d. dem Körper während d. ganzen Änderung nach $c a_1$ entzogene Wärmemenge vorstellt.

Natürlich, da nun die Zustandsänderung $a_1 a_2$ fortgesetzt gedacht ist nach $a_2 c a_1$, ist dieselbe zu einem umkehrbaren Kreisprocess $a_1 a_2 c a_1$ geworden, dessen Verwandlungswerth natürlich = d. Summe beider also = $N + N_1 = \int \frac{dQ}{T} - \frac{Q_1}{T_1}$ ist.

Bekanntlich ist aber für jeden umkehrbaren Kreisprocess d. Summe d. Verwandlungswerthe od. d. entstehende Verwandlungswerth = 0, also:

$$N - \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

$$\text{od.} \quad N = \frac{Q_1}{T_1}$$

d. Arbeitswerth d. Wärme Q_1 = $WQ_1 = WNT_1$ kann aber auch durch dasjenige von $Q = WQ$ mit Hilfe von 2 Curven, eine durch d. Anfangspunkt gehende isodynamische und eine durch d. Endpunkt gehende adiabatische Curve, durch eine Fläche dargestellt werden. [illegible] die beiden fraglichen Curven schon gezogen sind = U_1 und A_2, so ist nach dem vorhin entsprechenden Satz d. Arbeitswerth d. Wärme Q_1:

$$WQ_1 = WNT_1 = \text{Fläche } b_1 a_1 c d$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Verhalten d. Gase, insbesondere d. atmosphärischen Luft.

[illegible]

[illegible]