Wärmetheorie & Hydraulik

Pieper, Andreas

Karlruhe, 1872/73

Angewandte Hydraulik & mechanische Wärmetheorie

Angewandte Hydraulik
&
mechanische Wärmetheorie.

nach Vorträgen von Prof. Dr. Grashof, Karlsruhe.

A. Pieper.

Da d. Hydraulik und mechanische Wärmetheorie sich eng bedingen, wie im späteren Verlaufe d. Betrachtungen zu ersehen sein wird, so seien zunächst d. Hauptsätze d. mechanischen Wärmetheorie entwickelt, indem manche Erscheinungen in d. Hydraulik von d. Wärme beeinflusst werden.

Das Wesen d. Wärmetheorie beruht nun ganz auf d. Annahme einer atomistischen Constitution d. Materie d. h. sie beruht darauf, dass angenommen wird, dass d. Materie zusammengesetzt sei aus sehr kl. discreten materiellen Elementen, welche in kl. Entfernungen von einander getrennt sind, also immer Raum zwischen einander befindet.

Anfänglich soll jedoch von dieser Annahme abstrahirt werden, indem noch nicht bei dem heutigen Stand d. Wissenschaften d. Zusammenhang dieser Theilchen vollkommen genug entwickelt ist, um mathematische Betrachtungen mit Hülfe d. höheren Analysis in d. Betrachtungen hineinziehen zu können, da bekanntlich d. mathematischen Untersuchungen mit Hülfe d. höheren Analysis wesentlich darauf beruhen, dass eine Zerlegung d. Körpers in unendlich kleine, aber immer noch materielle Theile überhaupt denkbar ist. Das letztere ist aber bei d. Annahme einer atomistischen Constitution d. Materie unmöglich, denn würde man diese Zerlegung in unendlich kl. Theile vornehmen, so würden diese Theile zum Theil Materie, theils halb Materie halb leerer Raum und theils nur leerer Raum sein. Aus diesem Grunde sei daher von d. obigen Annahme vorerst abstrahirt, zumal da ohne diese Abstraction auch schon von vornherein eine strenge Definition d. Oberfläche und d. Volumens d. Körpers recht schwierig würde.

Unter Voraussetzung dieser Abstraction ist nun d. Zustand eines Körpers bestimmt durch d. augenblicklichen Zustand d. unendlich kl. Elemente, aus denen d. Körper bestehend gedacht werden kann. In Hinsicht d. Körperelemente wird man nun in d. Folge 2 verschiedene Arten Elemente anzunehmen haben:

Wird d. Körperelement betrachtet als d. Inbegriff ganz bestimmter immer dieselbe bleibender Materie, so soll d. Element ein **Massenelement** genannt werden.

Bei gewissen anderen Untersuchungen muss man sich aber auch d. Körper in verschiedenen Zuständen in Elemente zerlegt denken, so dass ein Element immer verschiedene Materie enthält. Solche Elemente sollen **Volumenelemente** heißen. Diese Volumenelemente können unbedingt unter Umständen genau dieselbe Größe und Gestalt haben während d. Massenelemente durchaus als veränderlich gedacht werden müssen sowohl in Bezug auf Größe als auch Gestalt.

Wenn nun in d. Lehre von Zustandsänderung eines Körpers die Rede ist, so ist diese allgemein bestimmt durch d. Anfangs- und Endzustand d. Körpers, während d. Art und Weise d. Vorganges d. Änderung unendlich verschiedener Art sein kann, indem dieselbe sich unter verschiedenen Gesetzen ~~vollziehet~~ vollziehen kann. Diese Veränderungsgesetze sind aber bestimmt durch d. Zustände eines Körpers, welche in Zwischenmomenten stattfinden, die um unendlich kl. Zeiträume auseinander stehen.

Zunächst kann man nun d. Zustandsänderungen betrachten als d. Wirkungen von Ursachen so mannigfach verschiedener Art als man verschiedene Erscheinungszustände wahrnimmt. Diese Erscheinungszustände können aber auch wiederum d. Art sein, daß 2 derselben wieder in d. Beziehung von Ursachen und Wirkungen zu einander stehen, und daß 2 solche selbst wieder als Wirkungen einer und derselben dritten Ursache erkannt werden. Auf d. Zusammenhang und Unterscheidung von Wirkungen und Ursachen ist nun besonders d. Naturwissenschaft gerichtet und es kommt im Grenzgebiet d. Naturwissenschaften darauf an, diejenigen welche Zustandserscheinungen als d. Wirkungen möglichst weniger Ursachen zurückzuführen.

In Bezug auf d. Zustandes eines Körpers unterscheidet man nun einen äußeren und einen inneren Zustand; unter äußerem Zustand eines Körpers soll derjenige verstanden werden, welcher d. Zustand seiner Ruhe od. Bewegung angibt, und zwar derjenigen Bewegung, welche auf d. Massenpunkt zurückgeführt und betrachtet werden kann als eine sichtbare unmittelbare Ortsveränderung d. Massenelemente. Von dieser Bewegung ist nämlich noch eine andere zu unterscheiden, welche nicht als sichtbar betrachtet werden kann, nämlich d. sogenannte innere Molekularbewegung d. Körpers.

Bezüglich d. Änderung d. äußeren Zustandes eines Körpers ~~kann~~ gibt d. analytische Mechanik vollständigen Aufschluß, jedoch seien hier d. Grundsätze derselben aufgesucht.

Der Bewegungszustand eines Körpers in einem Augenblick ist bestimmt durch d. Richtung und Größe d. Geschwindigkeiten seiner Massenelemente od. seiner materiellen Punkte, unter materiellen Punkt d. in einen Schwerpunkt vereinigt gedachte Masse d. Massenelements verstanden. Damit ist auch zugleich d. Größe d. lebendigen Kraft d. Körpers bestimmt, indem d. lebendige Kraft eines in Bewegung befindlichen Körpers = ist der halben Summe d. Producte aus den Massen d. materiellen Punkte in den Quadrate ihrer Geschwindigkeiten (früher wurde d. lebendige Kraft allgemein als d. ganze Summe d. Producte aus Masse und Geschwindigkeitsquadrate hingestellt; gegenwärtig kommt man jedoch immer mehr auf d. erstere zurück, indem sich dadurch manches einfacher gestaltet.) Wenn daher alle augenblicklichen Geschwindigkeiten d. Massenelemente = 0 sind, so ist auch d. lebendige Kraft d. Körpers = 0, und umgekehrt, wenn d. lebendige Kraft d. Körpers = 0 so sind auch alle Geschwindigkeiten d. Massenelemente einzeln = 0. Für den letzteren Fall, wenn d. augenblicklichen Geschwindigkeiten d. materiellen Punkte = 0 sind, so befindet sich d. Körper im Ruhezustand.

Bekanntlich kann d. Bewegung eines Körpers in mannigfach verschiedener Weise betrachtet werden, als bestehend aus d. relativen Bewegung gegen ein im Körper festes Axensystem und aus d. Bewegung dieses Axensystems gegen ein anderes festes Gebilde. Die letztere Bewegung, nämlich d. Bewegung d. im Körper fixierten Axensystems = Bewegung eines starren Körpers, kann wiederum betrachtet werden in jedem Augenblick als eine unendlich kl. Schraubenbewegung, welche auf unendlich verschiedene Weise zerlegt werden kann in eine Rotation um eine Momentanaxe und eine unendlich kl. Translation entsprechend einer Richtung. Wie man aber auch d. Zerlegung vornehmen mag immer ist bekanntlich d. Rotation und Axenrichtung, Winkelgeschwindigkeit u. Usw

die wirkliche während derjenigen d. Translation mit d. gewählten festzuhaltenden Rotationsachse sich nach Größe und Richtung ändert. Hinsichtlich d. Bestimmung eines Achsensystems an einem Körper sei noch hinzugefügt, daß es genügend ist das Achsensystem OX OY OZ so anzunehmen, daß d. Ursprung O beständig in demselben materiellen Punkte A liegen bleibt, daß eine d. Axen z. B. OX durch einen 2ten, immer denselben bleibenden materiellen Punkt B geht und daß endlich eine d. Coordinatenebenen z. B. XOY durch einen dritten materiellen Punkt geht. Offenbar ist durch d. bekannte relative Bewegung d. materiellen Punkte eines Körpers gegen ein solches Achsensystem auch zugleich d. relative Bewegung d. Elemente gegen einander bestimmt. Aus diesem Grunde sei unter relativer Bewegung eines Körpers schlechtweg verstanden d. Bewegung d. Elemente gegen einander od. d. relative Bewegung d. Elemente gegen ein am Körper fixirtes Achsensystem.
(Im Allgemeinen versteht d. Begriff einer relativen Bewegung eines Körpers auch ~~noch~~ einen, in dieser Beziehung [illegible] fehlt sich d. Bewegung bezieht, und nur bei d. relativen Bewegung gegen eines (irdischen) Körpers gegenüber spricht man einfach von d. Bewegung d. Körpers.)

Bekanntlich nennt man d. Ursachen d. Änderungen d. äußeren Zustandes od. Bewegung eines Körpers die mechanischen Kräfte. Die auf einen Körper wirkenden Kräfte werden unterschieden in Massenkräfte und Oberflächenkräfte, wovon d. Massenkräfte an d. Massenelemente gebunden sind und deshalb als an ihnen angreifend gedacht werden müssen, während d. Oberflächenkräfte an d. Elemente d. Oberfläche angreifend gedacht werden können.
Die Arbeit d. Massenkräfte ist bedingt durch d. Bewegung d. Massenelemente und die Arbeit d. Oberflächenkräfte ist bedingt durch d. Bewegung d. Oberflächenelemente.
Bekanntlich wird ferner jede mechanische Kraft gemessen durch d. Masse und d. Beschleunigung, welche sie dem Körper ertheilt od. ertheilen kann. Ist nämlich P eine Kraft, welche einem Körper von d. Masse m eine Beschleunigung φ ertheilen kann, so ist:

$$P = m\varphi.$$

Bezüglich d. Einheit, mit welcher Kraft und Masse gemessen werden, kann man entweder zunächst d. Masseneinheit definiren od. man kann zuvörderst d. Krafteinheit festsetzen als diejenige Kraft, welche einer Masse eine bestimmte Beschleunigung ertheilt. Mit Hilfe d. obigen Gleichung kann man dann im ersten Falle d. Krafteinheit und im letzteren Falle d. Masseneinheit bestimmen. Von beiden Verfahren erscheint d. erstere wohl d. natürlichere; das übliche Verfahren ist jedoch dies, daß man d. Krafteinheit annimmt und zwar pflegt man als Krafteinheit d. Schwerkraft zu nehmen, welche auf eine bestimmte Masse an einem bestimmten Orte ausgeübt wird von d. Anziehungskraft d. Erde. Z. B. 1 Kgr = Schwerkraft auf d. Masse eines Cubdcm. Wasser im Zustande d. größten Dichtigkeit an einem bestimmten Orte, wobei aber noch willkürlich ist, an welchem Orte man d. Schwerkraft auf 1 Cubdcm. Wasser als Kgr betrachten will. Würde man an jedem Beobachtungsorte d. betreffende Kgr. als Krafteinheit annehmen, so würde man mit den verschiedenen Höhen, Breiten und Längen bezw. d. Orte auch verschiedene Kgr. bekommen, indem d. Schwerkraft mit d. Änderungen auch verschieden ist. Für d. Technik ist jedoch d. Verschiedenheit d. Schwerkraft an d. verschiedenen Erdpunkten genügend klein, um vernachlässigt werden zu können. Man nimmt einfach als Mittelwerth für die durch die Schwerkraft hervorgerufene Beschleunigung $g = 9{,}81$ m an; demnach nimmt d. Definition d. Kgr. als Krafteinheit also d. Schwerkraft eines Cubdcm. Wasser im dichtesten Zustand an einem Orte wo d. Beschleunigung d. Schwerkraft $= 9{,}81$ m beträgt.

Attractionskräfte nennen diejenigen Kräfte wir bekanntlich, welche man mit d. Namen Gravitation bezeichnet, nämlich d. Kraft, mit welcher sich 2 materielle Punkte in beliebiger Entfernung gegenseitig anziehen. Bekanntlich nimmt diese Gravitation mit d. ~~Quadrat~~ Quadrate d. Entfernungen d. materiellen Punkte ab. Bei irdischen Körpern unter sich von kl. Dimensionen gegen d. Erde, ist diese Gravitation jedoch ganz untergeordnet so daß davon vollkommen abgesehen werden kann.

Was d. äußeren Kräfte anbetrifft, so kommt bei d. Bewegung eines irdischen Körpers nur für allemal d. Schwerkraft in Betracht. Ferner sind jedoch auch noch die von d. Mechanik festgestellten sog. 2 Ergänzungskräfte zu berücksichtigen, wenn es sich nur um d. relative Bewegung eines Körpers gegen einen andern in Bewegung befindlichen Körper handelt, indem diese beiden Ergänzungskräfte hinzuzufügen sind, um d. absolute Bewegung in d. Rechnung hereinziehen zu können. Ist K ein Körper, welcher in relativer Bewegung gegen ein innerhalb in Bewegung begriffenes bezogenes System S steht, so kann man bekanntlich nach d. Mechanik diese eigene Bewegung d. Systems S in jedem Zeitelement als eine unendlich kleine Schraubenbewegung betrachten. Die Bewegung d. Körpers K kann dann als absolute Bewegung angesehen werden, wenn seiner Bewegung 2 sog. Ergänzungskräfte hinzugefügt werden, die folgendermaßen bestimmt sind:

Es sei in irgend einem Augenblick A d. Momentanachse und ω d. Winkelgeschwindigkeit, mit welcher das bezogene System S um d. Achse A augenblicklich rotiert. Ferner sei dm irgend ein Massenelement d. Körpers K und φ d. Beschleunigung, welche im betreffenden Augenblick d. Element dm besitzen würde, wenn es sich nicht in relativer Bewegung gegen d. System S befände, also mit demselben verbunden od. in relativer Ruhe gegen dasselbe wäre. Ferner sei v d. augenblickliche relative Geschwindigkeit d. Massenelements dm gegen d. System S und v' d. Projection von v auf eine Ebene, welche zur Momentanachse A normal steht. Durch Vorstehendes sind nun d. Ergänzungskräfte folgendermaßen bestimmt:

Die erste Ergänzungskraft ist dadurch bestimmt, daß sie dem Körperelemente dm eine Beschleunigung erteilt, welche entgegengesetzt gerichtet ist der früheren Beschleunigung φ des augenblicklich mit d. System S fest verbundenen Punktes.

Die 2te Ergänzungskraft erteilt dem Elemente dm eine Beschleunigung 2 ω v', welche senkrecht gegen d. Momentanachse A und senkrecht gegen v und v'; hiermit ist aber d. Richtung dieser Beschleunigung noch 2deutig bestimmt. Um sie vollkommen zu bestimmen muß noch hinzugefügt werden, daß d. 2te Kraft diejenige Richtung hat, welche man um 90° im Sinne d. Winkelgeschwindigkeit ω um d. Momentanachse A herumdrehen muß, damit sie in d. Richtung von v' gelangt; man erhält also diese Richtung d. 2ten Kraft, indem man d. Richtung von v' um d. Achse A ~~um~~ einen Winkel von 90° im entgegengesetzten Sinne von ω herumdreht. Hiermit sind d. beiden Ergänzungskräfte vollkommen bestimmt.

Im Verlauf von nachstehenden Untersuchungen wird sich zeigen, daß diese beiden Ergänzungskräfte eine wesentliche Rolle spielen.

Diese beiden Kräfte sind also immer senkrecht zu v', also senkrecht zur relativen Bahn d. Massenelements dm gerichtet, also ist in jedem Augenblick ihre relative Arbeit = 0, indem das Produkt mit v in d. Projection = 0 ist. Diese beiden Ergänzungskräfte haben demnach auf d. Änderung d. relativen lebendigen Kraft keinen Einfluß, sie bestimmen eben nur d. absolute Bewegung mit Ausschluß d. relativen lebendigen Kraft.

Wenn es sich nun d. ~~Bewegung~~ Untersuchung d. (sogenannten) Bewegung eines irdischen Körpers gegen d. Erde, also um d. relative Bewegung d. Körpers gegen d. Erde handelt, so entsprechen d. beiden Ergänzungskräfte d. relativen Bewegung zur absoluten erstens d. eigenen Schwere od. Anziehungskraft d. Erde und zweitens d. Centrifugalkraft-Entwicklung. Außerdem ist in d. Beschleunigung d. Schwerkraft immer d. 2te Ergänzungskraft nämlich d. Centrifugalkraft mit einbegriffen, indem es unmöglich ist, d. Schwerkraft ohne Centrifugalkraft zu beobachten. In dem Werthe $g = 9{,}81$ m = Beschleunigung d. Schwerkraft also sind beide Ergänzungskräfte mit einbegriffen. Man hat also bei d. relativen Bewegung eines irdischen Körpers nur noch d. 1ste Ergänzungskraft nämlich d.

Schwerkraft zu berücksichtigen.

Was andererseits d. Oberflächenkräfte betrifft, welche von irgend einem anderen angrenzenden Körper herrühren und in d. Oberfläche angreifen, so können diese unterschieden werden in normale und tangentiale Oberflächenkräfte. Die normalen Oberflächenkräfte kommen in d. Regel immer nur als normale Druckkräfte in Betracht, so daß also entsprechende normale Zugkräfte als negative normale Oberflächenkräfte zu bezeichnen sind.
Die tangentialen Oberflächenkräfte kommen hier nur als Reibungen in Betracht, d.h. als Widerstandskräfte gegen d. relativ gleitende Bewegung gegen einen anderen berührenden Körper.
Wenn in d. Folge d. Rede sein wird von dem äußeren Druck in einem gewissen Punkt d. Oberfläche so soll darunter verstanden werden d. Quotient, welchen man erhält, wenn man den auf ein unendlich kl. Flächenelement wirkenden äußeren Druck durch d. Flächeninhalt dieses Flächenelements d. Oberfläche dividirt. Ist dieser Druck in allen Elementen gleich, so soll er d. spec. äußere Druck d. Körpers genannt werden. Wenn ferner in Folge von d. äußeren auf einen Körper wirkenden Kräften d. Rede sein wird, dann sollen darunter im Gesammt alle diejenigen Kräfte verstanden werden, welche als Ursachen d. äußeren Zustandes und dessen Änderungen zu betrachten sind. Es gehören also zu den äußeren Kräften nicht nur Oberflächenkräfte d. äußeren Massenelemente im engeren Sinne, sondern auch d. inneren Massenkräfte, also im Allgemeinen d. Gravitation, denn auch diese betheiligt sich ja an den Ursachen d. Änderungen d. äußeren Zustandes.

Nachdem diese, wenigstens nach d. Wesentlichen zu unterscheidenden, Sätze über d. äußeren Zustand eines Körpers definirt sind, kann übergegangen werden zu speciellen Definition d. Begriffs d. inneren Zustandes eines Körpers.

Wenn in d. Folge vom inneren Zustande eines Körpers im Gegensatz zu äußeren od. Bewegungszustand die Rede sein wird, so soll dieser nicht im weitesten Sinne d. Wortes verstanden werden, indem von vornherein von d. Erscheinungen abgesehen werden soll, welche ihre Ursachen in Licht, Electricität, Magnetismus haben. Der innere Zustand eines Körpers, wie er im folgenden immer verstanden werden soll, ist dann vollkommen bestimmt durch d. chemische Beschaffenheit, den Aggregatzustand, das spec. Volumen und durch d. Temperaturzustand d. verschiedenen Elemente d. Körpers.
Diese verschiedenen 4 Argumente, welche den inneren Zustand eines Körpers feststellen, sollen nun näher angesehen werden:

Die chemische Beschaffenheit soll im folgenden als d. Art d. Körpers bezeichnet werden. 2 Körper heißen also gleich- od. ungleichartig, wenn sie von gleicher od. ungleicher Beschaffenheit sind. Ein Körper ist von gleichartiger Form, wenn alle seine Elemente von gleicher chemischer Beschaffenheit sind. Wenn nicht besonders d. Gegentheil besonders hervorgehoben wird, so soll stillschweigend immer ein Körper als gleichartig angesehen werden.

Was d. Aggregatzustand betrifft, welcher gleichfalls den Körper charakterisiren, so kann d. Körper entweder fest, flüssig od. luftförmig sein.
Ein fester Körper ist charakterisirt durch d. beschränkte Veränderlichkeit seines Volumens und seiner Gestalt sowie d. Unmöglichkeit einer Mischung seiner Elemente unter einander, wobei unter Mischung verstanden ist, daß d. relativen Gruppirungen d. Elemente so verändert werden, daß d. einzelnen Elemente ganz neue Nachbarelemente erhalten. Offenbar ist dies bei einem festen Körper schlechterdings unmöglich. Man kann also auch einen festen Körper dadurch charakterisiren, indem man sagt, daß d. Massenelemente an und für sich einer Veränderung fähig sind, je zwei benachbarte Elemente immer Nachbarelemente bleiben müssen, da benachbarte Massenelemente eines festen Körpers keiner relativ gleitenden Bewegung gegen einander fähig sind.

Was im Gegensatz zu den festen Körper, die flüssigen und luftförmigen betrifft, so haben diese eine unbeschränkte Veränderlichkeit ihrer Gestalt und eine unbeschränkte Verschiebbarkeit gemein, indem d. kleinsten Elemente derselben einer unbeschränkten gleitenden relativen Beweglichkeit gegen einander fähig sind.

Die flüssigen und luftförmigen Körper sind dadurch von einander verschieden, daß d. flüssigen das mit d. festen Körpern gemein haben, daß ihr Volumen nur in einem sehr beschränkten Grade veränderlich ist, während d. luftförmigen Körper auch einer unbeschränkten Volumenänderung (wenigstens Volumenvergrößerung) fähig sind.
In dieser letzten Hinsicht ist jedoch bei den luftförmigen Körper eine Theilung in 2 Classen vorzunehmen, indem d. Gase einer unbeschränkten Volumenvergrößerung und Verkleinerung, während Dämpfe erst einer unbeschränkten Volumenvergrößerung nicht aber einer unbeschränkten Volumenverkleinerung (sofern dieselben überhaupt noch luftförmig bleiben also ihren Aggregatzustand nicht ändern) fähig sind.
In d. Regel sind d. verschiedenen Aggregatformen eines Körpers ziemlich scharf von einander verschieden. Jedoch gibt es auch einige Körper, bei welchen vom festen zum flüssigen Zustand ein allmähliger Uebergangsprozess stattfindet welche man bekanntlich mit d. Namen zähflüssig, gallertig etc. bezeichnet. Am häufigsten treten diese Uebergangsformen bei zusammengesetzten organischen Stoffen auf, insbesondere bei allen Fetten, ferner auch bei solchen Mischungen, welche man als sehr innige Mischungen von festen und flüssigen Theilchen betrachten muß.
In d. Folge wird ein Körper mit homogen bezeichnet, wenn er gleichförmiger Art ist und alle seine Elemente gleiche Aggregatzustände haben, also wenn dessen Elemente alle chemisch gleich beschaffen sind und gleiche Aggregatformen haben. Ein ganz genommen allerdings eine besondere Definition erforderlich hinsichtlich d. nicht scharf geschiedenen Aggregatzustände. Ist hier hieran jedoch abzusehen. Im Folgenden kann man jedoch nicht alle Körper als homogen voraussetzen, indem man bei technischen Aufgaben oft Veranlassung hat, solche Körper zu betrachten, welche eine Mischung von Elementen gleicher Art in verschiedenen Aggregatzuständen sind. Z.B. eine Mischung von Wasser und Eis, Mischung von Wasser und Dampf.
In dieser Hinsicht sind jedoch 2 Unterschiede zu machen, indem man in continuirliche und discontinuirliche Gemenge zu theilen hat. Ein solches Gemenge wird continuirlich genannt, wenn, wie beim feuchten Wasserdampf, wenn es in unzählig kl. Bestandtheile zerlegt werden kann, so gering, daß von einem Bestandtheil zum andern d. Aggregatzustand sich nur allmählig ändert.

Anders ist es aber bei discontinuirlichen Gemengen, indem hier d. Bestandtheile von verschiedenen Aggregatformen größere voneinander getrennte Gruppen bilden (Wasser und Dampf in einem Dampfkessel) und also d. Aggregatzustand sich unstetig, plötzlich ändert.

Unter dem spec. Volumen in einem gewissen Punkte eines homogenen Körpers od. einer continuirlichen Mischung soll d. Quotient verstanden, welchen man erhält, wenn d. Volumen eines A einschließenden unendlich kl. Körperelements durch dessen Gewicht dividirt wird; es stellt d. spec. Volumen im Punkte A = dem Volumen pro Gewichtseinheit dar, des den Punkt A einschließenden Körperelements. Dieses spec. Volumen soll mit v bezeichnet werden. D. reziproke Werth $= \frac{1}{v}$ ist dann d. spec. Gewicht im Punkte A und sei bezeichnet mit γ. Man kann also d. spec. Gewicht im Punkte A auch definiren als d. Gewicht per Volumeneinheit eines den Punkt A enthaltenden Körperelements.
Endlich wird in d. Folge noch von spec. Masse d. Rede sein, worunter d. Quotient verstanden werden soll, welchen man durch Division d. spec. Gewichts γ in dem betreffenden Punkte durch d. Beschleunigung g d. Schwerkraft erhält, also

spec. Masse $= \mu = \frac{\gamma}{g}$. und spec. Gewicht $\gamma = \frac{1}{v}$

der einem spec. Volumen, was in einem bestimmten Punkte kann natürlich nur bei homogenen Körpern od. continuirlichen Schichtungen d. Fall sein, während man bei discontinuirlichen Mischungen nur von einem mittleren spec. Volumen sprechen kann, worunter d. Quotient aus dem ganzen Volumen durch d. ganze Gewicht d. Gemisches verstanden wird. d. mittlere spec. Gewicht und d. mittlere spec. Masse sind dann nach den vorigen Beziehungen mitbestimmt.

Eine besonders nähere Besprechung erfordert d. letzte Criterium d. Zustandes eines Körpers, nämlich d. Spannungszustand.

Bei d. zunächst vorliegenden Voraussetzung einer continuirlichen Raumerfüllung d. Materie (bei Abstraction einer atomistischen Constitution) wird d. Wirkung d. äußeren Kräfte dadurch von Körperelement zu Körperelement übertragen, indem diese unendlich kl. Elemente, in die man sich den Körper auf beliebige Weise zerlegt denken kann, an ihren Berührungsflächen mit gewissen Kräften gegenseitig auf einander wirken. Diese Kräfte nennt man d. innern Flächenkräfte. Dieselben sind natürlich nur als scheinbare Kräfte zu betrachten, wenn mit jenen genannten (äußeren) Kräften d. Körpers und mit d. relativen Bewegung d. Körper entstehen und verschwinden, außerdem aber von d. Art und Begrenzungsform derselben abhängen, indem sie gewissermaßen als d. mechanische Ausdruck des durch diese materielle Beschaffenheit bedingten Widerstandes zu betrachten sind, dessen Ueberwindung d. Aenderung d. Volumens und d. Gestalt d. Massenelements, sowie d. relativ gleitende Bewegung benachbarter Elemente gegeneinander im Allgemeinen erfordert. Durch d. verschiedenen Körpern verschiedenen Beziehungen, welche zwischen den innern Flächenkräften und denjenigen Größen stattfinden, wodurch d. Aenderungen d. Volumens und d. Gestalt d. Massenelements sowie d. relativ gleitenden Bewegungen benachbarter Elemente bestimmt sind, wird d. Körperbeschaffenheit, soweit sie hierbei in Betracht kommt, gewissermaßen erst definirt, da sie übrigens bei d. continuirlichen Abstraction von irgend einer bestimmten Voraussetzung in Betreff d. Wesens und d. Constitution d. Materie an und für sich undefinirbar wäre.

Hinsichtlich dieser innern Flächenkräfte sind 2 Arten zu unterscheiden: es sind nämlich diejenigen, welche d. Widerstand gegen eine Volumen und Gestaltänderung entsprechen, verschieden von denen, welche d. Widerstand gegen eine relativ gleitende Bewegung benachbarter Elemente entsprechen. Nur die ersteren, d. sog. <u>Spannungen</u>, charakterisiren d. innern Zustand eines Körpers direct, während die letzteren, welche in d. Folge mit <u>innern Reibungen</u> bezeichnet werden sollen, den innern Zustand nur mittelbar bedingen, indem d. Spannungen von den innern Reibungen abhängig sind.

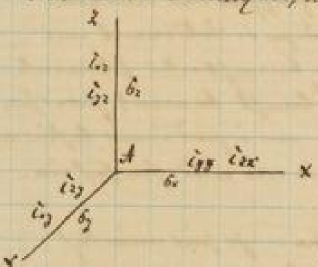
Was d. Spannungen betrifft, so sind diese bereits Gegenstand d. wesentlichen Untersuchungen d. Elasticitätslehre gewesen, wo gefunden wurde, daß zwischen d. Spannungen in irgend einem Punkte d. Körpers für verschiedene durch diesen Punkt gehende Ebenen gewisse Beziehungen stattfinden. Ganz analoge Beziehungen finden nun auch zwischen d. innern Reibungen in irgend einem Körperpunkte für verschiedene durch diesen Punkt gehende Ebenen statt, indem die zwischen d. betreffenden Spannungen stattfindenden Beziehungen ganz allgemein sich auf innere Flächenkräfte überhaupt ausdehnen lassen. Diese Verallgemeinerungen d. betreffenden Beziehungen sind im Wesentlichen folgende:

In d. Folge sei ein beliebiger Körper vorausgesetzt und nicht nur wie bei d. Elasticitätslehre speciell ein fester Körper.

Es sei A ein Punkt in einer beliebigen Körperfläche F, dF sei ein unendlich kl. Flächenelement dieser Fläche F, welches d. Punkt A umschließt. AN sei eine in bestimmtem Sinne genommene Normale d. Ebene F, ... d. innern, mit p_N zu bezeichnenden

Recht. Schubspannung im Punkte A d. Ebene $\mathfrak{F}$, soll nun d. Quotient verstanden werden, welcher erhalten wird durch Division mit $d\mathfrak{F}$ in diejenige innere Kraft, mit welcher die im Sinne AB an $\mathfrak{F}$ angrenzenden Körperelemente auf d. Flächenelement $d\mathfrak{F}$ wirken. (Damit in dieser Beziehung keine Verwechslung geschehen kann, wird stets von vornherein gesagt, daß d. Normale AB eine bestimmte Richtung habe.)
Offenbar stimmt diese Bezeichnung ganz mit derjenigen für d. Spannung in einem Punkte einer Ebene d. Elastizitätstheorie überein. Diese spezifische d. h. auf d. Flächeneinheit bezogene Schubspannkraft ϱ, welche mit d. Richtung AB im Allgemeinen einen Winkel ω zwischen 0 und 180° od. zwischen 0 und π bilden kann, kann in 2 Komponenten zerlegt werden, eine nach d. Normalen und d. andere nach d. Tangentialebene an $\mathfrak{F}$ gerichtet. Die Normalkomponente ist dann $= \varrho \cos\omega$ und sei bezeichnet mit σ und d. Tangentialkomponente $= \varrho \cdot \sin\omega = \tau$. (entsprechend d. Normal- und Tangentialspannung in d. Elastizitätslehre) Die Normalkomponente σ ist positiv od. negativ, je nachdem d. Winkel ω zwischen 0 u. 90° od. 90 – 180° liegt, je nachdem sie also nach AB od. nach BA gerichtet ist, entsprechend einem Zug od. Druck auf $d\mathfrak{F}$.
Die Tangentialkomponente τ ist jedoch eine absolute Größe, da sin ω immer positiv ist, weil ω zwischen 0 – 180° liegt. Dieselbe kann aber in d. Tangentialebene wieder in Komponenten nach zwei bestimmten Richtungen zerlegt werden, die dann + od ÷ sind, je nachdem diese Richtungen mit d. Richtung von τ spitze od. stumpfe Winkel bilden.

Es seien nun AX, AY und AZ drei zu einander senkrechte Richtungen parallel den Koordinatenaxen, auf welche d. ganze Körper bezogen wird; x y u. z seien d. Koordinaten d. Punktes A bezüglich d. Koordinatensystems.



Nun kann man sich einen Schubspannkraft im Punkte A d. Ebene YAZ zunächst in 2 Komponenten zerlegt denken, in eine Normalkomponente σ_x nach AX und eine Tangentialkomponente nach d. Ebene YAZ; letztere kann man aber wiederum in 2 Seitenkomponenten τ_{xy} und τ_{xz} nach d. Richtungen d. Y und Z Axe zerlegt denken.
Ebenso kann man die inneren Schubkräfte im Punkte A d. Ebenen ZAX und XAY in d. entsprechenden Komponenten zerlegt denken. Es sind dann d. Komponenten d. inneren Schubkräfte

	nach d. Richtungen	AX	AY	AZ
1) Im Punkte A d. Ebene YAZ	=	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
2) Im Punkte A d. Ebene ZAX	=	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
3) Im Punkte A d. Ebene XAY	=	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

welche im Sinne derjenigen Kräfte verstanden werden müssen, welche d. auf den Seiten d. positiven Axenrichtungen AX AY AZ gelegenen Körpertheile auf d. genannten Ebenen pro Flächeneinheit im Punkte A ausüben.
Denkt man sich nun den Punkt A als den Eckpunkt eines unendlich kl. rechtwinkligen parallelepipedischen Körperelements, dessen von A ausgehenden Kanten mit d. 3 Axen X Y u. Z zusammenfallen, so daß also d. Koordinaten d. gegenüberliegenden Eckpunkts A_1 d. Körperelements $= x + dx$, $y + dy$ und $z + dz$ sind, wenn dx dy und dz d. Kantenlängen d. Parallelepipeds sind, so erhält man offenbar d. Schubkräfte, welche auf d. drei von d. Eckpunkt A herausliegenden Seitenebenen dieses Körperelements von d. äußerlich, also im negativen Sinne d. Axen AX AY u. AZ, angrenzenden Körpermasse ausgeübt werden, indem man d. obigen 3 Gruppen von spezifischen Kräften unter 1) 2) u. 3) resp. mit $\div dy\,dz$, $\div dz\,dx$ und $\div dx\,dy$ multiplicirt. Ebenso erhält man d. Schubkräfte, welche auf d. 3 um d. Eckpunkt A_1 herumliegenden Seitenebenen von d. äußerlich, jetzt aber im positiven Sinne d. Axenrichtungen,

angrenzenden Körpermasse mitgetheilt werden, indem man dieselben Grössen ihrer Kräfte mit $dy\,dz$, $dz\,dx$ und $dx\,dy$ multiplicirt, nachdem sie zuvor um ihre partiellen Differentiale resp. nach x, y und z genommen, vergrössert wurden. In diese Weise erhält man im Ganzen 18 Kräfte, welche auf d. Oberfläche d. Körperelements wirken, und dasselbe entweder in Bewegung od. in Ruhe halten. Soll d. Körperelement in relativer Ruhe sein, so müssen d. erhaltenen 18 Oberflächenkräfte d. Elements im Gleichgewicht sein mit den auf seine Masse wirkenden äusseren Kräften und mit d. Reactionskräften dieser Masse gegen ihre Beschleunigung.

Was diese auf d. Masse d. Körperelements wirkenden äusseren Massenkraft betrifft, so sei μ d. spec. Masse d. Körpers im Punkte A = Masse d. Volumeneinheit und $X\ Y\ Z$ d. nach d. Axen $Ax\ Ay - Az$ gerichteten Componenten d. auf d. Masseneinheit bezogenen, im Punkte A wirkenden Massenkraft, so ist also:

$\mu X\,dx\,dy\,dz$, $\mu Y\,dx\,dy\,dz$ und $\mu Z\,dx\,dy\,dz$ d. 3 Componenten d. äusseren Massenkraft sind, welche auf d. Körperelement $dx\,dy\,dz$ einwirkt.

Hinsichtlich d. Reactionskräfte d. Masse gegen d. Beschleunigung d. Körperelements seien φ_x φ_y und φ_z d. Componenten d. Translationsbeschleunigung d. Körperelements nach d. Richtung d. 3 Axen; dann sind offenbar d. Componenten d. ~~[illegible]~~ Reactionskraft gegen diese Translationsbeschleunigungen:

$$= -\mu\,\varphi_x\,dx\,dy\,dz \qquad -\mu\,\varphi_y\,dx\,dy\,dz \quad \text{und} \quad -\mu\,\varphi_z\,dx\,dy\,dz.$$

Im Allgemeinen besteht d. Bewegung d. unendlich kl. Körperelements ausser in einer Translationsbe~~schleunigung~~wegung auch in einer Rotationsbewegung. Diese kommt aber als eine unendlich kl. Grösse höherer Ordnung nicht in Betracht, denn, da d. Trägheitswiderstand gegen d. Rotation um eine durch A gehende Momentenaxe = dem Product aus Winkelbeschleunigung und Trägheitsmoment d. Elements bezüglich d. Momentenaxe ist, so ist diese unendlich kl. von d. 5t. Ordnung, woraus hervorgeht, dass man d. Rotationsbeschleunigung wirkende Kräftepaare gar nicht zu berücksichtigen braucht.

Wenn nun alle diese auf d. Körperelement wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sein sollen, so müssen bekanntlich 6 Bedingungsgleichungen erfüllt werden.

Bildet man zunächst mit, dass d. algebraischen Summen aller Kraftcomponenten in Sinne d. 3 Axen, einzeln = 0 sein müssen, so bekommt man unmittelbar d. bekannten Gleichungen in d. Elasticitätslehre, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \mu(X - \varphi_x) &= 0\\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \mu(Y - \varphi_y) &= 0\\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \mu(Z - \varphi_z) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{-------} \quad 1.$$

und mittels d. ~~[illegible]~~ Aufstellung d. Momentengleichungen für d. 3 Axen d. Gleichungen:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den bekannten d. Elasticitätslehre nur dadurch, dass d. Reactionen d. Beschleunigungen noch hinzugekommen sind zu den Kräften, und dass demnach unter X Y u. Z d. Componenten d. äusseren Massenkräften pr. Volumeneinheit verstanden wurden, während sie sonst d. Componenten derselben pr. Masseneinheit bedeuten.

In Folge d. letzten Gleichungen, nach welchen d. Tangentialcomponenten τ immer paarweise untereinander entsprechend gleich sind, kann man auch eine kürzere Bezeichnung einführen, indem man setzt: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z$; $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_y$ und $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x$. So lassen sich dann die ersten 3 Bedingungsgleichungen auch folgendermassen schreiben:

$$
2. \ldots \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_y}{dz} + \frac{d\tau_z}{dy} + \mu(X - \varphi_x) = 0 \\
&\frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_z}{dx} + \frac{d\tau_x}{dz} + \mu(Y - \varphi_y) = 0 \\
&\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{d\tau_x}{dy} + \frac{d\tau_y}{dx} + \mu(Z - \varphi_z) = 0
\end{aligned}\right.
$$

Ebenso wie in der Elasticitätslehre durch die betreffenden 6 Spannungscomponenten der Spannungszustand in einem Punkte vollkommen bestimmt wird, indem diese Componenten die Spannung in dem betreffenden Punkte nach einer beliebigen Richtung bestimmen, ebenso bestimmen auch die vorliegenden 6 Componenten $\sigma - \tau$ der inneren Reibungskräfte, in einem Punkte vollkommen die innere Reibungswirkung, indem sie auch Größe und Richtung der inneren Reibungskraft in demselben Punkte an einer beliebig durchgelegten Ebene bestimmen. Denkt man sich nämlich durch den Punkt A eine Richtung AB gezogen, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ bildet, und in A eine Normalebene dieser Richtung AB, so ist die innere Reibungskraft ϱ im Punkte A dieser Ebene, wenn a, b, c die Winkel sind, welche die im Allgemeinen nicht normal zur Ebene [illegible] Richtung von ϱ mit den Axen bildet, ganz analog den bekannten Formeln der Elasticitätslehre:

$$
3 \ldots \left\{
\begin{aligned}
\varrho \cos a &= \sigma_x \cos\alpha + \tau_y \cos\gamma + \tau_z \cos\beta \\
\varrho \cos b &= \sigma_y \cos\beta + \tau_z \cos\alpha + \tau_x \cos\gamma \\
\varrho \cos c &= \sigma_z \cos\gamma + \tau_x \cos\beta + \tau_y \cos\alpha
\end{aligned}\right.
$$

welche Formeln erhalten werden, wenn man die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte an einem unendlich kl. tetraederischen Körperelement aufstellt, welches aus dem körperlichen [illegible], dessen Kanten Ax Ay und Az sind, von einer zu AB senkrechten unendlich wenig von A entfernten Ebene abgeschnitten wird. Mit Rücksicht auf die gefundenen Gleichungen und der bekannten Relation: $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$
ist dann ϱ sowohl der Größe und Richtung nach bestimmt.

Da diese innere Reibungskraft, wie schon ersichtlich, im Allgemeinen nicht normal zur Ebene gerichtet ist, so kann man sie in 2 Componenten zerlegen, eine normal zur Ebene in der Richtung von AB und eine in die Ebene selbst fallend. Die Normalcomponente, bezeichnet mit σ, ist dann $= \varrho$ mal cos des Winkels, welchen die Richtung von AB $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ mit der Richtung von $\varrho (a\ b\ c)$ bildet, nach der analytischen räumlichen Geometrie ist dieser cos also bestimmt durch:

$$
\sigma = \varrho(\cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma)
$$

Setzt man hierin für $\varrho \cos a$, $\varrho \cos b$ und $\varrho \cos c$ die unter 3 gefundenen Werthe ein, so bekommt man:

$$
4 \ldots \quad \sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + 2\tau_x \cos\beta\cos\gamma + 2\tau_y \cos\gamma\cos\alpha + 2\tau_z \cos\alpha\cos\beta
$$

(eine ganz analoge Beziehung, welche zwischen der Normalspannung und den Spannungscomponenten nach 3 zu einander beliebig senkrechten Richtungen in der Elasticitätslehre stattfindet).

In derselben Weise wie in der Elasticitätslehre lassen sich hieraus 2 wichtige Folgerungen ziehen:
1) die Summe dieser Normalkräfte σ für je drei in einem Punkte A sich rechtwinklig schneidenden Ebenen ist gleich groß.
2) durch jeden Punkt eines Körpers lassen sich immer 3 zu einander senkrechte Ebenen legen, für welche die Tangentialcomponenten der inneren Reibungskraft $= 0$ sind, letztere, nämlich die inneren Reibungskräfte, selbst also normal sind.

Am wichtigsten für die späteren Anwendungen sind jedoch immer die unter 2 genannten 3 Beziehungen zwischen den 6 Componenten $\sigma - \tau$. Durch diese 3 Gleichungen bedingen sich der äußere Zustand und innere Zustand gegenseitig, indem in die Formeln sowohl Werthe mit den äußeren als auch inneren Kräften vorkommen. Im Allgemeinen müssen diese beide in Untersuchung gezogen werden.

Aber sind jedoch die beiden Fälle eines festen und flüssigen Körpers (letzteren im weiteren Sinne als flüssig und luftförmig) gänzlich zu unterscheiden, nicht nur weil im letzteren Falle d. Größen σ u. τ außer den Spannungen im genannten zugleich d. Komponenten d. inneren Reibungen in sich schließen, sondern weil auch den Differentialgleichungen d. Bewegung bei einer Flüssigkeit überhaupt eine andere Auffassung zu Grunde liegt als bei einem festen Körper. Indem nämlich d. Massenelemente einer Flüssigkeit einer ganz beliebigen relativen Bewegung fähig sind, wobei sie zugleich relativ und eine unbeschränkte Gestaltänderung erfahren können, kann man die Änderungen ihres äußeren und inneren Zustandes nur mittelbar dadurch verfolgen, daß dieser Zustand für dasselbe Volumenelement zu verschiedenen Zeiten und für verschiedene Volumenelemente zu derselben Zeit bestimmt werden. Während also d. Körperelement, welches d. unseren Betrachtungen zu Grunde liegt, bei d. Anwendung auf einen festen Körper als ein ~~Massen~~element im strengen Sinne d. Wortes zu betrachten ist, stellen es bei d. Anwendung auf einen flüssigen Körper nur während eines unendlich kl. Zeitelements als der Träger einer und derselben Masse zu betrachten ist und sich diese Betrachtung noch deutlicher hervortreten, wenn sie nicht d. Untersuchungen bei Flüssigkeiten besonders angewandt werden.

Die erhaltenen Differentialgleichungen nr. 2 enthalten nun 10 unbekannte Funktionen, $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_x\ \tau_y\ \tau_z\ \varphi_x\ \varphi_y\ \varphi_z\ \rho$ der unabhängigen Veränderlichen $x\ y\ z$ d. h. d. Koordinaten d. betreffenden Punktes. Um diese zur Bestimmung d. Zustandsänderungen (äußern und innern) eines Körpers unter gegebenen Umständen geeignet zu machen, müssen dieselben noch durch d. ergänzt und erweitert werden, daß man ebenso viele Bestimmungsgleichungen zur Verfügung hat, als man unbekannte Größen vorkommen, welche als Funktionen von $x\ y\ z$ und d. Zeit t zu bestimmen sind. Diese können nur erhalten werden aus d. allgemeinen Beziehungen, welche zwischen d. Spannungen und d. Deformationen d. Massenelemente bei festen Körpern stattfinden, wozu bei flüssigen Körpern noch d. Beziehungen zwischen d. inneren Reibungen und d. relativen Bewegungen benachbarter Elemente d. Körpers stattfinden.

Zunächst sollen nur <u>feste</u> Körper vorausgesetzt werden.

Die inneren Flächenkräfte sind dann lediglich Spannungen, und enthalten keine inneren Reibungen, weil d. Elemente d. festen Körpers keiner relativ gleitenden Bewegung gegeneinander fähig sind der Definition eines festen Körpers gemäß. Die Größen σ sind Normalspannungen und d. Größen τ Tangentialspannungen. Denken wir d. rechtwinklige Koordinatensystem in bekannter Weise im Körper fixiert, seien $x\ y\ z$ d. spannungslosen ursprünglichen Koordinaten eines gewissen materiellen Punktes A d. Körpers d. h. diejenigen Koordinaten von A, welche d. Fall entsprechen, daß die ~~Oberfläche~~ im Gleichgewicht gegebenen äußeren Kräfte $= 0$ sind und d. Körper sich in relativer Ruhe befindet und somit auch alle Spannungen $= 0$ sind. Für diesen besonderen Fall soll d. Zustand eines festen Körpers für d. Folgenden als <u>ursprünglicher</u> Zustand angenommen, und in diesem ursprünglichen Zustande seien $x\ y\ z$ d. Koordinaten d. Punktes A, wodurch dieser Punkt individuell bestimmt ist. Ebenso seien $x + dx\ \ y + dy\ \ z + dz$ d. ursprünglichen Koordinaten eines 2. materiellen Punktes A_1, welcher unendlich nahe an A liegt. Diese beiden materiellen Punkte A und A_1 seien nun als d. gegenüberliegenden Eckpunkte eines unendlich kl. parallelepipedischen Körperelements betrachtet, dessen Kantenlängen dann im ursprünglichen Zustand $= dx\ dy$ und dz sind. $X\ Y\ Z$ sollen bei d. jetzigen Betrachtung eines festen Körpers d. nach d. Achsen zerlegten Komponenten d. relativen beschleunigenden Kraft für den Punkt A. Von d. eigenen Bewegung d. mit d. Körper verbundenen Raumes soll abgesehen werden, indem d. Zustand d. Körpers nur aufgefaßt werden soll als innerer Zustand und als relativer Bewegungszustand d. Körpers in Bezug auf d. Raumachsen.

Sind nun $x + \xi\ \ y + \eta$ und $z + \zeta$ d. Koordinaten d. Punktes A bei d. Zustandsänderung, so ist dieser offenbar in jedem Augenblick bestimmt, wenn diese Koordinatenänderungen $\xi\ \eta$ und ζ als Funktionen von $x\ y\ z$ und t entwickelt werden. Sie sollen so wie d. Weg dargestellt, wie man zu rechnen hat:

Das kleinste parallelepipedische Volumenelement erfährt bei d. Formänderung auch eine kl. Gestaltänderung. Bei d. vorausgesetzten sehr kleinen Änderungen ist diese Deformation aber so gering, dass man sie bei Vernachlässigung unendlich kl. Größen höherer Ordnung betrachten kann als bestehend aus einer kl. Längenänderung d. Kanten und einer Änderung d. von ihnen gebildeten ursprünglich rechten Winkel. Sind d. ursprünglichen Kantenlängen $= dx\ dy\ dz$, so seien d. veränderten Kantenlängen bezeichnet mit:

$$dx(1+\varepsilon_x) \qquad dy(1+\varepsilon_y) \qquad dz(1+\varepsilon_z),$$

wenn offenbar $\varepsilon_x\ \varepsilon_y$ und ε_z nichts anderes bedeuten als d. Ausdehnungen, welche im Punkte A nach d. Coordinatenrichtungen stattfinden. Ferner seien d. ursprünglich rechtwinkligen, veränderten Kantenwinkel

$$= \frac{\pi}{2} - \gamma_x, \quad \frac{\pi}{2} - \gamma_y \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} - \gamma_z,$$

wenn jetzt d. Werte von γ eine Verkleinerung d. rechten Winkels bedeuten.

Bekanntlich werden d. Größen γ auch verschieden in d. Elastizitätslehre aufgefasst, nämlich als d. spez. Verschiebungen d. h. als diejenige Strecke, um welche 2 parallele Ebenen im Abstand 1 (= Längeneinheit) an den correspondierenden Punkten A u. A_1 gegeneinander verschoben werden.

Man kann dann γ_x als d. Verschiebung einer zur Y Achse senkrechten Ebene nach d. Richtung d. Z Achse
oder " " " " " " Z Achse " " " d. Y Achse
γ_y " " " " " " Z " " " " X.
oder " " " " " " X " " " " Z.

etc.

Diese 3 Größen γ seien daher auch d. Verschiebungskomponenten im Punkte A nach den betreffenden Richtungen genannt.

Diese 6 Größen ε und γ sind nun durch d. schon vorher erwähnten Coordinatenänderungen $\xi\ \eta\ \zeta$ d. materiellen Punktes A bestimmt, u. zwar ist bekanntlich aus d. Elastizitätslehre für:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

und ferner:

$$\gamma_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$\gamma_y = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

$$\gamma_z = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Durch diese 6 Größen ε und γ, nämlich den Ausdehnungen $\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z$ im Punkte A nach den Richtungen d. Axen und den Verschiebungen $\gamma_x\ \gamma_y\ \gamma_z$ d. beziehungsweise diesen Richtungen parallelen Seitenebenen d. parallelepipedischen Elements nach den anderen Axenrichtungen ist d. Ausdehnung ε im Punkte A nach einer beliebigen Richtung bestimmt, nämlich durch folgende Gleichung, wenn $\alpha\ \beta\ \gamma$ d. Winkel sind, welche d. vorliegende Richtung mit den Axen bildet:

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_x \cos\beta\cos\gamma + \gamma_y \cos\gamma\cos\alpha + \gamma_z \cos\alpha\cos\beta.$$

(Dieser Ausdruck ganz analog gebildet demjenigen für d. Spannung σ in einem Punkte nach einer beliebigen Richtung)

Dieser Ausdruck für ε gestattet auch ganz analoge Folgerungen, wie derjenige für σ: so ist nämlich für jeden einzelnen Punkt eines Körpers d. algebraische Summe dieser Ausdehnungen ε für je 3 zu einander senkrechte Axen constant. Diese Summe d. Ausdehnungen ε nach 3 zu einander senkrechten Richtungen bedeutet aber nichts anderes als d. spez. Volumenausdehnung e im betreffenden Punkte. Es ist also:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

= Vergrößerung pro Volumeneinheit eines diesen materiellen Punkt enthaltenden Volumenelements beim Übergange vom ursprünglichen Zustand in d. veränderten Zustand.

Ferner wurde früher in d. Elastizitätslehre mit dem Ausdruck für ε gefunden, dass sich durch jeden materiellen Punkt A drei zu einander senkrechte Ebenen legen lassen, in welchen d. Verschiebungen $\gamma = 0$ sind, so dass also ein unendlich kl. parallelepipedisches Volumenelement, dessen von A ausgehende Seitenkanten im ursprünglichen Zustand in diese 3 ausgezeichneten Ebenen hineinfallen, auch nach dem veränderten Zustand in diese ausgezeichneten Ebenen hineinfallen, und also d. Element noch immer rechtwinklig parallelepipedisch bleibt und nur d. Kantenlängen sich ändern. Diese 3 ausgezeichneten Ebenen fallen mit denjenigen zusammen, in welchen d. Tangentialspannungen $t = 0$ sind. Denkt man sich 3 Richtungen normal zu den 3 ausgezeichneten Ebenen gezogen, so sind bekanntlich d. Spannungen und Ausdehnungen im Sinne dieser 3 Richtungen Hauptspannungen resp. Hauptausdehnungen; diese seien bezeichnet mit $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ resp. $\varepsilon_1\ \varepsilon_2$ und ε_3. Unter ihnen befinden sich auch (algebraisch verstanden) die größte und d. kleinste Normalspannung σ resp. Ausdehnung ε, welche im Punkte A nach irgend welchen Richtungen stattfinden.

Was nun d. Beziehungen zwischen d. Größen σ, t und ε zu betrifft, so enthalten diese Beziehungen außerdem noch von d. Beschaffenheit d. Körpers abhängige Constanten, welche sich jedoch für d. Fall eines durchaus isotropen Körpers d.h. eines Körpers, welcher nach allen Richtungen gleich beschaffen ist, auf bloß 2 reduzieren. Es ist dann nämlich von d. Elastizitätslehre her bekanntlich bei einem isotropen Körper:

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{e}{n-2}\right) = 2G\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{e}{n-2}\right)$$

$$\sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{e}{n-2}\right) = 2G\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{e}{n-2}\right)$$

$$\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{e}{n-2}\right) = 2G\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{e}{n-2}\right)$$

und ferner:

$$t_x = G\gamma_x = G\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

$$t_y = G\gamma_y = G\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)$$

$$t_z = G\gamma_z = G\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

In diesen Beziehungen zwischen σ, t und ε, γ kommen nur die beiden Constanten G u. n vor, während e als Volumenausdehnungscoefficient $= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ bekannt ist.

Die Systeme d. 6 Gleichungen lassen sich für gewisse Fälle bequemer und deutlicher aufstellen, wenn man umgekehrt d. Ausdehnungen $\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z$ als Functionen d. Spannungen $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z$ darstellt mit Hülfe d. Beziehung, welche zwischen G und n zu einer anderen Constanten E, d.h. Elastizitätsmodul stattfindet, nämlich:

$$E = 2\,\frac{n+1}{n}\,G\text{; man bekommt dann:}$$

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{n}$$

$$E\varepsilon_y = \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{n}$$

$$E\varepsilon_z = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{n}$$

Die Bedeutung d. Constanten E und n ist am deutlichsten zu erkennen, wenn man 2 d. 3 Normalspannungen z.B. σ_y u. $\sigma_z = 0$ setzt. Man bekommt dann:

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad \text{und} \quad n = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}$$

Es ist also d. Elastizitätsmodul E = dem Verhältniss einer Normalspannung zu entsprechender Ausdehnung, vorausgesetzt, daß in allen zu ersterer Richtung senkrechten Richtungen d. Normalspannungen $= 0$ sind. n dagegen ist d. [illegible] Verhältniss, unter derselben Voraussetzung, d. Ausdehnung [illegible] zu den resp. Ausdehnungen d. Richtungen, in welchen d. Normalspannungen $= 0$ sein sollen.

Bekanntlich sind die beiden Constanten E u. G für verschiedene Körper sehr bedeutend verschieden, während Constante n für alle Körper ungefähr denselben Werth zwischen 3 u. 4 hat. In d. Elastizitätslehre wird schon erwähnt, daß theoretische Untersuchungen auf Grund d. atomistischen Ansicht in Betreff d. Constitution

d. Materie vermuthen lassen, ist es sich nun gemäß d. Grenze 4 zu setzen, um [illegible] die isotropische Beschaffenheit d. Körpers ist.

Nimmt man d. Ausdrücke von $b_x\ b_y\ b_z$ $c_x\ c_y\ c_z$ in d. Gleichungen mit 2 [illegible], so erhält [illegible]:

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y} = 2g\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{1}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x}\right) + g\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) + g\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$= g\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right] + \frac{2}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right\}$$

Hierin ist nun aber offenbar: $\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e$ = Volumenausdehnungscoefficienten

Man hat also:

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y} = g\left[\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right]$$

Was nun ferner d. Beschleunigungscomponente φ_x betrifft, so sind, d. im Anfang angenommen wurde, daß d. Körper nur in relativer Bewegung gegen [illegible], wo ihr [illegible] Coordinatensystem sei, offenbar $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ d. Componenten d. relativen Geschwindigkeit d. Punktes A in Bezug auf d. genannte Coordinatensystem.

und also $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$ – $\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$ d. Beschleunigungscomponenten = φ_x resp. φ_y resp. φ_z

Durch d. Substitution erhält man also d. erst genannten Gleichungen in folgender Form, wobei man offenbar d. beiden letzteren durch d. entsprechenden Buchstabenvertauschungen aus d. ersteren erhalten kann:

$$g\left(\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) + \mu\left(X - \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right) = 0$$

$$g\left[\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right] + \mu\left[Y - \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right] = 0$$

$$g\left[\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right] + \mu\left[Z - \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right] = 0$$

Sind nun μ = ursprüngliche spec. Masse im Punkte $A(x\,y\,z)$ sowie d. Componenten $X\ Y\ Z$ der beschleunigenden Massenkraft als Function von $x\ y\ z$ gegeben, wie dies zur Lösung d. Aufgabe vorausgesetzt werden muß, so stellen d. obigen 3 Gleichungen, 3 gleichzeitige partielle Differentialgleichungen 2ten Grades d. abhängig Variabeln $\xi\ \eta\ \zeta$ nach $x\ y\ z$ den Coordinaten d. betreffenden Punktes. Aus diesen kann man nun mittelst entsprechender Integration mit Rücksicht auf d. gegebenen Oberflächenbedingungen (Oberflächenkräfte, Unterstützung od. Befestigung d. Körpers an gewissen Stellen d. Oberfläche) und den gegebenen Anfangszustand (insofern nur innerer Zustand für $t = 0$) die Größen $\xi\ \eta$ und ζ als endliche Functionen d. Coordinaten $x\ y\ z$ u. d. Zeit t bestimmen. Sind aber diese Functionen gefunden, so kennt man auch in jedem Augenblick den Zustand d. Körpers vollständig. Zunächst kennt man den äußeren Zustand od. Bewegungszustand indem durch d. 3 Geschwindigkeitscomponenten $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ d. relativen Bewegungszustand gegen das am Körper feste Coordinatensystem bestimmt ist als Function d. Coordinaten $x\ y\ z$ und d. Zeit t. Was den inneren Zustand betrifft, so ist dieser bekanntlich bestimmt durch den Spannungszustand im betreffenden Punkte und durch d. augenblickliche spec. Masse μ. Der Spannungszustand ist aber zu allernächst bestimmt durch d. 6 Spannungscomponenten σ – τ; indem diese aber nach den entsprechenden Formeln Functionen d. partiellen Ableitungen von $\xi\ \eta\ \zeta$ nach $x\ y\ z$ sind, ist nun auch d. Spannungszustand als Function von $x\ y\ z$ bestimmt.

Was d. spez. Masse im Punkte A (x y z) betrifft, so ändert sich diese natürlich, da $\mu = \frac{1}{v g}$, im umgekehrten Verhältnisse wie das spez. Volumen sich ändert. Da aber d. spez. Volumen sich in dem Verhältnisse $1 : 1+e$ vergrößert hat, so hat d. spez. Masse sich in dem Verhältnisse $1+e : 1$ verkleinert, so daß die spez. Masse im Punkte A bestimmt durch: $\frac{\mu}{1+e} = \mu(1-e)$ bei Vernachlässigung unendl. kl. Größen. e = Volumenausdehnungscoefficient wurde aber eine Function d. partiellen Ableitungen von $\xi\ \eta\ \zeta$ nach $x\ y\ z$ nämlich $e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ und welche selbst auch eine Function von $x\ y\ z$, so daß auch die veränderte spez. Masse als eine Function von $x\ y\ z$ bestimmt ist.

Es läßt sich indessen leicht übersehen, daß d. vorstehende Integration auf große Schwierigkeiten stößt, aus welchem Grunde bei d. späteren Anwendungen meist Vereinfachungen angenommen werden, und zwar wird in d. Regel allgemein vorausgesetzt, daß d. innere Zustand eines Körpers durch nur 2 Größen bestimmt sei.

In einem festen Körper ist dies dann d. Fall, wenn derselbe derartig durch Kräfte angegriffen wird, daß gar keine Tangentialspannungen sondern nur Normalspannungen vorkommen. Soll dies d. Fall sein, so ist natürlich dazu nöthig, daß d. Oberflächenkräfte nur normale Druckkräfte sind; denn wenn auch tangential an die Oberfläche d. Körpers gerichtete Kräfte vorhanden (z.B. Reibungen) so würden auch Tangentialspannungen entstehen. Daß, unter den gewissen Voraussetzungen nur normal gegen d. Oberfläche gerichteter Druckkräfte, wirklich d. Fall ist, daß d. innere Zustand eindeutig durch nur 2 Größen bestimmt ist, läßt sich folgendermaßen leicht beweisen.

Ist A ein Punkt d. Körpers mit den Coordinaten $x\ y\ z$, und ρ d. resultierende Spannung, mit den Richtungswinkeln $a\ b\ c$ gegen d. Axen, in einer durch A gelegten Ebene, deren Normale AB mit den Axen d. Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ bildet, dann ist nach Seite 10.3:

$$\rho \cos a = \sigma_x \cos\alpha + t_y \cos\gamma + t_z \cos\beta$$

etc. etc. etc. etc.

Wenn nun aber alle Tangentialspannungen t für beliebige Ebenen d. Körpers = 0 sein sollen, also

$$t_x = t_y = t_z = 0$$

so wird auch $a = \alpha$ $b = \beta$ und $c = \gamma$ für jede Richtung $\alpha\ \beta\ \gamma$, d.h. dann d. resultierende Spannung σ immer normal zur Spannungsebene gerichtet sein muß. Dementsprechend ist dann auch:

$$\rho = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z.$$

Wenn also in einem Körper derart keine Tangentialspannungen vorkommen, so ist d. Normalspannung in irgend einem Punkte für alle Ebenen gleich groß. In diesem Falle ist diese Normalspannung einzige Spannung im betreffenden Punkte überhaupt. Durch diese für jeden Punkt nach allen Richtungen constante Spannung σ ist dann auch d. Spannungszustand in d. betreffenden Punkte vollkommen bestimmt. Mit Rücksicht auf d. spez. Masse μ und diese Spannung σ ist demnach bei solcher Art von Spannungsformen d. Körpers stets innerer Zustand vollkommen bestimmt in dem betreffenden Punkte, wozu also nur 2 Größen σ und μ nöthig sind. Die Fundamentalgleichungen Seite 10.2 nehmen unter diesen Umständen dann folgende einfachere Form an:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \mu(X - \varphi_x) = 0 \; ; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \mu(Y - \varphi_y) = 0 \text{ und } \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \mu(Z - \varphi_z) = 0.$$

Von besonderer Wichtigkeit dabei ist besonders d. Fall, daß d. Körper sich in relativer Ruhe gegen d. Coordinatensystem befindet, also dann: $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ und welche d. Größen $\mu\ \xi\ \eta\ \zeta$ und Functionen von $x\ y\ z$, man hat dann durch Addition:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\mu(X dx + Y dy + Z dz) = d\sigma.$$

Und weil d. rechte Seite dieser Gleichung ($d\sigma$) das vollständige Differential einer Function von $x\ y\ z$ ist, so gilt dasselbe auch von d. linken Seite. Es muß also eine gewisse Function F von $x\ y\ z$ geben, welche so beschaffen sein muß daß:

$$\mu X = \frac{\partial F(xyz)}{\partial x} \; ; \quad \mu Y = \frac{\partial F(xyz)}{\partial y} \text{ und } \mu Z = \frac{\partial F(xyz)}{\partial z} \text{ ist.}$$

Mit der oben gefundenen Gleichung für $d\sigma$ folgt demnach:

$$d\sigma = -\,d\mathfrak{F}(x\,y\,z)$$

$$\text{also}\quad \sigma = -\,\mathfrak{F}(x\,y\,z) + \text{Constante.}$$

Diese Constante wird dadurch bestimmt, daß man den Werth von σ für einen gewissen Punkt d. Körpers kennt. Sind z. B. $x_0\,y_0\,z_0$ d. Coordinaten eines Punktes an d. Oberfläche des Körpers und p_0 d. äußere Oberflächendruck in dem betreffenden Punkt, so ist an dieser Stelle $\sigma = -p_0$

und also d. Constante $= \mathfrak{F}(x_0\,y_0\,z_0) - p_0$

Der Körper kann in diesem Fall durch Flächen gleicher Spannung, die man sich ebenso wie durch den Körper fortwährend gelegt denkt, in unendlich dünne Schichten zerlegt gedacht werden, so daß d. Spannung in jeder dieser Flächen gleich groß, dieselbe sich jedoch von Schicht zu Schicht ändert.

Die Gleichung einer solchen Fläche gleicher Spannung ist dann offenbar:

$\mathfrak{F}(x\,y\,z) = C$ wenn C als eine Constante bedeutend, welche entsprechend d. verschiedenen Flächen verschiedene Werthe zugetheilt werden kann.

Bemerkenswerth ist dabei noch d. Specialfall, daß nicht nur $\mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ ein vollständiges Differential d. Coordinaten $x\,y\,z$ ist, sondern daß schon $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ allein das vollständige Differential einer Function von $x\,y\,z$ ist, daß also:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = df(x, y\,z) \text{ ist.}$$

In diesem Falle ist dann:

$$d\sigma = -\,\mu\, df(x, y, z)$$

und da wieder d. linke Seite ein vollständiges Differential von $x\,y\,z$ ist, so muß auch d. rechte Seite ein vollständiges Differential sein d. h. es muß μ eine Function d. Function f sein.

Wenn man also sich den Körper wieder in unendlich dünne Schichten zerlegt denkt, deren Flächengleichungen sind: $f(x\,y\,z) = C$ unter C verschiedene Constanten verstanden, so ist in allen Punkten dieser Flächen nicht nur d. Spannung σ sondern auch d. spec. Masse μ constant.

Wenn nun noch d. specielle Fall eintritt, daß d. Körper äußeren Massenkräften nicht ausgesetzt, also daß deren Componenten $X\;Y\;Z = 0$ sind, so daß nur d. äußere Oberflächendruck vorhanden ist, so ist auch d. vollständige Differential d. Function $f = 0$; die Function f selbst also hat dann einen constanten Werth für den ganzen Körper. Dementsprechend muß dann auch in allen Punkten d. Körpers gleiche Spannung σ und eine gleich große Massendichte sein, ferner muß dann auch d. äußere Druck p_0 für alle Punkte d. Oberfläche constant sein, es müßte also d. Körper von allen Seiten einem gleich starken Druck ausgesetzt sein. Wenn jedoch umgekehrt gegeben ist, daß p_0 in allen Punkten d. Oberfläche gleich groß ist, so ist damit durchaus nicht ausgesprochen, daß in allen Punkten d. Körpers gleiche Spannungen und gleich große Massen vorhanden sind, sondern es würde nur daraus folgen, daß d. Oberfläche d. Körpers eine Fläche gleicher Spannung ist.

Anwendung d. Fundamentalgleichungen auf einen flüssigen Körper im weiteren Sinne d. Wortes.

Zunächst wird es nun darauf ankommen die Seite 10 gefundenen Fundamental-Differentialgleichungen zur Untersuchung d. Gleichgewichtszustandes einer Flüssigkeit (im weiteren Sinne) auf eine solche Form zu bringen, wie sie sich für Flüssigkeiten ergeben. Es wurde damals gefunden:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \mu(X - \varphi_x) = 0$$
etc

In den Größen σ und τ sind jedoch jetzt nicht nur Spannungscomponenten sondern auch Componenten d. inneren Reibungen enthalten.

Zu letzteren Bestimmungen, wonach d. Flüssigkeit beurtheilt werden soll, ist zu bemerken, daß man dieselbe nicht in derselben Weise auffassen kann wie früher, wenigstens würde dieses keinen Nutzen bringen da das im Körper häufig Auftretende mit der Bewegung d. Körpers vielleicht selbst nicht so genau zu bestimmende Bewegung annehmen könnte. Man nimmt deshalb jetzt an, d. Flüssigkeit in relativer Bewegung ist, an, daß d. Coordinatenaxen innerhalb derselben fest gedacht wird an d. Gefäß, d. Röhre, den Canal, überhaupt an d. festen Wände, innerhalb welcher d. Bewegung d. Flüssigkeit begrenzt wird. $x\ y\ z$ seien d. augenblicklichen Coordinaten irgend eines Punktes A; diese Coordinaten können in zweifacher Weise aufgefaßt werden, jenachdem man den Punkt A als einen räumlichen Punkt oder als den materiellen Punkt d. Flüssigkeit betrachtet, welcher sich augenblicklich im Punkte A d. Raumes befindet. Im ersteren Falle sind d. Coordinaten $x\ y\ z$ von einander unabhängige Variable, die sich ändern, wenn man von einem zu einem anderen Punkte fortschreitet. Betrachtet man aber d. Punkt als den materiellen Punkt d. Flüssigkeit, welcher sich zur Zeit t im Punkte A d. Raumes befindet, so sind d. Coordinaten $x\ y\ z$ Functionen d. Zeit t.

Es seien ferner für den Punkt A d. Raumes zur Zeit t, die specifische Masse $= \mu$, die Componenten d. beschleunigenden Massenkraft $= X, Y, Z$, d. Componenten d. Beschleunigung $= \varphi_x\ \varphi_y\ \varphi_z$ und d. Componenten d. Geschwindigkeit $= u\ v\ w$, alle Componenten im Sinne d. Coordinatenaxen genommen. Alle diese Größen sind, wenn man sie auf den räumlichen Punkt d. Raumes bezieht, Functionen der bei dieser Auffassung unabhängigen Variabeln $x\ y\ z$ u. t. Betrachtet man jedoch d. Größen als sich beziehend auf den materiellen Punkt d. Flüssigkeit, welcher sich zur Zeit im Punkt $A(x\,y\,z)$ d. Raumes befindet, so sind $x\ y\ z$ Functionen von t und einige mittelbar auch d. anderen Größen Functionen von t. In dem letzteren Sinne sollen nun d. Größen aufgefaßt werden, in welchem also d. Coordinaten $x\ y\ z$ Functionen d. Zeit t und d. anderen fraglichen Größen mittelbare Functionen von t sind.

Die Geschwindigkeitscomponenten sind dann offenbar:

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt} \quad \text{und} \quad w = \frac{dz}{dt}$$

Ferner ist bekanntlich d. Beschleunigungscomponente: $\varphi_x = \frac{du}{dt}$, da nun u eine Function von $x\ y\ z$ ist, diese Werthe selbst aber wieder Functionen von t sind, also u nur eine mittelbare Function von t ist, so folgt nach d. bekannten Formel d. Differentiation:

$$\varphi_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

oder für d. Quotienten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ d. Geschwindigkeitscomponenten eingesetzt:

$$\varphi_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

Analog natürlich: $$\varphi_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varphi_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Was nun in den fraglichen Fundamentalgleichungen die Componenten d. inneren Flächenkräfte σ und τ betrifft, so schließen diese Größen sich im Allgemeinen Componenten d. Spannungen und d. inneren Reibungen in sich. Hinsichtlich d. Spannungen, welche in den inneren Flächenkräften vorkommen, für d. hydraulische Flüssigkeit dahin ergänzt, daß ihre Massenelemente nicht nur einer unbeschränkten Gestaltänderung fähig sind, sondern daß einer solchen an und für sich d. abgesehen von d. einer gleichzeitig stattfindenden Volumenänderung und relativ schiebenden Bewegung, sich auch kein Widerstand entgegensetze. Wenn man dann, wenigstens was tropfbare Flüssigkeiten betrifft, die mathematische Untersuchung auf solche **vollkommene Flüssigkeiten** beschränkt, welche (wie luftförmige Flüssigkeiten unbedingt) jener vorausgesetzten vollkommenen widerstandslosen Gestaltänderung d. Massenelemente entsprechen, so sind d. Tangentialspannungen = Null und also d. Größen τ lediglich innere Reibungen, während d. Größen σ außer Normalspannungen auch von d. inneren Reibungen bedingt sind, unter d. Spannungen aber natürlich lediglich Normalspannungen sind. Da diese aber bei Flüssigkeiten der bisher ausgeführten Voraussetzung gemäß meistens negativ sind, wenigstens nur bei tropfbar flüssigen Körpern kleine positive Werthe haben können, so empfiehlt es sich besonders zweckmäßiger, um diese mit positiven Werthen rechnen zu können, statt dieser Normalspannungen d. entgegengesetzten Pressungen einzuführen.

Es seien ferner p_x p_y p_z d. Pressungen, welche in d. Flüssigkeit stattfinden in einem Punkte $A\,(x\,y\,z)$ für Ebenen, welche zu den Richtungen Ax Ay Az senkrecht sind. Legt man durch diesen Punkt A eine beliebige Ebene, deren Normale AB mit den Axen die Winkel α β γ bildet, so sei p d. Pressung im Punkte A auf diese beliebige Ebene.
Die früher eingeführten Bezeichnungen b_x b_y und b_z für die Componenten d. inneren Flüssigkeitskraft, sollen jetzt nur für d. Normalcomponenten d. inneren Reibungen im Punkte A für die zu Ax Ay und Az senkrechten Ebenen bezeichnen, so daß dieselben Größen, welche früher mit b_x b_y b_z bezeichnet wurden, jetzt sind:

$$\mathfrak{b}_x = -p_x + b_x \qquad \mathfrak{b}_y = -p_y + b_y \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}_z = -p_z + b_z$$

Es haben also jetzt die neuen Bezeichnungen b_x b_y b_z eine beschränktere Bedeutung bekommen, indem sie sich nur auf d. inneren Reibungen und nicht mehr auf d. inneren Flüssigkeitskräfte überhaupt beziehen. Nach den Formeln 3 Seite 10 sind dann d. 3 Componenten d. inneren Flüssigkeitskraft, welche im Punkte A d. Ebene $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ nach den rechtw. Coordinatenaxen stattfinden:

im Sinne d. x Axe $= \quad (-p_x + b_x)\cos\alpha + t_y\cos\gamma + t_z\cos\beta$

im Sinne d. y Axe $= \quad (-p_y + b_y)\cos\beta + t_z\cos\alpha + t_x\cos\gamma$

im Sinne d. z Axe $= \quad (-p_z + b_z)\cos\gamma + t_x\cos\beta + t_y\cos\alpha$

Während wir früher die Größe einer Flüssigkeitskraft im Punkt A d. schiefen Ebene mit ϱ bezeichnet haben, und seine Richtungswinkel gegen d. Axen mit $a\,b\,c$, soll jetzt unter ϱ nur d. innere resultierende Reibung verstanden werden, welche im Punkte A d. Ebene $\alpha\,\beta\,\gamma$ stattfindet. Die resultierende innere Flüssigkeitskraft im Punkte A d. Ebene $\alpha\,\beta\,\gamma$ besteht demnach aus zwei Theilen, nämlich aus d. Pressung und d. inneren Reibungen. Die Pressung p oder jene Normalpressung ist $=$ negativen Pressung $-p$. Da diese Pressung $-p$ normal zur Ebene $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ gerichtet ist entsprechend d. Anschauung einer vollkommenen Flüssigkeit, so sind auch ihre Richtungswinkel mit d. Axen $= \alpha\,\beta\,\gamma$, und demnach ihre Componenten im Sinne d. Axen $= \quad -p\cos\alpha \quad -p\cos\beta \quad -p\cos\gamma$.
Jetzt bekommen wir, wenn d. Componenten d. inneren resultierenden Flüssigkeitskraft im Sinne d. Axen zerlegt werden, d. Componenten der inneren Reibungen $\varrho\cos a$ $\varrho\cos b$ $\varrho\cos c$, und demnach d. Componenten d. inneren Flüssigkeitskraft im Sinne d. Axen mit Rücksicht auf d. obigen Gleichungen finden:

$$-p\cos\alpha + \varrho\cos a = (-p_x + b_x)\cos\alpha + t_y\cos\gamma + t_z\cos\beta$$

$$-p\cos\beta + \varrho\cos b = (-p_y + b_y)\cos\beta + t_z\cos\alpha + t_x\cos\gamma$$

$$-p\cos\gamma + \varrho\cos c = (-p_z + b_z)\cos\gamma + t_x\cos\beta + t_y\cos\alpha$$

Wenn man nun d. Annahme macht, wie sie bei den theoretischen Untersuchungen über d. Flüssigkeitsreibung fast allgemein zu Grunde gelegt werden, daß die Pressung und die innere Reibung sich unmittelbar nicht gegenseitig bedingen, oder eigentlich innere Reibung nur von den äußeren Reibungen zu unterscheiden ist, indem erstere z. B. bei festen Körpern sich nach d. Pressung richtend bedingen können, daß also wie es auch durch Versuchungen bestätigt wurde p und ϱ sich und mithin auch deren Componenten sich nicht gegenseitig bedingen, so müssen die obigen 3 Gleichungen von den Pressungen unabhängig von den Werthen d. inneren Reibungen, und ebenso von letzteren unabhängig von den Werthen d. ersteren erfüllt werden. Sie müssen also auch ohne d. inneren Reibungen erfüllt werden, wenn man d. ~~[illegible]~~ inneren Reibungscomponenten $= 0$ setzt, wie es d. Fall ist, wenn d. Flüssigkeit sich in relativer Ruhe befindet. Die 3 Gleichungen geben dann mit $\varrho = 0$: $\quad p = p_x = p_y = p_z$

demnach sind d. Pressungen in d. betreffenden Punkte gleich groß für alle Ebenen, welche man durch den Punkt hindurch legen kann. Man bezeichnet daher auch p schlechtweg als d. Pressung d. Flüssigkeit in dem betreffenden Punkte. Sie bestimmt natürlich zusammen mit d. spec. Masse μ (od. dem spec. Volumen resp. d. spec. Gewicht) den inneren Zustand in diesem Punkte.

Mit Rücksicht darauf, daß d. 3 Gleichungen auch für d. Pressungen $p = 0$ von den inneren Reibungen erhalten werden müssen, lauten d. Beziehungen:

$$\rho \cos a = \sigma_x \cos\alpha + \tau_y \cos\gamma + \tau_z \cos\beta$$

$$\rho \cos b = \sigma_y \cos\beta + \tau_z \cos\alpha + \tau_x \cos\gamma$$

$$\rho \cos c = \sigma_z \cos\gamma + \tau_x \cos\beta + \tau_y \cos\alpha$$

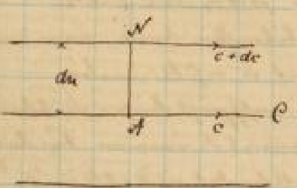
Wegen dieser vollkommenen Übereinstimmung d. Gleichungen für d. inneren Reibungen mit den Seite 10. 3 aufgestellten Gleichungen für die inneren Flächenkräfte überhaupt, wird man auch ganz analoge Folgerungen hinsichtl. d. inneren Reibungen ziehen können wie solche ebenmäßig früher hinsichtl. d. inneren Flächenkräfte im Allgemeinen gezogen wurden, und die Sätze direct auf d. entsprechenden inneren Reibungen übertragen. Wenn man also mit σ d. Normalcomponente d. inneren Reibung für eine beliebige Ebene $\alpha\beta\gamma$ bezeichnet, so ist:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + 2\tau_x \cos\beta\cos\gamma + 2\tau_y \cos\alpha\cos\gamma + 2\tau_z \cos\alpha\cos\beta$$

und hieraus kann wieder d. bekannten analogen Schluß wieder gezogen, daß in jedem Punkte A d. Summe d. Normalcomponenten d. inneren Reibungen für je drei sich rechtwinklig schneidende Ebenen constant ist.

Es handelt sich nun darum Ausdrücke zu finden für d. Componenten d. inneren Reibungen und zwar zunächst für d. tangentialen Reibungscomponenten $\tau_x\ \tau_y\ \tau_z$.

In dieser Beziehung ist eine Annahme zu Grunde zu legen, welche schon von Newton gemacht wurde, und seitdem auch von d. meisten Autoren beibehalten und durch zahlreiche Erfahrungen bestätigt worden ist, von denen in d. Hydraulik später d. Rede sein wird:

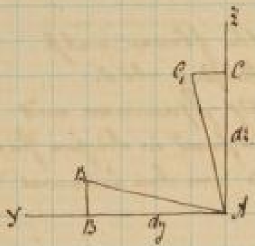


Denkt man sich 2 benachbarte unendlich kleine dünne Flüssigkeitsebenen, von d. Dicke dn, von denen d. untere aber in d. Richtung d. Schnitts eine Geschwindigkeit $= c$ und die andere in derselben Richtung eine Geschwindigkeit $= c + dc$ hat, so daß also d. obere Schicht sich gegen d. untere mit einer relativen Geschwindigkeit $= dc$ bewegt, so wird durch diese relativ gleitende Bewegung Reibungen entstehen. Die bezügl. Annahme ist nun die, daß diese Reibungen zwischen 2 solchen Flüssigkeitsschichten proportional dem Differentialquotienten $\frac{dc}{dn}$ sei, also proportional d. Schnelligkeit, mit welcher sich d. Geschwindigkeit von einer zur anderen Schicht ändert. Da, wenn man sich d. Normale AN um A mit dn fortschreitend denkt, offenbar ist dieser Quotient $\frac{dc}{dn}$ auch d. Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich AN gegen AC hin dreht, oder d. Winkelgeschwindigkeit mit welcher sich d. rechte Winkel NAC verkleinert. Bezeichnet man nun analog den früheren Bezeichnungen für d. Tangentialspannungen, die innere Reibung im Punkte A an der zu AN senkrechten Ebene im Sinne d. Richtung AC mit τ_{nc}, so ist diese nach der Newton'schen Annahme:

$$\tau_{nc} = R\,\frac{dc}{dn}$$

und zwar d. innere Reibung bezogen auf d. Kraft, welche die im Sinne AN an die betreffende Ebene grenzende Flüssigkeitsschicht auf d. Flächeneinheit d. Ebene ausübt. Hierin ist R eine durch Erfahrung und Versuche zu bestimmende Constante, welche jedoch für verschiedene Flüssigkeiten ebenso natürlich für verschiedenen Zustand d. Flüssigkeit verschiedene Werthe annehmen kann.

C



Es sei nun A ein beliebiger materieller Punkt der Flüssigkeit, dessen Coordinaten zur Zeit t = x y z sind. Von A aus seien zur Zeit t 2 Richtungen gezogen parallel der y und z Axe des Coordinatensystems innerhalb der Flüssigkeit gezogen worden. B sei ein materieller Punkt auf AY in der Entfernung AB = dy von A, und C ein anderer materieller Punkt auf AZ in der Entfernung dz von A.

In dem betreffenden Augenblick t sei nun angenommen worden die Geschwindigkeit des Punktes A im Sinne der Y Axe = v. die Geschwindigkeit des Punktes C also im Sinne der Y Axe = $v + \frac{dv}{dz}dz$, und demnach die relative Geschwindigkeit von C gegen A im Sinne der Y Axe = $\frac{dv}{dz}dz$. Vermöge dieser relativen Geschwindigkeit wird C gegen A im Zeitelement dt um ein kl. Stück CC_1 verschoben und offenbar ist:

$$CC_1 = \frac{dv}{dz}\,dz\,dt$$ = partielle relative Verrückung von C gegen A im Sinne AY im Zeitelemente dt.

Ebenso ist im demselben Augenblick t die Geschwindigkeit von A im Sinne der Z Axe = w und also die Geschwindigkeit von B im Sinne der Z Axe = $w + \frac{dw}{dy}dy$, demgemäß die relative Geschwindigkeit von B gegen A im Sinne der Z Axe = $\frac{dw}{dy}dy$ und ferner ist im Zeitelemente dt die partielle relative Verrückung BB_1 von B gegen A im Sinne der Z Axe:

$$BB_1 = \frac{dw}{dy}\,dy\,dt$$

Nun wird aber der unendlich kl. Winkel $C\hat{A}C_1 = \frac{CC_1}{AC} = \frac{CC_1}{dz} = \frac{dv}{dz}dt$

und der unendlich kl. Winkel $B\hat{A}B_1 = \frac{BB_1}{AB} = \frac{BB_1}{dy} = \frac{dw}{dy}dt$

Es ist offenbar die Verkleinerung des rechten Winkels BAC = der Summe dieser beiden kl. Winkel also:

$$= B\hat{A}B_1 + C\hat{A}C_1 = \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)dt$$

und demgemäß die Winkelgeschwindigkeit mit welcher diese Verkleinerung des rechten Winkels BAC augenblicklich d.h. zur Zeit t stattfindet:

$$= \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$$

Diese Verkleinerung des rechten Winkels BAC kann man nun einerseits betrachten als die resultierende relative Verschiebung des Punktes C gegen A in der Richtung AB_1, weil die BAB_1 und CAC_1 unendlich kl. Winkel sind, man also die Verschiebung CC_1 als parallel zu AB betrachten kann, kann man die Verkleinerung des rechten Winkels BAC auch betrachten als das Resultat der resultierenden relativen Verschiebung von C gegen A im Sinne AB. Bei dieser Auffassung entspricht dieser Verkleinerung des rechten Winkels dem Newton'schen Gesetz zu Folge eine Tangentialcomponente der inneren Reibung, welche im Punkte A in der zur Z Axe senkrechten Ebene im Sinne der Y Axe stattfindet und also mit t_{zy} zu bezeichnen wäre.

Andererseits kann die Verkleinerung des rechten Winkels BAC auch betrachtet werden, als die relative Verschiebung des Punktes B gegen AC, welche Auffassung eine Tangentialcomponente t_{yz} der inneren Reibung im Punkte A in der zur Y Axe senkrechten Ebene im Sinne der Z Axe stattfindend bedingen würde.

Natürlicherweise muß demnach beide $t_{yz} = t_{zy}$ sein, es kommen also auch hier ebenso wie früher die Tangentialcomponenten der Spannungen, die Tangentialcomponenten der inneren Reibungen immer paarweise vor und zwar sind sie auch wieder paarweise einander gleich.

Man kann also für $t_{zy} = t_{yz}$ auch die bekannte Bezeichnung t_x einführen.

Nach dem Navier'schen Princip ist nun, da $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$ die Winkelgeschwindigkeit ist, mit welcher die Verkleinerung des rechten Winkels BAC zur Zeit t vor sich geht,

$$t_x = R\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)$$ und ferner durch analoge Ausdrücke für t_y und t_z diese Reibungscomponenten:

$$t_y = R\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)$$

$$t_z = R\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)$$

Kennt man also d. Tangentialcomponenten d. inneren Reibungen durch d. Geschwindigkeitscomponenten ausgedrückt.

Es fragt sich nun, wie weiter auch d. Normalcomponenten d. inneren Reibungen in derselben Weise auszudrücken. Jedenfalls sind nach dem Newton'schen Princip die Normalcomponenten $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z$ d. inneren Reibungen im Punkte A für d. betreffenden Coordinatenebenen yAz, zAx und xAy auch als lineare Functionen d. partiellen Differentialquotienten der Geschwindigkeitscomponenten $u\ v\ w$ nach $x\ y\ z$ anzunehmen. Damit ist aber nichts viel gewonnen, indem jede d. Normalcomponenten aus 9 Gliedern bestehen könnte (d. $u\ v\ w$ nach $x\ y\ z$ partiell differentiirt neun verschiedene Differentialquotienten ergibt). Eine Beschränkung in dieser Hinsicht ergibt sich jedoch zunächst aus folgender Betrachtung:

Man denke sich von A aus eine beliebige Richtung AS gezogen, bestimmt durch d. Richtungscosinus $\alpha\ \beta\ \gamma$, dann von A aus ein unendlich kl. Stück $AA_1 = dS$ abgetragen; C sei d. Geschwindigkeit d. Punktes A nach d. Richtung AS zur Zeit t. Diese Geschwindigkeit C ist aber nach d. Mechanik bekanntlich dargestellt durch d. algebraische Summe d. aus den Geschwindigkeitscomponenten $u\ v\ w$ gebildeten Parallelprojectionen, also:

$$C = u\cos\alpha + v.\cos\beta + w.\cos\gamma \quad — \mathrm{I}$$

Ähnliche Formel bekommt man nun d. Geschwindigkeit d. Punktes A_1, $= C + dC$, im Sinne AS, wenn man für $u\ v\ w$ die Geschwindigkeitscomponenten von A_1 substituirt. Die Geschwindigkeitscomponente von A_1 im Sinne d. X Achse ist aber offenbar $= u +$ d. partiellen Ableitung von u nach $x\ y\ z$, indem beim Übergange von A nach A_1 sich gleichzeitig $x\ y\ z$ ändern. Man hat also in d. obigen Formel zu setzen

anstatt $u.\cos\alpha$ — $\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)\cos\alpha$

und anstatt: $v.\cos\beta$ — $\left(v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)\cos\beta$

und $w.\cos\gamma$ — $\left(w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)\cos\gamma$

demnach ist die Geschwindigkeit d. Punktes A_1 zur Zeit t im Sinne d. Richtung AS:

$$C + dC = \left\{\begin{array}{l} \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)\cos\alpha \\ \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)\cos\beta \\ \left(w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)\cos\gamma \end{array}\right\} \quad — \mathrm{II}$$

Zieht man nun Gleichung I von II ab, so bekommt man, wenn man noch berücksichtigt, daß $\frac{dx}{dS} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{dS} = \cos\beta$ und $\frac{dz}{dS} = \cos\gamma$ ist, und wenn man noch durch dS dividirt:

$$\frac{dC}{dS} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos^2\beta + \frac{\partial w}{\partial z}\cos^2\gamma + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma$$
$$+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta \quad — \mathrm{III}$$

Wie man sieht, ist dieser Ausdruck für $\frac{dC}{dS}$ vollständig analog mit d. Abhängigkeit von den Richtungscosinus $\alpha\beta\gamma$ jenen, die Seite 10–12 gefundenen Ausdrücken für d. Normalspannung C und Ausdehnung ε, welche im Punkte A nach d. Richtung $AS\ (\alpha\beta\gamma)$ stattfinden. Man kann deshalb auch in dieser Hinsicht ganz analoge Folgerungen ziehen, d. h. es folgt aus dieser Analogie, daß für d. Geschwindigkeiten $C_1\ C_2\ C_3$ im Punkte A nach irgend 3 zu einander senkrechten Richtungen $AS_1\ AS_2\ AS_3$ die folgende constante Relation besteht, wie man auch immer d. Anordnung derselben mag:

$$\frac{de_1}{ds_1} + \frac{de_2}{ds_2} + \frac{de_3}{ds_3} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

Diese constante Summe für je 3 zu einander senkrechte Richtungen in demselben Punkte der partiellen Ableitungen der Geschwindigkeitscomponenten nach den Coordinaten $x\ y\ z$, welche in der Folge mit Δ bezeichnet werden soll, hat eine leicht einzusehende Bedeutung.

$$\Delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

Denkt man sich von A als Eckpunkt ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepiped mit den Kanten $dx\ dy\ dz$ construirt, sodass der gegenüberliegende Eckpunkt von A — A_1 die Coordinaten $x+dx$, $y+dy$ und $z+dz$ hat, so herrscht in der zur x Axe senkrechten, durch A gehenden Seitenebene $dy.dz$ augenblicklich die Geschwindigkeit u im Sinne der x Axe also senkrecht zur Ebene $dy.dz$. Folglich ist das Volumen der Flüssigkeit, welche in dem Zeitelement dt durch diese Ebene $dy\,dz$ in das Parallelepiped hineinfließt $= dy.dz\ u.dt$. Andererseits hat die durch den Punkt A_1 gehende senkrecht zur x Axe stehende Ebene eine Geschwindigkeit im Sinne der x Axe erlangt: $u + \frac{du}{dx}dx$, und daher das Volumen der Flüssigkeit, welche im Zeitelement dt durch diese Ebene $dy.dz$ aus dem Parallelepiped herausfließt:

$$= dy.dz\left(u + \frac{du}{dx}dx\right)dt.$$

und also die Differenz der Volumina, welche im Zeitelement dt durch die von A_1 begrenzte Ebene $dy\,dz$ aus dem parallelepipedischen Raumelement mehr herausfließt, als durch die von A begrenzte Ebene $dy\,dz$ hineinfließt:

$$= dy\,dz\,\frac{du}{dx}\,dx.dt$$

Ebenso ist:

$$\left.\begin{aligned} &dz\,dx.\frac{dv}{dy}\,dy\,dt \\ \text{und}\quad &dx.dy\,\frac{dw}{dz}\,dz.dt \end{aligned}\right\} = \text{dasjenige Flüssigkeitsvolumen}$$

welches im Sinne der y Axe resp. z Axe als durch die zur y Axe resp. z Axe senkrechten Seitenebenen während der Zeitelemente mehr aus dem Raumelement $dx\,dy\,dz$ heraus als hineinfließen. Die Summe aller dieser Ausdrücke, ergibt:

$= dx\,dy\,dz\,\Delta\,dt$ ist das Flüssigkeitsvolumen, welches im Zeitelement dt mehr aus dem parallelepipedischen Raumelement heraus, als hineinfließt.

Man kann demnach Δ als die Ausdehnung bezeichnet werden, welche dieses Raumelement $dx\,dy\,dz$ per Volumeinheit in der Zeiteinheit ~~dt~~ erfahren würde, wenn es um das Volumen der ausströmenden Flüssigkeit zunähme und um das der hineinfließenden Flüssigkeit verkleinert würde, und wenn der augenblickliche Bewegungszustand der Flüssigkeit während der Zeiteinheit unverändert bliebe. Da nun diese Größe Δ für jedes bei A liegende Raumelement gleich groß ist, so ergibt Δ ein Maaß für die Geschwindigkeit, mit welcher die Volumenänderung der Flüssigkeit im Punkte A stattfindet. Da nun weiter auch die Summe der Normalcomponenten der inneren Reibungen nach 3 zu einander senkrechten Richtungen $= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ für den betreffenden Punkt einen constanten Werth haben muß, wie man nach der Herleitung derselben sieht, so können mit Rücksicht auf die gleichartige Ableitung der erhaltenen Gleichungen, die sich nicht durch Bevorzugung einer Axe vor den anderen, da man eine Flüssigkeit als vollkommen isotropen Körper ansehen kann, die Normalcomponenten der inneren Reibungen im Allgemeinen folgende Ausdrücke haben:

(σx müssen auf x, σy auf y und σz auf z gleichbedeutend gebildet werden)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= S\frac{du}{dx} + T\Delta \\ \sigma_y &= S\frac{dv}{dy} + T\Delta \\ \sigma_z &= S\frac{dw}{dz} + T\Delta \end{aligned}\right\}$$

wo S und T noch zu bestimmende Constante sind. Bildet man die Summe $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ so bekommt man auf der anderen Seite der Gleichung offenbar $= S\Delta + 3T\Delta = (S+3T)\Delta =$ Constante Summe.

daß diese Normalkomponenten d. inneren Reibungen keine andern Ausdrücke annehmen können, ist übrigens selbständig klar, wenn sie überhaupt Gleichungen sein sollen, daß ihre Summe $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ immer [illegible] ist und daß man den einen Ausdruck aus den andern durch bloße Buchstabenvertauschung gewinnen kann.

Ferner kann man nun aber noch weiter schließen, daß d. letzten mit Δ verbundenen Glieder gar nicht vorkommen dürfen:

Denkt man sich nämlich, daß d. Bewegung d. Flüssigkeit im Punkte A nur im Sinne d. yz Ebene stattfindet, daß also d. Bewegung in d. Richtung d. x Axe $= 0$ also $u = 0$ und $\frac{du}{dx} = 0$ ist, so muß offenbar d. innere Reibung im Punkte A d. Ebene yz eine Richtung in d. Ebene yz [illegible] haben, und demnach d. Normalkomponente d. inneren Reibung im Sinne d. x Axe also $\sigma_x = 0$ sein. Wenn aber $\sigma_x = 0$ werden soll mit $u = 0$ und $\frac{du}{dx} = 0$, so darf natürlich d. letzte Glied mit Δ gar nicht vorkommen, es muß also ~~dann auch~~ $T = 0$ sein und man hat:

$$\sigma_x = S\frac{du}{dx}$$

ebenso erhält man d. analogen Ausdrücke mit den andern Ausdrücken für d. Normalkomponenten und erhält: $\sigma_y = S\frac{dv}{dy}$ und $\sigma_z = S\frac{dw}{dz}$

Es fragt sich nun nur noch welche Beziehungen zwischen d. Constanten S und d. Constanten R bestehen. Um diese zu erkennen, sei von A aus eine beliebige Richtung $AS(\alpha\,\beta\,\gamma)$ gezogen, c sei d. Geschwindigkeit d. Punktes A nach AS zur Zeit t; nach dem Obigen ist dann d. Normalkomponente σ d. inneren Reibung im Punkte A für die zu AS senkrechte Ebene:

$$\sigma = S\frac{dc}{ds}$$

wenn man unter dc d. Änderung d. Geschwindigkeit c begreift, welche diese erleidet, wenn man nach d. Richtung AS um ds fortschreitet.
Mit Rücksicht auf den Seite 21 III gefundenen Werth von $\frac{dc}{ds}$ ist nun aber:

$$\sigma = S\left[\frac{du}{dx}\cos^2\alpha + \frac{dv}{dy}\cos^2\beta + \frac{dw}{dz}\cos^2\gamma\right] + \frac{S}{R}\left[\tau_x\cos\beta\cos\gamma + \tau_y\cos\gamma\cos\alpha + \tau_z\cos\alpha\cos\beta\right]$$

indem man für die darin stehenden Ausdrücke $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \frac{\tau_x}{R}$ für $\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{\tau_y}{R}$ etc. setzt mit Rücksicht auf die Seite 20 gefundenen Werthe von $\tau_x\ \tau_y$ und τ_z.
Seite 10, 4 wurde aber schon ein anderer Ausdruck für σ gefunden, welcher bezüglich d. Richtungswinkel $\alpha\,\beta\,\gamma$ genau ebenso wie dieser gebildet ist, wo aber nämlich d. Coefficienten S im ersten Glied 1 und statt des Coefficienten $\frac{S}{R} = 2$ steht. Damit also d. oben gewonnene Gleichung, wie es sein muß, für alle Werthe von $\alpha\,\beta\,\gamma$ mit d. Seite 10, 4 gefundenen übereinstimmen, muß $S = 2R$ sein und demnach d. Normalkomponenten:

$$\sigma_x = 2R\frac{du}{dx} \qquad \sigma_y = 2R\frac{dv}{dy} \quad \text{und} \quad \sigma_z = 2R\frac{dw}{dz} \quad \text{———} \quad a$$

wenn R eine noch auf experimentellem Wege zu bestimmende Constante ist.

Hiermit wären nun d. Vorarbeitungen beendigt, die nöthig waren um d. sogenannten Fundamentalgleichungen auf d. gewünschte Form zu bringen, in welcher dieselben für d. Untersuchung d. Zustandsänderungen flüssiger Körper am zweckmäßigsten ist.
Die erste Fundamentalgleichung war:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_y}{dz} + \frac{d\tau_z}{dy} + \mu(X - \varphi_x) = 0$$

In diese hat man nun nach Seite 18 für $\sigma_x = -p + \sigma_x$; für $\sigma_y = -p + \sigma_y$ und für $\sigma_z = -p + \sigma_z$ zu setzen, wenn p d. spec. ~~Druck~~ d. Flüssigkeit und σ die Normalkomponenten d. inneren Reibungen bedeuten. Die Größen $\tau_x\ \tau_y$ und τ_z bedeuten jetzt nur d. Tangentialkomponenten d. inneren Reibungen. Für $\frac{d\sigma_x}{dx}$ hat man also mit Rücksicht auf den unter a gefundenen Werthen σ_x zu setzen: $= -\frac{dp}{dx} + 2R\frac{d^2u}{dx^2}$ ebenso für $\frac{d\sigma_y}{dy} = -\frac{dp}{dy} + 2R\frac{d^2v}{dy^2}$ etc.

Ferner ist zufolge Seite 17 für φ_x zu setzen: $\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}$ etc. und endlich noch für $\tau_y\,\tau_z$ d. Seite 20 gefundenen Werthe einzusetzen. Setzt man dies ein, so bekommt man die erhält die Fundamentalgleichungen in folgender Form:

$$-\frac{dp}{dx} + 2\mathfrak{K}\frac{d^2u}{dx^2} + \mathfrak{K}\left(\frac{d^2w}{dx\cdot dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \mathfrak{K}\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2v}{dx\,dy}\right) + \mu\left(X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}\right) = 0$$

oder durch μ dividirt und entsprechend umgeformt:

$$X - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} + \frac{\mathfrak{K}}{\mu}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right] = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}$$

da $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy\,dx} + \frac{d^2w}{dz\,dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)$ ist. Nach Seite 22 ist aber dieser letzte Coefficient $= \Delta$ und demnach:

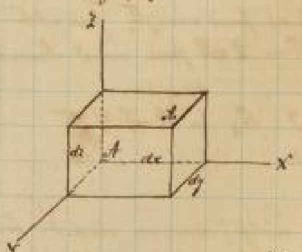
$$X - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} - \frac{\mathfrak{K}}{\mu}\left[\frac{d\Delta}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right]$$

Die beiden anderen Fundamentalgleichungen werden natürlich ganz analoge Umformungen erleiden, wenn man bloß nur durch cyclische Vertauschung aus der vorliegenden, also:

$$Y - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} - \frac{\mathfrak{K}}{\mu}\left[\frac{d\Delta}{dy} + \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right]$$

$$Z - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz} - \frac{\mathfrak{K}}{\mu}\left[\frac{d\Delta}{dz} + \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right]$$

In diesen Ausdrücken kommen nur 5 Größen $u\ v\ w\ \mu\ p$ vor, welche als Functionen von $x\ y\ z\ t$ bestimmt sein werden müssen, um den inneren und äußeren Zustand der Flüssigkeit mit Rücksicht auf die Oberflächenbedingungen und den gegebenen Anfangszustand bestimmen zu können. Der äußere Zustand ist nämlich, wie bekannt, bestimmt durch die Geschwindigkeitscomponenten $u\ v\ w$ und der innere Zustand bestimmt durch die spec. Masse μ und den Druck p. Um diese 5 Größen als Functionen von $x\ y\ z\ t$ zu entwickeln, haben wir jedoch erst die 3 obigen Gleichungen; es müssen also 2 andere Bestimmungsgleichungen aufgesucht werden. Eine derselben findet man durch folgende Betrachtung:



Denkt man sich im Punkte $A(x\,y\,z)$ zur Zeit t 3 zu einander senkrechte Richtungen $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ gezogen, parallel den Coordinatenaxen, womit die ganze Flüssigkeit bezogen ist, und von A aus fortschreitend ein unendlich kleines rechtwinklig parallelepipedisches Raumelement, dessen Kanten $dx\ dy\ dz$ mit den Richtungen $x\ y\ z$ zusammenfallen resp. parallel sind, so sind die Coordinaten des gegenüberliegenden Eckpunktes A_1 dieses, als unendlich klein zu betrachtenden Raumelements $= x + dx\ \ y + dy$ und $z + dz$.

Ist nun die spec. Masse zur Zeit t im Punkte $A = \mu$, so ändert sich diese im Laufe des Zeitelements dt um $\frac{d\mu}{dt}dt$, die Masse des ganzen Volumelements $dx\,dy\,dz$ erfährt also im Zeitelement dt eine Änderung $= dx\,dy\,dz \cdot \frac{d\mu}{dt}dt$ = Masse, um welche die Masse des Raumelements zur Zeit $t + dt$ größer ist als zur Zeit t. Diese Massenänderung kann man aber auch anders ausdrücken. Betrachtet man nämlich die Flüssigkeitsmassen, welche durch die 6 Seitenflächen des Raumelements theils hinein theils hinaus fließen, so ist in Hinsicht der zur x Axe senkrechten Flächen zu fassen, daß durch diese Fläche $dy\,dz$, deren Geschwindigkeit im Sinne der x Axe also senkrecht zu ihr selbst $= u$ ist, während des Zeitelements dt ein Flüssigkeitsvolumen $= dy\,dz\,u\,dt$ in das Raumelement hinein fließt, also eine Flüssigkeitsmasse $= \mu\,dy\,dz\,u\,dt$. Aus der gegenüberliegenden Fläche fließt dagegen eine Flüssigkeitsmasse heraus, welche man bekanntlich erhält, wenn man die ebengefundene Masse um das partielle Differential nach x vermehrt, indem man um von A nach A_1 zu kommen um dx fortschreiten muß. Das partielle Differential der letzten Masse nach x ist also der Unterschied derjenigen Flüssigkeitsmasse, welche im Zeitelemente dt mit dem Raumelement hineinfließt, gegen diejenige, welche in demselben Zeitraum dt in d. Volumenelement hineinfließt.

also $dy\,dz\,\frac{\partial(\mu u)}{\partial x}\,dx\,dt$ — Masse, welche im Zeitelement dt im Sinne d. x Achse mehr hinein als hinausfließt.

Ebenso ist: $dx\,dz\,\frac{\partial(\mu v)}{\partial y}\,dy\,dt$ der Ueberschuss derjenigen Flüssigkeitsmenge, welche im Sinne d. y- resp. d. z Achse im Zeitelement dt

und $dx\,dy\,\frac{\partial(\mu w)}{\partial z}\,dz\,dt$ in das Volumenelement hineinfließt, gegen diejenige, welche in demselben Zeitraum dt aus d. Volumenelement hinausfließt. Die Summe dieser 3 Ueberschüsse giebt offenbar auch die Massenänderung d. Volumenelements im Zeitraum dt an; man hat also d. Gleichung:

$$-\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial\mu}{\partial t}\,dt = dy\,dz\,\frac{\partial(u\mu)}{\partial x}\,dx\,dt + dx\,dz\,\frac{\partial(v\mu)}{\partial y}\,dy\,dt + dx\,dy\,\frac{\partial(w\mu)}{\partial z}\,dz\,dt.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $dx\,dy\,dz$, so bekommt man ~~eine~~ die zu erstrebende fehlende Differentialgleichung zur Bestimmung d. 5 Größen $u\ v\ w\ \mu\ p$ als Functionen von $x\ y\ z\ t$. Man bekommt:

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} = 0.$$

Da dieser Ableitung d. Annahme einer continuirlichen Raumerfüllung durch d. Flüssigkeit zu Grunde gelegt ist, so nennt man diese Gleichung auch noch d. Continuitätsgleichung d. Flüssigkeit.

Beim weitern Beweis kann nicht auf umfassendere Untersuchungen mehr eingegangen werden, da zur Aufstellung d. vollständigen 5ten Gleichung auf gewisse andere Verhältnisse Rücksicht genommen werden, welche auch Wärme und Temperatur Rücksicht zu nehmen haben.

Ob jedoch diese Verhältnisse näher untersucht werden sollen, es sehr viele Untersuchungen gemacht werden:

Absorptionsarbeit und Gleichung d. lebendigen Kraft eines Körpers im Allgemeinen.

Zunächst soll mit den 3 Fundamentalgleichungen eine Gleichung für d. lebendige Kraft eines Körpers entwickelt werden. Die 3 Fundamentalformeln waren:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \mu(X - \varphi_x) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \mu(Y - \varphi_y) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \mu(Z - \varphi_z) = 0$$

Denkt man sich nun bei einem in continuirlicher Gestaltveränderung begriffenen Körper ein Massenelement, welches zur Zeit t d. Gestalt eines unendlich kleinen Parallelepipeds hat, dessen einer Eckpunkt A d. Coordinaten $x\ y\ z$ hat und dessen Kantenlängen $= dx\ dy\ dz$ sind, so ist das Volumen dieses Elements zur Zeit $t = dx\ dy\ dz$ und sei bezeichnet mit dV.

$u\ v\ w$ seien nun d. 3 Geschwindigkeitscomponenten d. fraglichen Punktes $A(x\,y\,z)$ im Sinne d. Coordinatenaxen zur Zeit t. Wenn man nun von einer Ausdehnung dieses Massenelements absieht, d. Gestaltveränderung abstrahirt, so sind diese Größen $u\ v\ w$ auch zugleich d. Geschwindigkeitscomponenten d. ganzen Volumenelements. Ferner seien $X\ Y\ Z$ die Componenten d. beschleunigenden Massenkraft und μ d. spez. Masse zur Zeit t.

Es soll jetzt die erste Gleichung mit $dV\,u\,dt$, d. 2te mit $dV.\,v\,dt$ und d. 3te mit $dV.\,w\,dt$ multiplicirt werden, und dann alle 3 zusammen addirt werden. Dann sollen d. Glieder mit $\mu\,\varphi_x$, $\mu\,\varphi_y$ und $\mu\,\varphi_z$ auf d. andere Seite gebracht werden, wenn für $\varphi_x\ \varphi_y$ und φ_z die bekannten Werthe $\frac{du}{dt}$ resp. $\frac{dv}{dt}$ $\frac{dw}{dt}$ zu setzen sind. Führt man dies aus, so bekommt man:

$$\mu\delta V(u\,du + v\,dv + w\,dw) = \mu\delta V(X.u + Y.v + Z.w)\,dt + dQ,$$

wenn dQ bedeutet:

$$dQ = \delta V\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_y}{\partial y}\right)u + \left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_z}{\partial x} + \frac{\partial\tau_x}{\partial z}\right)v + \left(\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_x}{\partial y} + \frac{\partial\tau_y}{\partial x}\right)w\right]dt.$$

Das auf d. linken Seite d. ersten Gleichung stehende Glied kann man offenbar auch folgendermaßen schreiben:

$$= \mu\delta V.\ d\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right).$$ $u^2+v^2+w^2$ ist aber d. augenblickliche Geschwindigkeitsquadrat und $\mu\delta V$ d. Masse d. Elements.

Auf Seite 2 ist demnach ganz Produkt die lebendige Kraft $= dL$ des Massenelements zur Zeit t. Die ganze linke Seite d. Gleichung ist also nichts anderes als d. Differential d. lebendigen Kraft d. h. d. Zuwachs d. lebendigen Kraft des Massenelements während d. Zeitelements dt.

Da ferner d. Massenelement zur Zeit t sich im Sinne d. Axen mit d. Geschwindigkeiten $u\ v\ w$ fortbewegt, so ist das erste Glied der rechten Seite d. Gleichung offenbar d. Summe d. Arbeiten dM, welche d. Massenkraftcomponenten $X\ Y\ Z$ auf d. Massenelement während d. Zeit dt verrichten.

Also: $$\mu\delta V(Xu + Yv + Zw)\,dt = dM.$$

Demnach kann man jetzt obige Gleichung auch schreiben:

$$dL = dM + dQ$$

Was nun d. Größe dQ anbelangt, so ist diese offenbar nichts anderes als d. Arbeit d. Flächenkräfte während d. Zeitelements dt, mit welcher d. das Massenelement umgebende Flüssigkeitsmasse auf seine Oberfläche wirkt, ausgenommen in soweit, als diese Arbeitsverrichtung von einer gleichzeitig stattfindenden Deformation d. Massenelements, indem d. Geschwindigkeitscomponenten $u\ v\ w$ als für das ganze Massenelement constant angenommen wurde. Die obengefundene Gleichung entspricht demnach dem bekannten Satze, daß für einen materiellen Punkt od. für ein starres Massensystem d. Zuwachs d. lebendigen Kraft = d. Summe d. Arbeiten aller äußeren Kräfte ist. Die ganze Arbeit d. Oberflächenkräfte des Massenelements sei bezeichnet mit dO; dQ ist also nur ein Theil von dO, während der andere Theil dO_2 ist. Man kann also setzen:

$$dQ = dO - dO_2,$$ wenn dO_2 d. Arbeit d. Oberflächenkräfte d. Massenelements ist, welche von d. Deformation d. Massenelements bedingt ist.

Die ganze Arbeit dO d. Oberflächenkräfte läßt sich folgendermaßen bestimmen:

Zunächst wird auf d. zur X Axe senkrechten und durch d. Grenzlinie gehenden Ebene $dy\,dz$ d. parallelepipedischen Massenelements wirkt eine Flächenkraft, welche als Spannung pro Flächeneinheit bezogen in 3 Componenten $\sigma_x\ \tau_{xy}\ \tau_{xz}$ zerlegt werden kann. Diese bedeuten bezüglich die Componenten d. inneren Flächenkräfte, welche im Sinne d. positiven Coordinaten wirken. Will man also Kräfte haben, mit welchen d. an d. Ebene $dy\,dz$ angrenzende Flüssigkeitsmasse auf das Element wirkt, so muß man dieselben mit $-\sigma_x\ -\tau_{xy}\ -\tau_{xz}$ bezeichnen, da dieselben in negativer Richtung d. Axen wirken. Die ganzen Flächenkräfte an d. Ebene $dy\,dz$ sind also: $dy\,dz.(-\sigma_x)\quad dy\,dz.(-\tau_{xy})\quad dy\,dz(-\tau_{xz})$

Diese Seitenebene hat nun aber d. Geschwindigkeiten $u\ v\ w$ im Sinne d. Axen, sie bewegt sich also während d. Zeitelements dt im Sinne d. Axen um d. Strecken $u\,dt$ $v\,dt$ und $w\,dt$ fort. Die Arbeit dieser Flächenkraft ist also:

$$-\sigma_x\,u\,dy\,dz - \tau_{xy}\,v\,dy\,dz - \tau_{xz}\,w.\,dy\,dz.$$

Eine ganz ähnliche Arbeit wird von denjenigen Kräften verrichtet, welche auf die gegenüberliegenden Seitenflächen d. Elements angreifen. Man erkennt dies sofort, wenn man nur d. oben gefundenen um ihr partielles Differential genommen nach x vermehrt, da beide Flächen um dx von einander entfernt sind. Die Summen ~~derjenigen~~ d. Arbeiten derjenigen Kräfte, welche auf beide zu x senkrechten Seitenflächen wirken, ist demnach:

$$-dy\,dz\left\{-\sigma_x u\,dt+\left[\sigma_x u+\frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x}dx\right]dt-\tau_{xy}v\,dt+\left[\tau_{xy}v+\frac{\partial(\tau_{xy}v)}{\partial x}dx\right]dt-\tau_{xz}w\,dt+\left[\tau_{xz}w+\frac{\partial(\tau_{xz}w)}{\partial x}dx\right]dt\right\}$$

oder wenn man d. obigen Beziehung $\tau_{xy}=\tau_z$ und $\tau_{xz}=\tau_y$ wieder einführt und Producte verschwindender Größen vernachlässigt und für $dx\,dy\,dz$ das Volumen δV einführt:

$$-\delta V\left(\frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_y w)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_z v)}{\partial x}\right)dt.$$

Ebenso sind d. Summen d. Arbeiten derjenigen Kräfte, welche auf beide zu y resp. z senkrechten Seitenflächen d. Elements wirken:

$$-\delta V\left(\frac{\partial(\sigma_y v)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_z u)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau_x w)}{\partial y}\right)dt \quad \text{resp.:} \quad -\delta V\left(\frac{\partial(\sigma_z w)}{\partial z}+\frac{\partial(\tau_x v)}{\partial z}+\frac{\partial(\tau_y u)}{\partial z}\right)dt.$$

Demnach ist d. Gesammtarbeit d. Oberflächenkräfte:

$$dO=\delta V\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\tau_y w)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\tau_z v)}{\partial x}\\[2mm]+\dfrac{\partial(\sigma_y v)}{\partial y}+\dfrac{\partial(\tau_z u)}{\partial y}+\dfrac{\partial(\tau_x w)}{\partial y}\\[2mm]+\dfrac{\partial(\sigma_z w)}{\partial z}+\dfrac{\partial(\tau_x v)}{\partial z}+\dfrac{\partial(\tau_y u)}{\partial z}\end{array}\right\}dt.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorhin für dO gefundenen und bedenkt, daß $dO_1=dO-dO_2$ ist, so folgt:

$$dO_1=\delta V\left\{\begin{array}{l}\sigma_x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\tau_x\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\\[2mm]+\sigma_y\dfrac{\partial v}{\partial y}+\tau_y\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\\[2mm]+\sigma_z\dfrac{\partial w}{\partial z}+\tau_z\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\end{array}\right\}dt$$

Demnach hat man jetzt d. Formel für d. lebendige Kraftzunahme:

$$dL=dM+dO-dO_1$$

Diese Arbeit dO_1 ist der Theil von dO, welcher zur Deformation des Volumelements verbraucht wird; entgegengesetzt gleich d. Arbeit $dE=-dO_1$, welche d. Volumelement selbst durch seine Deformation verrichtet, und welche d. Deformationsarbeit desselben bei d. jeweiligen unendlich kleinen Zustandsänderung genannt werden soll. Indem diese Deformationsarbeit nur von den Spannungen, nicht von den etwaigen Reibungen an d. Oberfläche d. Volumelements verrichtet wird, sind unter den Größen σ u. τ, welche in Gleichung für dO_1 vorkommen, zugleich Spannungen und innere Reibungen zu verstehen; in d. That beziehen sich die erhaltenen Gleichungen auf Differentialquotienten von $u\ v\ w$ nach $x\ y\ z$ und auf solche Geschwindigkeitsänderungen, welche innerhalb d. betrachteten Volumelements stattfinden, während d. inneren Reibungen durch d. relativen Geschwindigkeiten benachbarter Volumelemente bedingt sind.

Wenn nun mit $\xi\ \eta\ \zeta$ die Abs. bezeichnet werden, welche d. materielle Punkt, der sich zur Zeit t im Raumpunkte A befindet, während dieser Zeit t aus den Coordinaten durchlaufen hat, so sind natürlich $\xi\ \eta\ \zeta$ Functionen von $x\ y\ z\ t$, und zwar ist offenbar:

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad . \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t} \text{ und } w = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Sind nun ferner $\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_x\ \gamma_y\ \gamma_z$ die Ausdehnungen und Abscherungen, welche d. Deformationszustand des Körpers im Punkte A zur Zeit t bestimmen und welche mit $\xi\ \eta\ \zeta$ in den bekannten Zusammenhang stehen, so ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}$$

ebenso $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t}$ und $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}$

ferner: $\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t\, \partial z} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = \frac{\partial \gamma_x}{\partial t}$

ebenso: $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial t}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_z}{\partial t}$

Nach d. Gleichung für dO_x ist ferner:

$$dE = -\,dV\left[\sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \sigma_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} + \tau_x \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} + \tau_y \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} + \tau_z \frac{\partial \gamma_z}{\partial t}\right] dt$$

d. Massenelements

Hiernach kann man also d. Differentialgleichung d. lebendigen Kraft auch schreiben:

$$dL = dM + dO + dE.$$

durch Addition der entsprechenden Gleichungen für alle Massenelemente d. Körpers erhält man dieselbe oben gefundene Gleichung, wenn aber nun:

dL = die Zunahme d. lebendigen Kraft d. ganzen Körpers

dM die Arbeitssumme aller Massenkräfte

und dO d. Arbeitssumme aller Oberflächenkräfte und inneren Flächenkräfte

dE die Deformationsarbeit d. ganzen Körpers für d. unendlich kleine Zustandsänderung im Zeitelemente dt bedeutet. Dabei kann dO in verschiedene Theile zerlegt werden. Zunächst besteht d. Arbeit d. Oberflächenkräfte aus d. Arbeit dJ d. äußeren Kräfte, welche ebenso wie dM, und aus d. Arbeit d. Reibung an d. Oberfläche od. d. äußeren Reibung, welche stets negativ ist und absolut genommen mit dR bezeichnet sei. Was die inneren Flächenkräfte betrifft, so sind sie zu je zwei entgegengesetzt gleich, und es ist deshalb ihre Arbeitssumme = 0, falls d. Geschwindigkeitsänderungen im Körper überall continuierlich stattfinden; in Folge d. entgegengesetzten inneren Flächenkräfte, womit 2 benachbarte Körperelemente auf einander wirken, wird dann das eine beschleunigt, das andere verzögert, indem d. lebendige Kraft des einen um ebensoviel zunimmt wie die d. andern abnimmt. Wenn aber discontinuierliche, plötzliche Geschwindigkeitsänderungen vorkommen, — so ist, dass 2 benachbarte Massenelemente eine Seite d. Trennungsfläche zu ihrer Berührungsfläche eine relative Geschwindigkeit von endlicher Größe besitzen und somit einen Stoß auf einander ausüben (wie solches bei festen und flüssigen Körpern vorkommen kann), so ist, dass (bei Flüssigkeiten) ihre relative Geschwindigkeit längs d. Berührungsfläche von endlicher Größe ist — so ist damit ein Verlust an lebendiger Kraft, eine negative Arbeitssumme d. inneren Flächenkräfte verbunden. Wird letztere absolut genommen für d. unendlich kleine Zustandsänderung des Körpers mit dS bezeichnet, so ist also nun:

$$dO = dJ - dR - dS$$

und also d. Gleichung d. lebendigen Kraft d. Körpers:

I. ……………… $$dL = dM + dJ - dR - dS + dE$$

wenn d. Deformationsarbeit dE allgemein bedeutet:

$$dE = -\int dV\left[\sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \sigma_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} + \tau_x \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} + \tau_y \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} + \tau_z \frac{\partial \gamma_z}{\partial t}\right] dt$$

Sind alle Tangentialspannungen = 0 und sind alle Normalspannungen im betreffenden Punkte gleich groß = σ, so wird einfach:

$$dE = -\int \delta V\,\sigma\,\frac{d(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)}{dt}\,dt = -\int \delta V\,\sigma\,\frac{de}{dt}\,dt$$

oder wenn mit $d\,\delta V = \delta V\,\frac{de}{dt}\,dt$ die unendlich kleine Volumenänderung d. Körperelements und mit $p = -\sigma$ d. Pressung bezeichnet wird:

$$dE = \int p\; d\,\delta V$$

Für diesen Fall soll d. Deformationsarbeit mit Expansionsarbeit benannt werden, indem sie nur von den Volumenänderungen d. Körperelemente abhängt; d. Absolutwert einer negativen Expansionsarbeit soll eine Compressionsarbeit genannt werden.

Ist d. Pressung in allen Punkten d. Körpers gleich groß, also = dem spec. äußeren Druck p, so wird, unter V das ganze Körpervolumen verstanden:

$$dE = p\,d\int \delta V = p\,dV$$

Die Geschwindigkeitscomponenten nach den Richtungen d. Coordinatenaxen, welche bisher mit u v w bezeichnet wurden, sollen i. d. Folge mit u_x u_y u_z bezeichnet werden, die resultierende Geschwindigkeit mit u, so ist entsprechend d. lebendige Kraft eines Körpers der Ausdruck für:

$$L = \int \mu\,\delta V\,\frac{u^2}{2} = \int \gamma\,\delta V\,\frac{u^2}{2g}$$

während d. Buchstabe v stets zur Bezeichnung d. spec. Volumens gebraucht werden soll, welches i. d. Regel statt d. spec. Gewichtes $\gamma = \frac{1}{v}$ u. d. spec. Masse $\mu = \frac{\gamma}{g} = \frac{1}{gv}$ zur Kennzeichnung des inneren Zustandes benutzt wird.

Wärme & Temperatur.

Dem Vorhergehenden zufolge findet im Allgemeinen eine gegenseitige Abhängigkeit statt zwischen den Änderungen d. inneren und des äußeren Zustandes eines Körpers, indem d. letztere im Allgemeinen mit einer Deformation d. Körpers verbunden ist, wodurch Änderungen d. spec. Volumens und d. Spannungszustandes in den verschiedenen Punkten desselben bedingt werden, erfahrungsmäßig sofern d. Gleichgewicht sich ändert, sofern d. Möglichkeit d. Bestehens eines gewissen Gleichgewichts bei gegebenem Spannungszustande an einen gewissen Spielraum d. spec. Volumens, bei gegebenem spec. Volumen an gewissen Spielraum d. Spannungen gebunden sein kann. Es können indessen Änderungen d. inneren Zustandes auch ohne d. gleichzeitige Deformationsarbeit d. Körpers und ohne Änderung d. äußeren Zustandes (ohne Arbeit äußerer Kräfte) stattfinden, so dass sie als Wirkungen einer anderen Ursache erscheinen, als d. Änderungen d. äußeren od. Spannungszustandes. So kann z. B. d. Pressung eines luftförmigen Körpers bei unverändertem Volumen in hohem Grade veränderlich sein, eine Mischung von Eis und Wasser kann ganz u. gar in Wasser übergehen, so dass d. Volumen während d. Schmelzens d. Eises abnehmend und später zunehmend, schließlich dem Anfangsvolumen wieder gleich ist. Bei Voraussetzung einer in allen Punkten gleichen Pressung ist in beiden Fällen d. Deformationsarbeit = 0, desgl. kann jede übrigens der weiteren Teile d. Gleichung für d. lebendige Kraft Seite 23 vorkommenden Arbeiten = 0 sein; gleichwohl hat sich d. innere Zustand geändert. In d. Regel ist mit solcher Änderung eine Deformationsarbeit verbunden; wenn aber letztere, wie es freilich d. Fall sein kann, gedeckt ist, die Arbeit d. äußeren Kräfte ohne Änderung d. lebendigen Kraft aber ergeben ist (z. B.: bei d. Abkühlung eines ruhenden Körpers, auf dessen Oberfläche d. Atmosphärendruck wirkt), so kann man nur nach d. Ursache fragen, welche ihn

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

V_0 [illegible]

V_n [illegible]

V [illegible] t [illegible]:

$$V = V_0 + \frac{V_n - V_0}{n}(t - t_0) = V_0\left[1 + \frac{V_n - V_0}{n V_0}(t - t_0)\right]$$

wonach $V = V_0$ für $t - t_0 = 0$ und $V = V_n$ für $t - t_0 = n$ ist.

[illegible] t_0 und n [illegible]

[illegible] auf Celsius: $t_0 = 0$ und $n = 100$

auf Réaumur $t_0 = 0$ und $n = 80$

auf Fahrenheit $t_0 = 32$ und $n = 180$

Im Folgenden wird stets d. Celsius'sche 100theilige Scala zu Grunde gelegt, [illegible] atmosphärischem Druck schmelzenden Eises = 0, die des unter normalem Atmosphärendruck siedenden Wassers = 100, d. i. = 0 Grad (0°) resp. = 100 Grad (100°) ist, indem ein Temperaturunterschied $\Delta t = 1$ ein Temperaturgrad genannt und mit 1° bezeichnet wird.

Aus dem somit festgestellten Begriffe der Lufttemperatur für einen gewissen gleichförmigen Wärmezustand der Luft und dem Gleichheitsbegriffe der Temperaturen zweier Körper von gleichförmigem Wärmezustande ergibt sich sofort auch die Definition der Temperatur eines beliebigen Körpers von gleichförmigem, oder auch der Temperatur in einem gewissen Punkte eines Körpers von im Allgemeinen ungleichförmigem Wärmezustande. Die praktische Messung der Temperatur vermittelst eines sogenannten Thermometers beruht dann auf dem Grundsatze von der Gleichheit zweier Temperaturen, welche beide einer dritten gleich sind; die Brauchbarkeit irgend eines Thermometers als Werkzeug dieser Wissenschaft mit der Beziehung, welche zwischen seinen Angaben und denen eines idealen, atmosphärische Luft von gleichem normalen Atmosphärendruck enthaltenden Luftthermometers festgestellt ist. Mit dem Begriffe der Temperatur ergibt man die der Wärmestufe gleichbedeutend zu verbinden und demgemäß von hohen und niedrigen, vielleicht auch größeren und kleineren Temperaturen zu sprechen.

Als Wärmeeinheit oder Calorie wird jetzt diejenige Wärmemenge angenommen, wodurch die Temperatur von 1 Kgr. reinen Wassers unter einem konstanten, dem normalen Atmosphärendruck gleichen äußeren Drucke von 0° auf 1° erhöht wird. Die Voraussetzung eines bestimmten äußeren Druckes ist streng genommen wesentlich, wenn auch nicht erheblich, wegen der geringen Zusammendrückbarkeit des Wassers; dagegen ist wesentlich, nicht nur ein bestimmtes Temperaturintervall, sondern auch eine bestimmte Anfangstemperatur bei dieser Definition der Wärmeeinheit anzunehmen, weil die zur Erhöhung der Temperatur eines Kgr. Wassers von t° bis (t+1)° erforderliche Wärmemenge wesentlich von t abhängt.

Nachdem nun somit der Begriff der Temperatur als einer neuen Größe in die Wärmelehre eingeführt ist, die ebenfalls bestimmt wird, ist es nun zunächst notwendig die Beziehungen zu bestimmen, in welcher die Temperatur eines Körpers von gleicher Art und Beschaffenheit zu dem spezifischen Volumen und Spannungszustande steht. Dabei soll, da es sich um die für alle Mal die einfache Voraussetzung zu Grunde gelegt werden, daß Temperaturänderungen so nicht erfolgen, als ob die Normalspannungen vorhanden sind, die dann für irgend einen Punkt für alle durch denselben gehenden Flächen gleich groß sind, so ist durch diese Normalspannungen der Spannungszustand der Körper in dem betreffenden Punkte vollkommen bestimmt. Durch diese Voraussetzung wird die Allgemeingültigkeit der zu entwickelnden Sätze in Bezug auf flüssige Körper im weitesten Sinne des Wortes nicht beschränkt, und nur in Betreff fester Körper eine Einschränkung erleiden. Die Untersuchung wird als wesentlich vereinfacht, indem dann der Spannungszustand, wo sonst zwischen auch nur eine einzige Größe statt im Allgemeinen 6 Größen, nämlich durch die Spannung p. Die Spannung p soll jedoch im folgenden stets Druckspannung positiv, die Zugspannung = –p in die Rechnung eingeführt werden, weil diese Spannung, mit seltenen Ausnahmen, die in der Regel gemeint ist. Der Wärmezustand eines Körpers ist demnach bei gegebener Art und Beschaffenheit vollkommen bestimmt durch nur 2 Größen, nämlich durch das spez. Volumen v und die Spannung p, während ohne die gemachte Voraussetzung hierzu 7 Größen, nämlich die den Spannungszustand charakterisierenden 6 Größen und das spez. Volumen erforderlich wären.

Im Folgenden soll mit t die Temperatur eines Körpers von gleichförmigem Wärmezustande resp. in einem Punkte eines Körpers von ungleichförmigem Wärmezustande bezeichnet werden; dient jedoch gleichzeitig t zur Bezeichnung der Zeit, so soll die betreffende Temperatur mit τ bezeichnet werden.

Ferner sollen, wenn nicht ausdrücklich andere Bestimmungen getroffen werden, zum Maße der in Betracht kommenden Größen, als: Längen, Flächen, Volumina, Zeiten, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte, Arbeiten, Temperaturen und Wärmemengen als Maßeinheiten zu Grunde gelegt werden: das meter, Kgr., Sekunde, Kgrm., 1° Celsius und 1 Wärmeeinheit = 1 Calorie.

Was nun die zu entwickelnden Beziehungen betrifft, so kommt dabei folgender Erfahrungssatz zu Statten:

Wenn irgend 2 Körper von gleicher Art sich in gleichförmigen und gleichen Wärmezuständen befinden, wenn sie also auf d. nämlichen Molecülen, gleiche Aggregatform, gleiches spec. Volumen und gleiche Spannung haben, so haben sie erfahrungsmäßig auch dieselbe Temperatur d. h.: ihre Wärmezustände werden gleich, wenn sie in Berührung gebracht werden, wobei keinerlei äußere Wärmewirkungen ausgeschlossen sein müssen. Dieses Gesetz bestätigt sich mit ein paar wenigen Ausnahmen, welche (nahe beim z. B.: bei Wasser) in dem Falle beobachtet werden können, daß d. Wärmezustand sich nahe d. Grenze befindet, welche d. Zustandsgebiete d. festen und flüssigen Aggregatform trennt. Z. B. kann man beobachten, daß 2 Wassermengen, welche gleiches spec. Volumen besitzen und sich unter gleichen Spannungen befinden, dennoch verschiedene Temperaturen haben können (die eine etwas größer als 4° und die andere etwas niedriger als 4°).

Abgesehen von diesen wenigen Ausnahmen, hält sich das obige Gesetz jedesmal immer wieder bestätigt.

Die Temperatur t eines Körpers von bestimmter Art ist also durch seinen Wärmezustand d. h. durch d. Aggregatform, dessen spec. Volumen v und d. Spannung p im Allgemeinen bestimmt, es ist also t eine Function von v u. p, ~~wobei~~ deren Form und Coefficienten von d. Körperart und von d. Aggregatform d. Körpers abhängig sind, die natürlich d. Aggregatform eines homogenen Körpers gewiß, für alle Elemente eines homogenen Körpers dieselbe ist, falls man denselben sich in verschiedenen Wärmezuständen befinden. Wenn man zunächst nur homogene Körper voraussetzt wird, so soll diese Beziehung Zustandsgleichung, welche zwischen d. Elementen v p u. t stattfindet, d. Zustandsgleichung d. homogenen Körpers für d. betreffende Aggregatform genannt werden.

Um genauere Zustandsgleichungen zu finden, hat man Grund anzunehmen, daß die Form dieser Zustandsgleichung (abgesehen von denen Ausnahmen, welche gewisse Körper in d. Nähe d. Grenze zwischen 2 Aggregatformen zeigen) nur von d. Art d. Aggregatform und nicht von d. Körperart abhängig ist, d. Verschiedenheit d. Körperart nur d. Coefficienten d. Zustandsgleichung bedingt. Es hätten also demgemäß verschiedenartige homogene Körper bei gleicher Aggregatform solche Zustandsgleichungen von d. nämlichen Form, nur d. Coefficienten nur entsprechend d. verschiedenen Körperarten verschieden sind. Wenn man also für d. Coefficienten d. allgemeine Buchstabengrößen einführt, so kann man auch kurzweg von d. Zustandsgleichung einer Aggregatform sprechen. So z. B. wird sich später zeigen daß:

$$pv = R(a+t)$$

d. Zustandsgleichung eines Gases ist, wenn freilich d. Coefficienten R u. a nach d. Art d. Gases bestimmt werden müssen.

Diese Zustandsgleichung einer Aggregatform kann, abgesehen von speculativen Vorstellungen in Betreff d. Molecularconstitution d. Materie, nur durch Induction aus einer großen Zahl zuverlässiger experimenteller Bestimmungen d. Größen v p t abgeleitet werden, wobei es hiernach d. Fall sein kann, daß man sich vorläufig mit solchen Gleichungen behelfen muß, welche nur für einen gewissen Theil d. Zustandsgebietes einer Aggregatform entsprechender Annäherung gelten, z. B.: für luftförmige Körper in d. Nähe desjenigen Grenzzustandes, welcher dem Übergange zu tropfbar flüssigem festem Aggregatzustand entspricht (Dämpfe) od. in d. Nähe d. entgegengesetzten Grenzzustandes (vollkommene Gase).

Durch Festsetzung Zustandsgleichung wird d. Temperatur t im Allgemeinen nur eindeutig bestimmt, in den meisten Ausnahmefällen jedoch 2deutig. Wenn z. B.: bei gewissen Werthen von v u. p d. Temperatur d. Wassers kleiner als 4° ist, so kann sie bei denselben Werthen von v u. p bekanntlich andere Werthe größer als 4° haben, indem bei $t = 4°$ einzig d. spec. Volumen bei gegebener Spannung ein min. ist.

Im Allgemeinen ist d. Zustandsgleichung von solcher Art, daß:

wenn v constant ist p und t sich im gleichen Sinne gleichzeitig ändern
" p " " v " t " " " " " "
" t " " v " p sich im entgegengesetzten Sinne gleichzeitig ändern.

Mit Hülfe dieser Zustandsgleichung kann natürlich jede d. 3 Größen v p t als Function d. beiden anderen ausgedrückt werden. Der Wärmezustand eines homogenen Körpers von gegebener Art und gegebener Aggregatform kann deshalb auch nicht nur durch v und p sondern auch durch v u. t od. durch p und t, überhaupt durch irgend 2 Größen d. 3 Elemente v p t bestimmt werden.

Für d. Statik und Dynamik mit d. geometrischen Darstellung am zweckmäßigsten und daher auch am meisten üblich geworden, d. Wärmezustand bei flüssigen Körpern [illegible] durch p u. t zu charakterisiren, indem Pressung und Thermometer mittelst d. bekannten Instrumente Manometer und Thermometer am leichtesten meßbar sind.

In diesen Betrachtungen wurde immer d. Begriff eines homogenen Körpers vorausgesetzt; bei den späteren Untersuchungen kommen jedoch auch nicht homogene Körper in Betracht, wenigstens Gemische von Körpern gleicher Art und verschiedener Aggregatform. z. B. Gemische von Flüssigkeiten mit luftförmigen Körpern derselben Art (Wasser und Wasserdampf). Diese Gemische können nun bekanntlich entweder continuirlich od. discontinuirlich sein. Auch für solche Gemische kann man eine Zustandsgleichung d. Art [illegible] sein.

Was zunächst d. continuirliche Gemisch betrifft, so sei v d. spec. Volumen dieses Gemisches in einem bestimmten Punkte, also d. Volumen pro 1 Kgr an dieser Stelle = dem Quotient aus dem Volumen d. den Punkt einschließenden Elements durch d. Gewicht desselben. Da d. Definition eines continuirlichen Gemisches zeigt, daß dasselbe 2 Bestandtheile in gleicher Art aber verschiedenen Aggregatformen enthält, so sei w d. spec. Volumen des einen und $w + \Delta$ d. spec. Volumen d. anderen Bestandtheils. Das Mischungsverhältniß sei ausgedrückt durch y d. h. in einem Kgr d. Gemisches seien y Kgr d. 2ten Bestandtheils enthalten; es ist also $1 - y$ d. Gewichtsmenge d. ersten Bestandtheils pro 1 Kgr. Unter diesen Umständen kann d. spec. Volumen v in einem Kgr d. Gemisches wie folgt ausgedrückt werden:

$$v = (1-y)\,w + y\,(w + \Delta) = w + y\Delta.$$

In dieser Gleichung sind w und Δ jede für sich im Allgemeinen Functionen von p u. t, und somit auch d. spec. Volumen v eine Function von p u. t entsprechend den besonderen Zustandsgleichungen, welchen Aggregatformen d. beiden Bestandtheile entsprechen; sie sind jedoch p u. t nicht unabhängig von einander, sondern sind durch eine gewisse Beziehung $f(pt) = 0$ mit einander verbunden, indem d. Wärmezustände d. beiden Bestandtheile nicht beliebige Zustände für d. betreffenden Aggregatformen, sondern Grenzzustände bezüglich auf den Übergang aus der einen in d. andere Aggregatform sind. z. B. besteht bei gesättigtem Wasserdampf bekanntlich eine so genau untersuchte Beziehung zwischen Pressung und Temperatur, daß man aus d. gegebenen Pressung auf d. Temperatur genau schließen kann. In der obigen Gleichung können demnach entweder w und Δ als Functionen von p oder als Functionen von t betrachtet werden, und mithin die Gleichung selbst als Beziehung zwischen $v\,p\,y$ oder als Beziehung zwischen $v\,t\,y$ aufgefaßt sein. Diese Gleichung soll in dem vorliegenden Falle die Zustandsgleichung eines solchen continuirlichen Gemisches genannt werden. Sind irgend zwei d. 4 Größen $v\,p\,t\,y$ gegeben, ausgenommen p u. t, welche schon durch d. Beziehung $f(pt) = 0$ von einander abhängen, so sind durch d. Zustandsgleichung und d. Beziehung $f(pt) = 0$ auch nothwendig d. beiden anderen bestimmt.

Was endlich d. discontinuirliche Gemisch betrifft d. h. eine einfache Zusammenlagerung d. beiden gleichen Körper von verschiedenen Aggregatformen, so können diese nur im [illegible] Zustand unter d. Voraussetzung, daß p u. t in allen Punkten dieselben Werthe haben, widrigenfalls d. Zustandsänderungen d. beiden Bestandtheile verschiedener Aggregatform einzeln für sich untersucht werden müßten. Es bedeutet jetzt v d. mittlere spec. Volumen d. discontinuirlichen Gemisches und y d. Mischungsverhältniß d. ganzen Volumens d. h. y ist d. Gewichtsmenge d. 2ten Bestandtheils pro 1 Kgr d. ganzen Körpers. w und Δ haben dieselben Bedeutungen; so ist nun auch wieder: $v = w + y\Delta$ etc.

Sollen also in beiden Fällen eines homogenen Körpers und eines Gemisches d. Wärmezustand durch d. numerischen Werthe zweier Größen als unabhängige Variable charakterisirt werden, so können diese entweder v u. p od. v u. t sein. Am zweckmäßigsten wird als allgemein v u. p als unabhängige Variable zu den Entwickelungen zu Grunde gelegt, indem dadurch bekanntlich d. [illegible] sich am einfachsten ausdrücken läßt. Bei d. Anwendung auf einzelne bestimmte Fälle kann man natürlich auch d. anderen beiden Größen v u. t als unabhängige Variable zur Charakterisirung d. Wärmezustandes wählen.

Die weitere in d. Betrachtung hineinzuziehenden neuen Begriffe von Wärme und Temperatur, sollen nun zunächst Anwendung d. Vorgänge bei d. Uebertragung d. Wärme von einem Körper zum andern näher zu untersuchen. Dieselben liefern nämlich die auf einem nicht aufgestellte d. Differentialgleichungen, nehmen zur vollständigen Lösung oder einem Zustandes eines Körpers nöthig hatte, indem die Differentialgleichungen aus den umschriebenen Vorgängen abgeleitet werden können, diese 4 Gleichungen als 5 Unbekannte enthalten. Diese d. Differentialgleichung u. diese Bezeichnung [illegible] nur ab von den neu eingeführten Begriffen von Wärme und Temperatur und Gleichungen auch von den Uebertragung d. Wärme von einem zum andern Körper od. von verschiedenen Theilen eines und desselben Körpers.

Wärmemittheilung durch Berührung.

Werden 2 Körper von verschiedenen Temperaturen mit einander in Berührung gebracht, so wird erfahrungsgemäß d. Temperatur des einen abnehmen zu und die des andern Körpers abnehmen bis schließlich d. Temperaturdifferenz = 0 geworden ist. Man sagt dann es geht Wärme von dem Körper höherer Temperatur zu dem Körper niederer Temperatur über, od. auch es geht durch Wärme selbst von höherer zu niederer Temperatur über. Diesen Vorgang nennt man Wärmeleitung; es ist dabei hervorzuheben ein gewisser Bewegungszustand d. Wärme zu verstehen, welche von einem Körper zum andern, oder auch in dem Körper selbst stattfindet. Ist so nun K d. Körper von ursprünglich höherer Temperatur und K_1 d. Körper von ursprünglich niederer Temperatur, welche beide sich in einer Fläche F berühren. Sobald d. beiden Körper in Berührung gebracht werden, so tritt offenbar in K eine Wärmeleitung nach F hin und dem Körper hinaus und in K_1 eine Wärmeleitung von F weg in den Körper hinein ein. Bei diesem Zustand werden d. Temperaturen in den verschiedenen Theilen d. Körper nicht verschieden sein, nämlich offenbar entsprechend einer Temperaturabnahme im Körper K gegen F hin und in K_1 eine Temperaturabnahme von F weg. Denkt man sich in einem solchen Körper in irgend einem Augenblick durch eine Anzahl von Flächen geschnitten, so daß diese isotherme Flächen durch Punkte gleicher Temperatur gehen, also d. augenblickliche Temperatur in allen Punkten einer solchen Fläche gleich groß ist und sie zu 2 benachbarten Flächen um einen Element gleich großen Betrag verschieden ist, so legen diese Flächen in der [illegible] weiter [illegible] je größer d. Leitungsfähigkeit d. Körpers für d. Wärme ist, einen um so größeren Betrag d. Wärmeleitung im Zeitelement dt zurücklegt. Diese Wärmeleitungsfähigkeit kann im Allgemeinen sowohl in verschiedenen Punkten d. Körpers als auch in demselben Punkt nach verschiedenen Richtungen verschieden sein; sie wird gemessen durch den sogenannten Wärmeleitungscoefficienten, welcher durch d. folgende Definition bestimmt ist.

Angenommen A sei ein Punkt eines Körpers, in welchem zur Zeit t d. Temperatur t herrscht; von A aus sei eine beliebige Richtung Ax gezogen und durch A senkrecht zu Ax eine Ebene gelegt. dF sei ein unendl. kl. Flächenelement dieser Ebene, welches d. Punkt A einschließt. Auf Ax sei ein anderer Punkt A_1 angenommen um d. unendl. kl. Stück dx von A entfernt. Ändert sich nun d. Temperatur in d. Richtung Ax stetig, wird zur selben Zeit t in A_1 d. Temperatur $t + \frac{dt}{dx}dx$ sein. Infolge d. Wärmeleitung, welche im Körper stattfindet, geht während d. Zeitelements dt in d. Richtung Ax eine unendl. kl. Wärmemenge dQ durch d. Flächenelement dF (senkrecht zu Ax) hindurch, oder einem negativen Werthe [illegible] entgegengesetzte Richtung, x A entsprechen wird. Bestimmt man d. folgende Gleichung an:

$$dQ = -k\,dF\,\frac{dt}{dx}\,dt$$ so versteht man unter k den Wärmeleitungscoefficienten eines Punkts A d. Körpers nach d. Richtung Ax.

Die durchgeleitete Wärmemenge dQ wird offenbar um so größer, je schneller d. Temperatur von A aus nach Ax sich ändert, je größer also d. Abfall $\frac{dt}{dx}$ ist.

Dividirt man d. obige Gleichung durch dF dt, so bekommt man:

$$\frac{dQ}{d\sigma\, dt} = \div\, k\, \frac{d\tau}{dx}$$

d. Ausdruck auf d. linken Seite ist offenbar d. pro Flächeneinheit und Zeiteinheit durchgeleitete Wärmemenge d. h. d. Wärmemenge, welche pro Flächeneinheit in d. Zeiteinheit hindurch gehen würde, wenn d. Umstände gleich bleiben würden. Den Ausdruck auf d. rechten Seite kann man als ... betrachten als d. Geschwindigkeit d. Wärmeleitung im Punkte A nach d. Richtung AX.

Wie schon erwähnt kann d. Wärmeleitungscoefficient k in verschiedenen Punkten und in denselben Punkte nach verschiedenen Richtungen im Allgemeinen verschieden sein. Ist d. Körper homogen so kann k in d. Regel in allen Punkten gleich angenommen werden. Ist er isotrop, so ist auch k in allen Richtungen constant. In d. Folge wird k immer als unabhängig von d. Richtung angenommen werden, weil bei d. Wärmeleitungen in Flüssigkeiten nicht ..., während es bei festen Körpern (namentlich krystallisirten) nach verschiedenen Richtungen verschieden sein kann. Ferner ist k jedoch auch bei flüssigen ... vom Wärmezustand zu betrachten, indem d. Wärmeleitung dieses Elements bedingt, welcher d. Wärmezustand ... ist, nämlich durch τ ... . Da diese aber von Punkt zu Punkt verschieden sein können auch bei homogenen Körpern, so ist d. Leitungscoefficient k streng genommen auch bei homogenen Körpern im Allgemeinen in jedem Punkte verschieden.

Es seien nun x y z d. Coordinaten d. Punktes A, in welchem sich d. Wärmeleitungscoefficient k befindet, und $x + dx$ $y + dy$ $z + dz$ seien d. Coordinaten eines unendlich nahe benachbarten Punktes A_1. Durch beide unendlich nahe zusammenliegenden Punkte A und A_1 seien als d. gegenüberliegenden Eckpunkte eines unendl. kl. rechtwinkligen Parallelepipedons gelegt, dessen Kantenlängen also dx dy dz sind. τ sei die Temperatur im Punkte A zur Zeit t und also bei Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung auch τ d. Temperatur d. ganzen parallelepipedischen Elements zur Zeit t. Um nun d. enthaltene Wärmemenge dQ zu bekommen, welche d. Raumelement während d. unendl. kl. Zeitraum dt durch Leitung mitgetheilt wird, stellen wir folgende Betrachtung:

Durch jede d. 6 Seitenebenen d. parallelepipedischen Elements ~~wird~~ findet eine Wärmeleitung von bzw. nach außen statt. Betrachtet man zunächst diejenige Ebene, welche durch A gehend senkrecht zur x Axe steht, deren Inhalt also dy dz ist, so ist nach dem Vorhergehenden d. Wärmemenge, welche im Zeitelemente dt durch diese Ebene dy dz in d. Richtung d. x Axe dem Elemente $dx\,dy\,dz = dV$ mitgetheilt wird. —

$$\div\, k\, dy\, dz\, \frac{d\tau}{dx}\, dt$$

und zwar bedeutet diese Wärmemenge offenbar einen Zuwachs d. Temperatur d. Elements, weil sie in positivem Sinne d. x Axe eindringt. Die Wärmemenge nun, welche durch die gegenüberliegende Ebene durch A_1 gehend, im Zeitelemente dt im Sinne d. negativen x Axe dem Elemente mitgetheilt wird, findet man offenbar, wenn man nur d. oben gefundenen um ihr Differential nach x vermehrt, weil man um dx im Sinne d. x Axe fortschreiten muss um von einer Ebene zur anderen zu kommen. Es ist also diese Wärmemenge:

$$- k\, dy\, dz \left(\frac{d\tau}{dx} + \frac{d^2\tau}{dx^2}\, dx\right) dt.$$

und also d. Zuwachs an Wärmemenge, welche dem parallelepipedischen Elemente im Zeitelemente dt im Sinne d. x Axe mitgetheilt wird durch die beiden zur x Axe senkrechten Seitenebenen:

$$- k\, dy\, dz \left[\div \frac{d\tau}{dx} + \left(\frac{d\tau}{dx} + \frac{d^2\tau}{dx^2}\, dx\right)\right] dt.$$

Analog ist d. Zuwachs an Wärmemenge, welche dem Elemente dV im Zeitelemente dt im Sinne d. y und z Axe mitgetheilt wird:

$$- k\, dx\, dz \left[\div \frac{d\tau}{dy} + \left(\frac{d\tau}{dy} + \frac{d^2\tau}{dy^2}\, dy\right)\right] dt$$

und $$- k\, dx\, dy \left[\div \frac{d\tau}{dz} + \left(\frac{d\tau}{dz} + \frac{d^2\tau}{dz^2}\, dz\right)\right] dt.$$

die Summe dieser 3 Ausdrücke gibt dann zugleich diejenige enthaltene Wärmemenge dQ, welche dem parallelepipedischen Körperelement im Zeitelement dt durch Leitung mitgetheilt wird. Dabei ist nun k [illegible], entsprechend der Annahme, daß der Wärmeleitungscoefficient nach der Richtung unabhängig sei und derselbe sich nicht von Punkt zu Punkt ändere.

Berücksichtigt man dann noch, daß $dx . dy . dz = dV$, so bekommt man nach der Summierung:

$$dQ = k\, dV \left[\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}\right] dt.$$

Diese Gleichung kann man schon zur Herleitung der nachfolgenden [illegible] Differentialgleichung dienen. Da als [illegible] Anwendung gebraucht werden soll, sind noch hinsichtlich der Wärmeleitung einige ergänzende Mittheilungen zu machen.

Zunächst muß noch hervorgehoben werden, daß im Innern eines homogenen Körpers [illegible] continuirlicher Geschwindigkeit die Temperatur eine ununterbrochene Function der Coordinaten ebenso wie [illegible] und der Strahlung im Falle des homogenen Körpers nach den [illegible] und der Richtungen [illegible] im Falle der continuirlichen Geschwindigkeit, [illegible] durch die Zustandsgleichung verbunden ist. Dasselbe gilt auch für den Fall einer discontinuirlichen Geschwindigkeit, so lange die einzelnen Bestandtheile [illegible] sind und an ihren Berührungsflächen sich im Grenzzustande zwischen 2 Aggregatformen befinden, [illegible] 2 Punkten eines [illegible] Körpers, welche einander unendlich nahe liegen, [illegible] unendlich verschieden von einander.

Anders verhält es sich aber bei 2 verschiedenartigen, sich berührenden Körpern; wenn nämlich von den beiden Körpern K und K_1, die verschiedener Art sein sollen und sich in der Fläche F berühren, K eine höhere Temperatur als K_1 hat, so daß eine Wärmeleitung von K nach K_1 stattfindet, so wird sich zwar die Temperatur innerhalb des Körpers K continuirlich abnehmend gegen F und ebenso continuirlich zunehmend gegen F im Körper K_1 [illegible]. In den an der Berührungsfläche F angrenzenden unendlich dünnen Oberflächenschichten der beiden Körper K und K_1 können aber während der Wärmeleitung von K nach K_1 die Temperaturen um eine endliche Größe verschieden sein. Ist dF ein Element der Berührungsfläche der Körper K und K_1 und $\Delta\tau$ der endliche Temperaturunterschied der in der Oberflächenschicht von K herrschenden Temperatur gegen diejenige in der an F angrenzenden Oberflächenschicht von K_1 und ferner dQ die Wärmemenge, welche im Zeitelement dt von K zu K_1 übergeht, so kann man jetzt die Gleichung für die Geschwindigkeit des Wärmeübergangs schreiben:

$$\frac{dQ}{dF \cdot dt} = k_1 \cdot \Delta\tau$$

; hierin heißt nun k_1 der Wärmeübergangscoefficient an der Stelle des Elements dF der Berührungsfläche, welche in diesem Falle wesentlich von der chemischen Beschaffenheit der beiden sich berührenden Körper abhängig ist. Ebenso wie an der Berührungsfläche zweier verschiedener Körper kann auch im Innern eines nicht homogenen Körpers, innerhalb der Grenze zwischen Bestandtheilen von verschiedener Art die Temperatur sich discontinuirlich von einem Punkte zum andern ändern. [illegible] sich in dieser Hinsicht [illegible] der Strahlung, welche bekanntlich sich immer nur continuirlich ändert sowohl im Innern eines homogenen Körpers als auch an den Berührungsflächen zweier sich berührender Körper. Ein endlicher Strahlungsunterschied könnte nur dann an der Berührungsfläche der beiden sich berührenden Körper stattfinden, wenn [illegible] Körper [illegible]. Daß die Temperaturänderung so verschieden ist von dem Verlaufe der Strahlung von einem Punkte zum andern, ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß die Strahlung nur abhängig von der [illegible] der Körper ist und nicht von der chemischen Beschaffenheit ihrer Oberflächen, dagegen die Temperatur wesentlich bedingt ist von der chemischen Beschaffenheit der Berührungsflächen und der Intensität der Strahlung. Unbedingt muß bemerkt werden, daß die Wärmeleitung im Innern einer Flüssigkeit oder in einem Gemische von festen und flüssigen Bestandtheilen die Wärmeleitung wesentlich beeinflußt werden kann durch [illegible] Mischungsbewegungen, welche letztere [illegible] ermöglicht werden können. Ehe dann die ganze Mischung dieselbe Temperatur an allen Punkten angenommen hat, kann eine längere Zeit vergehen, so daß

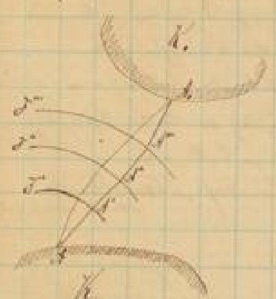
d. Wärmeleitungscoefficient k sehr groß erscheint. Wenn insbesondere einer homogenen Flüssigkeit in ruhigem Zustand Wärme von unten her mitgetheilt od. von oben her entzogen wird, so kann durch d. Änderung d. spec. Gewichts eine so lebhafte Mischungsbewegung in d. Flüssigkeit hervorgerufen werden, daß d. Temperatur in demselben Augenblick in je 2 Punkten nur wenig verschieden, d. Wärmeleitungscoefficient k also enorm groß ist. Ebenso kann k bei einem [illegible] Gemisch von 2 verschiedenartigen Bestandtheilen verschiedener Aggregatform [illegible] dieser Bestandtheile [illegible] groß, im Innern d. flüssigen Theile in Folge d. Mischungsbewegungen [illegible] enorm groß sein. Nur bei homogenen festen Körpern hat k unter allen Umständen einen endlichen Werth.

Bei d. Anwendung auf eine Flüssigkeit muß noch besonders hervorgehoben werden, daß δV in d. Gleichung für dQ nur das Volumen eines solchen Körperelements bedeutet, von welchem vorausgesetzt wird, daß es keine [illegible] Mischung mit Flüssigkeit von anderer Temperatur während d. Zeitelements dt erfährt. [illegible] Wärmebewegungen [illegible] der [illegible] Mischungen zu [illegible]. Die Gleichung für dQ hat daher nur einen theoretischen Werth und kann nur [illegible], als man [illegible] dem Wärmeleitungscoefficienten k einen solchen Werth beilegen, welcher nicht nur d. Wärmeleitungsvermögen [illegible] dem [illegible] Charakter d. Flüssigkeit entsprechen [illegible].

Wärmemittheilung durch Strahlung.

Außer durch Wärmeleitung kann d. Wärmeübertragung von einem zum anderen Körper auch noch auf anderem Wege vor sich gehen:

[illegible] können [illegible] Körper, wenn sie nur in dem [illegible] Medium sind, gegenseitig Wärme mittheilen, ohne daß das Medium selbst in seiner Temperatur eine Änderung erfährt. Diese Wärmeübertragung nennt man bekanntlich Wärmestrahlung. [illegible] Wärme [illegible] Gesetzen [illegible] wie d. Lichtstrahlen [illegible], nach d. Wesen von Lichtstrahlen, die folgende Vorstellung von d. Wärmestrahlung:



Es seien K und K_1 die Wärme mittheilenden Körper und A irgend ein Punkt d. Oberfläche von Körper K; die in diesem Punkte ausgestrahlte Wärme erreicht [illegible] Zeitelement dt [illegible] verschiedenen Punkten einer gewissen Fläche δ'. Nun kann man [illegible] verschiedenen Punkte d. Fläche δ' [illegible] Wärmestrahlen [illegible]. Diese Wärmestrahlen erreichen [illegible] Zeitelement dt [illegible] Flächen f'', welche [illegible] gemeinschaftliche Umhüllungsfläche δ'' [illegible] Punkte d. Umhüllungsfläche δ'' [illegible] Fläche f'' [illegible], [illegible] Zeitelement dt die Wärmeausstrahlung bis zu gewissen Flächen f''' [illegible] gemeinschaftlichen Umhüllungsfläche δ''' [illegible]. Diese verschiedenen [illegible] Umhüllungsflächen δ' δ'' δ''' etc. [illegible] von Punkt A ausgehenden Wärmewellenflächen [illegible] A ausgehende Linie, welche alle diese Wärmewellenflächen normal durchschneidet, heißt ein von A ausgehender Wärmestrahl z. B. AA_1. Die Wärmestrahlen können im Allgemeinen krumme Linien [illegible] sein, da dieselben [illegible] Beschaffenheit d. Mediums [illegible] werden können. Z. B. [illegible] Medium [illegible] d. Wärmestrahl [illegible], wenn er auf seinem Wege eine [illegible]. [illegible] Wärmestrahlen [illegible] bekanntlich, entsprechend wie d. Lichtstrahlen [illegible] Wärmestrahlen [illegible] Fortpflanzungsgeschwindigkeit in demselben Medium. [illegible] von A ausgehend den Körper K_1 in A_1 trifft [illegible], [illegible] Weg, auf welchem d. [illegible] Wärme von A ausgehend den Punkt A_1 in d. kürzesten [illegible] Zeit erreicht. Es kann natürlich auch noch auf anderem Wege Wärme [illegible] dem Körper K_1 von A mitgetheilt werden, entsprechend d. [illegible] Wärmestrahls, [illegible] aber alle Elemente d. Wärmestrahls ~~[illegible]~~ senkrecht zu den Wärmewellenflächen. [illegible] AA_1 [illegible] so kann es offenbar nicht gleichzeitig unserem andern Linie folgen, welche senkrecht zu der Wärmeaustauschlinie steht und auf den Punkt A, weicht von A ab. Es stellt sich daher ein geschlossenes Gesetz nicht allgemein gültig.

Diese Auffassung bestimmt mich zu einer abgekürzten Untersuchung zu.

Bei jeder Wärmestrahlung zwischen 2 sich nicht berührenden Körpern findet gegenseitig, indem der eine dem andern und dieser wieder dem ersteren Wärmestrahlen zusendet. Die Wärmemenge welche man nennt zu Teil wird der Unterschied, welche dem einen Körper mehr mitgeteilt wird als er empfängt. Die Wärmemengen, welche 2 solche Körper in einem bestimmten Zeitraum zustrahlen, ist bekanntlich abhängig von der Beschaffenheit der Oberflächenschichten, von den Temperaturen der Oberflächenschichten und von der Beschaffenheit und Durchlässigkeit des Mediums. Es fragt sich nun ob dieselben Bedingungen, welche ~~gelten~~ für die Wärmeleitung hinsichtlich des Temperaturgleichgewichts für 2 sich berührende Körper gelten, auch anzunehmen sind auf 2 oder Temperaturgleichgewichtszustand 2 sich nicht berührende Körper, die sich gegenseitig durch Strahlung Wärme mitteilen. 2 Körper die sich berühren, befinden sich bekanntlich im Gleichgewichtszustand der Temperatur, wenn die Temperaturen ihrer Oberflächenschichten und der Berührungsstelle gleich groß sind, entsprechend der Definition der Gleichheit 2 Temperaturen, aber von der Beschaffenheit der Oberflächenschichten und des Mediums ganz unabhängig. Es fragt sich nun ob auch 2 Körper A und B, im Temperaturgleichgewicht sich befinden hinsichtlich der Wärmestrahlung, wenn ihre Oberflächenschichten gleiche Temperaturen haben unabhängig von der Beschaffenheit der Oberflächenschichten und des Mediums, d. h. ob der eine Körper unter diesen Voraussetzungen an den andern Körper in derselben Zeit ebensoviel Wärme empfängt als er an diesen mitteilt. Das lässt sich jedoch nicht ohne Weiteres behaupten, indem die Definition der Gleichheit zweier Temperaturen sich lediglich auf Wärmeleitung durch Berührung erstreckt. Um also dieses zu behaupten müsste man diese Definition entsprechend erweitern, was jedoch nicht ohne Willkürlichkeit geschehen kann. Auf experimentellem Wege kann man auch kaum eine Feststellung herbeiführen, unter denen die Temperaturgleichgewicht durch Strahlung stattfindet, erzeugen, indem die Mannigfaltigkeit der Beschaffenheiten und Umstände zu solchen Versuchen eine zu große ist. Als erfahrungsmäßig ermittelt ist es jedoch zu betrachten, dass der Fall Temperaturgleichgewicht stattfindet wenn die Oberflächenschichten der beiden Körper gleiche Temperaturen und gleiche Beschaffenheiten haben und das Medium ungeändert dasselbe bleibt. Um aber für alle möglichen anderen Fälle die betreffenden Beziehungen zu bestimmen müsste man eingehende Versuche anstellen, deren Resultat aber dennoch nur sehr unsicher geschätzt sind. Es erscheint deshalb eine mathematische Untersuchung in dieser Beziehung ~~um~~ an einem noch so speziellen Falle, als das einzige Mittel diese Beziehungen zu bestimmen.

Diese mathematische Untersuchung wurde von Clausius ausgeführt. (Siehe: Grashof, Theoretische Maschinenlehre)

Dieselbe sei folgende:

Wenn es allgemein nun feststeht, dass die Temperaturgleichgewicht zweier sich Wärme mitteilender Körper durch die Gleichheit ihrer Oberflächentemperaturen charakterisiert ist, nämlich nicht nur im Falle der Wärmemitteilung durch Berührung, wofür diese Gleichheit durch Definition feststeht, sondern auch im Falle der Wärmestrahlung, so ist also auch niemals ein solcher ein überschüssiger Wärmeübergang von einem kälteren in einen wärmeren Körper stattfinden kann, so muss man annehmen, dass die spezifische Wärmeausstrahlung vollkommen schwarzer Körper von gleichen Oberflächentemperaturen durch Umbildung der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Strahlen in den umgebenden Mitteln umgekehrt proportional sind, wobei es keinen Unterschied macht, ob die Strahlen durch Brechungen oder Reflexionen in beliebiger Weise concentriert werden oder nicht. Zunächst wird schwarzer Körper ist folgendes zu bemerken. Wenn irgend einem Körper von Außen Wärme zugestrahlt wird, so wird im Allgemeinen ein Teil derselben von der Oberfläche des Körpers reflektiert, ein Teil durch die Oberflächenschicht hindurchgelassen und ein dritter Teil endlich wird von der Oberflächenschicht zurückgehalten oder verschluckt. Unter einem schwarzen Körper versteht man nun einen solchen, bei welchem die ersten beiden Teile nun nicht vorkommen, bei welchem also die Oberflächenschicht die ganze Wärmemenge verschluckt. Unter Absorptionscoefficienten eines Körpers versteht man das Verhältnis des von einem Körper verschluckten Wärmeteils zu dem überhaupt zugestrahlten Wärmequantum, wenn dann diese nun

Körper einen schwarzen Körper als ein solchen definiren, dessen Absorptionscoefficient = 1 ist. Was weiter d. spez. Wärmeausstrahlung anbelangt, so ist dieselbe für ein Punkt d. Oberfläche eines Körpers diejenige Wärmemenge, welche per Flächeneinheit und per Zeiteinheit von diesem Punkte ausgestrahlt wird. Diese hängt im Allgemeinen von d. Beschaffenheit d. Oberflächenschichten dieses Körpers, von dem Temperaturzustande derselben und von d. Beschaffenheit d. Mediums ab. Bezüglich d. ersten Umstandes führt man einen Coefficienten ein und versteht unter diesem Wärmeausstrahlungscoefficienten d. Verhältniss d. spez. Wärmeausstrahlung eines beliebigen Körpers zu d. spez. Wärmeausstrahlung eines vollkommen schwarzen Körpers bei gleichen Umständen; d. Ausstrahlungscoefficient für einen schwarzen Körper ist also auch = 1. Aus den obigen Umständen geht dann auch weiter hervor, dass d. Ausstrahlungs- und Absorptionscoefficienten verschiedener Körper auch nahezu dasselbe Verhältniss zu einander haben.

Aequivalenz von Wärme & Arbeit. Wärmegleichung & Gleichung d. Arbeitsvermögens.

Nach unzähligen Erfahrungen wird durch Aufwendung von Arbeit Wärme gewonnen, aber auch umgekehrt durch Aufwendung von Wärme Arbeit od. lebendige Kraft gewonnen. Als Beispiel d. ersten Art kann man anführen d. Erzeugung von Wärme durch Reibung, durch Compression von Gasen etc., wozu unbedingt Arbeit erforderlich ist; als Beispiel d. II Art sind d. Arbeiten d. calorischen Maschinen anzuführen, vermittelst welcher Arbeit unter Verbrauch von Wärme gewonnen wird. Nach Vorhergehendem werden d. Kräfte als d. Ursachen d. Änderungen d. äusseren Zustandes eines Körpers definirt; wenn man nun aber, wie oben bemerkt, sieht, dass d. Wärme ganz dieselbe Wirkung haben kann, so müssen Wärme und Arbeit offenbar gleichartige Grössen sein. Ferner wird d. Wärme als eine d. Ursachen d. Änderungen d. inneren Zustandes definirt, nach obigen Erfahrungen können aber Kräfte und Arbeiten zu denselben Wirkungen führen, woraus wieder ersichtlich, dass sich beide Grössen gegenseitig ersetzen können. Hiernach fragt es sich also, [illegible] Wärme in Arbeit verwandeln, indem man findet, dass d. lebendige Kraft eines Körpers durch Wärme vergrössert wird. Wärme und Arbeit sind also vergleichbare Grössen. Dieser Begriff führt nun zu einem bestimmten Verhältniss, dessen Zahlenwerth nur von den Einheiten abhängt, durch welche d. Grössen gemessen werden. In d. That lehrt d. Erfahrung, dass wenn man durch Aufwendung von Arbeit den Wärmezustand verändert, und d. aufgewendete od. verbrauchte Arbeit mit d. Wärmemenge vergleicht, welche d. Körper zur Bewirkung derselben Änderung d. Wärmezustandes hätte mitgetheilt werden müssen, od. wenn man umgekehrt durch Änderung d. Wärmezustandes Arbeit verrichtet wird und d. verrichtete od. gewonnene Arbeit mit d. Wärmemenge vergleicht, welche dem Körper zur Bewirkung derselben Änderung hätte entzogen werden müssen, dass dann jener Arbeit dieser Wärme stets in demselben Verhältniss $1 : A$ proportional ist. Die Wärmemenge A, welche d. Arbeitseinheit entspricht, nennt man den Wärmewerth d. Arbeitseinheit od. das calorische Arbeitsäquivalent. Die Arbeit $\frac{1}{A} = W$, welche d. Wärmemenge $= 1$ entspricht, heisst d. Arbeitswerth d. Wärmeeinheit od. das mechanische Wärmeäquivalent. Die Zahlenwerthe von A und W sind am zuverlässigsten durch Reibungsversuche zu ermitteln. Nimmt man bei d. Messung von Arbeiten 1 kgmeter und bei d. Messung von Wärme 1 Calorie zu Grunde, so hat man gefunden:

$$\frac{1}{A} = W = 424 \text{ kgm.}$$

$$\text{also } A = \frac{1}{W} = \frac{1}{424} \text{ Calor.} -$$

Diesen vorstehenden Bemerkungen zufolge hat irgend ein Körper in Folge seines augenblicklichen Zustandes aus einem doppelten Grund d. Vermögen, Arbeit zu verrichten: einmal in Folge seines äusseren od. Bewegungszustandes und andererseits in Folge seines Wärmezustandes.
Das Arbeitsvermögen, welches dem ersten Grund entspricht, ist bekannt als d. d. lebendigen Kraft L und sei benannt mit d. äusseren Arbeitsvermögen, das dem Wärmezustand entsprechende Arbeitsvermögen heisst d. innere Arbeitsvermögen und sei mit U bezeichnet, somit d. Gesammtarbeitsvermögen d. augenblicklichen Zustandes also $L + U$. Der Wärmewerth d. inneren Arbeitsvermögens $A = AU$ sei d. Körperwärme genannt. Was nun den Ausdruck d. ersten Arbeitsvermögens betrifft, also L, so hat dieses sich absolut durch Vergleichung d. Bewegungszustandes und d. Ruhe gefunden. Diese Unmöglichkeit ... zunächst bei U, da ... sich kein Wärmezustand ergeben, welcher einer weiteren Änderung durch Wärmeentziehung nicht mehr fähig wäre und für welchen also d. Körperwärme resp. d. innere Arbeitsvermögen $= 0$ wäre. Man kann also 2 verschiedene Wärmezustände miteinander vergleichen und sagen in einem Zustand ist d. Wärmemenge um so und so viel grösser wie in dem anderen, aber wenn man d. Arbeitsvermögen ermitteln will, so werden willkürliche, näher zu bestimmende Constanten in d. Rechnung einzuführen sein.

— Auf dieser Anschauung kann man nun d. sogenannte Gleichung d. lebendigen Kraft dahin erweitern, dass man sagt: Es ist für irgend eine unendlich kleine Zustandsänderung eines Körpers d. Zuwachs an Arbeitsvermögen desselben = d. Arbeitssumme d. auf ihn wirkenden äusseren Kräfte + dem Arbeitswerth d. ihm von Aussen mitgetheilten Wärme. Die Kräfte, welche dabei auf den Körper wirken, sind theils Massenkräfte, zum Theil die auf d. Oberfläche wirkenden Drücke und endlich auch noch d. ... Reibungen an d. Oberfläche. Wenn von den Letzteren abgesehen wird, so ist d. Gleichung, welche hieraus entsteht:

$$d(L+U) = dM + dP + W\,dQ$$

wo dM, dP und dQ d. von früher her bekannte Bedeutung haben.
Was d. an d. Oberfläche stattfindende Reibung betrifft, so verrichtet diese offenbar eine negative Arbeit, indem durch sie theils dem Körper selbst theils dem umgebenden Körper Wärme entzogen wird, es wäre also noch ein Glied $+ dR$ hinzuzufügen. ~~Man~~ Man kann aber d. oben bezeichnete Wärme als negativen Bestandtheil in d. Wärmemenge dQ einrechnen, welche dem Körper bei seiner unendlich kleinen Zustandsänderung von Aussen mitgetheilt, resp. auch mitgetheilt abgegeben wird, indem man sich vorstellen kann, dass zunächst d. ganze äussere Reibungswärme in den betreffenden Körper übergeht und erst nachträglich ein Theil derselben ihm wieder entzogen wird. Unter dieser Annahme bekommt man dann d. obige sogenannte Gleichung d. Arbeitsvermögens.

— Verbindet man diese Gleichung mit d. schon früher gefundenen (Seite 28, I.) Gleichung für d. Zuwachs d. lebendigen Kraft:

$$dL = dM + dP - dR - dS + dE$$

so bekommt man dann:

$$dU = W\,dQ + dR + dS - dE.$$

Hierin bedeutet nun $W\,dQ$ den Arbeitswerth der d. Körper von Aussen mitgetheilten der Umgebung entzogenen Wärme und dR und dS d. Arbeitswerth d. theils durch d. Oberflächenreibung und theils durch d. innere Widerstände erzeugten Wärme. Es ist also

$W\,dQ + dR + dS$ den Arbeitswerth der Gesammtwärme,

welche dem Körper im Zeitelement dt mitgetheilt wird. Die oben gefundene Gleichung, welche d. Wärmezuführung zu fassen hat, drückt also aus, dass die Wärme $dU + dE$ theils zur Vermehrung d. inneren Arbeitsvermögens d. Körpers (resp. d. Körperwärme AU) theils zur Verrichtung von Expansionsarbeit, od. allgemeiner, d. Formänderungsarbeit desselben verwendet wird.

entsprechenden zur Vermehrung der Expansionsarbeit, wenn in d. Körper durchaus keine Tangentialspannungen vorkommen, wie das in d. Fall vorausgesetzt wird, und bei den hauptsächlich [illegible] flüssigen Körper auch vorausgesetzt werden darf. In diesem Falle wird auch auf Seite 29 [illegible] die Deformationsarbeit dE die Expansionsarbeit genannt, welche dann durch d. einfache Formel:

$$dE = \int p \cdot d(\delta V)$$

Nach den oben gemachten Bemerkungen findet also überhaupt die Verwandlung von Wärme in Arbeit immer nur durch Vermittlung einer Deformationsarbeit statt, indem die Wärme sich zunächst in Deformationsarbeit verwandelt und diese Deformationsarbeit kann nach d. Gleichung für d. lebendige Kraft theils zur Vermehrung d. lebendigen Kraft theils zur Überwindung von Widerständen gebraucht wird. [illegible] sich in Deformationsarbeit verwandelt. Wärme kann daher theils solche Wärme sein, welche dem Körper erst mitgetheilt wird, sei es von äußeren Körpern durch Berührung od. Strahlung, sei es an der Oberfläche durch d. Verwandlung von Reibungsarbeit (dR) od. im Innern durch d. Verwandlung innerer Widerstandsarbeit (dS) in Wärme; theils kann sie dem Körper selbst entnommen sein, entsprechend d. Fall daß in d. Wärmegleichung dU negativ und dE positiv ist, wie es einer Verwandlung von Wärme in Deformationsarbeit zukommen würde. Umgekehrt kann aber auch sich Deformationsarbeit in Wärme umsetzen entsprechend dem Falle daß in d. Wärmegleichung dE einen negativen Werth annimmt.

Es ist also d. ~~Verwandlung~~ gegenseitige Verwandlung von Wärme und Deformationsarbeit in einander eine umkehrbare Verwandlung, indem sie in dem einen od. anderen Sinne stattfinden kann. Es besteht jedoch auch eine Art d. Verwandlung von Arbeit od. lebendiger Kraft überhaupt in Wärme auch ohne Vermittlung von Deformationsarbeit stattfinden kann, nämlich durch Vermittlung d. [illegible] Bewegungswiderstände d. äußeren Oberflächenreibung und d. inneren Widerstände. Die Verwandlung d. Arbeit [illegible] Bewegungswiderstände in Wärme ist also eine nicht umkehrbare Verwandlung, indem es im Wesen d. [illegible] Bewegungswiderstände liegt, daß sie immer eine negative Arbeit verrichten d. h. Arbeit od. entsprechende lebendige Kraft verbrauchen, welche indem sie als solche verschwindet, als Wärme erhalten wird.

Der Definition d. Körperwärme und d. inneren Arbeitsvermögens entsprechend sind diese Größen U u. $A U$ offenbar bestimmt durch d. Wärmezustand, es werden also auch U u. $A U$ durch dieselben bekannten Größen wie d. Wärmezustand charakterisirt. Kommen z. B. [illegible] Tangentialspannungen nicht vor, so sind diese charakterisirenden Größen v und β [illegible] Volumen und d. Spannung. [illegible] U nicht bloß d. innere Arbeitsvermögen d. ganzen Körpers sondern [illegible] d. spez. [illegible] inneren Arbeitsvermögen d. Körpers. Handelt es sich um einen homogenen Körper von gleichförmigem Wärmezustand, so kann man schließlich von d. spez. inneren Arbeitsvermögen d. Körpers sprechen, ebenso auch bei einem continuirlichen Gemisch von [illegible] denselben Mischungsverhältniß und gleichförmigem Wärmezustand. Handelt es sich aber um einen homogenen Körper von ungleichförmigem Wärmezustand od. um ein continuirliches Gemisch von veränderlichem Mischungsverhältniß so kann man nur von d. spez. inneren Arbeitsvermögen in einem bestimmten Körperpunkte sprechen od. endlich auch nur von dem mittleren spez. inneren Arbeitsvermögen eines [illegible] Gemisches. Wie schon oben bemerkt wird das innere Arbeitsvermögen durch dieselben Größen bestimmt wie d. Wärmezustand. Allgemein muß man eigentlich sagen, daß d. innere Arbeitsvermögen U mit jenen den Wärmezustand charakterisirenden Größen in einer Gleichung zusammen, die [illegible] Ergänzung d. Zustandsgleichung, ebenso wie diese in d. Form von d. [illegible] und in den [illegible] von dem Körper [illegible] abhängt. Diese Gleichung soll d. Gleichung d. inneren Arbeitsvermögens genannt werden.

Dieses [illegible] Princip d. Äquivalenz und gegenseitigen Umwandelbarkeit von Wärme und Arbeit od. lebendiger Kraft ist offenbar unverträglich mit d. Ansicht derjenigen, welche man früher von d. Wärme als einem Materie hatte, indem man sich diese [illegible] als ein unveränderliche Größe zu denken hat. [illegible] hat dieses Princip zu d. Ansicht geführt [illegible] [illegible] [illegible]

Wesen d. Wärme in dem Molekularzustande d. atomistisch constituirten Materie zu suchen sei. Um dann alle vorkommenden Wärmeerscheinungen genügend erklären zu können müßte man verschiedene Annahmen machen bezüglich d. Art d. Bewegung, der [illegible] Kräften und einer [illegible] Bezug d. die Körper in bekannter Weise mit kleinen [illegible] Theilchen. Indessen [illegible] sich bei dem heutigen Zustand d. Wärmetheorie [illegible] Weise d. mannigfaltigen Wärmeerscheinungen nur in unvollkommener Weise erklären [illegible] nicht d. [illegible] zu Grunde gelegt werden soll. [illegible] Aequivalenz von Wärme und Arbeit [illegible] d. [illegible] Auseinandersetzungen und Erzeugungen [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] Theilchen [illegible] zu betrachten.

Nach diesen ausführlichen Auseinandersetzungen, kann nun noch d. [illegible] d. allgemeinen Differentialgleichungen angenommen werden, welche dazu dienen sollen d. Zustandsänderung einer Flüssigkeit zu bestimmen. Es [illegible] zu dem Zweck schon 4 allgemeine Gleichungen aufgestellt,

(Kirch. Seite 24. 25) nämlich 3 Gleichungen, welche in d. Folge d. Fundamentalgleichungen genannt werden sollen und welche d. [illegible] wenn die [illegible] in jedem Volumelement zwischen der äußeren [illegible] und dem Geschwindigkeiten stattfinden muß. Außer diesen [illegible] noch sog. Continuitätsgleichung aufgestellt. In diesen 4 Gleichungen waren also 5 Größen, welche als Functionen d. Coordinaten d. betreffenden Punktes und als Function d. Zeit bestimmt werden mußten, nämlich d. Größen u v w μ p als Functionen von x y z t. [illegible] noch [illegible] Zustandsgleichung aufgestellt werden um diese [illegible] Aufgabe allgemein [illegible] zu machen. [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] angenommen werden.

In d. Folge sollen statt u v w für d. Geschwindigkeitscomponenten die Bezeichnungen u_x u_y u_z und für die resultirende Geschwindigkeit u eingeführt werden.

Ferner [illegible] in d. Gleichungen d. [illegible] Zustand [illegible] d. Pressung p und [illegible] μ statt [illegible] specifischen Volumen v eingeführt werden. Man hat also zu setzen: $\mu = \frac{1}{gv}$ wenn v d. spec. Volumen und g d. Beschleunigung d. Schwere ist.

[illegible] Bezeichnungen eingeführt [illegible] die erste d. 3 Fundamentalgleichungen:

$$X - gv\frac{dp}{dx} = \frac{du_x}{dt} + u_x\frac{du_x}{dx} + u_y\frac{du_x}{dy} + u_z\frac{du_x}{dz} - Rgv\left(\frac{d\Delta}{dx} + \frac{d^2u_x}{dx^2} + \frac{d^2u_x}{dy^2} + \frac{d^2u_x}{dz^2}\right)$$

Die anderen beiden Fundamentalgleichungen ergeben sich in ganz analoger Weise [illegible] entsprechende [illegible].

In diesen Gleichungen bedeutet:

$$\Delta = \frac{du_x}{dx} + \frac{du_y}{dy} + \frac{du_z}{dz}$$

Die 4. Gleichung, d. Continuitätsgleichung war: $\frac{d\mu}{dt} + \frac{d(\mu u)}{dx} + \frac{d(\mu v)}{dy} + \frac{d(\mu w)}{dz} = 0$

in d. jetzigen Bezeichnungsweise also:

$$\frac{d\frac{1}{v}}{dt} + \frac{d\frac{u_x}{v}}{dx} + \frac{d\frac{u_y}{v}}{dy} + \frac{d\frac{u_z}{v}}{dz} = 0$$

Eine fünfte Bestimmungsgleichung zur Bestimmung von u_x u_y u_z v u. p als Functionen von x y z t erhalten wir mit Rücksicht auf die, durch die Temperaturänderungen [illegible] Zustandsänderungen d. Flüssigkeit.

Bezeichnet nämlich τ die Temperatur im [illegible] Punkte x y z zur Zeit t, so ist auf Seite 36 die Wärmemenge dQ, welche dem frischen Flüssigkeitsvolumen dV im Zeitelement dt durch Leitung von dem umgebenden Flüssigkeitsmedium mitgetheilt wird:

$$dQ = k\,dV\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)dt$$

worin k den Wärmeleitungscoefficienten ausdrückt, welche allgemein als nach allen Richtungen hin gleich groß angenommen werden muss. Hierbei muss jedoch vorausgesetzt werden, daß im Innern der Flüssigkeit die Wärme nur durch Leitung und ohne Mischungsbewegungen übertragen wird, so daß man die bekannte Wärmegleichung auch auf das ganze Volumenelement dV beziehen kann. Indem nun weiter äußerliche Strahlungswirkungen nicht in Betracht kommen, also $dR = 0$ setzen, da betrachtete Volumenelement im Innern der Flüssigkeit liegt und man auch von den [illegible], welche von [illegible] hervorgerufen werden, absehen muss, [illegible] ihre Wirkungen nur im Ganzen berücksichtigt werden können. Es ist also dann auch $dS = 0$ (Man könnte sich auch [illegible] denken, [illegible] in dem Wärmeleitungscoefficienten k entsprechend berücksichtigt werden.)

Unter diesen Voraussetzungen ist dann nach der bekannten Wärmegleichung die oben gefundene Wärmemenge dQ auch: (Siehe Seite 40)

$$dQ = \frac{dU + dE}{W} \quad \text{od. mit } W = \frac{1}{A}:$$

$$dQ = A(dU + dE)$$

worin dU die Zunahme der inneren Arbeitsenergie und dE die Expansionsarbeit des Elementes bedeutet. Nach Seite 29 ist aber in diesem Falle:

$$dE = p\,d(dV).$$

Wenn nun weiter unter U nicht sämmtliche innere [illegible] sondern die innere Arbeitsenergie per Gewichtseinheit, per 1 kgr verstanden wird, so ist offenbar zu setzen anstatt dU:

$$\frac{dV}{v}\,dU$$

ferner kann man offenbar setzen:

$$d(dV) = \frac{dV}{v}\,dv$$ da die Änderung des Volumens des Elementes während des Zeitelementes dt ~~[illegible]~~ [illegible] in demselben Verhältniss vor sich wie die Änderung des spec. Volumens v.

Setzt man alle die gefundenen Werthe in die Gleichungen für dQ und setzt dann diese beiden Ausdrücke gleich, multiplicirt mit $\frac{dv}{d(dV)}$ und dividirt durch dt, so bekommt man:

$$A\left(\frac{dU}{dt} + p\,\frac{dv}{dt}\right) = k\,v\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \quad \text{.......} \quad \mathfrak{A}$$

Hierin sind $\frac{dU}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ vollständige Differentialquotienten, indem U und v natürlich sich immer [illegible] auf ein Volumenelement bezogen wurden, welches zur Zeit t den frischen Raumpunkt $(x\ y\ z)$ ausfüllt. Genau nach der Entwicklung der [illegible] $\varphi_x\ \varphi_y\ \varphi_z$ Seite 17, kann man also auch setzen:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + u_x\frac{\partial U}{\partial x} + u_y\frac{\partial U}{\partial y} + u_z\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\text{und}\quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u_x\frac{\partial v}{\partial x} + u_y\frac{\partial v}{\partial y} + u_z\frac{\partial v}{\partial z}$$

In der Gleichung $\mathfrak{A}$ haben wir nun die gesuchte 5te Bestimmungsgleichung gefunden; mit derselben sind aber 2 neue Unbekannte in die Rechnung eingeführt worden, nämlich t und U, welche ebenfalls Functionen von $x\ y\ z\ t$ zu bestimmen sind. Nun besitzen wir bekanntlich zwischen der Temperatur t und der inneren Arbeitsenergie, sowie den, den Zustand charakterisirenden Größen v u. p 2 Beziehungen, nämlich die sogenannte Zustandsgleichung $f(p, v, t) = 0$ (Seite 32) und die Gleichung der inneren Arbeit/Energie $F(v, p, t, U) = 0$ (Seite 41). Diese beiden Gleichungen im Zusammenhange mit den 5 früheren Gleichungen, nämlich den 3 Fundamentalgleichungen, der Continuitätsgleichung und der oben gefundenen Gleichung (A) geben uns 7 Gleichungen zur Bestimmung der 7 Größen u, v, w, ν, p, t, U als Functionen von x, y, z, t vorausgesetzt, daß die übrigen in den Gleichungen vorkommenden Größen entweder als Constante oder als Functionen von x, y, z, t gegeben sind. Da aber weiter die Gleichungen theils partielle Differentialgleichungen sind, so müssen zur vollständigen Bestimmung der Aufgabe bezüglich der Werthe für die bet. Integrationen entsprechenden Integrationsconstanten, auch noch der Anfangszustand und die Oberflächenbedingungen gegeben sein, nämlich der Zustand (äußerer und Wärmezustand) zu einer bestimmten Zeit, die Oberflächenkräfte und der Zustand von welchem der Wärmeaustausch zwischen der Flüssigkeit und ihrer Umgebung abhängt. Die vollständige Durchführung möchte kann diese nicht allgemein weiter geschehen, sondern muß nur für specielle Fälle behandelt werden.

Ehe jedoch diese behandelt werden, sollen noch einige andere wichtige Begriffe erörtert werden.

Umkehrbare und nicht umkehrbare Verwandlungen und Zustandsänderungen.

Nach den Bemerkungen Seite 41 geschieht die Verwandlung von Wärme in Arbeit oder entsprechend lebendige Kraft immer durch Vermittlung von Deformationsarbeit, indem die mit Wärme hervorgebrachte Arbeit oder lebendige Kraft stets als Deformationsarbeit erhalten wird, wobei noch zu bemerken ist, daß diese Deformationsarbeit sich gewissermaßen frei sei, wenn eine Flüssigkeitstheilchen einander oder ein fester Körper verläßt, in welchem keine Temperaturschwankungen vorkommen. Umgekehrt geht die Verwandlung von Arbeit oder lebendige Kraft in Wärme auch durch Vermittlung von Deformationsarbeit vor sich. Jedoch kann auch Wärme unmittelbar aus der Arbeit sichtbarer Bewegungsunterschied entstehen, nämlich durch äußere Reibung und selbst innere Widerstände, welche durch discontinuirliche Geschwindigkeitsänderungen bedingt sind. In umgekehrter Weise kann dieser letzte Vorgang aber nicht stattfinden. Aus diesem Grunde wurde die gewöhnliche Umsetzung von Deformationsarbeit und Wärme in einander eine umkehrbare Verwandlung, dagegen die Umsetzung der Arbeit sichtbarer Bewegungsunterschied in Wärme eine nicht umkehrbare Verwandlung genannt.

In ähnlicher Weise kann man auch die Übertragung von Wärme von einem Körper oder Körpertheil von der Temperatur t in einen anderen von der Temperatur t_0 als eine Verwandlung auffassen, nämlich so daß die Wärme selbst von der Temperatur t_1 in die Temperatur t_0 übergeht oder sich in solche verwandelt. Eine solche Übertragung oder eine solche Verwandlung von Wärme kann nun entweder unmittelbar durch Leitung, durch Strahlung oder durch Vermittlung eines anderen Körpers stattfinden, welcher letztere dann eine Zustandsänderung erleidet und dadurch die Übertragung der Wärme vermittelt. Eine unmittelbare Wärmemittheilung durch Leitung (Wärmeleitung) kann der früheren Definition gemäß nur von einem Körper höherer Temperatur zu einem Körper niedrigerer Temperatur stattfinden. Ganz dasselbe gilt auch für den Fall einer Wärmemittheilung durch Strahlung, wenn nur die unter Seite 38–39 aufgestellten Bedingungen erfüllt sind. Als letztere kann man nicht von vornherein als erfüllt ansehen, jedoch haben Versuche und die daraus gezogenen Erfahrungen thatsächlich die Übereinstimmung mit der Erfahrungsthese ergeben, so daß diese allgemein vorausgesetzt werden darf. Geschieht kann also ganz allgemein eine unmittelbare Übertragung der Wärme immer nur von höherer zu niederer Temperatur stattfinden, so ist also diese Wärmeübertragung als eine nicht umkehrbare Verwandlung zu bezeichnen ist.

Damit nun die Zustandsänderung eines Körpers mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden sei, ist hiernach also zunächst erforderlich, daß 1) nur verschwindend kleine sichtbare Bewegungsunterschiede vorkommen, wodurch also nur unendlich kleine Mengen lebendiger Kraft oder Arbeit in Wärme umgesetzt werden und daß 2) nur eine unendlich kleine Wärmeübertragung von ~~[illegible]~~ höherer zu niederer Temperatur stattfindet.

für unendlich kleine Wärmeübertragung ist freilich streng genommen ein unendlich großer [illegible] überhaupt Wärmemitteilungen nicht ausgeschlossen werden sollen; denn Begriffe d. Unendlichkleinen als einem Grenzbegriff genügt es jedoch zur Charakterisierung einer Zustandsänderung mit nur umkehrbaren Verwandlungen, daß bei einer Zustandsänderung von endlicher Größe eine endliche Wärmemenge eine nur unendlich kleine Temperaturänderung erfahre. Damit dies d. Fall sei, ist nun zunächst mit Rücksicht auf den Wärmeaustausch an d. Körperoberfläche erforderlich, daß d. Differenz zwischen d. Oberflächentemperatur t_1 und d. äußeren Temperatur t_0 durchweg unendlich klein sei; unter äußerer Temperatur t_0 d. Körpers die Temperatur d. unmittelbar angrenzenden Körper verstanden, mit welchen eine Wärmemitteilung durch Berührung, sowie d. Oberflächenelemente entfernter Körper, mit denen ein Wärmeaustausch durch Strahlung stattfindet. Also können diese entsprechenden Temperaturen t_1 und t_0 jede für sich an verschiedenen Stellen um endliches verschieden sein. Wenn man dann aber durch Flächen gleicher Temperatur d. Körper in unendlich dünne Schichten zerlegt denkt, so würde zwar d. bei d. endlichen Zustandsänderung d. Körpers von einer solchen Schicht zur benachbarten geleitete endliche Wärmemenge nur eine unendlich kleine Temperaturänderung erfahren, ebenso wie d. durch d. Oberfläche geleitete Wärme. Haben aber d. Körper mit unendlich vielen solchen Schichten besetzt, würde im Ganzen eine unendlich große Wärmemenge eine unendlich kl. Temperaturänderung od. eine endliche Wärmemenge eine endliche Temperaturänderung erfahren können. Damit also auch mit Rücksicht auf Wärmeleitung im Innern d. Körpers seine Zustandsänderung nur mit umkehrbaren Verwandlungen verbunden sei, müssen noch, wenn d. Körper homogen ist, die Temperaturdifferenzen zwischen je 2 unendlich nahen Körperpunkten als unendlich klein höherer Ordnung u. zwischen je 2 beliebigen Körperpunkten als unendlich klein vorausgesetzt werden, so daß dann nur d. äußeren Temperaturen t_0 an verschiedenen Stellen um endliches von einander verschieden sein dürfen. Ist aber d. Körper ein [illegible] Gemisch aus Bestandteilen [illegible] verschiedener Grenzflächen, welche seine Bestandteile bezüglich auf den Wärmeübergang mit d. einen u. d. andern Grenzfläche befinden, so ist bei Temperaturgleichheit [illegible] Wärmemitteilung im Innern d. Körpers nicht an eine [illegible] gebunden an eine stetige Verteilung d. Temperaturgradienten, so daß selbst ein endlicher betreffender Wärmestrom in einem [illegible] Zustand stattfindet, zur Herbeiführung nur umkehrbarer Verwandlungen muß also in diesem Falle d. Körpertemperatur in jedem Punkte d. Richtung entsprechend sein, während d. Oberflächentemperaturen t_0 an verschiedenen Stellen um Endliches verschieden sein können und deshalb d. unendlich kleinen Differenzen zwischen den sich entsprechenden Temperaturen t_1 und t_0.

Die Zustandsänderung eines Körpers heißt nun im Ganzen umkehrbar, wenn d. Umkehrung d. Änderungsgesetze ihrer Ursachen (äußeren Kräfte und mitgeteilten resp. entzogenen Wärmemengen) genügt, um seine umgekehrten Sinn d. h. stattfinden zu lassen, so daß d. Körper mit allen seinen Elementen durch dieselben äußeren und Wärmezustände wie zuvor in umgekehrter Aufeinanderfolge hindurchgeht, die äußeren od. Körperzustände betreffend zugleich mit d. entsprechenden Geschwindigkeitsänderungen. Dazu ist offenbar erforderlich, daß mit d. Zustandsänderung nur umkehrbare Verwandlungen verbunden sind und daß zu Ende derselben, also in d. Augenblick, in welchem d. Umkehrung stattfinden soll, d. Differenz $t_0 - t_1$ zwischen d. äußeren und d. Oberflächentemperatur d. Körpers an jeder Stelle seiner Oberfläche, wo ein Wärmeaustausch mit d. Umgebung stattfinden kann $= 0$, sowie daß d. Körper selbst in Ruhe, somit auch d. Differenz $p_0 - p_1$ zwischen d. äußeren Druck und d. Körperspannung p_1 an jeder in normaler Richtung beweglichen Stelle d. Oberfläche $= 0$ ist. Während d. Zustandsänderung kann dann d. Körper nicht streng genommen beständig in Ruhe und also jene Differenzen $t_0 - t_1$ und $p_0 - p_1$ nicht streng genommen beständig $= 0$ sein; sie sind vielmehr unendlich klein und von entsprechender Größe, je nachdem d. Änderung durch d. betreffenden Zustand in dem einen od. im umgekehrten Sinne stattfindet. Gleichwohl kann d. Begriff einer nicht nur im Ganzen, sondern im einzelnen d. h. in jedem Augenblick umkehrbaren, einer kürzer so genannten <u>umkehrbaren Zustandsänderung</u> als der eines Grenzfalles aufgestellt werden, dessen Betrachtung von besonderem theoretischen Interesse ist.

Es ist darunter eine Zustandsänderung zu verstehen, welche mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden ist und mit verschwindend kleiner Geschwindigkeit stattfindet, wobei dann freilich auch d. Vernachlässigung einer vorzugsweise unendlich kleinen Änderung d. äußeren Temperaturen t_0, d. äußeren Drucke p_0

und d. Geschwindigkeiten gemessen werden muß, wenn von irgend einem Augenblicke an d. Veränderung d. Zustandsänderung durch d. ~~[illegible]~~ Veränderung d. Bewegungsgeschwindigkeit ohne Ursachen bewirkt werden soll.

Durch d. Voraussetzung von unendlich kleinen Geschwindigkeiten kommt man noch auf eine Folgerung hinsichtlich in betreff d. Körperpressung. Im Allgemeinen ist durch d. f. d. Gesetz, ~~[illegible]~~ nach welchem sich d. augenblickliche Pressung von Punkt zu Punkt d. Körpers ändert, von 2 Umständen bedingt, nämlich von d. Massenkräften und d. äußeren Bewegungen. Da nun aber die äußeren Bewegungen entsprechend d. obigen Voraussetzung einer Zustandsänderung mit umkehrbaren Verwandlungen mit nur unendlich kleinen Geschwindigkeiten erfolgen, so ist in diesem Falle d. Gesetz nur von d. Massenkräften abhängig. Aber auch diese Massenkräfte, namentlich also d. Schwere, kann man in d. meisten Fällen d. technischen Anwendungen vernachlässigen, so lange es sich um Gase und Dämpfe handelt, welche hier meistens behandelt werden. Handelt es sich z. B. um d. Wirkung eines Dampfes in einem aufrechtstehenden Dampfzylinder, so wird d. Pressung in den unteren Theilen durch Einwirkung d. Schwere d. Dampfes größer sein als in den oberen Schichten. Dieser Unterschied ist aber wegen d. verhältnismäßig kleinen Raumes verschwindend klein, so daß man d. Pressung als vollkommen gleichförmig ansehen darf und nicht von d. Schwere d. Dampfes abhängig sein kann. Wenn man also nun auch in solchen Fällen von verschwindend kleinen Geschwindigkeiten von d. Massenkräften absieht, so ist offenbar d. augenblickliche Pressung in allen Punkten d. Körpers gleich und zwar gleich d. äußeren Druck. Bei festen Körpern ist dann auch d. augenblickliche Temperatur in allen Punkten d. Körpers gleich und gleich d. äußeren Temperatur. Ebenso verhält es sich natürlich mit Gemischen gleichartiger Theile von verschiedenen Aggregatformen, indem d. Dampftemperatur immer d. dort herrschenden Pressung entsprechen muß, und da diese, abgesehen von unendlich kleinen Differenzen, in jedem solchen Augenblick in allen Punkten gleich ist, so muß auch d. augenblickliche Temperatur in allen Punkten d. Gemisches gleich sein und zwar = d. äußeren Temperatur. Bei d. Voraussetzung einer umkehrbaren Zustandsänderung, welcher ein fester Körper od. ein solches Gemisch unterworfen ist, kann man also kurzweg von d. augenblicklichen Pressung und Temperatur d. Körpers sprechen. Zwischen den beiden Körpern, festem Körper und Gemisch gleichartiger Theile von verschiedenen Aggregatformen, besteht aber noch ein Unterschied, nämlich der, daß bei festem Körper durch gleichförmige Temperatur und Pressung auch ein gleichförmiges spec. Volumen, überhaupt ein gleichförmiger Wärmezustand bedingt wird, während bei einem solchen Gemisch d. Wärmezustand durch Temperatur und Pressung nicht bedingt ist, vielmehr hier noch d. Mischungsverhältnis d. beiden Bestandtheile erst bestimmt sein muß, um d. spec. Volumen und damit d. Wärmezustand zu bestimmen.

Wenn also in d. Folge von einem Körper d. Rede ist, welcher einer umkehrbaren Zustandsänderung unterworfen ist, so ist bei Absehen d. Massenkräfte (Schwere) in allen Punkten d. Körpers d. augenblickliche Temperatur und Pressung gleich groß.

Wenn allgemein d. augenblickliche Körperpressung in allen Punkten gleich ist, also gleich d. Oberflächenpressung, so ist d. Differenz $p_o - p$ in allen Punkten verschwindend klein und müssen d. äußeren Oberflächendrücke in allen Punkten d. Oberfläche gleich groß sein. Bei einer jeden umkehrbaren Zustandsänderung ist also d. augenblickliche Pressung in allen Elementen d. Körpers und auch d. Oberflächendruck in allen Punkten d. Oberfläche gleich groß.

Betrachtet man nun d. allgemeine Differentialgleichung d. lebendigen Kraft (Seite 28)

$$dL = dM + dP - dR - dS + dE$$

welche sich auf eine unendlich kl. Zustandsänderung eines unendlich kl. Körperelements bezieht, so ist offenbar unter d. Voraussetzung, daß d. Zustandsänderung mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden ist, $dR = 0$ und $dS = 0$, indem keinerlei Bewegungswiderstände, welche Arbeit in Wärme umsetzen, nicht vorkommen sollen entsprechend d. Definition d. umkehrbaren Verwandlungen.

Es ist also nun:

$$dL = dM + dP + dE.$$

Ist d. Zustandsänderung eine [illegible] umkehrbaren Zustandsänderung, erhält zu d. Bedingung, daß dieselbe nur mit unendlich kleinen [illegible] ist, noch d. Bedingung, daß sie mit verschwindend kleinen Geschwindigkeiten stattfindet, so ist dann auch offenbar d. Änderung d. lebendigen Kraft $= 0$, ist also $dL = 0$ ist, d. betreffende Gleichung geht dann über in:

$$dE = \div(dM + dP)$$

Diese Expansionsarbeit dE (d. [illegible]) ist aber nach Seite 29:

$$dE = \int p\, d\delta V$$ wenn δV d. Volumen eines unendlich kleinen Körperelements, $d\delta V$ also d. Änderung dieses Volumens in d. Zeitelement dt bedeutet und wenn p d. [illegible] Pressung bezeichnet.

Abgesehen nun [illegible] von Massenkräften, so ist auch $dM = 0$ und [illegible] Pressung in allen Punkten d. Körpers in demselben Augenblick gleich groß. [illegible] kann man [illegible] schreiben:

$$dE = p \int d\delta V = p\, dV.$$

Also schließlich:

$$dE = \div dP = p\, dV.$$

In diesem umkehrbaren Falle ist also d. Expansionsarbeit gleich dem [illegible] d. Arbeit d. äußeren Drucks, also gleich d. Arbeit d. Drucks, welchen d. Körper vermöge seines Pressungszustandes auf seine unmittelbare Umgebung ausübt. Im Allgemeinen ist diese Arbeit nur ein Teil d. Expansionsarbeit; sie soll deshalb mit dem Namen „äußerliche Expansionsarbeit“ od. „Oberflächenarbeit d. Körpers“ bezeichnet werden.

Bei solchen umkehrbaren Zustandsänderungen eines Körpers kann es sich offenbar immer nur um d. Änderungen seines Wärmezustandes handeln, indem d. Änderungen d. äußeren od. Bewegungszustandes durch d. Definition d. umkehrbaren Zustandsänderungen [illegible] ausgeschlossen sind, da dieselben mit unendlich kleinen Geschwindigkeiten vor sich gehend gedacht werden müssen; [illegible] alle auf d. Erzeugung d. Wärmemenge, welche einem Körper mitgeteilt od. entzogen werden muß, behufs einer gegebenen und nach gegebenem Gesetze stattfindenden Änderung seines Zustandes d. h. seines Wärmezustandes verwenden. Dazu dient im Allgemeinen d. Wärmegleichung, welche nach Seite 40 d. allgemeine Form hat:

$$dU = W dQ + dR + dS - dE.$$

Da aber mit Rücksicht auf eine umkehrbare Zustandsänderung $dR = 0$ und $dS = 0$ ist, so kann man d. Wärmegleichung auch schreiben:

$$W dQ = dU + dE = dU + \int p\, d\delta V$$

wenn d. Integral sich auf δV bezieht und über d. ganzen Körper auszudehnen ist. Diese Gleichung drückt also unmittelbar den Arbeitswert d. Wärme aus, welche d. Körper mitgeteilt werden muß um eine unendlich kleine Änderung seines Wärmezustandes zu bewirken.

Bezieht man diese Gleichung nicht auf d. ganzen endlichen Körper sondern auf 1 kgr ~~einer~~ eines Körperelements, welches unter Umständen unendlich klein dritter Ordnung angenommen werden muß, damit man seinen Zustand als gleichförmig [illegible] d. h. um [illegible] Pressung und Temperatur in allen Punkten als gleich betrachten zu dürfen, so ist offenbar wenn man mit v d. spez. Volumen d. Elements, mit p seine Pressung und mit U = eine Funktion von v u. p seine spez. innere Arbeit bezeichnet:

$$W dQ = dU + p\, dv.$$

= die Wärmezuführung bezogen auf 1 kgr eines unendlich kleinen Elements unter d. Voraussetzung einer umkehrbaren Zustandsänderung

= dem Arbeitswert d. Wärme, welche ~~[illegible]~~ dem Körperelement pr. 1 kgr behufs einer unendlich kleinen Zustandsänderung mitzuteilen ist, bei welcher sich dessen Volumen v um dv und d. innere spez. Arbeitsvermögen U sich um dU ändert und welche einem [illegible] Werte von dQ offenbar eine zu entziehende Wärmemenge entspricht.

Wenn wegen d. Abwesenheit von Widerstandskräften die augenblickliche Pressung in allen Punkten gleich ist, können wir auch d. oben gefundenen Gleichung nicht nur auf 1 kg d. unendl. kleinen Körperelements beziehen sondern auch auf 1 kg d. ganzen Körpers, wobei jedoch, wenn dieselbe auf d. ganzen Körper angewendet ist, unter v und U d. mittlere spez. Volumen resp. d. mittlere spez. innere Arbeit pro 1 kg zu verstehen ist.

Handelt es sich nun darum d. Wärmemenge dQ zu ermitteln, welche d. Körper mitgeteilt resp. entzogen werden muß ~~[illegible]~~ resp. dem Körperelement pro 1 kg mitgeteilt werden muß, um eine Zustandsänderung von endlicher Größe zu erlangen, so hat man durch Integration d. vorhin gefundenen Wärmegleichung:

$$WQ = U_2 - U_1 + \int_{v_1 p_1}^{v_2 p_2} p\,dv$$

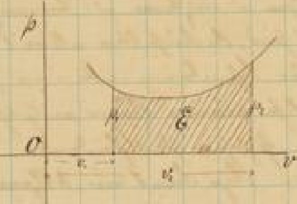
wenn unter $v_1\ p_1\ U_1$ d. spez. Volumen, d. Pressung und d. spez. innere Arbeit im Anfangszustand und unter $v_2\ p_2\ U_2$ " " " " " " " " im Endzustand verstanden wird.

Um d. Integral bestimmen zu können muß man d. Gesetz kennen, nach welchem sich v und p gleichzeitig ändern, nämlich d. [illegible] Beziehung, welche beliebig zwischen v und p stattfindet. Man kann also d. vorhin ~~[illegible]~~ gestellte Aufgabe allgemein nicht weiter durchführen, wenn nicht d. Gesetz gegeben ist, nach welchem d. gleichzeitige Änderung von v und p erfolgt.

Dieses Gesetz kann im Allgemeinen gegeben sein durch eine Gleichung zwischen v u. p von d. Form:

$$f(v, p) = 0$$

Diese Gleichung kann man nun offenbar als d. Gleichung einer ebenen Curve betrachten, welche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem (v als Abscissenachse und p als Ordinatenachse) bezogen ist.



D. Integral $\int_{v_1 p_1}^{v_2 p_2} (p\,dv)$, welches nichts anderes als d. [illegible] bei solcher Zustandsänderung ist, wird in d. Figur offenbar durch den Inhalt d. Fläche dargestellt, welche von d. Abscissenachse v, d. Curve und den Ordinaten p_1 und p_2 begrenzt wird, ~~[illegible]~~ welche letztere d. Anfangs- und Endzustand entsprechen.

Da diese geometrische Darstellung d. Beziehung zwischen d. spez. Volumen v und d. Pressung p im weiteren Verlauf von wesentlichem Nutzen sein wird, soll dieselbe mit einem besonderen Namen „Zustandscurve" bezeichnet werden.

Die oben entwickelten 3 Gleichungen, bezogen auf 1 kg eines unendlich kl. Körperelements resp. auf 1 kg d. ganzen Körpers, wurden aus d. allgemeinen Form d. Wärmegleichung entwickelt, indem dR und $dS = 0$ gesetzt wurden, entsprechend einer Zustandsänderung mit umkehrbaren Verwandlungen. Eine umkehrbare Zustandsänderung ist damit noch nicht bestimmt, indem eine solche, außer daß sie mittels umkehrbarer Verwandlungen ~~stattfindet~~ [illegible], auch noch mit unendlich kleinen Geschwindigkeiten stattfinden muß. Diese letzte Bedingung wurde aber ganz [illegible] und [illegible] Grund jene Gleichungen [illegible] für umkehrbare Änderungen d. Wärmezustands gelten, d. h. für d. Änderungen d. Wärmezustands bei solchen Zustandsänderungen, welche mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden sind, sonst aber mit beliebig großen Geschwindigkeiten stattfinden können. Nur kann man in solchen Fällen, wo d. Zustandsänderungen mit umkehrbaren Verwandlungen verbunden sind, aber mit ~~[illegible]~~ Geschwindigkeiten von endlicher Größe erfolgen, durch Abwesenheit von Widerstandskräften auf eine gleichförmige Pressung und Temperatur [illegible] schließen. Daraus folgt, daß selbst bei d. Abwesenheit von Widerstandskräften, zur Untersuchung d. Änderung d. Wärmezustands eines Körpers im Allgemeinen eine Zerlegung desselben in unendlich kleine Elemente nötig ist, und also d. beiden letzten Gleichungen nur auf 1 kg ~~[illegible]~~ eines solchen Elements bezogen werden können.

Mit dieser Einschränkung gelten alle Gesetze, welche im folgenden d. Einfachheit wegen für unendlich kleine Zustandsänderungen aufgestellt werden, allgemein für d. Änderungen d. Wärmezustands bei Zustandsänderungen mit nur unendlich kleinen Verwandlungen d.h. für unendlich kleine Änderungen d. Wärmezustands. Bei d. Ableitung dieser Gesetze kann man übrigens immer einen Körper von gleichförmiger Temperatur und Pressung voraussetzen von 1 kg Gewicht, dessen Volumen also = d. spec. Volumen v ist, weil ihre Anwendung auf ein Körpersystem gestattet, nämlich im Allgemeinen auf unendlich kl. Körperelemente beschränkt, wenn nicht d. Geschwindigkeiten und Wechselwirkungen entsprechend klein sind, welche aufgestellten auch ein solches nicht homogenen Körper von endlicher Größe v und U als d. mittleres spec. Volumen und mittleres spec. inneres Arbeitsvermögen zu verstehen sind.

Es giebt nun besondere Arten von unendlich kleinen Zustandsänderungen, welche von hauptsächlichem Interesse sind, nämlich:

1/ Unendlich kleine Zustandsänderungen, welche bei constantem Volumen stattfinden, also gekennzeichnet sind durch $dv = 0$. Die Zustandscurve ist in diesem Falle offenbar eine zur p Axe parallele Gerade.

2/ Unendlich kleine Zustandsänderungen, welche bei constanter Pressung stattfinden, welche also gekennzeichnet werden durch $dp = 0$, in welchem Falle d. Zustandscurve natürlich eine zur v Axe parallele Gerade ist.

3/ Unendlich kleine Zustandsänderungen bei constanter Temperatur entsprechend $dt = 0$ unter t d. Temperatur verstanden. Die Zustandscurve ist in diesem Falle allgemein eine krumme Linie und wird bezeichnet mit d. Namen: isothermische Curve.

4/ Unendlich kleine Zustandsänderung bei constantem innerem Arbeitsvermögen also constanter Körperwärme entsprechend $dU = 0$. Die im Allgemeinen als krumme Linie erscheinende Zustandscurve heißt man isodynamische Curve.

5/ Unendlich kleine Zustandsänderungen ohne Mittheilung d. Entziehung ~~das~~ von Wärme, welcher Fall, gekennzeichnet durch $dQ = 0$, von besonderer Wichtigkeit ist. Die Zustandscurve heißt in diesem Falle: adiabatische Curve.

Die sub 3 ersichtliche, nach einer isothermischen Curve vor sich gehende Zustandsänderung kann man sich dadurch vermittelt denken, daß d. betreffende Körper mit einem andern Körper in andauernder Berührung steht, welcher d. fraglich constante Temperatur besitzt (d. letztere Körper kann dann von so großen Dimensionen gegenüber dem betrachteten sein, daß eine Temperaturänderung d. ersteren an dem letzteren ohne Einfluß auf d. Temperatur d. großen Körpers ist). Die sub 5 ersichtliche und nach einer adiabatischen Curve vor sich gehende Änderung kann man sich dadurch vermittelt denken, daß d. Versuchskörper in eine Hülle eingeschlossen ist, welche für Wärme undurchdringlich ist ohne d. Volumenänderung d. Körpers zu hindern.

Was nun die Versuche zu den umfangreicheren, die andauernden Zustandsänderungen betrifft, welche nicht nur mit endlichen Änderungen d. äußeren Zustands d. Ausgangszustands, sondern auch mit nicht unendlich kleinen Verwandlungen verbunden sind, so lassen sich diese häufig selbst durch Zerlegung d. Körpers in unendlich kleine Elemente nicht in ihren einzelnen Theilen bezüglich auf Raum und Zeit verfolgen. Man muß oft ganz und gar verzichten, solche Zustandsänderungen mathematisch zu untersuchen, besonders wenn diese mit Wechselwirkungen, Stößen, Molekularbewegungen etc. überhaupt [illegible] veränderlichen Geschwindigkeitsänderungen im Innern verbunden sind, deren Gesetzmäßigkeit nicht mathematisch und durch [illegible] vollständig unbekannt ist. Indessen wenn in solchen Fällen, die sich freilich allgemein nicht in ihrem ganzen Verlauf verfolgen lassen, kann man specielle Fragen dennoch mit Hilfe d. bekannten allgemeinen Gleichungen (unter Anwendung von Wärme und Arbeit und Wärmezuführung und Steigerung d. Arbeitsvermögens) leicht beantworten. Von besonderem Interesse ist in dieser Hinsicht d. Aufgabe betreffend d. Bestimmung d. Änderung d. innern Arbeitsvermögens für den Fall, daß vorausgesetzt für d. Anfangs- und Endzustand d. Körper sich in äußerer Ruhe befindet, wenn ihre Leitung gegeben ist. Die mitgetheilte Wärme = Q, die Volumenänderung d. Körpers und d. äußeren Druck p in den nominell zur Oberfläche benachbarten Punkten d. letzteren während d. Dauer dieses Vorgangs. Ein specieller solcher Fall ist z. B. folgender:

[illegible]

[illegible] (Seite 40):

$$d(L+U) = dM + dP + W\,dQ$$

[illegible]

$$U_2 - U_1 = M + P + WQ$$

[illegible]

$$\int\!\!\int p_0\, d\sigma\, ds = -P$$

[illegible]

$$U_2 - U_1 = WQ - \int\!\!\int p_0\, d\sigma\, ds.$$

[illegible]

Dadurch geht diese lebendige Kraft durch Reibung von Luftpartikelchen und Oberflächenreibungen wieder in Körperwärme über, der Arbeitswerth derselben ist der inneren Arbeitsenergie, wird also schließlich um den Betrag der Oberflächenarbeit abgenommen haben, wenn nicht außerdem von Außen her Wärme = Q mitgetheilt wäre, welche die Körperwärme um einen ebenso großen Betrag und die innere Arbeitsenergie um ihren Arbeitswerth = WQ vergrößert.

Wenn nun weiter bei der Zustandsänderung der äußere Druck p_0 in den normal zur Oberfläche sich bewegenden Theilen derselben in jedem Augenblick gleichförmig vertheilt ist, d. h. in jedem Augenblick in jedem Punkt gleich groß ist, so kann man nach der vorhin gefundenen Gleichung schreiben:

$$U_2 - U_1 = WQ \div \int p_0 \int d\sigma\, ds$$

Die Summe der Produkte aus $d\sigma$ und ds ist aber offenbar nichts anderes als die Volumenänderung des ganzen Körpers, also $= dV$; folglich:

$$U_2 - U_1 = WQ \div \int p_0\, dV.$$

Ist ferner noch der äußere Druck p_0 nicht nur in jedem Augenblick in allen Punkten gleich, sondern während der ganzen Dauer der Zustandsänderung in allen Oberflächenpunkten constant, so ist natürlich:

$$U_2 - U_1 = WQ - p_0 \int dV = WQ - p_0 (V_2 - V_1)$$

wobei unter V_1 das Volumen des Körpers im Anfangszustand und unter V_2 das Volumen im Endzustand verstanden.

In dem noch einfacheren Falle, daß ein im luftleeren Gefäß befindlicher [illegible] gasförmiger Körper (derselbe ist dann p_0 während der ganzen Dauer constant und zwar constant $= 0$, so kann ein Theil der Oberfläche überhaupt nicht in normaler Richtung zur Oberfläche [illegible]). In diesem Falle ist also:

$$U_2 - U_1 = WQ$$ d. h. die Änderung der inneren Arbeitsenergie = dem Arbeitswerth der Arbeit der mitgetheilten Wärme.

Wenn man nun auch noch von dieser Wärmemittheilung absieht, also wenn der Körper während der Zustandsänderung mit wärmedichten Wänden umgeben ist (schließlich durch Schnelligkeit, wegen unbedeutender Differenz der inneren und äußeren Temperaturen für die ganze kurze Dauer der Zustandsänderung) also $Q = 0$ gesetzt werden kann:

$$U_2 - U_1 = 0$$; unter diesen Umständen hat also eine Änderung der inneren Arbeitsenergie nicht stattgefunden.

Die Wärmetheorie gestattet überhaupt mehrfachen Umformungen um sie zur Lösung von Aufgaben aus besonderen bestimmten Gebieten zu benutzen. Ehe diese Umformungen vorgenommen werden, soll noch ein sehr wichtiger Begriff behandelt werden, nämlich der [illegible]:

Aequivalenz von Verwandlungen.

Im Vorhergehenden war schon die Rede von (wechselseitigen) Verwandlungen von Arbeit od. lebendiger Kraft in Wärme und umgekehrt und die Verwandlung der Wärme von einer bestimmten Temperatur in eine andere von anderer Temperatur. Zur kürzeren Bezeichnung soll die erste Verwandlung eine Verwandlung der ersten Art und die Verwandlung von Wärme in eine solche von anderer Temperatur eine Verwandlung der 2ten Art genannt werden. Jede dieser beiden Verwandlungen kann in 2 Richtungen stattfinden, von [illegible] die 2 als nicht unmittelbar [illegible]. Die Verwandlung von Wärme in Arbeit soll eine positive und die umgekehrte von Arbeit in Wärme eine negative Verwandlung der ersten Art genannt werden. Die Verwandlung der 2ten Art kann stattfinden indem Wärme von höherer zu niederer und umgekehrt von niederer zu höherer Temperatur übergeht. Der erste Vorgang soll eine positive und der letzte Vorgang eine negative Verwandlung der 2ten Art genannt werden.

Aus dem Vorhergehenden ist es bekannt, daß eine positive Verwandlung d. ersten Art nie unmittelbar stattfinden kann, daß niemals die Wärme sich immer erst in Expansionsarbeit eines andern Körpers verwandelt, welche d. Verwandlung von Wärme in Arbeit vermittelt. Ebenso ist es auch bekannt, daß eine positive Verwandlung d. 2ten Art auch nicht unmittelbar durch Leitung od. Strahlung stattfinden kann, sondern daß immer d. Vermittlung eines dritten Körpers nöthig ist. Umgekehrt können also positive Verwandlungen nie unmittelbar stattfinden, während d. negativen Verwandlungen auch unmittelbar stattfinden können ohne Zuthun eines dritten Körpers, indem sich bekanntlich lebendige Kraft od. danach entsprechende Arbeit unmittelbar durch feindliche Reibungswiderstände in Wärme umsetzen können und ebenso Wärme von höherer Temperatur sich selbst zu niederer Temperatur übergehen kann. Jede positive Verwandlung erfordert also d. Zustandsänderung eines vermittelnden Körpers. Hierbei ist besonders d. Fall von Interesse, daß d. Zustandsänderung ein sogenannter Kreisprozeß ist, daß eine solche Zustandsänderung ist, welche d. vermittelnden Körper nach und nach wieder in seinen Anfangszustand zurückführt. Auf diesen Fall bezieht sich namentlich der von Clausius aufgestellte Grundsatz d. Aequivalenz von Verwandlungen, welche in folgendem Satz besteht:

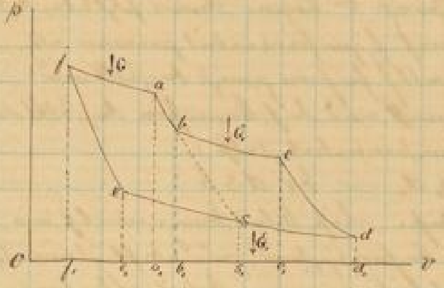
Wenn ein solcher Kreisprozeß eines vermittelnden Körpers mit irgend einer positiven Verwandlung verbunden ist, so muß nothwendig derselbe auch zugleich mit einer negativen Verwandlung stattfinden, welche letztere zu d. positiven Verwandlung in einer solchen Beziehung steht d. Art, daß wenn man jede Verwandlung bezüglich ihrer Art, Größe und Sinn durch eine algebraische Größe, durch ihren sogenannten Verwandlungswerth ausdrückt, alsdann die Summe aller dieser Verwandlungswerthe = 0 od. negativ ist (niemals positiv) und zwar = 0 in dem Grenzfall, daß d. Kreisprozeß umkehrbar ist d.h. wenn derselbe aus lauter umkehrbaren Zustandsänderungen besteht.

Die Herleitung dieses Princips beruht auf einer Erweiterung d. früher gemachten Grundsätze betreffs d. Wärmemittheilungen durch Leitung und Strahlung. Wie bekannt ist es durch d. Definition richtig, daß ein unmittelbarer Wärmeübergang von niederer zu höherer Temperatur durch Leitung nicht stattfinden kann. Es wird ~~aber~~ ~~weiter~~ unmittelbar vorausgesetzt, daß auch durch Strahlung solche Übergänge von niederer zu höherer Temperatur nicht möglich seien. d. Aequivalenz d. Verwandlungen beruht nun auf d. Erweiterung dieser Grundsätze, indem man annimmt, daß ein Übergang von niederer zu höherer Temperatur d.h. also eine positive Verwandlung d. 2ten Art, auch mittelbar nie und nimmer stattfinden kann, wenn nicht gleichzeitig damit eine Änderung d. Zustandes d. vermittelnden Körpers od. eine sonstige Verwandlung verbunden ist. Allgemein läßt sich dies freilich nicht beweisen, die vielfache Übereinstimmung d. hieraus gezogenen Folgerungen mit den gemachten Erfahrungen kann aber wohl als Rechtfertigung d. obigen Annahme angesehen werden.

Um nun d. festgestellte Princip herzuleiten, denke man sich ~~erst~~ einen Körper einem umkehrbaren Kreisprozeß unterworfen von besonderer Art. Zunächst ist jedenfalls zu bemerken, daß d. Zustandscurve, welche d. Gesetz d. Zustandsänderung (Änderung d. Wärmezustandes) graphisch durch v und p darstellt, für einen Kreisprozeß natürlich eine in sich zurücklaufende ebene Curve ist. Die Art d. Kreisprozesses soll nun d. Art sein, daß d. entsprechende Zustandscurve abwechselnd aus isothermischen und adiabatischen Curvenstücken besteht und zwar aus je 3 Stücken d. Curven d. einen und d. andern Art; d.h. also den Körper einem solchen umkehrbaren Kreisprozeß unterwerfen d. Art, daß d. Körper erst eine Zustandsänderung bei constanter Temperatur entsprechend d. isothermischen Curve, dann eine umkehrbare Zustandsänderung ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme entsprechend d. adiabatischen Curve und so abwechselnd weiter erfährt, bis er schließlich wieder in seinen Anfangszustand zurückgekehrt ist. Die umkehrbare Zustandsänderung ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme nach einer adiabatischen Curve kann man sich im Gefäß ersetzt dadurch vermittelt denken, daß man d. Versuchskörper in eine für den Wärmedurchgang undurchlässige Hülle einschließt, welche aber der Volumenänderung keine Hindernisse entgegensetzt. d. umkehrbare Verwandlung bei constanter Temperatur nach einer isothermischen Curve kann man sich dadurch vermittelt denken, daß d. Versuchskörper zunächst an einer Stelle seiner Oberfläche von einer d. Wärme nicht durchlassenden Wand begrenzt ist, am übrigen Theile dagegen mit einem andern Körper von constanter Temperatur in Berührung sich befindet, welcher also auch dem Versuchskörper erhalten bleibt, so lange die Berührung dauert.

Was die Art des Versuchskörpers K betrifft, so soll über dieselbe nichts speciell Bestimmtes festgesetzt werden außer den folgenden 2 Voraussetzungen: 1) der Körper K soll von solcher Art sein, daß bei gleichem Volumen sein Druck um so größer wird, je höher seine Temperatur ist und daß 2) bei constanter Temperatur die Volumvergrößerung eine Mittheilung von Wärme erfordert und eine Wärmeentziehung eine Volumverminderung entspricht. (Im Allgemeinen gelten diese Voraussetzungen nicht für alle Körper, aber doch für die meisten.)

Der Versuchskörper K hat einen Gewicht = 1 kgr, so daß das spec. Volumen v zugleich das Volumen des ganzen Körpers ist. Im Anfangszustand sei das Volumen = v und der Körperspannung = p; bei Abstrahirung von Molecularkräften kann man dann bekanntlich bei einer solchen umkehrbaren Zustandsänderung von der Körperspannung und Temperatur in einem Augenblick überhaupt sprechen. Die augenblickliche Temperatur sei = t. Der Anfangszustand kann nun graphisch dargestellt werden durch einen Punkt A, dessen Coordinaten in Bezug auf die bekannten Coordinatenachsen v und p sind.



Die umkehrbare Zustandsänderung des Körpers K erfolge nun zunächst auf einer adiabatischen Curve ab d. h. diese Curve stellt diejenige umkehrbare Zustandsänderung ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme erfolgt. Die Temperatur habe sich bis zum Zustand b auf t_1 vermindert, der jetzige Zustand ist dargestellt durch die Abscisse Ob_1 als Volumen und bb_1 als Körperspannung. Die weitere Zustandsänderung erfolge nach der isothermischen Curve bc als bei constanter Temperatur so daß die Temperatur im Zustand c auch noch t_1 ist. Die Zustandsänderung soll auf unter Volumenzunahme erfolgen, es muß also der Körper K_1, mit welchem man sich den Versuchskörper verbunden denkt um ihn auf constanter Temperatur zu erhalten, eine gewisse Wärmemenge Q_1 abgeben und dem Körper K mitgetheilt werden. Daß der Versuchskörper von Außen mitgetheilte Wärmemenge bei der Zeichnung dargestellt durch einen Pfeil, welcher von Außen gegen die Curve gerichtet ist. Im Zustand c ist nun der Druck dargestellt durch cc_1 und das Volumen durch Oc_1. Hierauf erfolge wieder die Zustandsänderung nach einer adiabatischen Curve cd und zwar in einem solchen Sinne, daß die Temperatur abnimmt etwa bis t_2. Im Zustand d ist also das Volumen entsprechend Od_1 der Druck $= dd_1$ und die Temperatur $= t_2$ $(t_2 < t_1)$.

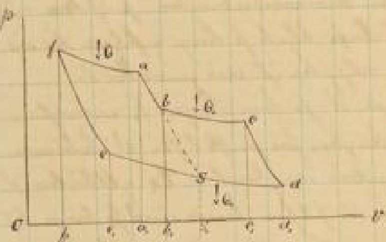
Die weitere Zustandsänderung erfolge wieder nach einer isothermischen Curve de indem man sich den Versuchskörper K mit einem Körper K_2 von constanter Temperatur t_2 in Berührung befindend denkt. Die Zustandsänderung erfolge, wie es auch die Zeichnung andeutet, unter Volumenabnahme, so daß also der Körper K_2 eine gewisse Wärmemenge abgegeben wird und zwar soll diese Abgabe so lange erfolgen bis im Zustand e eine ebenso große Wärmemenge Q_2 an diesen Körper K_2 abgegeben ist wie zuvor bei der Zustandsänderung nach der isothermischen Curve bc der Versuchskörper K von dem Körper K_1 entnommen. Angedeutet ist dies durch einen Pfeil welcher von der Curve weg nach Außen hin gerichtet ist. Das Volumen ist also nun geworden $= Oe_1$ der Druck $= ee_1$ während die Temperatur constant $= t_2$ geblieben ist. Jetzt erfolge die Zustandsänderung nach einer adiabatischen Curve ef in solchem Sinne und so lange bis der Körper K wieder seine Anfangstemperatur t erlangt hat. Die Körperspannung ist nun $= ff_1$, das Volumen $= Of_1$ und die Temperatur wieder = der Anfangstemperatur t. Endlich erfolge die letzte der ~~vier~~ gedachten Zustandsänderungen nach einer isothermischen Curve fa und zwar in solchem Sinne und so lange bis auch das Volumen des Versuchskörpers K wieder = Anfangsvolumen v geworden ist. Sobald nun der Wärmezustand durch v und t vollkommen bestimmt ist, und da diese wieder = dem Anfangsvolumen und Anfangstemperatur geworden sind, muß auch ~~p~~ die Körperspannung wieder = Anfangsspannung geworden sein überhaupt der Versuchskörper wieder in seinen Anfangszustand zurückgekehrt sein. Die erhaltene Zustandsänderung ist also nun ein Kreisprozeß geworden, da der Zustand ein geschlossener ist, und zwar ein umkehrbarer Kreisprozeß, weil alle vorkommenden Zustandsänderungen unterschieden werden. Auf Grund d. im Anschluss d. [illegible] gemachten [illegible] ist als offenbar leicht einzusehen, ist d. Volumen Of, das Körper im Zustand f kleiner sein muss als das Volumen Oa_1 im Anfangszustand a_1 [illegible] im Anfang [illegible] wurde, eine Volumenzunahme eine Wärmemitteilung entspricht, [illegible] gemeinte Zustandsänderung nach d. isothermischen Linie fa, welche [illegible] Temperatur t_1 [illegible] Wärmemenge Q an den [illegible] Körper K. [illegible] adiabatische Linie ab und isothermische Linie dc bis zu ihrem Schnittpunkt s [illegible], und [illegible] Kreis $abcdsa$ [illegible] Kreisprozess [illegible] Zustandsänderung erfolgt, also nach d. isothermischen Linie [illegible] bis s, [illegible] Q_2 die Wärmemenge, welche bei d. Zustandsänderung [illegible] isothermischen Linie ds [illegible] Temperatur t_2 [illegible] Körper K_2 mitgeteilt wird. [illegible] Volumen [illegible] Temperatur [illegible] isothermischen Linie bc) [illegible] und da d. Temperatur t_2 kleiner als t_1 (entsprechend d. isothermischen Linie bc) [illegible] Linie ds zwischen d. Linie bc und d. Abscissenachse v liegen. [illegible] Kreisprozess $abcdsa$ [illegible] Arbeit [illegible] dargestellt wird [illegible] durch Fläche $a_1abcdd_1a_1$ und d. Arbeit welche [illegible] dargestellt durch d. Fläche $d_1dsaa_1d_1$, die gewonnene überschüssige [illegible] Arbeit ist also:

$$a_1abcdd_1a_1 - d_1dsaa_1d_1 = bcdsb$$

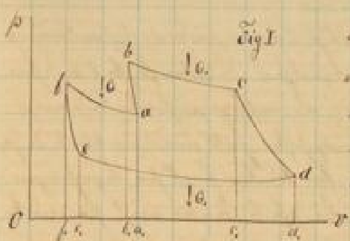
d. h. = d. von d. Zustandskurve $bcdsb$ eingeschlossenen Fläche. Diese Arbeit kann natürlich nur aus Wärme entstanden sein; [illegible] d. Körper K in seinen Anfangszustand zurückgekehrt ist [illegible] Körper K [illegible] mitgeteilten [illegible] Wärme sein. [illegible] Wärmemenge Q_1 mitgeteilt und d. Wärme Q_2 entzogen [illegible] Q_2 kleiner als Q_1 sein muss [illegible] Körper seine Wärmemenge [illegible] Temperatur t_2 [illegible], damit also $Q_1 - Q_2$ [illegible] Körper K nach d. isothermischen Linie [illegible] als bei S [illegible] d. isothermische Linie [illegible] Schnittpunkt mit d. adiabatischen Linie ab [illegible] Volumenabnahme [illegible] Zustandskurven derselben Art [illegible] adiabatischen Linien ab und ef [illegible] Volumen Of im Zustand f kleiner sein als d. Volumen Oa_1 im Anfangszustand a [illegible] Zustandsänderung nach d. isothermischen Linie fa [illegible] Wärmemitteilung = Q [illegible] sein. Bei dem [illegible] Kreisprozess $abcdefa$ wird also [illegible] eine Wärmemenge gewonnen [illegible]:

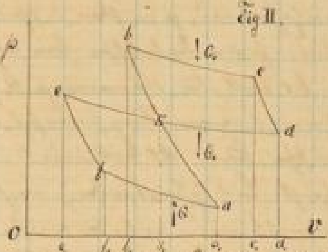
$$Q_1 - Q_2 + Q - Q$$

[illegible] Körper [illegible] in seinen Anfangszustand [illegible], als Arbeit [illegible] wird, welche durch d. Zustandskurve eingeschlossene Fläche $abcdefa$ [illegible] $= E$ sei. [illegible] gewonnene Wärmemenge:



$$Q = AE$$ [illegible] Wärmeäquivalent d. Arbeitseinheit verstanden. Mit d. Kreisprozess ist also eine positive Umwandlung d. ersten Art nämlich eine Umwandlung von Wärme in Arbeit verbunden. [illegible] Umwandlung [illegible] Wärmemenge Q_1 [illegible] d. Körper K zum Körper K_2 [illegible] d. Temperatur t_1 zur Temperatur t_2, wobei $t_2 < t_1$ [illegible] Temperatur [illegible] Umwandlung d. 2ten Art. Mit dem vorliegenden Kreisprozess ist also eine positive Umwandlung d. ersten Art und eine negative Umwandlung d. 2ten Art verbunden. Diese beiden Umwandlungen bedingen sich natürlich gegenseitig. [illegible] Kreisprozess [illegible] umkehrbar [illegible] rückläufig.





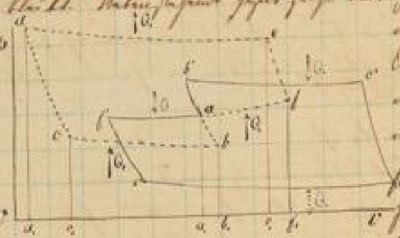
In dieser Betrachtung ist d. Höhe d. Anfangstemperatur t, bei welcher meist Wärme dem Körper K entzieht wird und im Mass [illegible] Bedingung [illegible]. Die [illegible] Fall ist: $t > t_1$; in anderen Fällen ändert sich nur d. Figur, aber [illegible] d. Schlussfolgerungen [illegible]. Fig I zeigt z. B. die Zustandkurve für den Fall, dass $t_1 > t > t_2$ ist und Fig II auf den Fall, dass: $t < t_2$ ist.

In dem letzteren Falle lässt sich d. Kreisprozess in einen rechtläufigen $sbcds$ und einen rückläufigen $asefa$ zerlegen; bei ersterem wird Arbeit gewonnen, bei letzterem verbraucht. [illegible] im Ganzen Arbeit: $E = sbcds - asefa = WQ$ = d. Arbeitswerth d. mitgetheilten Wärme gewonnen werden, also ist auch in diesem Falle eine positive Verwandlung d. ersten Art und eine negative Verwandlung d. 2ten Art mit d. Kreisprozess verbunden. [illegible]

[illegible]

[illegible]

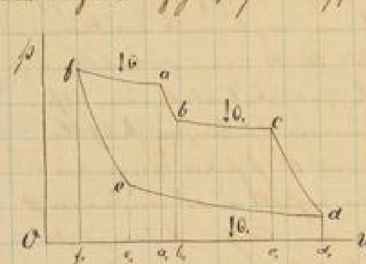
daß dieses wirklich der Fall ist, geht aus dem Umstande hervor, daß hier wirklich bei umgekehrtem Sinne der Zustandsänderung nur umgekehrte Vorzeichen haben wie im ursprünglichen umkehrbaren Fall, daß also die Umkehrbarkeit bestehen bleibt. Untenstehende Figur zeigt dies z. B. für den Fall, daß $t_1 > t > t_2$ ist. Die voll gezeichnete Linie zeigt die Zustandsänderung für den ursprünglichen umkehrbaren Fall und die punktierte die Zustands-linie für den Fall [illegible]



[illegible] adiabatischen Linie ab [illegible] t_2. Auf der isothermischen Linie bc tritt die Wärmemenge Q_2 [illegible] Auf der adiabatischen Linie cd [illegible] Temperatur von t_2 auf t_1 [illegible] Auf der isothermischen Linie de [illegible] Wärmemenge Q [illegible] adiabatischen Linie ef [illegible] Temperatur von t_2 [illegible] isothermischen Linie fa [illegible] bc [illegible] Körper K [illegible] Wärme Q_1 [illegible] de Q [illegible] fa [illegible]

[illegible]

Betrachten wir den im Anfang [illegible] Kreisprozeß mit demselben Körper K und mit Hilfe derselben Wärmebehälter K_1 und K_2 im umgekehrten Sinne $afedcba$ [illegible] Während die Zustandsänderung nach af bei konstanter Temperatur t und die Wärme Q dem Körper K entzogen, während die Zustandsänderung nach ed bei konstanter Temperatur t_2 wird die Wärme Q_2 dem Körper K von K_2 mitgeteilt [illegible] cb bei konstanter Temperatur t_1 [illegible] K_1 [illegible] Wärme Q_1 [illegible]



[illegible] Arbeit $E = WQ$ [illegible] Zustandslinie $afedcba$ [illegible]

[illegible] t, t_1 und t_2 [illegible] Q und Q_1 [illegible] Körper K [illegible] Temperatur t [illegible] v und p [illegible] Temperatur t_1 oder t_2 [illegible] Körper K_1 [illegible] Körper K'' [illegible] Q'' und Q_1'' [illegible] Temperaturen t, t_1 und t_2

entsprechenden solchen Kreisprocesse d. Körpers K mit Q und Q_1 bezeichnet würden, so ist es nun wichtig zu bemerken, daß, wie auch Q und Q', Q_1 und Q_1' verschieden sein mögen, doch d. Verhältniß dieser Wärmemengen immer constant derselbe ist, also:

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{Q_1}{Q_1'} \text{ ist od. } \frac{Q}{Q_1} = \frac{Q'}{Q_1'}.$$

Um dies zu beweisen, setze man $\frac{Q_1}{Q} = \frac{m}{n}$ wobei m und n ganze Zahlen vorstellen; dieser Bruch $\frac{m}{n}$ kann also bei hinreichender Größe von m und n jedes beliebige Verhältniß darstellen und sogar ein irrationales, wenn m und n unendlich groß werden. Der Beweis für d. Richtigkeit d. genannten Verhältnisses kann nun in d. Weise geführt werden, daß man annimmt d. Behauptung d. Bestehens eines solchen Verhältnisses sei falsch und es soll dann gezeigt werden, daß man mit dieser letzten Annahme auf Widersprüche stößt.

Angenommen nun $\frac{Q_1}{Q} = \frac{m}{n}$ und $\frac{Q_1'}{Q'} < \frac{m}{n}$.

Denkt man d. Kreisproceß n mal hintereinander vorwärts mit d. Körper K ausgeführt, so dass bei einem jeden dieser Kreisprocesse d. Wärmemenge Q in Arbeit verwandelt wird entsprechend d. früheren Auseinandersetzungen. Folgerecht wird also bei d. n Kreisprocessen d. Wärmemenge nQ in Arbeit verwandelt und es geht außerdem d. Wärmemenge nQ_1 vom Körper K_1 zum Körper K_2 über, d. h. es wird d. Temperatur t_1 in d. Temperatur t_2 verwandelt. Wenn jetzt ein anderer Körper K' zwischen d. Temperaturen t t_1 und t_2 einen m maligen rückläufigen Kreisproceß ausführt, so wird d. Wärmemenge m Q' aus Arbeit durch Verwandlung erhalten und es geht dabei d. Wärmemenge $m Q_1'$ in umgekehrter Sinne wie vorher über von d. Temperatur t_2 zur Temperatur t_1 od. es wird d. Wärmemenge $m Q_1'$ vom Körper K_2 zum Körper K_1 übergeführt. Nachdem d. n + m Kreisprocesse ausgeführt sind, befinden sich die beiden Verwandlungskörper K und K' in ihren anfänglichen Zuständen; außerdem ist nun keine Wärme aus Arbeiten in Wärme verwandelt und es ist eine gewisse Wärmemenge $m Q_1' - n Q_1$ von d. Körper K_2 zu dem wärmeren Körper K_1 ohne Compensation d. h. ohne irgend eine gleichzeitige Veränderung übergeführt worden, also von Körper von d. Temperatur t_2 zu dem von d. Temperatur t_1, wo $t_2 < t_1$, indem $n Q_1' - n Q_1$ positiv ist. Ein solcher Uebertragung von Wärme von einem Körper niederer Temperatur zu einem Körper höherer Temperatur ist aber nach d. von Clausius aufgestellten Satze unmöglich, folglich ist ein Widerspruch mit d. willkürlichen Annahme vorhanden, daß $\frac{Q_1'}{Q'} < \frac{m}{n}$ sein soll und daß dabei $\frac{Q_1}{Q} = \frac{m}{n}$ richtig sei.

Denselben Widerspruch bekommt man mit d. Annahme, daß:

$\frac{Q_1}{Q} = \frac{m}{n}$ und gleichzeitig $\frac{Q_1'}{Q'} > \frac{m}{n}$ sei, wenn man dann nur den n maligen Kreisproceß d. Körpers K rückläufig und den m maligen Kreisproceß d. Körpers K' vorläufig stattfinden läßt. Wenn also:

$\frac{Q_1}{Q} = \frac{m}{n}$ ist, kann nicht gleichzeitig $\frac{Q_1'}{Q'} \gtrless \frac{m}{n}$ sein, es muß also $\frac{Q_1'}{Q'} = \frac{m}{n} = \frac{Q_1}{Q}$ sein. D. Verhältniß ist somit constant, welches auch immer d. Anfangszustand ist und welches auch d. vermittelnde Körper auch sei, sobald nur d. Temperaturen t, t_1 und t_2 in allen Fällen dieselben sind.

Mit Hülfe eines einfachen Kreisprocesses von d. hier vorausgesetzten Art, d. h. d. jedesmal nur aus 3 isothermischen und 3 adiabatischen Curven besteht, kann jede d. 2 verschiedenen positiven Verwandlungen, nämlich Wärme Q von d. Temperatur t in Arbeit und Arbeit in Wärme von d. Temperatur auf unendlich mannigfache Weise durch eine andere Verwandlung derselben Art od. durch eine Verwandlung d. anderen Art ersetzt werden. Ist z. B. d. Verwandlung einer gewissen Wärmemenge Q von d. Temperatur t in Arbeit gegeben, so kann ein rückläufiger solcher Kreisproceß auf unendlich mannigfaltige Weise hergestellt werden, daß dabei Arbeit in dieselbe Wärmemenge Q von derselben Temperatur verwandelt, also d. gegebene Verwandlung rückgängig gemacht würde und zwar aufgehoben würde mit Hülfe eines vermittelnden Körpers. Also wird dann aber eine gewisse Wärmemenge Q_1 von d. Temperatur t_2 in d. höhere Temperatur t_1 erhoben, wobei Q_1 hinreichend mannigfach verschieden sein kann, weil t_2 und t_1 verschieden gewählt werden, indem d. constante Verhältniß zwischen Q und Q_1 wesentlich auf d. Voraussetzung beruht, daß t, t_1 und t_2 in den verschiedenen Fällen dieselben Werthe haben. Die ursprünglich gegebene positive Verwandlung d. ersten Art findet sich somit ersetzt durch eine positive Verwandlung d. 2ten Art, eine positiv erfolgende Veränderung. Nun kann ferner d. rückläufige Kreisproceß hergestellt werden, daß d. soeben erhaltene Verwandlung wieder aufgehoben, nämlich d. Wärmemenge Q_1 von d. Temperatur t_1 auf d. Temperatur t_2 zurückgeführt, dafür aber eine gewisse Wärmemenge Q' von d. Temperatur t' in Arbeit verwandelt wird, wobei Q' je nach d. Werthe von t' unendlich mannigfach verschieden sein kann. Die ursprünglich gegebene Verwandlung d. ersten Art findet sich also durch eine andern Verwandlung derselben Art ersetzt. Sie können also 2 Verwandlungen einander ersetzen ohne bleibende Veränderung, indem d. Hilfskörper in seinen Anfangszustand zurückkehrt.

2 Verwandlungen nun, die sich ohne anderweitige zurückbleibende Änderung gegenseitig ersetzen können, sollen nach Clausius 2 aequivalente Verwandlungen genannt werden. Es wirft sich nun d. Frage auf, ob man irgend eine Verwandlung durch irgend einen algebraischen Ausdruck dem Sinn und d. Größe nach ausdrücken kann und zwar so, daß 2 aequivalente Verwandlungen durch gleiche Werthe dieses Ausdrucks, also durch gleiche Verwandlungswerthe dargestellt sind, wobei d. Art, positive od. negative Verwandlungen auch positive resp. negative Verwandlungswerthe entsprechen. Zu solchen algebraischen Ausdrücken gelangt man nun durch d. folgende Betrachtung:

Was d. Verwandlung d. ersten Art betrifft, also d. Verwandlung einer Wärmemenge Q bei d. Temperatur t in Arbeit, so wird d. Verwandlungswerth eine Function sein von den beiden Größen, durch welche d. Verwandlung bestimmt wird, also von d. Wärmemenge Q und d. Temperatur t. Es bezeichnen sei $f(Q, t)$ d. Werth d. Verwandlung d. Wärmemenge Q bei d. Temperatur t in Arbeit. Die umgekehrte Verwandlung, also d. Verwandlung von Arbeit bei d. Temperatur t in d. Wärmemenge Q wird sein nach d. aufgestellten Definition den Werth $-f(Q, t)$ haben.

Die Verwandlungen 2. Art betreffend muß bemerkt werden, daß sie von 3 Größen abhängig sind, nämlich von d. Wärmemenge Q und den Temperaturen t_1 und t_2. Diese Function sei bezeichnet mit F und es ist sein d. Verwandlungswerth einer Wärmemenge Q von d. Temperatur t_1 in d. Temperatur $t_2 = F(Q t_1 t_2)$. d. Verwandlungswerth einer umgekehrten Verwandlung d. h. d. Verwandlung einer Wärmemenge Q von d. Temperatur t_2 in d. Temperatur t_1, ist sein $= -F(Q t_1 t_2)$, od. wenn man ihn ebenfalls mit demselben Zeichen, wie man d. Wärmewerth d. Verwandlung einer Wärmemenge Q von d. Temperatur t_1 in t_2 bezeichnet mit $F(Q t_1 t_2)$, bezeichnen will mit $+F(Q, t_2 t_1)$, so ist also:

$-F(Q t_1 t_2) = F(Q t_2 t_1)$ d. h., es also bei einer Umkehrung d. Reihenfolge d. Functionen ihr Vorzeichen umkehren. Die Function F soll sein solcher Art sein, daß sie bei gleichem Absolutwerth umgekehrte Zeichen annehmen kann. A u. B sollen nun d. beiden in Rede stehenden Verwandlungen bezeichnen, welche mit einem umkehrbaren Kreisprocesse d. hier in Rede stehenden Art verbunden sind. Es ist dann von A u. B jede Verwandlung d. Umgekehrten d. andern aequivalent, also es ist A aequivalent $-B$ und B aequivalent $-A$. Denkt man sich d. Kreisprocess genau umgekehrt ausgeführt, so würden damit auch d. umgekehrten Verwandlungen verbunden sein. Durch d. Verwandlung $-A$ d. Körpers wird denn A d. früheren aufgehoben, so daß sie durch d. Verwandlung $-B$ ohne sonstige zurückbleibende Änderung ersetzt ist. Ebenso wird auch B aufgehoben durch $-B$ und es ersetzt denn also B ersetzt durch $-A$. 2 Verwandlungen aber, die einander ersetzen können, wurden aequivalente Verwandlungen genannt und somit muß d. Summe d. Verwandlungswerthe, die mit einem umkehrbaren Kreisprocesse verbunden sind $= 0$ sein, was zunächst gezeigt ist für einen solchen Kreisprocess, wie d. betrachtete mit 6 Einzeltheilen bestehend ist.

Es sind nun d. Kreisprocess umstehend hergestellt zwischen d. Temperaturen $t\, t_1$ und t_2 und Q sei d. Wärmemenge, die bei d. Kreisprocesse bei d. Temperatur t in Arbeit verwandelt wird, Q_1 sei d. Wärmemenge, d. gleichzeitig von d. Temperatur t_1 übergeht zur Temperatur t_2. Der Werth d. ersten Verwandlung ist dann nach d. Vorhergehenden $= f(Q t)$ und d. Verwandlungswerth d. 2. ten $= F(Q_1 t_1 t_2)$ und d. Summe dieser Verwandlungswerthe muß nun $= 0$ sein, da d. eine Verwandlung d. andern entgegengesetzt ist. also muß sein:

$$f(Qt) + F(Q_1 t_1 t_2) = 0.$$

Denkt man sich d. Kreisprocess umstehend mit einem Vermittlungskörper zwischen d. Temperaturen t, t_1 u. t_2 durchgeführt, daß Q in Q' und Q_1 in Q_1' übergeht, so findet d. bekannte Beziehung statt: $\frac{Q}{Q'} = \frac{Q_1}{Q_1'}$. Die Functionen f und F müssen nun so beschaffen sein, daß d. letzte Gleichung für gegebene Werthe von $t\, t_1$ und t_2 immer derselbe Verhältniß $\frac{Q_1}{Q}$ entspricht. Dies ist nur d. Fall wenn $f(Qt)$ eine Function d. Art ist, daß man sie in 2 Functionen zerlegen kann, nämlich in d. Factor Q und d. Factor $f(t)$. Man hat sein: $f(Qt) = Q f(t)$. Dasselbe ist d. Fall mit d. Function F, so daß man auch setzen kann: $F(Q_1 t_1 t_2) = Q_1 F(t_1 t_2)$. Die obige Gleichung kann man also schreiben:

I .... $$Q f(t) + Q_1 F(t_1 t_2) = 0$$

Diese Beziehung ist offenbar d. Bedingung gefunden, daß d. Quotient $\frac{Q}{Q_1}$ constant sei.

Man denkt sich nun einen umkehrbaren Kreisprocess mit Hülfe eines vermittelnden Körpers so ausgeführt, daß dabei d. Wärmemenge Q_1 von d. Temperatur t_2 zu höheren Temperatur t_1 übergeht, also eine Verwandlung d. 2ten Art stattfindet, und eine gewisse Wärmemenge Q' von d. Temperatur t' durch Verwandlung aus Arbeit erhalten wird; d. Summe d. Verwandlungswerthe muß dann auch hier wieder $= 0$ sein. $\div Q' f(t')$ ist d. Verwandlungswerth d. Arbeit in d. Wärmemenge Q'; d. Werth d. Verwandlung d. Wärmemenge Q_1 bei d. Temperatur t_1 in Arbeit ist $\div Q_1 \delta(t_1 t_2)$ und somit hat man d. Gleichung:

$$\div Q' f(t') - Q_1 \delta(t_1 t_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad II$$

Da man nun nach d. früheren auch setzen kann: $\div Q_1 \delta(t_1 t_2) = + Q_1 \delta(t_2 t_1)$ so ist auch:

$$\div Q' f(t') + Q_1 \delta(t_2 t_1) = \div Q' f(t') - Q_1 \delta(t_1 t_2) = 0.$$

Durch Subtraction d. beiden Gleichungen I und II findet man:

$$Q f(t) - Q' f(t') = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad III$$

D. umkehrbare Kreisprocess kann nun, unbeschadet gegebener Werthe von Q t und t_2 auf unendlich mannigfaltige Weise variirt werden (entsprechend verschiedenen Lagen d. Punktes a nicht adiabatischen Curve ab d. Achsen zeigen, während d. Figurentheile b c d e für einen bestimmten vermittelnden Körper gegeben sind); insbesondere kann es so eingerichtet werden, daß $Q' > Q$ ist. Dann ist aber d. Resultat d. beiden entgegengesetzten Verwandlungen d. ersten Art, welche durch d. beiden Kreisprocesse zusammengenommen bewirkt werden, nämlich d. Verwandlung d. Wärme Q von d. Temperatur t in Arbeit und d. Verwandlung von Arbeit in d. Wärme Q' von d. Temperatur t' ganz dasselbe, als ob d. Wärme $(Q - Q')$ von d. Temperatur t in Arbeit und d. Wärme Q' von d. Temperatur t in ebensolche von d. Temperatur t' verwandelt worden wäre. Diese beiden Verwandlungen sind zusammengenommen den beiden angenommenen Verwandlungen erster Art, deren Verwandlungswerthe nach Gleichung III d. Summe 0 haben, äquivalent, so ist auch d. Summe d. Verwandlungswerthe $= 0$ sein muß. Damit muß also sein:

$$(Q - Q') f(t) + Q' \delta(t t') = 0$$

indem d. Werth d. ersten Wärmemenge $Q - Q'$ von d. Temperatur t in Arbeit $= (Q - Q') f(t)$ und d. Werth d. Verwandlung d. Wärme Q' von d. Temperatur t in solche von d. Temperatur t' gleich ist: $Q' \delta(t t')$.

Aus d. letzten Gleichung folgt:

$$\div \frac{Q - Q'}{Q'} f(t) = \delta(t t') = f(t) - \frac{Q}{Q'} f(t)$$

Nach Gleichung III ist nun $f(t') = \frac{Q}{Q'} f(t)$, dies eingesetzt gibt:

$$\delta(t t') = f(t) \div f(t')$$

Die Function δ ist somit auf d. Function f zurückgeführt und es ist daher f noch zu bestimmen, welche willkürlich gewählt werden kann.

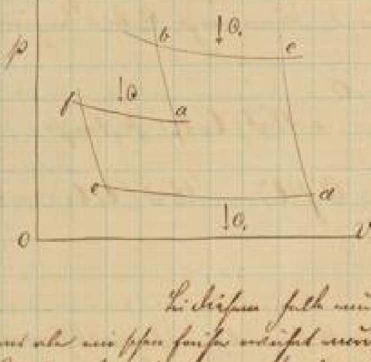
Zur einfacheren Bezeichnung soll gesetzt werden: $f(t) = \frac{1}{T}$, wenn also T eine Function d. Temperatur vorstellt, unabhängig von d. Art d. Körpers, mit dem d. Verwandlung vorgenommen wird, so ferne d. Zustand d. Körpers nicht durch d. Temperatur allein bestimmt ist. Setzt bedeuten ferner T_1 und T_2 .... d. zugehörigen Werthe dieser Function T, welche den Temperaturen t_1 t_2 .... entsprechen. Damit ist dann $\frac{Q}{T}$ resp. $\div \frac{Q}{T}$ d. Verwandlungswerth, welcher d. Umsetzung d. Wärme Q von d. Temperatur t in äquivalente Arbeit, resp. d. Umsetzung von Arbeit in Wärme Q von d. Temperatur t entspricht und

$$Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \frac{Q}{T_1} \div \frac{Q}{T_2}$$ d. Verwandlungswerth d. Wärme Q

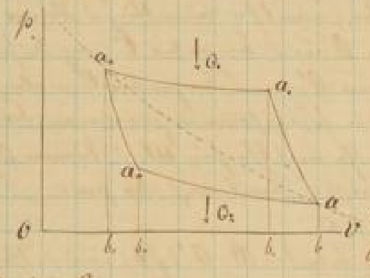
beim Übergange von d. Temperatur t_1 zur Temperatur t_2.

Eine Verwandlung d. 2ten Art kann, wie hieraus ersichtlich, immer als Combination einer positiven und einer negativen Verwandlung d. ersten Art für dieselbe Wärmemenge betrachtet werden und umgekehrt.

Hierbei wurde nur einen Kreisprocess von d. bestimmten Art vorausgesetzt, bestehend aus je aus 3 isothermischen Curven und 3 adiabatischen Curven entsprechenden Zustandsänderungen. Die Zustandscurve stellt in diesem Falle immer ein Diagramm mit zu schneidenden isothermischen und adiabatischen Curven wie z.B. abcdefa. Geschieht d. Kreisprocess im entsprechenden Sinne, so wird d. Körper K während d. Zustandsänderung nach isothermischer Curve bc d. Wärmemenge Q_1 mitgetheilt bei constanter Temperatur t_1, bei d. Änderung nach isothermischer Curve ed bei constanter Temperatur t_2 d. Wärmemenge Q_2 entzogen und endlich nach isothermischer Curve fa d. Wärmemenge Q bei constanter Temperatur t (Anfangstemperatur) mitgetheilt, welche Wärmemenge als solche jedoch nicht erhalten wird, sondern sich als Gesammtarbeit erhalten wird nach d. bekannten Formel: $Q = AE$ unter A d. Wärmewerth d. Arbeitseinheit verstanden. Die Arbeit E wird dabei bekanntlich durch d. Inhalt d. von d. Zustandscurve umgrenzten Fläche dargestellt.



In diesem Falle wird angenommen, daß d. Anfangstemperatur t zwischen t_1 und t_2 liege, was aber nicht hier weiter verfolgt werden kann, weil wir einen d. Fall zu setzen brauchen, ohne d. Gültigkeit d. früheren Schlüsse zu beeinträchtigen. Der besondere Zustand ist nun d. Fall, daß $t = t_1$ ist, indem nun erhalten d. isothermische Curve af nur eine Verlängerung d. isothermischen Curve bc wird. Man erhält dadurch eine Zustandscurve bestehend aus nur 2 isothermischen und 2 adiabatischen Curven; d. dieser Zustandscurve entsprechende Kreisprocess soll ein einfacher umkehrbarer Kreisprocess genannt werden. Die Zustandsänderung erfolgt also nur nach den beiden isothermischen Curven $a_0 a_1$ und $a a_2$ bei den constanten Temperaturen t_1 resp. t_2 und nach den beiden adiabatischen Curven $a_1 a$ und $a_2 a_0$.



Findet d. Kreisprocess im entsprechenden Sinne statt, so wird dabei nach früherem allgemein dem Körper eine überschüssige Wärmemenge mitgetheilt, welche als äquivalente Arbeit erhalten wird. Ist daher nun Q_1 die dem Körper K während d. Zustandsänderung nach d. isothermischen Curve $a_0 a_1$ mitgetheilte Wärme bei constanter Temperatur t_1 und Q_2 d. dem Körper K während d. Zustandsänderung nach d. isothermischen Curve $a a_2$ entzogene Wärme bei constanter Temperatur t_2 $(t_2 < t_1)$, so muß offenbar $Q_1 > Q_2$ sein, weil d. Unterschied $Q_1 - Q_2$ die erhaltene überschüssige Arbeit hervorbringen muß, indem d. Körper selbst keine Wärme dazu hergibt, da er seinen Anfangszustand wieder erlangt hat. Es muß also sein: Wärmewerth d. gewonnenen Arbeit.

$$Q_1 - Q_2 = AE$$

unter E d. von d. Fläche d. Zustandscurve dargestellte überschüssige gewonnene Arbeit und unter A d. Wärmewerth d. Arbeitseinheit verstanden.

Außer dieser Umsetzung d. Wärme $Q_1 - Q_2$ in Arbeit, ist d. Wärmemenge Q_2 von d. Temperatur t_1 zur Temperatur t_2 übergegangen, d.h. es sind mit d. umkehrbaren Kreisprocess 2 Verwandlungen verbunden, nämlich d. Wärmemenge $Q_1 - Q_2$ bei d. Temperatur $t_1 = t$ in Arbeit verwandelt und d. Wärme Q_2 von d. Temperatur t_1 zur Temperatur t_2 übergegangen.

Dem Vorhergehenden zufolge ist demnach d. Werth d. entsprechenden Verwandlung:

$$= \frac{Q_1 - Q_2}{T_1} = \text{Werth d. Verwandlung d. Wärme } Q_1 - Q_2 \text{ in d. äquivalente Arbeit } E.$$

d. Werth d. Übergangs d. Wärme Q_2 von d. Temperatur t_1 zur Temperatur t_2 ist ebenso:

$$Q_2\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right).$$

Bekanntlich müssen beide Verwandlungswerthe addirt wie d. Summe 0 geben, es muß also sein:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{T_1} + Q_2\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = 0$$

od.

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

$\frac{Q_1}{T_1}$ ist offenbar d. Verwandlungswerth, welcher d. Zustandsänderung nach Linie $a_0\, a_1\, a$ entspricht, indem die bei d. Temperatur t_1 dem Körper mitgetheilte Wärme Q_1 als in Arbeit verwandelt betrachtet werden kann; $\div \frac{Q_2}{T_2}$ ist d. Verwandlungswerth welcher d. Zustandsänderung $a\, a_2\, a_0$ entspricht, indem die bei d. Temperatur t_2 dem Körper entzogene Wärme Q_2 als aus Arbeit entstanden zu betrachten ist.

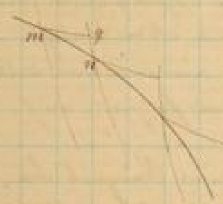
Diese sogenannten einfachen umkehrbaren Kreisprocesse erfahren eine besonders wichtige Anwendung bei d. Betrachtung d. calorischen Arbeitsmaschinen.

Findet d. einfache Kreisprocess in umgekehrtem Sinne statt, so wird derselbe ein rückläufiger, so bleiben natürlich alle Werthe ihrer Größe nach, indem alle Vorgänge in umgekehrtem Sinne stattfinden; nur wird jetzt d. Wärmemenge $Q_1 \div Q_2$ mehr entzogen als mitgetheilt und also bedeutet E eine aufgewandte Arbeit. Die betreffenden Verwandlungswerthe für den Zustandsänderungen $a_0\, a_2\, a$ und $a\, a_1\, a_0$ sind dann $\frac{Q_2}{T_2}$ und $\div \frac{Q_1}{T_1}$; die Summe dieser beiden Verwandlungswerthe muss natürlich auch wieder $= 0$ sein

also: $\frac{Q_2}{T_2} \div \frac{Q_1}{T_1} = 0$.

Bis jetzt wurden immer nur ganz bestimmte Zustandsänderungen vorausgesetzt, nämlich abwechselnd umkehrbaren Zustandsänderungen bei constanter Temperatur, entsprechend isothermischen Zustandscurven und umkehrbaren Zustandsänderungen ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme entsprechend adiabatischen Zustandscurven.

Im weiteren Verlauf sollen nun aber umkehrbare Zustandsänderungen zu Grunde gelegt werden, welche nach einem ganz beliebigen Gesetz vor sich gehen, entsprechend einer ganz beliebigen Zustandscurve. Jede Curve als d. Grenze eines unendlich vielseitigen gebrochenen Linienzuges ansehen kann, wenn diese Linienstücke unendlich klein werden, so kann man auch eine jede beliebige Zustandscurve als d. Grenzform eines gebrochenen Linienzuges ansehen, dessen einzelne Stücke isothermische und adiabatische Linientheile sind; für jedes Element d. Zustandsänderung kann man sich dann abwechselnd d. Wärmemittheilung und d. Temperaturänderung nacheinander statt gleichzeitig stattfindend denken.

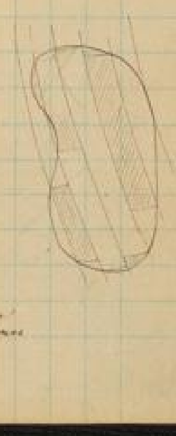


Es sei nun mn ein unendlich kl. Bogenelement d. Zustandscurve, t d. Temperatur entsprechend d. Zustand m, und nehme man d. Temperatur als im Allgemeinen als stetig ändernd an, also $t + dt$ d. Temperatur entsprechend d. Zustand n; dQ sei d. Wärmemenge welche d. Körper bei constanter Temperatur t mitgetheilt wird während d. Zustandsänderung auf mn und zwar soll sie mit dt als gleichzeitig verschwindend, so dass d. Verhältniss nicht dQ eine endliche Wärmemenge bedeutet. Anstatt d. unendlich kleinen Zustandsänderung nach d. Linienelement mn, während welcher zu gleicher Zeit d. Temperatur t in $t + dt$ übergeht und d. Wärmemenge dQ d. Körper mitgetheilt wird, kann man sich also nacheinander isothermische Linie mq und darauf eine adiabatische Linie qn stattfindend denken. Bei d. Zustandsänderung nach d. isothermischen Linie mq bei constanter Temperatur t ist als Äquivalent eine Verwandlung entstanden; d. Verwandlungswerth ist: $\frac{dQ}{T}$ wobei T d. absolute Temperatur d. Temperatur t entspricht. Mit d. adiabatischen Linie ist aber keine Verwandlung verbunden, folglich d. Verwandlungswerth $= 0$ ist.

Ebenso verhält es sich mit jedem anderen Element d. Zustandsänderung.

D. Verwandlungswerth für eine Zustandsänderung von endlicher Größe und beliebigem Charakter ist also:

$$N = \int \frac{dQ}{T}$$



Handelt es sich nun um einen beliebigen umkehrbaren Kreisprocess, entsprechend einer beliebigen geschlossenen Zustandscurve, so kann man sich diesen Kreisprocess in eine unendliche Reihe von einfachen Kreisprocessen zerlegt denken, welche jeder einem Streifen d. von d. Zustandscurve eingeschlossenen Fläche entspricht; denkt man sich nämlich d. durch d. gegebene Zustandscurve umschlossene Fläche von einer Gruppe nacheinander folgender adiabatischer Linien geschnitten und durch d. Endpunkte d. adiabatischen Linien mit d. gegebenen Zustandscurve kleine Stücke isothermischer Linien gelegt, so kann man d. gegebene Curve wieder als d. Grenzform d. unendlich gebrochenen Linienzuges betrachten, welcher in einer Zusammensetzung von adiabatischen und isothermischen Linien besteht. Die einzelnen Felder kann man als als d. von d. Zustandscurve einfachen Kreisprocessen entsprechenden Stücken ansehen. Da nun für jeden dieser [illegible] einfachen Kreisprocesse d. Verwandlungswerth $= \int \frac{dQ}{T}$ ist, so ist d. resultirende Verwandlungswerth gegen gegebenen Kreisprocess $N = \int \frac{dQ}{T}$, wobei [illegible] Integral sich [illegible] gegen Kreisprocess [illegible] hat.

[illegible] wir für jeden einfachen umkehrbaren Kreisprocess d. Summe d. Verwandlungswerthe $= 0$ [illegible], so muss auch hier d. Verwandlungswerthsumme d. beliebigen umkehrbaren Kreisprocesses $= 0$ sein also

$$N = \int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Ferner war bei jedem einfachen umkehrbaren Kreisprocess d. überschüssig mitgetheilte Wärmemenge = d. Wärmewerth d. überschüssig gewonnenen Arbeit. Dasselbe muss natürlich auch hier gelten, [illegible] einfachen umkehrbaren Kreisprocessen [illegible] beliebigen umkehrbaren Kreisprocess [illegible] folgt also:

$$\int dQ = AL$$ wobei L d. überschüssig gewonnene Arbeit bedeutet, welche graphisch [illegible] durch d. umschlossene Fläche und wobei A d. Wärmewerth d. Arbeitseinheit bedeuten.

Hierbei ist unter L ebenso wie dQ algebraisch zu verstehen, so dass einem positiven L einem rechtläufig und ÷ L einem rückläufig stattfindenden Kreisprocess entspricht. Setzt man $\int dQ = Q$ so erhält man:

$$Q = AL$$ wenn also Q und L d. überschüssig mitgetheilte Wärme und gewonnene Arbeit, [illegible] mitgetheilte als entzogene Wärme, und gewonnene als verbrauchte Arbeit, gleichzeitig positiv und negativ sind. [illegible] brauchten also d. beiden Fälle eines + und ÷ Q nicht mehr speciell zu unterscheiden, wenn man nur beachtet, dass Q ± sein kann und gleichzeitig auch L ± ist.

Als Gesammtergebniss hat man also, dass bei jedem umkehrbaren Kreisprocesse eines Körpers die demselben überschüssig mitgetheilte od. entzogene Wärme = d. Wärmewerth d. überschüssig gewonnenen od. verbrauchten Arbeit und d. resultirende Werth aller durchlaufenen Verwandlungen $= 0$ ist.

Es wurde bei diesen Untersuchungen immer stillschweigend vorausgesetzt, namentlich bei d. Bestimmung d. Verwandlungswerths, dass in demselben Augenblick d. Temperatur in allen Punkten d. Körpers dieselbe sei, [illegible] allen Punkten d. Oberfläche gleich [illegible] das Integral N nicht über den ganzen Körper ausdehnen könnte. Handelt es sich um einen homogenen Körper, so ist dies auch d. Fall. Handelt es sich aber um ein Gemisch [illegible] verschiedener Aggregatform, so kann bekanntlich [illegible] d. Temperatur [illegible] in allen Punkten nicht gleich sein. In diesem Falle [illegible] Elemente [illegible]. Bezeichnet $d\sigma$ ein Element d. Oberfläche und dQ d. Wärmemenge, welche [illegible] d. Oberflächeneinheit [illegible] Zeitelement mitgetheilt wird, dann ist $dQ \cdot d\sigma$ [illegible] Wärmemenge [illegible] Ordnung, welche durch d. Flächenelement $d\sigma$ [illegible] Körper mitgetheilt wird. Ist ferner T d. Temperatur an d. Stelle d. Flächenelements $d\sigma$, dann ist bekanntlich d. zugehörige Verwandlungswerth [illegible] $= \frac{dQ \cdot d\sigma}{T}$ wobei aber T und [illegible] σ für jeden Punkt [illegible] sein können.

D. resultirende Verwandlungswerth ist also

$$N = \int\int \frac{dQ \cdot d\sigma}{T}$$

für einen Kreisprozeß gelten aber d. vorhin gefundenen Gleichungen allgemein und ist also entsprechend auch in diesem Falle d. resultirende uncompensirte Verwandlungswerth ist $N = \int \frac{dQ}{T} = 0$.

Wenn nun mit dem Kreisprozeß eine resultirende Verwandlung verbunden, deren Werth positiv ist, wie also d. Verwandlungswerth positiv, so könnte man diesen positiven Werth entsprechend d. resultirende Verwandlung als einen Übergang von Wärme von niederer zu höherer Temperatur betrachten, aber es könnte nur unter einer Verwandlung verbunden sein; nach dem von Clausius aufgestellten Princip d. Aequivalenz von Verwandlungen ist dies aber unmöglich. Ebenso kann man auch keinen negativen Werth für den resultirenden Verwandlungswerth zulassen, indem bei Umkehrung d. Kreisprozesses d. Verwandlungswerth N positiv werden würde und somit derselbe Widerspruch sich ergeben würde.

Also bei einem jeden umkehrbaren Kreisprozesse ist d. resultirende Verwandlungswerth = 0, selbst wenn die eigentliche Temperatur nicht in allen Punkten gleich ist.

Zum Schluß ist noch zu bemerken, daß alle abgeleiteten Gesetze nicht nur für einen umkehrbaren Kreisprozeß gelten, sondern auch für einen Kreisprozeß, welcher, ohne in jedem Augenblick umkehrbar zu sein, mit nur umkehrbaren Zustandsänderungen verbunden ist, doch aber mit beliebiger Geschwindigkeit stattfinden kann. Die früher genannten Gesetze gelten auch nicht mehr, wenn d. Kreisprozeß mit nicht umkehrbaren Verwandlungen verbunden ist, also wenn Reibung, Temperaturdifferenz und unmittelbare Wärmeleitung im Innern d. Körper vorkommen; dann ist allgemein d. resultirende Verwandlungswerth negativ, indem die Werthe von nicht umkehrbaren Verwandlungen mit negativen Werthen behaftet werden sollten und d. Summe d. uncompensirten Verwandlungen ungleich = 0 ist.

Somit ist also d. allgemein zu ein Lehrsatz dieses Abschnitts aufgestellt, daß man sagen kann, daß nämlich bei jedem Kreisprozesse d. Summe aller Verwandlungswerthe = 0 od. negativ ist, und zwar Null für den Grenzfall eines umkehrbaren Kreisprozesses d. h. eines solchen, welcher in allen seinen Theilen mit umkehrbaren Zustandsänderungen behaftet ist.

Verschiedene Formen d. Wärmegleichung.

Hauptgleichungen.

Es wurden früher 2 allgemeine Gleichungen gefunden, nämlich d. Gleichung d. lebendigen Kraft, d. Wärmegleichung und d. Gleichung d. inneren Arbeitsvermögens. D. Aufstellung d. Gleichung d. lebendigen Kraft erfordert weiter keine Erläuterungen, indem diese direkt aus d. analytischen Mechanik bekannt war. Die Wärmegleichung wurde zuletzt aus unseren Untersuchungen gefunden; bezogen auf eine unendlich kleine Änderung d. Wärmezustandes hatte sie d. folgende allgemeine Form:

$$W\,dQ = dU + p\,dv.$$

Es drückt d. Arbeitsäquivalent d. Wärmemenge aus, welche d. Gewichtseinheit eines Körpers bedarf, um eine unendlich kleine Änderung d. Wärmezustandes hervorzubringen, wenn dieser Wärmezustand charakterisirt ist durch d. Änderung dv d. spec. Volumens, durch d. Änderung dU d. spec. inneren Arbeitsvermögens und wenn p d. eigentliche Pressung bedeutet. D. spec. innere Arbeitsvermögen U ist durch d. Wärmezustand bestimmt, also eine Function von v u. p, wenn v u. p als d. unabhängig Veränderliche angenommen werden, welche d. Wärmezustand charakterisiren. Damit man also mit d. obigen Wärmegleichung anfangen kann auf mathematischem Wege, muß d. allgemeine Function U von v u. p natürlich bekannt sein. Diese Function selbst jedoch zu erhalten und auf rein empirischem Wege ist mit großen Schwierigkeiten verbunden und kann nicht U direkt als Function von v und p ermitteln. Aus diesem Grunde erscheint es nützlich andere Größen statt d. Arbeitsvermögens Function einzuführen, welche ebenfalls d. Wärmezustand bestimmen, aber deren Abhängigkeit allgemein und schließlich besser bekannt sind; dann nämlich erhalten wir d. Wärmegleichungen auf andere Formen zu bringen. Statt dieser Umformungen kann man auch setzen:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial v}\,dv + \frac{\partial U}{\partial p}\,dp$$ nach der bekannten Regel der

Differentialrechnung, indem U jedenfalls eine Function von v u. p ist.

Setzt man diesen Ausdruck, welcher U als Function von v u. p charakterisirt wird, in d. Wärmegleichung, die sich auf eine unendlich kleine Zustandsänderung bezieht, so kann man die beiden Glieder mit d. Coefficienten dv in 1 Glied zusammenziehen und d. Summe:

$$\frac{\partial U}{\partial v} + p = Y$$ setzen, und ebenso auch d.

partielle Ableitung von U nach p:

$$\frac{\partial U}{\partial p}$$ mit X bezeichnen.

D. Wärmegleichung hat dann d. Form:
$$W\,d\theta = Y\,dv + X\,dp$$
In dieser neuen Form d. Wärmegleichung sind natürlich X u. Y zwei Zustandsfunctionen von v u. p, diese beiden Functionen sind aber nicht unabhängig von einander, sondern sind durch eine Gleichung mit einander verbunden; wenn man nämlich den Ausdruck für Y nach p ableitet und hievon die nach v genommene Ableitung von X, so ergibt sich:

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial p} + 1 - \frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial p} = 1$$

also
$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1$$

Diese Gleichung stellt eine allgemeine, Beziehung zwischen den Zustandsfunctionen X und Y von v u. p dar, welche in d. neuen Form d. Wärmegleichung an d. Stelle von U getreten sind.

Nach **Zeuner** nennt man diese Gleichung auch d. erste Hauptgleichung d. mechanischen Wärmetheorie. Diese erste Hauptgleichung läßt sich unmittelbar erkennen, daß d. Wärmegleichung nicht ohne Weiteres integrabel ist. Solange nämlich nicht d. Gesetz bekannt ist, nach welchem d. Zustandsänderungen erfolgen, so lange also nicht d. Abhängigkeit von v u. p von einander u. folglich nicht d. Curve d. Zustandsänderung bekannt ist, so kann man nicht d. Wärmemenge Q bestimmen, welche d. Gewichtseinheit eines Körpers zugeführt werden muß um eine gegebene Zustandsänderung zu bewirken, ohne d. Gesetz zu kennen, nach welchem diese Zustandsänderung erfolgen soll, indem ihre rechte Seite kein vollständiges Differential ist, weil dann:
$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 0$$ statt = 1 sein müßte.

Bekanntlich kann man nun aber eine solche Function $\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1$ mit einem gewissen Factor multipliciren, den man so wählen kann, daß d. Product ein vollständiges Differential wird und es ist bemerkenswerth, daß d. reciproke Werth d. absoluten Temperaturfunction T für eine solche Function ein sogenannter integrirender Factor d. rechten Seite von Gl. 1 ist. Weil nämlich eine Constante und für einen umkehrbaren Kreisprozeß ist $\int \frac{d\theta}{T} = 0$, indem d. Integral immer denselben Werth wieder bekommen muß, wenn d. Körper in seinen Anfangszustand zurückgekehrt ist, so muß auch d. Größe $W\int \frac{d\theta}{T}$ wie sie auch im Verlaufe d. umkehrbaren Zustandsänderung eines Körpers sich ändern mag, stets immer denselben Werth wieder annehmen, wenn d. Körper in seinen Anfangszustand zurückkehrt. Da ferner d. Zustand d. Körpers durch v u. p bestimmt ist, so muß $\frac{d\theta}{T}$ immer ein vollständiges Differential sein von v u. p. Ist aber $\frac{d\theta}{T}$ ein vollständiges Differential, so muß ein solches auch $\frac{W\,d\theta}{T}$ sein, also $\int \frac{W\,d\theta}{T} = 0$. Setzt man nun noch oben:

$$W\,d\theta = Y\,dv + X\,dp$$

und durch Multiplication mit $\frac{1}{\tau}$:

$$\frac{W\,d\theta}{\tau} = \frac{Y}{\tau}\,dv + \frac{X}{\tau}\,dp$$

wodurch d. Gleichung integrabel ist. Hierzu ist noch zu bemerken, daß d. Ableitung von $\frac{Y}{\tau}$ nach v genommen ist wie d. von $\frac{X}{\tau}$ nach p, so daß also sein muß:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{Y}{\tau}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{X}{\tau}\right)$$

od. wenn man d. Differentiation ausführt:

$$\left(\tau\frac{dY}{dp} - Y\frac{d\tau}{dp}\right)\frac{1}{\tau^2} = \left(\tau\frac{dX}{dv} - X\frac{d\tau}{dv}\right)\frac{1}{\tau^2}$$

od.

$$\tau\frac{dY}{dp} - Y\frac{d\tau}{dp} = \tau\frac{dX}{dv} - X\frac{d\tau}{dv}$$

od.

$$\tau\left(\frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv}\right) = Y\frac{d\tau}{dp} - X\frac{d\tau}{dv}$$

Nach d. ersten Hauptgleichung war nun: $\frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv} = 1$

Also:

$$\tau = Y\frac{d\tau}{dp} - X\frac{d\tau}{dv}$$

diese Gleichung soll nach Zeuner d. 2te Hauptgleichung genannt werden, sie ist ein besonderer Ausdruck für d. Prinzip d. Aequivalenz d. Verwandlungen, während d. erste Hauptgleichung eine unmittelbare Folge d. Aequivalenz von Wärme und Arbeit ist.

Man kann diese Gleichung nun noch verschiedenartig umgestalten. Wenn man in d. Gleichung $W\,d\theta = Y\,dv + X\,dp$ den Ausdruck für Y, der sich aus d. 2ten Hauptgleichung ergibt, substituirt, so findet sich:

$$W\,d\theta = \frac{X\frac{d\tau}{dv} + \tau}{\frac{d\tau}{dp}}\,dv + X\,dp = \frac{X\left(\frac{d\tau}{dv}dv + \frac{d\tau}{dp}dp\right) + \tau\,dv}{\frac{d\tau}{dp}}$$

Da nun τ eine Function von t und t wiederum eine Function von v und p ist, so muß auch τ eine Function von v und p sein, so daß d. Ausdruck auf d. rechten Seite in d. Klammer ein vollständiges Differential ist, partiell nach v u. p genommen von τ, also ist:

$$\frac{d\tau}{dv}dv + \frac{d\tau}{dp}dp = d\tau$$

und folglich:

$$W\,d\theta = \frac{X.d\tau + \tau\,dv}{\frac{d\tau}{dp}}$$

Setzt man ebenso in d. ersten Hauptgleichung d. Werth für X ein, d. sich aus d. 2ten Hauptgleichung ergibt, so findet sich:

$$W\,d\theta = Y\,dv + \frac{Y\frac{d\tau}{dp} - \tau}{\frac{d\tau}{dv}}.\,dp = \frac{Y\left(\frac{d\tau}{dp}dp + \frac{d\tau}{dv}dv\right) - \tau\,dp}{\frac{d\tau}{dv}}$$

Da nun auch $\frac{d\tau}{dp}dp + \frac{d\tau}{dv}dv$ d. vollständige Differential von τ ist, da τ eine Function von v u. p $= d\tau$, so muß auch sein

$$W\,dQ = \frac{Y\,d\vartheta - \vartheta\,dp}{\frac{d\vartheta}{dp}}$$

Wir haben hiermit drei verschiedene Formen der Wärmegleichung erhalten, nämlich:

I. ———— $$W\,dQ = Y\,dv + X\,dp$$

II. ———— $$W\,dQ = \frac{X\,d\vartheta + \vartheta\,dv}{\frac{d\vartheta}{dp}}$$

III. ———— $$W\,dQ = \frac{Y\,d\vartheta - \vartheta\,dp}{\frac{d\vartheta}{dv}}$$

In jeder dieser Gleichungen sind X und Y Functionen von v u. p, welche durch die erste Hauptgleichung

IV. ———— $$1 = \frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv}$$

gegebenen Beziehung zu einander stehen und übrigens von der Natur und dem Aggregatzustand des Körpers abhängen. Die erste Gleichung entspricht dem Fall, daß die unendlich kleine Zustandsänderung, bei welcher die Wärmemenge dQ verbraucht werden soll, unmittelbar durch v und p bestimmt ist; die 2te und dritte Gleichung entsprechen dem Fall, daß die Zustandsänderung durch die Pressung p und die Temperatur t bestimmt ist. In der 2ten und 3ten Gleichung kommen außer X und Y noch die Größe ϑ vor; diese ist unmittelbar eine unter allen Umständen gleiche Temperaturfunction und dadurch mittelbar auch eine Function von der Natur und Aggregatform und der von ihm abhängigen Größen v u. p. Diese steht ebenso mit X und Y in Beziehung, gemäß der 2ten Hauptgleichung:

V. ———— $$\vartheta = Y\frac{d\vartheta}{dp} - X\frac{d\vartheta}{dv}$$

Wäre diese Function der Temperatur t bekannt, desgleichen t als Function von v u. p (durch die Zustandsgleichung eines bestimmten gegebenen Körpers) so könnten die Gleichungen IV und V zur Bestimmung von X und Y [illegible] auch zur Lösung der Gleichung der inneren Arbeit [illegible] vermittelst der Differentialgleichungen:

VI. ———— $$\frac{dU}{dv} = Y - p \quad \text{und} \quad \frac{dU}{dp} = X.$$

Es sollen jedoch die Gleichungen I bis V schon jetzt umgeformt werden durch Einführung 2 anderer Größen von einfacher physikalischer Bedeutung statt X und Y, wenn auch diese Bedeutung erst später nach Bestimmung der Temperaturfunction ϑ vollständig hervortreten wird; diese Größen stehen mit der spec. Wärme in Zusammenhang.

Der Differentialquotient $\frac{dQ}{d\vartheta}$, unter der Voraussetzung, daß v constant also $dv = 0$ sei, werde bezeichnet mit C_v und $\frac{dQ}{d\vartheta}$ mit der Voraussetzung, daß die Pressung p constant also $dp = 0$ sei, werde mit C_p bezeichnet. Offenbar stehen die eingeführten Größen C_v und C_p in einfacher Beziehung zu den sogenannten spec. Wärmen. Unter der spec. Wärme eines Körpers für einen gewissen gleichförmigen Wärmezustand und ein gewisses Veränderungsgesetz desselben versteht man nämlich das Verhältniß der Wärme, welche der Gewichtseinheit des Körpers behufs einer unendlich kleinen jenem Gesetze folgenden Änderung des bisherigen Wärmezustandes mitzutheilen ist, zu der entsprechenden Temperaturerhöhung, also den Differentialquotienten:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{d\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}.$$

dieser Quotient wird, wenn man c d. spec. Wärme für constantes Volumen und c_1 d. spec. Wärme für constanten Druck bedeutet:

$$c = c_v \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{und} \quad c_1 = c_p \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$$

indem für den ersten Fall $c = \frac{dQ}{dt}$ entsprechend $dv = 0$ ist, dessen Werth aber ist $= \frac{dQ}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ und da $\frac{dQ}{dt} = c_v$, so hat man für c den einfachen Werth. Im zweiten Falle ist:

$$c_1 = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = c_p \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{entsprechend} \quad dp = 0.$$

Wird also nun ϑ näher bestimmt ist, werden d. neu eingeführten Größen eine bestimmte Bedeutung haben. Man kann hierbei bemerken, daß es sich in d. Folge zeigen wird, wie ϑ eine lineare Function von t ist, so daß d. Ableitung von ϑ nach t eine Constante ist. Die Größen c_v und c_p, die im Allgemeinen auch als Functionen von v und p zu betrachten sind, sollen nun für d. Gleichungen, wie schon erwähnt, für X und Y eingeführt werden, zu denen hat man nur X und Y durch c_v und c_p auszudrücken.

Wenn man in Gleichung II d. Voraussetzung $dv = 0$ macht, also d. Glied d. dv streicht, und dann d. Gleichung durch $W \cdot d\vartheta$ dividirt, so hat man links den Quotienten $\frac{dQ}{d\vartheta}$, welcher entsprechend d. Voraussetzung $dv = 0$, $= c_v$ sein muß; somit hat man also:

$$c_v = \frac{X}{W \frac{d\vartheta}{dp}} \quad \text{od.} \quad X = W c_v \frac{d\vartheta}{dp}$$

Setzt man in Gleichung III d. Druck $p =$ einer Constanten also $dp = 0$ so daß d. dp ausfällt, so bekommt man, wenn mit $W \cdot d\vartheta$ dividirt wird:

$$c_p = \frac{Y}{W \cdot \frac{d\vartheta}{dv}} \quad \text{od.} \quad Y = W \cdot c_p \cdot \frac{d\vartheta}{dv} \qquad \text{VII}$$

Diese Ausdrücke sind nun in d. Gleichungen einzuführen, wobei zu bemerken ist, daß $A = \frac{1}{W}$ und folglich $AW = 1$ ist gemäß den früheren Bezeichnungen. Die Gleichung I wird nun mit A multiplicirt (wobei A d. Wärmemaß d. Arbeitseinheit entspricht) und man bekommt dann mit $AW = 1$:

$$dQ = c_p \frac{d\vartheta}{dv} dv + c_v \frac{d\vartheta}{dp} dp \qquad \text{VIII}$$

Multiplicirt man Gleichung II mit A und setzt d. Werthe für X und Y ein, so bekommt man:

$$dQ = c_v \, d\vartheta + \frac{A\vartheta}{\frac{d\vartheta}{dp}} dv \qquad \text{IX}$$

Aus Gleichung III findet man in derselben Weise:

$$dQ = c_p \cdot d\vartheta - \frac{A\vartheta}{\frac{d\vartheta}{dv}} dp \qquad \text{X}$$

Ferner ergibt sich mit Hilfe derselben Manipulation aus d. ersten Hauptgleichung: $\frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv} = 1$:

$$A = \frac{d}{dp}\left(c_p \frac{d\vartheta}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(c_v \cdot \frac{d\vartheta}{dp}\right) \qquad \text{XI}$$

und mit d. 2ten Hauptgleichung:

$$A\vartheta = c_p \cdot \frac{d\vartheta}{dv} \cdot \frac{d\vartheta}{dp} - c_v \cdot \frac{d\vartheta}{dp} \cdot \frac{d\vartheta}{dv} = (c_p - c_v) \frac{d\vartheta}{dp} \cdot \frac{d\vartheta}{dv} \qquad \text{XII}$$

In dieser Form werden die allgemeinen Gleichungen am meisten angewendet.

[illegible] v [illegible] p [illegible]
[illegible] $\frac{d\sigma}{dv}$ [illegible] $\frac{d\sigma}{dp}$ [illegible]
[illegible] v [illegible] p [illegible] t [illegible] σ [illegible] v [illegible] σ [illegible] p [illegible] σ [illegible] v [illegible] p [illegible] v [illegible] σ [illegible] p [illegible] σ [illegible]
$\frac{d\sigma}{dv}$ [illegible] $\frac{d\sigma}{dp}$ [illegible]

$$\left.\begin{array}{lll} v \text{ und } \sigma \text{ nicht}: & \frac{dp}{dv} \text{ und } \frac{dp}{d\sigma} \\ p \text{ " } \sigma \text{ "}: & \frac{dv}{dp} \text{ und } \frac{dv}{d\sigma} \end{array}\right\} \text{für } \frac{d\sigma}{dv} \text{ und } \frac{d\sigma}{dp} \text{ in den allgemeinen Gleichungen.}$$

[illegible] 6 [illegible] 2 [illegible] v [illegible] p, v [illegible] σ, [illegible] p [illegible] σ [illegible] 4 [illegible] 6 [illegible]

[illegible] 6 [illegible] 2 [illegible] 2 [illegible] v p σ [illegible] 6 [illegible] v p σ [illegible] 3 [illegible]

$$\text{XIII}\left\{\begin{array}{l} \frac{dp}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dp} = 1 \\ \frac{dv}{dp}\cdot\frac{dp}{dv} = 1 \\ \frac{d\sigma}{dv}\cdot\frac{dv}{d\sigma} = 1 \end{array}\right.$$

[illegible] 4 [illegible]

$$\frac{dp}{d\sigma},\ \frac{d\sigma}{dv}\ \frac{dv}{dp} \text{ und } \frac{d\sigma}{dp},\ \frac{dv}{d\sigma}\ \frac{dp}{dv}$$ [illegible] 2 [illegible] 6 [illegible] 4 [illegible]

[illegible] σ [illegible] v [illegible] p [illegible] v [illegible] p [illegible]

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{dv}dv + \frac{d\sigma}{dp}dp.$$

[illegible] σ [illegible] $d\sigma = 0$, [illegible] v [illegible] p [illegible] v [illegible]

$$dv = \frac{dv}{dp}dp$$ [illegible] $d\sigma = 0$ [illegible] dp:

$$0 = \frac{d\sigma}{dv}\frac{dv}{dp} + \frac{d\sigma}{dp}$$

[illegible] $\frac{d\sigma}{dp}$ [illegible] σ [illegible] p [illegible] σ [illegible] $\frac{dp}{d\sigma}$ [illegible]

$$0 = \frac{dp}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dv}\cdot\frac{dv}{dp} + 1$$

od: $$\frac{dp}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dv}\cdot\frac{dv}{dp} = \div 1 \qquad \text{XIV}$$

Mit dieser Gleichung hat man nun auch die 4. Relation gefunden; nach Gleichung XIII, wird nämlich der reziproke Werth auch = dem reziproken Werthe von ÷1 sein, welcher also wieder = ÷1 ist, so daß man auch hat:

$$\frac{d\sigma}{dp}\cdot\frac{dv}{d\sigma}\cdot\frac{dp}{dv} = \div 1$$

Diese 4 Beziehungen (XIII u. XIV) zeigen [illegible] die 2 u. 6 partiellen Differentialquotienten, welche sich auf die [illegible] unabhängig Variabeln v – p, v u. σ oder p – σ beziehen, [illegible] zu können, und [illegible] in die Gleichungen [illegible] einzuführen, wenn man [illegible] v p, [illegible] v – σ oder p – σ als die den Wärmezustand charakterisirenden unabhängig Variabeln annimmt.

Zur Bestimmung der Wärme dQ welche der Gewichtseinheit eines Körpers bei [illegible] unendlich kleinen [illegible] Zustandsänderung mitzutheilen ist, haben wir 3 verschiedene Gleichungsformen gefunden (I II III und VIII IX X). Werden nun v u. p als unabhängig Variable zur Bestimmung des Wärmezustandes angenommen, so ist zum [illegible] Ausdruck der [illegible] Wärme dQ die Gleichung I und VIII [illegible]. Werden aber v und σ zur Charakterisirung des Wärmezustandes zu Grunde gelegt, so [illegible] die beiden Gleichungen II und IX [illegible], nur müssen [illegible] die entsprechenden [illegible] der partiellen Differentialquotienten [illegible] so [illegible] die entsprechenden Gleichungen [illegible] mit Rücksicht auf die Beziehungen XIII:

$$W dQ = \frac{dp}{d\sigma}\left(X\, d\sigma + \sigma\, dv\right)$$

$$dQ = C_v\, d\sigma + A\sigma \frac{dp}{d\sigma}\, dv$$

Werden endlich p und σ als unabhängig Variable zur Charakterisirung des Wärmezustandes zu Grunde gelegt, so werden [illegible] die Gleichungen III und X zur Bestimmung der Wärme [illegible] mit den entsprechenden [illegible] der partiellen Differentialquotienten, mit Rücksicht auf die Beziehungen XIII sind dann also die Gleichungen III und X zu schreiben:

$$W dQ = \frac{dv}{d\sigma}\left(Y\, d\sigma - \sigma\, dp\right)$$

$$dQ = C_p\, d\sigma - A\sigma \frac{dv}{d\sigma}\, dp.$$

In ähnlicher Weise werden auch die beiden Hauptgleichungen XI und XII für die verschiedenen Fälle Umformungen erleiden müssen.

[illegible] ist die Umgestaltung der Hauptgleichung XII, wenn man p und σ [illegible] Variable [illegible] zur Charakterisirung des Wärmezustandes. In Gleichung XII hat man [illegible] σ als Funktion von p u. v, v als Funktion von p und σ zu betrachten und [illegible] partiellen [illegible] Ableitungen von σ nach p u. v [illegible] partiellen Ableitungen von v nach p und σ [illegible] (XIII – XIV) [illegible] Differentialquotienten. Man bekommt dann aus Gleichung XII:

$$C_p - C_v = A\sigma\, \frac{dv}{d\sigma}\cdot\frac{dp}{d\sigma}.$$

Hier ist [illegible] $\frac{dv}{d\sigma}$ eine Ableitung [illegible], während $\frac{dp}{d\sigma}$ [illegible] als Funktion von v [illegible] mit Hilfe der 4. Relation XIV, [illegible]

[illegible] XIV:

$$\frac{dp}{dT} = -\frac{\frac{dv}{dT}}{\frac{dv}{dp}}$$

[illegible]:

$$C_p - C_v = AT\,\frac{\left(\frac{dv}{dT}\right)^2}{-\frac{dv}{dp}}$$

[illegible] C_p [illegible] $> C_v$ [illegible] $\frac{dv}{dT}$ [illegible] $\frac{dv}{dp}$ [illegible] $(dt = dT = 0)$ [illegible] dv [illegible] $\frac{dv}{dp}$ [illegible] $-\frac{dv}{dp}$ [illegible]: $C_p > C_v$ [illegible].

[illegible]

[illegible]:

Die geometrische Darstellung d. Vorgänge bei umkehrbaren Zustandsänderungen

[illegible] v [illegible] p [illegible] v [illegible] p [illegible] E [illegible] U [illegible] Q [illegible] N [illegible].

[illegible] 1 kg [illegible] $a_1\,a_2$ [illegible] a_1 [illegible] a_2 [illegible]

[illegible] $v_1\ p_1\ t_1\ T_1\ U_1$ [illegible] $v_2\ p_2\ t_2\ T_2\ U_2$ [illegible] $v\ p\ t\ T$ [illegible] U. v_1 [illegible] v_2 [illegible] Ob_1 [illegible] Ob_2 [illegible] p_1 [illegible] p_2 [illegible] a_1b_1 [illegible] a_2b_2.

Für eine unendlich kleine umkehrbare Zustandsänderung war nun d. Wärmegleichung:

$$W d\theta = dU + p\,dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{I}$$

welche Gleichung d. Zunahme d. Arbeitsinhalts d. Wärme ausdrückt, welche d. Körper bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung aufnimmt; durch Integration bekommt man hieraus:

$$W\theta = U_2 - U_1 + \int p\,dv$$

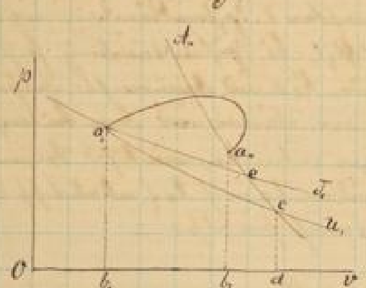
d. nennen wir mit E die vom Körper während d. Zustandsänderung verrichtete Arbeit, bezeichnet also $E = \int p\,dv$:

$$W\theta = U_2 - U_1 + E,$$ wenn θ d. dem Körper mitgeteilte Wärme bedeutet. Die in dieser Formel vorkommende Expansionsarbeit E wird bekanntlich durch d. ~~von d.~~ Zustandscurve $a_1 a_2$, von d. Abscissenaxe OV und den beiden Ordinaten p_1, p_2 eingeschlossene Fläche geometrisch dargestellt, also kann man setzen:

$$E = b_1 a_1 a_2 b_2$$

Es fragt sich nun noch wie man d. übrigen Größen, nämlich Änderung d. inneren Arbeitsvermögens U, d. mitgeteilte Wärme θ aus dem Zustandsdiagramm geometrisch zur Anschauung bringen kann.

Um d. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens also $U_2 - U_1$ zur Darstellung zu bringen, zieht man durch den Anfangspunkt a_1 d. isodynamische Curve U_1, welche also eine Zustandsänderung entspricht, bei d. Körper vom Anfangszustand a_1 an einer umkehrbaren Zustandsänderung bei constantem innerem Arbeitsvermögen U_1 (constante Energie) unterworfen wird; ferner bestimmen zu dem Punkt durch d. Endzustand a_2 eine adiabatische Curve A_2, also eine Zustandscurve, welche ferner d. Gesetz d. Zustandsänderung darstellt, wenn vom Endzustand a_2 ausgehend d. Änderung fortgesetzt wird ohne Mitteilung od. Entziehung von Wärme. Denkt man sich nun d. Änderung nach d. adiabatischen Curve A_2 vom Endzustand ausgehend fortgesetzt bis zum Zustand, welcher d. Schnittpunkt c d. adiabatischen Curve mit d. isodynamischen Curve U_1 entspricht, so kann man natürlich d. obige allgemeine Wärmegleichung I auf diese umkehrbare Zustandsänderung anwenden, wobei jedoch entsprechend d. Charakter [illegible] d. Zustandsänderung nach einer adiabatischen Curve $d\theta = 0$ zu setzen ist, also auch d. Arbeitsinhalt d. mitgeteilten Wärme $W\theta = 0$ zu setzen ist. Dieser Wert bleibt nach oben gleich [illegible] d. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens + d. bei d. Zustandsänderung gewonnenen Arbeit. D. Arbeitsvermögen im Anfangszustand a_2 d. Änderung nach d. adiabatischen Curve A_2 ist bezeichnungsgemäß $= U_2$ und d. Arbeitsvermögen im Endzustand $c = U_1$, da c ein Punkt d. isodynamischen Curve U_1 ist, d. Änderung d. Arbeitsvermögens also $= U_2 - U_1$ für d. vorliegende Zustandsänderung; d. gewonnene Arbeit ist aber geometrisch dargestellt durch d. Fläche $b_2 a_2 c d$, so erhält man d. Gleichung:



$$U_2 - U_1 + b_2 a_2 c d = 0$$

Also $U_2 - U_1 = b_2 a_2 c d$ = Änderung d. inneren Arbeitsvermögens.

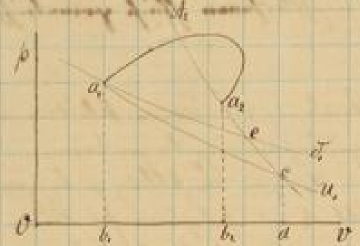
Mit Hilfe dieser Darstellung und d. obigen Gleichung: $W\theta = U_2 - U_1 + E$ hat man also, mit nach oben $E = b_1 a_1 a_2 b_2$:

Arbeitsinhalt d. mitgeteilten Wärme θ: $W\theta = b_2 a_2 c d + b_1 a_1 a_2 b_2 = b_1 a_1 a_2 c d$

D. Arbeitsinhalt d. während d. Zustandsänderung nach d. gegebenen Zustandscurve $a_1 a_2$ dem Körper mitgeteilten Wärme θ ist also = d. Inhalt d. Fläche, welche begrenzt wird 1) von d. V Axe, 2) von d. Zustandscurve $a_1 a_2$ und d. durch d. Endpunkt a_2 derselben gehenden adiabatischen Curve A_2 3) von d. Ordinate d. Punktes c, in welchem d. adiabatische Curve A_2 von d. durch d. Anfangspunkt a_1 gehenden isodynamischen Curve U_1 geschnitten wird und 4) von d. Ordinate d. Punktes Anfangspunktes a_1.

Diese Fläche wird durch d. Ordinate d. Endpunktes a_2 d. Zustandscurve in 2 Theile getheilt, von welchen d. eine, begrenzt von d. Zustandscurve $a_1 a_2$ = d. äußeren Arbeit L, d. andere, begrenzt von d. adiabatischen Curve $A_2 = U_2 - U_1$ = d. Zunahme d. inneren Arbeitsvermögens in Folge d. Zustandsänderung ist. [illegible] $= L$ und $= WQ$ [illegible] a_1 [illegible] $= U_2 - U_1$ [illegible] a_2 d. Zustandscurve [illegible]

Will man nun [illegible] d. Verwandlungswerth $N = \int \frac{dQ}{T}$, welcher d. Zustandsänderung nach d. Zustandscurve $a_1 a_2$ entspricht, [illegible] U_1 [illegible] Curve $a_2 c$ [illegible]



[illegible] T_1 [illegible] Q_1 [illegible] Q_1 [illegible] $c a_1$ [illegible]

[illegible] Zustandscurve $a_1 a_2$ [illegible] Curve $a_2 c$ [illegible] Curve $c a_1$ [illegible] T_1 [illegible] T_2 [illegible] T_2 [illegible] T_1 (adiabatische Curve $a_2 c$) [illegible] Zustandsänderung $a_1 a_2 c a_1$ [illegible]:

$$N = \int \frac{dQ}{T} \quad \text{und} \quad N_1 = -\frac{Q_1}{T_1}$$

[illegible] Curve $c a_1$ [illegible] $= T_1$ [illegible]:

$$N_1 = \frac{1}{T_1}\int dQ = -\frac{Q_1}{T_1}$$

[illegible] Q_1 [illegible] $c a_1$ [illegible]

[illegible] Zustandsänderung $a_1 a_2$ [illegible] $a_2 c a_1$ [illegible] Kreisprozeß $a_1 a_2 c a_1$ [illegible] $= N + N_1 = \int \frac{dQ}{T} - \frac{Q_1}{T_1}$ ist.

[illegible] Kreisprozeß [illegible] Verwandlungswerth = 0, also:

$$N - \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

$$\text{od.} \quad N = \frac{Q_1}{T_1}$$

[illegible] $Q_1 = WQ_1 = WNT_1$ [illegible] $Q = WQ$ [illegible] U_1 und A_2 [illegible] Q_1:

$$WQ_1 = WNT_1 = \text{Fläche } b_1 a_1 e c d$$

Man hätte diese Fläche ebenso durch W d. zu dividiren um d. bildliche Darstellung d. Verwandlungswerthes N zu bekommen, welcher der Zustandsänderung nach d. gegebenen Zustandscurve $a_1 a_2$ entspricht.

Mit Hülfe d. 3 Curven, isothermische, isodynamische und adiabatische, kann man also, wie gesehen, die einer gegebenen beliebigen Zustandsänderung (umkehrbar), charakterisirt durch d. zukommende Zustandscurve, entsprechende Änderung d. inneren Arbeitsvermögens, d. mitgetheilten od. entzogenen Wärme und deren Verwandlungswerth mit Leichtigkeit zur bildlichen Anschauung bringen.

Bemerkenswerth ist noch, daß nach d. Gleichung $N = \frac{Q_2}{T_1}$ d. Verwandlungswerth ganz unabhängig ist von d. Ort, wo d. Punkt a_2 auf d. adiabatischen Curve liegt und unabhängig von d. Gesetz, wonach d. Zustandsänderung von a_1 nach a_2 stattfindet, d. h. unabhängig von d. Form d. Zustandscurve $a_1 a_2$, indem d. Größe Q_2 [illegible] für einen gegebenen Körper durch d. Curvenstück $a_1 c$, also durch d. Punkt a_1 und d. adiabatische Curve A_2 bestimmt ist und schließlich [illegible] d. Schnittpunkt c d. d. isothermische Curve T_1 [illegible]. D. Werth N erhält also auch keine Änderung, wenn a_2 auf d. adiabatischen Curve A_2 verschoben wird, da er immer gleich bleibt, der d. adiabatischen Curve A_2 eigenthümliche Werth ist, sobald d. Zustandscurve $a_1 a_2$ d. adiabatische Curve schneidet. Hervorzuheben ist also in dieser Hinsicht ganz d. sogenannten Kraftfunktionen in d. Mechanik, während d. adiabatischen Curven den bekannten Niveauflächen analog sind.

Im Folgenden sollen nun d. entwickelten allgemeinen Sätze auf besondere Fälle angewendet werden. Wenn dabei auch d. Verhalten d. Gase und Dämpfe ausgeführt wird, so ist dies keineswegs willkürlicher Eingriff, sondern vielmehr [illegible] sehr nothwendig, um daraus d. Bedeutung d. Temperaturfunction T_1 zu erkennen, welche in den allgemeinen Gleichungen eine so bedeutende Rolle spielt, und zu welcher Erkenntniß man [illegible] hauptsächlich nur mittelst einfachen und allein schon bekannten Gesetzen, welchen d. Verhalten d. Gase unterworfen ist, gelangen kann.

Verhalten d. Gase, insbesondere d. atmosphärischen Luft.

Zunächst müssen nun erst einige geschichtliche Begriffe und Gesetze erörtert werden.

Man versteht unter einem permanenten Gase od. auch einem Gase im engeren Sinn einen luftförmigen Körper, welcher uns bis jetzt nur als solcher bekannt ist, indem er durch d. uns zu Gebote stehenden Mittel d. Druckerhöhung und d. Wärmeentziehung bisher nicht in den flüssigen od. festen Aggregatzustand übergeführt werden konnte. Hierzu gehören besonders Sauerstoff und Stickstoff sowie beliebige Gemische dieser Stoffe u. A. reine atmosphärische Luft, wenn sie von ihren untergeordneten Bestandtheilen, Wasserdampf, Kohlensäure etc. befreit ist. Außer diesen beiden gehören eigentlich nur noch 2 Gase, nämlich Wasserstoffgas und Stickoxyd hierher, indem alle anderen bekannten Gase auch schon in flüssigen und theilweise festen Aggregatzustand hergestellt worden sind.

D. Verhalten d. permanenten Gase ist mit großer Annäherung an 2 einfache Gesetze gebunden, nämlich an d. Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz, und wodurch ihr physikalischer Charakter wesentlich bestimmt wird. Indem nun aber d. Begriff eines permanenten Gases nicht so fest bestimmt, sondern von dem Zufall unserer augenblicklichen Kenntnisse und Hülfsmittel unterworfen ist, mit deren Vervollkommnung ein bisher als permanent erscheinendes Gas diesen Charakter verlieren kann, und ferner auch außer d. permanenten andere luftförmige Körper in gewissen Wärmezuständen (bei sehr großen Verdünnungen) den gesetzlichen beiden Gesetzen ebenso gut entsprechen können wie permanente Gase, so erscheint thunlicher, d. Begriff eines Gases etwas anders zu fassen. In dem Sinn soll im Folgenden unter einem Gas jeder luftförmige Körper von solcher Art od. in solchem Wärmezustand verstanden werden, daß seine zunächst in Betracht gezogenen Zustandsänderungen d. Mariotte'schen und dem Gay-Lussac'schen Gesetze unterworfen oder in Betracht

Temperaturen sofort verwechselt werden dürfen. Diesem Begriff entsprechend kann man sich einen Übergang d. Gase denken, indem d. Übersättigung einen solchen Wärmezustand haben kann, daß er ebenso gut wie gewöhnliche atmosphärische Luft den beiden genannten Gesetzen folgt.
D. Zustand eines vollkommenen Gases, für welchen jene Gesetze genau gelten, ist nur als ein idealer Grenzzustand zu betrachten, welchem bei kleiner Pressung und hoher Temperatur d. genannten Gase [illegible] luftförmige Körper und Dämpfe.

Es handelt sich nun besonders darum d. Zustandsgleichung für d. Gase aufzustellen, unter Gas aber nur immer d. obigen Begriff eines luftförmigen Körpers verstanden. Dies kann geschehen mit Hilfe d. beiden genannten Gesetze:
D. Mariotte'sche Gesetz besagt bekanntlich dann, daß d. spez. Volumen v und d. Pressung p eines Gases bei constanter Temperatur t einander umgekehrt proportional sind, so daß also d. Produkt pv bei constanter Temperatur t eine constante Größe ist, welche jedoch mit ändernder Temperatur sich ändert. Diesem zufolge hat also d. Zustandsgleichung d. Gase d. allgemeine Form:

$$pv = f(t)$$ unter f eine noch unbekannte Function verstanden, welche ihrer Form nach jedoch nun weiter durch d. Gay-Lussac'sche Gesetz bestimmt wird.
Wenn man nämlich p als constant annimmt, und dann d. Gleichung differenziert, so bekommt man:

$$p\,dv = f'(t)$$

unter $f'(t)$ den nach t genommenen Differentialquotienten von $f(t)$ verstanden, also $f'(t) = \frac{d f(t)}{dt}$

Wird d. Gas nun wie atmosphärische Luft und wird d. als constant vorausgesetzte Pressung p = d. normalen Atmosphärendruck, so wird d. Temperaturänderung proportional d. Volumenänderung entsprechend d. früheren Definition d. Temperatur (Seite 30) also $\frac{dv}{dt}$ constant und mithin auch $f'(t)$ constant nach oben gefundener Gleichung. Nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze ist aber diese Proportionalität zwischen d. gleichzeitigen Veränderungen d. Volumens v und Temperatur t nicht nur gültig für d. atmosphärische Luft sondern auch für jedes andere Gas und nicht nur gültig für den normalen Atmosphärendruck, sondern für beliebige Werthe einer constanten Pressung, und es ist also $f'(t)$ für alle Gase und beliebige Werthe d. constanten Pressung p = einer Constanten; bezeichnet man diese Constante mit R

also $f'(t) = R$, so folgt durch Integration aus d. letzten Gleichung:
$p\,dv = f'(t)$:

$$pv = S + Rt$$ unter S eine andere Constante verstanden.
= Zustandsgleichung d. Gase, worin R und S für verschiedene Gase verschiedene Werthe haben können.

(Wie schon früher bei Gelegenheit d. Besprechung von Zustandsgleichungen erwähnt wurde, ist im Allgemeinen d. Form d. Zustandsgleichungen abhängig von d. Aggregatform d. betreffenden Körpers, die Größe d. Coefficienten aber bedingt durch d. Art d. Körpers, so daß also unbedingt auch d. obige Form allgemein für Gase gilt, aber die d. Constanten S und R für verschiedenartige Gase verschieden sein können).
Gewöhnlich gibt man d. obigen Zustandsgleichung eine andere Form indem man S als Factor vorausstellt und d. Verhältnis $\frac{R}{S} = \alpha$ setzt:

I . . . . $$pv = S(1 + \alpha t)$$
II . . . . od. $$pv = R(a + t)$$ wenn a d. Verhältnis d. $\frac{S}{R}$ bedeutet

also $a = \frac{1}{\alpha}$ = dem reziproken Werth von α.

Was nun d. Coefficienten α betrifft, so ist derselbe nichts anderes als d. sog. Ausdehnungscoefficient d. Gases, nämlich d. Verhältnis d. Volumenänderung, welche bei constanter Pressung einer Temperaturänderung von 1° entspricht zu dem Volumen bei 0° unter derselben Pressung. Ist nämlich dv d. Änderung d. Volumens v, wenn sich d. Temperatur t bei constanter Pressung p um $dt = 1$ ändert, so ist nach Gleich. I durch Differentiation:

$$p\,dv = S\alpha\,dt$$ wo d. $dt = 1$ sein soll
$$p\,dv = S\alpha$$

Ist nun noch v_0 d. Werth von v, welcher bei demselben Druck p, d. Temperatur $t = 0$ entspricht, so hat man nach Gesetz I:

$$p v_0 = S$$

und schließlich durch Division beider Gleichungen:

$$\alpha = \frac{dv}{v_0}$$ = d. Ausdehnungscoefficienten d. Gases.

Es erscheint also auch a d. reziproke Werth d. Ausdehnungscoefficienten.

Wie schon gezeigt haben d. Constanten R und S in d. ersten Form d. Zustandsgleichung für verschiedene Gase verschiedene Werthe. Damit ist aber noch gar nicht gesagt, daß R und S auch bei allen Gasen in ein und demselben Verhältniß zu einander stehen, also $\frac{R}{S}$ für alle Gase constant sei.

Um dies zu ergründen, müßte man also d. Ausdehnungscoefficienten α für verschiedene Gase durch Versuche zu bestimmen suchen, ist bekannt. Aber natürlich zunächst dienen uns für d. Zustandsgleichung:

$$pv = R(a+t) = S(1+\alpha t)$$

2 Größen von zusammengehörenden $pv - t$ durch Beobachtung zu bestimmen, diese in d. Gleichung einsetzen, so ist man S damit eliminiren kann und also nur eine Gleichung zur Bestimmung von α übrig bleibt. Es empfiehlt sich hier besonders zur Beobachtung d. beiden Größen $t = 0°$ und $t = 100°$ zu wählen, weil man diese Temperaturen jederzeit sehr genau erhalten kann durch d. Mischung von Eis und Wasser und siedendem Wasser.

Es seien nun p_0 und v_0 die beobachteten Werthe von p u. v bei d. Temperatur $t = 0°$
und p_1 u. v_1 " " " " " " " $t = 100°$
eines Gases, so ist nach Gesetz:

$$p_0 v_0 = S(1+\alpha\cdot 0) = S(1+\alpha\cdot 0) = S$$
$$p_1 v_1 = S(1+100\alpha)$$

Also $$\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0} = 1 + 100\alpha \quad \text{u.} \quad \alpha = \frac{p_1 v_1 - p_0 v_0}{100\, p_0 v_0}$$

Von verschiedenen Physikern sind in dieser Hinsicht Versuche gemacht worden und zwar namentlich auf 2 fache Weise, entweder wurden in beiden Fällen d. Beobachtung (zur Erhaltung d. beiden zusammengehörenden Werthe) bei constantem Volumen oder auch bei constantem Druck vorgenommen.

Wählt man in beiden Fällen d. Druck gleich, also $p_0 = p_1$, so hat man zur Bestimmung von α d. Formel:

$$\alpha = \frac{v_1 - v_0}{100\, v_0}$$

und wählt man in beiden Fällen d. Volumen constant, also $v_0 = v_1$, so hat man:

$$\alpha = \frac{p_1 - p_0}{100\, p_0}$$ zur Bestimmung d. Ausdehnungscoefficienten.

Für ein vollkommenes Gas, welches d. beiden physikalischen Gesetze (Mariotte und Gay-Lussac) ganz streng unterworfen ist, für welches also d. Zustandsgleichung vollkommen genau gilt, müßten sich natürlich nach beiden Methoden gleiche Werthe von α ergeben für ein und dasselbe Versuchs-. Es wurde aber gefunden namentlich von Regnault, daß d. Ausd. Werth α für wirkliche Gase etwas verschieden ausfiel, je nachdem er nach d. einen od. andern Bestimmungsgleichung gemessen wurde und ferner auch noch je nach d. beiden verschieden je nach den Werthen von v_0 und p_0, nämlich α wurde um so kleiner unter sonst gleichen Umständen, je größer d. Volumen und je kleiner d. Druck, also je größer v_0 und je kleiner p_0 war.

Wir werden uns ferner fragen, ob vielleicht d. Verhältniß d. Constanten $\frac{R}{S} = \alpha$ = Ausdehnungscoefficient für alle Gase constant sei, und man durch diese Versuche und Messungen ergab, indem namentlich α für verschiedene Gase unter gleichen Umständen nicht mehr verschieden ist, als für dasselbe Gas unter verschiedenen Umständen. Mit demselben Recht also, wie man α für ein und dasselbe Gas unter verschiedenen Umständen constant annimmt, mit demselben Rechte kann man auch d. Ausdehnungscoefficienten α für verschiedene Gase constant annehmen.

× Demnach ist d. Ausdehnungscoefficient α für den Gaszustand einem allgemeinen Gesetz als eine von d. Natur unabhängige Constante zu betrachten und dem kleinsten Werth von α gleich zu setzen, welcher für irgend ein Gas unter irgend welchen Umständen bisher gefunden wurde, weil jedes Gas seinem Gaszustand um so näher kommt, je größer bei gegebener Temperatur sein spez. Volumen ist, mit wachsendem v aber wie erwähnt α abnimmt. Dieser kleinste Werth ist:

$$\alpha = 0{,}00366$$

welcher für Wasserstoffgas aus d. besten ... gefunden wurde, indem d. betreffenden Versuche bei Temperaturen von 0° – 100° unter normalem Atmosphärendruck gemacht wurden. Das Wasserstoffgas ist überhaupt auch dasjenige von allen permanenten Gasen, bei welchem d. Verschiedenheit von α am kleinsten ist, so daß man auch annehmen kann, es darstellt sich von allen Gasen am meisten d. idealen Gaszustand eines allgemeinen Gesetzes nähert.

Für sehr oft ist es nun aber zweckmäßig bequemer, anstatt d. Zustandsgleichung in d. Form $pv = S(1 + \alpha t)$ stets in d. Form $pv = R(a + t)$ zu bringen zu bringen und also anstatt d. Ausdehnungscoefficienten α seinen reciproken Werth $\frac{1}{\alpha} = a$ in d. Rechnung einzuführen.

Es ist: $a = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0{,}00366} = 273$

und wird so d. Zustandsgleichung:

$$pv = R(273 + t)$$

Während nun diese Coefficient a in d. Zustandsgleichung als für alle Gase constant zu betrachten ist, hat dagegen R für verschiedenartige Gase verschiedenen Werth. Um diesen Werth für R zu bestimmen, muß man erst eine Gruppe zusammengehörender Werthe von v p u. t kennen. Da d. atmosphärische Luft als das für d. technische Anwendung am wichtigste Gas zu betrachten ist, so scheint es von besonderem Interesse für diese atmosphärische Luft d. Coefficienten R zu bestimmen. Es ist nun d. ... festgestellte Thatsache, daß 1 Cubm Luft bei normalem Atmosphärendruck und d. Temperatur $t = 0$ = 1,2932 Kgr wiegt, so ergibt also ihr spez. Gewicht:

$$\gamma = \frac{1}{v} = 1{,}2932$$

Der normale Atmosphärendruck ist bekanntlich ... dadurch, daß in ein Glasröhre ... mit einer Quecksilbersäule von 1 qm Querschnitt und 0,76 m Höhe bei 0° Temperatur d. Quecksilbers, d. normale Atmosphärendruck ist also = dem Gewicht einer Quecksilbersäule von 1 qm Grundfläche und 0,76 m Höhe bei 0° Temperatur d. Quecksilbers ausgedrückt in Kgr pr qm.

D. Gewicht d. Quecksilbersäule ist nun = Volumen · spez. Gewicht
= 0,76 Cubm · spez. Gewicht

Was d. spez. Gewicht d. Quecksilbers betrifft, so ist d. Dichtigkeit d. Quecksilbers bei 0° 13,596 mal so groß als d. Dichtigkeit d. Wassers bei 4°; ferner wiegt bekanntlich ... 1 Cubdcm Wasser 1 Kgr, also 1 Cubm ... 1000 Kgr. Demnach ist also d. Gewicht d. Quecksilbers pro Cubm bei 0° = 13,596 · 1000 = 13596 Kgr

und also d. Gewicht d. Quecksilbersäule = 0,76 · 13596 = 10333 Kgr

Dies Gewicht ist aber = d. Atmosphärendruck also:

$$p = 10333 \text{ Kgr pr qm.}$$

Man hat also nun zusammengehörende Werthe von v p t, nämlich:

$\frac{1}{v} = 1{,}2932$ $p = 10333$ Kgr pr qm und $t = 0°$

Nach d. obigen Zustandsgleichung ist also:

$$R = \frac{pv}{273 + t} = \frac{10333}{1{,}2932\,(273 + 0)} = \frac{10333}{1{,}2932 \cdot 273} = 29{,}27.$$

Nachdem nun in dieser Weise R als eine constante Größe für atmosphärische Luft gefunden ist, kann man nun auch R bestimmen für ein anderes Gas, dessen Dichtigkeit im Verhältniß zur Dichtigkeit d. atmosphärischen Luft bekannt ist, natürlich mit Rücksicht auf gleiche Pressung und Temperatur.

Nach Zustandsgleichung: $pv = R(a+t)$ sind nämlich offenbar die Constanten R zweier verschiedener Gase von übrigens gleicher Pressung und Temperatur proportional d. spec. Volumina also umgekehrt proportional d. Dichtigkeit. Ist also δ d. Dichtigkeit eines anderen Gases od. Gasgemenges in Bezug auf atmosphärische Luft von gleicher Pressung und Temperatur, so ist für dasselbe d. Constante R:

$$R = \frac{29{,}27}{\delta}$$

Es muss hierbei aber bemerkt werden, daß d. Werth $R = 29{,}27$ sich auf solche atmosphärische Luft bezieht, welche ganz sorgfältig von ihren zufälligen Nebenbestandtheilen (Wasserdampf, Kohlensäure etc) befreit worden, indem d. genannte Gewicht von 1 cubm Luft $= 1{,}2932$ kgr sich nur auf einen solchen Zustand d. Luft bezieht, in welchem diese Nebenbeimischungen namentlich Kohlensäure und Wasserdampf durch künstliche Mittel entfernt wurden. Es fragt sich nun ob d. Constante R nicht für gewöhnliche feuchte Luft wesentlich anders ausfallen wird als für d. reine Luft. In dieser Hinsicht kann man jedoch sagen, daß d. [illegible] und zu technischen Zwecken benutzte atmosphärische Luft d. verschiedenen Beimischungen, namentlich also Wasserdampf und Kohlensäure nur in so kleinen Mengen enthält, daß durch diese Beimischungen d. Gas-Charakter d. Gemisches nicht wesentlich geändert wird, folglich den betreffenden Rechnungen immer nur d. Zustandsgleichung in d. bekannten Form zu Grunde gelegt werden kann. Immerhin aber werden d. wechselnden Bestandtheile einen Einfluss auf d. Constante R ausüben, während d. anderen Beimischungen einen nur so geringen Einfluss ausüben, daß derselbe nicht in Rechnung gezogen werden kann. Von Interesse erscheint es daher wenigstens d. Einfluss d. Wassergehalts d. Luft auf δ und R zu untersuchen und festzustellen. Zu dem Ende muss indessen d. [illegible] d. zu untersuchenden atmosphärischen Luft bekannt sein.

Angenommen es sei p d. Gesammtpressung d. feuchten Luft, so ist bekanntlich nach d. Dalton'schen Gesetze diese Pressung = d. Summe d. Pressungen d. trockenen Luft und d. Wasserdampfes, ist also p_0 d. Pressung d. in d. Luft enthaltenen Wasserdampfes so ist $p - p_0$ d. Pressung d. trockenen Luft für sich allein und d. verhältnissmässige Pressung d. ~~Dampfes~~ Wasserdampfes also $= \frac{p_0}{p}$ und d. verhältnissmässige Pressung d. trockenen Luft $= \frac{p-p_0}{p}$. Nun ist aber weiter d. spec. Gewicht d. Wasserdampfes ungefähr $\frac{5}{8}$ so gross wie d. d. trockenen Luft bei gleicher Pressung und Temperatur; d. Dichtigkeit δ d. feuchten Luft demnach:

$$\delta = \frac{p-p_0}{p} + \frac{5}{8}\frac{p_0}{p} = 1 - \frac{3}{8}\frac{p_0}{p}$$

und also nach Obigem d. Constante R ihrer Zustandsgleichung:

$$R = \frac{29{,}27}{1 - \frac{3}{8}\frac{p_0}{p}}$$

Nimmt man z. B. wie es einem mittleren Luftzustand in d. Luft [illegible] entspricht, $\frac{p_0}{p} = \frac{1}{100}$ d. h. daß d. Pressung d. Wasserdampfes 1% d. Gesammtpressung d. feuchten Luft ausmacht, so bekommt man:

$$R = 29{,}38.$$

Hinsichtlich d. spec. Wärme sind nun noch einige Bemerkungen zu machen. Es wurde im Vorhergehenden immer mit c d. spec. Wärme irgend eines Körpers mit constantem Volumen und mit c_1 d. spec. Wärme für constante Pressung bezeichnet. Diese Bezeichnungen sollen nun auch für Gase speciell beibehalten werden, also c d. spec. Wärme d. Gases für constantes Volumen und c_1 = spec. Wärme für constante Pressung. Von diesen spec. Wärmen ist nur d. letztere c_1 = spec. Wärme für constante Pressung (namentlich von Regnault) für verschiedene Gase direct durch Versuche bestimmt worden und es ergab sich dabei, daß c_1, welches übrigens für verschiedenartige Gase verschieden ist, unabhängig von dem augenblicklichen Zustande d. Gases ist, wenigstens mit derselben Annäherung, mit welcher d. Gas dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze folgt. Insbesondere wurde für atmosphärische Luft gefunden

$$c_1 = 0{,}2375.$$

Was d. spec. Wärme c bei constantem Volumen d. Gase betrifft, so ist diese nicht direct ermittelt worden, sondern dieselbe kann bisher nur indirect abgeleitet werden mit d. Verhältniss $n = \frac{c_1}{c}$, welches Verhältniss man auf verschiedenartige Weise aus Versuchen ableiten kann, wie solche später noch erörtert werden sollen. Unter andern ergibt sich für d. atmosphärische Luft im Mittel aus verschiedenen Versuchen dieses Verhältniss $n = 1,41$.

$$\text{und also } c = \frac{c_1}{n} = \frac{0,2375}{1,41} = 0,1684.$$

Für irgend ein anderes Gas kann d. spec. Wärme c ebenfalls abgeleitet werden aus seiner spec. Wärme c_1, seiner Dichtigkeit d in Bezug auf atmosphärische Luft und aus den Werthen für c und c_1 für atmosphärische Luft. Setzt d. Gesetz, daß auch c ebenso wie c_1 für jedes Gas von dem augenblicklichen Zustand desselben unabhängig sei, sich nicht genau verificirt, als für atmosphärische Luft d. spec. Wärme $c = 0,1684$ od. d. Verhältniss $n = 1,41$ ebenso constant sei wie d. spec. Wärme $c_1 = 0,2375$. Die bisherigen experimentellen Ermittlungen, aus welchen $n = 1,41$ als wahrscheinlicher und bis auf höchstens 1.2 [illegible] Werth d. Verhältnisses n für atm. Luft abgeleitet wurde, sind nun zwar nicht umfassend und genau genug um diese Frage schon zu entscheiden, indessen spricht d. innere Wahrscheinlichkeit für ihre Bejahung. Wissen d. bei constantem Volumen zugeführte Wärme nur eine Vermehrung seines Zustandes bewirkt, hat d. bei constantem Druck [illegible] zugleich eine Expansionsarbeit $= pdv$ pro 1kg d. Gases zu verrichten; d. spec. Wärme c [illegible] als c_1 und [illegible] für jedes Gas [illegible] c vermuthen. Wir schließen, daß beide spec. Wärmen c und c_1 für jedes Gas constant sind, ihre Werthe also nur von d. Art, nicht vom Zustand d. Gases abhängen.

Bestimmung d. Temperaturfunction T.

Die erörterten charakteristischen Eigenschaften d. Gase können nun dazu dienen, durch Hilfe d. beiden sog. Hauptgleichungen d. Temperaturfunction T ein für allemal zu bestimmen, indem bekanntlich diese Function T ganz unabhängig von d. Art und Aggregatform d. Körper ist, sondern lediglich eine Function d. Temperatur ist, [illegible] Punkt d. [illegible] einerlei ist, auf [illegible] Körper und nach Aggregatform den [illegible] Untersuchungen zu Grunde gelegt wird, natürlich sind dazu die einfachen und verhältnismäßig sicher bekannten Gesetze, welchen d. Verhalten d. Gase unterworfen sind, besonders geeignet.

Die vorhin festgestellten charakteristischen Eigenschaften eines Gases bestanden nun darin, daß seine Zustandsgleichung d. allgemeine Form hatte:

$$pv = S + R\mathfrak{T} = R(a+t)$$

worin a eine Constante $= 273 =$ d. reciproken Werth d. für alle Gase unter allen Umständen constant angenommenen Ausdehnungscoefficienten α bedeutet, während d. Constanten R und S für verschiedenartige Gase verschieden sein können, weiter bestanden d. charakteristischen Eigenschaften d. Gase darin, daß d. spec. Wärmen c und c_1 bei constantem Volumen resp. constantem Druck für jedes Gas constant sind d.h. ihre Werthe nur von d. Art d. Gases und nicht von dessen augenblicklichen Zustand abhängen.

Die beiden Hauptgleichungen, welche hier benutzt werden müssen um in Verbindung mit den genannten charakteristischen Eigenschaften d. Gase d. Temperaturfunction T zu erkennen, hatten nach Seite 67 XI und XII folgende allgemein gültige Formen:

$$A = \frac{d}{dp}\left(c_p \cdot \frac{d\vartheta}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(c_v \cdot \frac{d\vartheta}{dp}\right)$$

$$A\vartheta = (c_p - c_v)\,\frac{d\vartheta}{dp} \cdot \frac{d\vartheta}{dv}$$

In diesen beiden Gleichungen bedeuten c_p und c_v gewisse Functionen der den Wärmezustand charakterisierenden Größen, welche in besonderer Beziehung stehen zu den spec. Wärmen c und c_1 und der Temperaturfunction ϑ; es war nämlich (Seite 66 u. 67):

$$c_v = \frac{dQ}{d\vartheta} \text{ im Falle } v = \text{const. und } c_p = \frac{dQ}{d\vartheta} \text{ im Falle } p = \text{Constant.}$$

und ferner: $c = c_v \dfrac{d\vartheta}{dt}$ und $c_1 = c_p \dfrac{d\vartheta}{dt}$

Wenn man nun die Ableitung von ϑ nach t $= \dfrac{d\vartheta}{dt} = \vartheta'$ bezeichnet, so hat man:

$$c = c_v\,\vartheta' \quad \text{und} \quad c_1 = c_p\,\vartheta'$$

$$\text{od.} \quad c_v = \frac{c}{\vartheta'} \quad \text{und} \quad c_p = \frac{c_1}{\vartheta'}$$

Weiter erhält man die partielle Ableitung von ϑ nach v, indem ϑ eine mittelbare Function von v ist, da ϑ eine Function von t und t wieder eine Function von v ist, dadurch daß man die ~~partielle~~ Ableitung von ϑ nach t mit der partiellen Ableitung von t nach v multipliziert; also:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{dt}{dv} = \vartheta' \cdot \frac{dt}{dv}$$

$$\text{und ebenso} \quad \frac{d\vartheta}{dp} = \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{dt}{dp} = \vartheta' \, \frac{dt}{dp}$$

Was nun die beiden Ableitungen von t nach v und p betrifft, so sind diese bestimmt aus der Zustandsgleichung der Gase. Differentiirt man dieselbe partiell nach v, faßt also p als Constante auf, so ergibt sich:

$$\frac{dt}{dv} = \frac{p}{R}$$

und differentiirt man partiell nach p, also unter Annahme v = Constante, so erhält man:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{v}{R}$$

Substituirt man diese Ausdrücke nun in den beiden obigen Gleichungen, so werden diese dadurch speciell auf Gase angewandt, und man erhält dann diese nur für Gase geltenden Formen:

Aus der ersten: $\quad A = \dfrac{d}{dp}\left(c_1 \dfrac{p}{R}\right) - \dfrac{d}{dv}\left(c \dfrac{v}{R}\right)$

Unter der gemachten Annahme, daß die spec. Wärmen c und c_1 und der Coefficient R für ein und dasselbe Gas constant sind, sind c, c_1 und R als unabhängig von den, den Wärmezustand charakterisierenden Größen v u. p zu betrachten; man hat demnach:

$$\cancel{A = \frac{(c_1 - c)}{R} \cdot \frac{dp}{dp} - \frac{dv}{dv}}$$

$$A = \frac{c_1}{R}\frac{dp}{dp} - \frac{c}{R}\frac{dv}{dv} = \frac{c_1 - c}{R}$$

Aus d. 2ten Hauptgleichung ergibt sich nach Einsetzung d. bezüglichen Werthe:

$$A\vartheta = \frac{c_1 - c}{\vartheta'}(\vartheta')^2 \frac{pv}{R^2}$$

$$= \frac{c_1 - c}{R} \cdot \vartheta' \frac{pv}{R}$$

Nach d. Zustandsgleichung ist aber $\frac{pv}{R} = a + t$

also: $$A\vartheta = \frac{c_1 - c}{R} \vartheta'(a+t)$$

Vergleicht man nun diese Gleichung mit d. Werthe für A gefundenen, so bekommt man:

$$\vartheta = \vartheta'(a+t)$$

Dies ist nun eine Differentialgleichung zur Bestimmung von ϑ als Function von t, setzt man nämlich für ϑ' seinen Werth, so bekommt man:

$$\vartheta = \frac{d\vartheta}{dt}(a+t)$$

od. $\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{dt}{a+t}$ nach d. Differentialrechnung ist aber nun bekanntlich:

$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = d\,l(\vartheta)$ und $\frac{dt}{a+t} = d\,l(a+t)$ wobei l d. natürlichen Logarithmus bedeutet.

Also: $d\,l(\vartheta) = d\,l(a+t)$

u. durch Integration:

$$l(\vartheta) = l(a+t) + \text{Constante } l(C)$$

$$= l[(a+t)C]$$

folglich: $\vartheta = (a+t)C$ wenn C eine willkürlich zu wählende Constante bedeutet und wobei a d. reciproke Werth d. Ausdehnungscoefficienten α zu verstehen ist.

Nimmt man nun d. willkürlich zu wählende Constante $C = 1$, so hat man:

$$\vartheta = a + t = 273 + t.$$

Diese Temperaturfunction ϑ unterscheidet sich also von d. Temperatur t nur durch einen constanten Summanden, sie ist also selbst eine Temperatur nur von einem anderen Nullpunkt aus gemessen als d. thermometrische Temperatur t, d.h. sie ist selbst eine Temperatur, welche nur von einem $273°$ unter d. thermometrischen Nullpunkt = Gefrierpunkt d. Wassers gelegenen Nullpunkt aus gemessen werden muß. Man nennt diesen Nullpunkt auch d. absoluten Nullpunkt und dementsprechend ϑ d. absolute Temperatur.

Da nun die beiden Temperaturen ϑ und t sich nur durch einen constanten Summanden unterscheiden, $= a = 273$, so kann man auch d. Ableitungen von ϑ und t miteinander vertauschen und also in allen Gleichungen $d\vartheta$ und dt beliebig mit einander vertauscht werden.

Ferner ist nun auch $\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dt} = 1$ und daher auch d. Formeln auf voriger Seite:

$c_v = C$ und $c_p = C_1$ d.h. d. Größen c_v und c_p welche im Allgemeinen d. Bedeutung $\frac{dQ}{d\vartheta}$ bei constantem Volumen resp. bei constantem Drucke bedeuten, haben, bedeuten also nichts anderes als d. spec. Wärmen bei constantem Volumen resp. constantem Druck.

In d. Regel wird nur schreiben d. absolute Temperatur ϑ an d. Stelle d. thermometrischen Temperatur t in den Formeln eingeführt, wodurch dieselben in manchen Fällen sehr vereinfacht werden.
Insbesondere erhält man damit d. Zustandsgleichung eines Gases in d. einfachen Form:
für $a + t = \vartheta$:

$$pv = R\vartheta$$

Von d. Zustandsgleichungen, welche bei d. Entwicklung von ϑ als Function von t gefunden wurden, [illegible] eine Wichtigkeit, indem aus dieser interessante Schlüsse gezogen werden können, nämlich d. Beziehung, welche sich aus d. ersten Hauptgleichung ergibt, wenn man diese auf ein Gas anwendet:

$$A = \frac{C_1 - C}{R}$$

$$\text{od. } C_1 - C = AR.$$

Bevor jedoch an diese Gleichung weitere Folgerungen geknüpft werden, sollen zunächst d. allgemeinen Formen d. Wärmegleichung etwas umgewandelt werden behufs Anwendung derselben auf d. einfachsten Zustandsänderungen eines Gases. D. allgemeinen Formen d. Wärmegleichung od. d. Ausdruck für d. Wärmemenge dQ, welche einem Körper pro 1 kg behufs einer unendlich kl. Zustandsänderung mitgeteilt werden muss, waren (Seite 65 VIII und S. 69):

$$dQ = C_p \frac{d\vartheta}{dv} dv + C_v \frac{d\vartheta}{dp} dp$$

$$dQ = C_v d\vartheta + A\vartheta \frac{dp}{d\vartheta} dv$$

$$dQ = C_p d\vartheta - A\vartheta \frac{dv}{d\vartheta} dp$$

von welchen d. erste angewandt wird, um d. Wärmemenge dQ zu bestimmen, welche d. Körper pro 1 kg behufs einer unendlich kl. Zustandsänderung mitgeteilt werden muss, wenn letztere gegeben ist durch d. Änderungen d. spec. Volumens v und d. Änderungen d. spec. Pressung p; die 2te wird angewandt, wenn d. Änderung d. Wärmezustandes durch d. absolute Temperatur ϑ und d. spec. Volumen v gegeben ist und endlich d. 3te, wenn d. " " " " " ϑ und d. spec. Pressung p " " ".

Diese Gleichungen gelten allgemein für einen beliebigen Körper, auch wenn man für ϑ d. betreffende eine beliebige Function von t einführt und ebenso erhält d. damit gegebene Bedeutung von C_v und C_p eine ähnliche d. spec. Wärmen C und C_1 für constantes Volumen resp. constante Pressung einfach. Zum Unterschiede sollen aber für feste und flüssige Körper d. selben Bezeichnungen ~~beibehalten~~ gebraucht werden, während für Gase d. schon früher eingeführte Bezeichnung gelten soll, so dass also C_v und C_p d. spec. Wärmen bei constantem Volumen resp. constanter Pressung von festen und flüssigen Körpern bezeichnen und C und C_1 d. spec. Wärmen bei constantem Volumen resp. constanter Pressung von Gasen und Gasgemischen bedeuten.
Wendet man nun also d. Formeln auf ein Gas an, so ist: $C_v = C$ und $C_p = C_1$ zu setzen; ferner ergibt sich aus d. Zustandsgleichung $pv = R\vartheta$ d. Gase durch Differentiation:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \frac{p}{R} \quad \text{und} \quad \frac{d\vartheta}{dp} = \frac{v}{R}.$$

Mit Rücksicht hierauf nimmt nun d. erste Formel bei d. Anwendung auf Gase folgende Form an:

$$dQ = \frac{1}{R}\left(C_1 p\, dv + C v\, dp\right)$$

= derjenigen Wärmemenge, welche d. Gase pro 1 kg zugeführt werden muss, damit d. spec. Volumen v in $v + dv$ und d. spec. Pressung p in $p + dp$ übergehen soll, wobei C und C_1 d. spec. Wärmen d. Gases bei constantem Volumen resp. constanter Pressung bedeuten.

Aus d. 2t. Formel wird:

$$dQ = c\,dT + \frac{ART}{v}\,dv$$

und aus d. 3ten:

$$dQ = c_1\,dT - \frac{ART}{p}\,dp$$

Diese können vereinfacher geschrieben werden, wenn man mit Rücksicht auf d. Zustandsgleichung: $pv = RT$ setzt:

$$\frac{RT}{v} = p \quad \text{und} \quad \frac{RT}{p} = v:$$

$$dQ = c\,dT + Ap\,dv$$

$$dQ = c_1\,dT - Av\,dp$$

wo A bekanntlich d. Wärme welche d. Arbeitseinheit $= \frac{1}{424}$ Calorien bedeutet. Diese verschiedenen Formen d. Wärmegleichung für Gase werden bei sehr vielen Aufgaben zweckmäßige Verwendung kommen.

Wie schon erwähnt, gestattet d. Beziehung, welche für Gase betreffs d. spez. Wärmen c und c_1 gilt, nämlich:

$$c_1 - c = AR$$

recht interessante Folgerungen. Zunächst sieht man, daß d. Differenz d. spez. Wärmen verschiedener Gase bei ... proportional ist d. Constanten R in d. Zustandsgleichung. Diese Constante R wurde ab Seite 77 als umgekehrt proportional d. Dichtigkeit gefunden, so ergibt sich d. Differenz $c_1 - c$ bei verschiedenen Gasen umgekehrt proportional d. Dichtigkeiten d. Gase ... .

Für atm. Luft kennt man mit genügender Genauigkeit und Sicherheit d. Werthe für c_1, c und R und somit kann man aus d. obige Beziehung benützen, den Werth von A zu bestimmen, ... ergibt sich ... als d. durch Joule gefunden, ... Mittelwerth von $A = \frac{1}{424}$ auch mit diesen zusammen gefundenen Werthen von c_1, c und R übereinstimmt und zwar für alle Gase.

Für d. atm. Luft wurde man in Versuchen gefunden:

$$c_1 = 0{,}2375 \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{c} = 1{,}41$$

$$\text{also } c = \frac{c_1}{1{,}41} = \frac{0{,}2375}{1{,}41} = 0{,}1684.$$

$$\text{und } R = 29{,}27$$

diese Werthe eingesetzt gibt:

$$\frac{1}{A} = W = \text{Arbeitswerth d. Wärmeeinheit} = \frac{R}{c_1 - c} = \frac{29{,}27}{0{,}2375 - 0{,}1684} = 423{,}6 \text{ kgm.}$$

Also in d. That stimmt dieser Werth fast genau mit d. Mittelwerth überein, welche aus d. Versuchen von Joule sich ergeben hatte.

Weitere Beziehung:

$c_1 - c = AR$, worin A für alle Körper constant $= \frac{1}{424}$, dagegen R umgekehrt proportional d. Dichtigkeit d. d. verschiedenen Gase ist, müßte auch $c_1 - c$ umgekehrt proportional d. Dichtigkeit d. verschiedenen Gase sein; also d. kann für irgend ein beliebiges Gas diese Differenz $c_1 - c$ gefunden werden aus d. betreffenden Differenz für atm. Luft dividirt durch d. Dichtigkeit d. d. Gases in Bezug auf d. Dichtigkeit d. atm. Luft. Für atm. Luft war diese Differenz gefunden $= 0{,}2375 - 0{,}1684 = 0{,}0691$

Also für ein beliebiges Gas:

$$c_1 - c = \frac{0{,}0691}{\delta}$$

wenn unter δ d. Dichtigkeit d. Gases verstanden wenn d. Dichtigkeit d. atm. Luft als 1 angenommen wird. D. Werthe von δ und ebenso d. Werthe von c_1 kennt man mit ziemlicher Genauigkeit für verschiedene Gase, während d. Werthe c nur mit bedeutenden Schwierigkeiten festgestellt werden können. Obige Formel ist nun eine solche Beziehung, aus welcher man c d. h. d. spez. Wärme eines Gases für constantes Volumen aus d. bekannten A und d. spez. Wärme c_1 bei constantem Druck berechnen kann, wenn man außerdem auch Dichtigkeit d. vorliegenden Gases in Bezug auf atm. Luft kennt. Ebenso kann man dann auch den schon erwähnten Quotienten $\varkappa = \frac{c_1}{c}$ berechnen. Man hat diese Rechnungen auch für d. wichtigsten Gasarten ausgeführt, namentlich sind durch von Regnault angestellt mit d. richtigen Werthe von δ und c_1 d. verschiedenen Gase bestimmt. Es wurde dann gefunden, daß bei d. 4 bis jetzt genannten Gase, nämlich Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenoxyd, d. Verhältniß $\varkappa = \frac{c_1}{c}$ sich auch gleich groß = dem schon bekannten Werthe $\varkappa = 1{,}41$ für atm. Luft sei.
Während nach d. obigen Gleichung d. Differenz:

$$c_1\delta - c\delta = 0{,}0691$$

für alle Gase gleich groß ist entsprechen jenen Gasen, für welche $\varkappa$ gleich groß ist, auch gleiche Einzelwerthe d. Produkte $c\delta$ und $c_1\delta$. Da δ dem spez. Gewicht (Gewicht pr. Volumeneinheit) eines Gases bei gleichem Druck und Temperatur proportional ist, so sind jene Produkte $c\delta$ und $c_1\delta$ den betreffenden spez. Wärmen d. Volumeneinheit verschiedener Gase bei gleichem Druck und Temperatur derselben proportional. Während also für alle Gase d. Differenz d. spez. Wärmen d. Volumeneinheit (b. gleichen Werthen von p u. t) beziehungsweise für constantes Volumen und für constanten Druck gleich groß ist, sind diese spez. Wärmen auch einzeln gleich groß für solche Gase, für welche $\varkappa$ denselben Werth hat, insbesondere also somit für d. oben genannten bis jetzt permanenten Gase. ——

Wie vorhin gesehen hat man nun d. Wärmegleichung auf diejenige d. Formen gebracht, welche sich besonders zur Anwendung auf Gase eignen. Aus dieser ist es nun möglich d. spez. innere Arbeitsmengen in einfacher Weise für ein Gas durch d. den Wärmezustand charakterisirenden Größen auszudrücken. Da man aber bekanntlich keinen Wärmezustand angeben kann, für welchen d. innere Arbeitsmenge = 0 ist, so kann man diese Größe immer nur bis auf eine constante Summande bestimmen, indem man nur den Unterschied d. Arbeitsmengen in 2 verschiedenen Wärmezuständen od. d. Änderung d. spez. inneren Arbeitsmenge beim Übergange von einem gegebenen Anfangszustande zu einem anderen Zustande angeben kann.
Um nun einen Ausdruck für diesen Unterschied od. d. Änderung d. inneren Arbeitsmenge zu bekommen, hat man d. allgemeine Wärmegleichung:

$$W dQ = dU + p\,dv$$

welche bekanntlich ausdrückt, wie eine große Wärmemenge d. Körper mitgetheilt werden muß, damit d. innere Arbeitsmenge sich um dU ändert und damit bei d. entsprechenden unendlich kleinen Zustandsänderung eine äußere Arbeit $= p\,dv$ verrichtet wird.
Insbesondere für ein Gas nimmt diese Wärmegleichung d. Form (Seite 82) an:

$$dQ = c\,d\vartheta + A\,p\,dv$$

welche Form sich dadurch begründet, daß d. Wärmezustand durch d. spez. Volumen v und durch d. absolute Temperatur ϑ dargestellt wird. Multiplicirt man diese Gleichung mit W, so bekommt man:

$$W dQ = Wc\,d\vartheta + p\,dv$$

indem bekanntlich $WA = 1$ ist mit $W = \frac{1}{A}$ (Seite 39) durch Integration beider Gleichungen bekommt man:

$$0 = dU - Wc\,d\vartheta \quad \text{od.:} \quad dU = Wc\,d\vartheta$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, weil c bzw. d. spec. Wärme eines Gases bei constantem Volumen für d. vorliegende Gas constant ist, ihr Verhalten unabhängig vom augenblicklichen Zustand d. Gases ist, und weil ferner wie erwähnt $d\vartheta$ und dt miteinander verknüpft werden können wegen $\vartheta = 273 + t$, daß d. Aenderung d. inneren Arbeitsvermögens eines Gases seiner Temperaturänderung proportional ist.

Bezeichnet man nun im Anfangszustand d. absolute Temperatur mit ϑ_1 und d. innere Arbeitsvermögen mit U_1, so erhält man durch Integration d. obigen Gleichung:

$$U - U_1 = Wc(\vartheta - \vartheta_1)$$

od. da mit Rücksicht auf d. Zustandsgleichung eines Gases:

$\vartheta = \frac{pv}{R}$ und entsprechend $\vartheta_1 = \frac{p_1 v_1}{R}$ unter p_1 und v_1 die dem Anfangszustand entsprechenden Werthe von v u. p verstanden, und wenn man ferner noch $W = \frac{1}{A}$ setzt:

$$U - U_1 = \frac{c}{AR}(pv - p_1 v_1)$$

od. weil $AR = c_1 - c$ und für $\frac{c_1}{c} = n$ gesetzt, wenn man Zähler und Nenner durch c dividirt:

$$U - U_1 = \frac{pv - p_1 v_1}{n-1}$$

= d. Unterschied d. inneren Arbeitsvermögens im End- und Anfangszustand d. Zustandsänderung.

Wir wollen nun zu besonderen Arten von Zustandsänderungen von Gasen übergehen, welche bei den technischen Anwendungen von Wichtigkeit sind.

Die wichtigsten dieser besonderen Arten von Zustandsänderungen lassen sich gemeinsam zusammenfassen unter d. ziemlich allgemeinen Voraussetzung, daß d. Zustandsänderung in einer solchen Weise erfolge, daß während derselben d. Pressung p immer proportional bleibt einer gewissen Potenz d. spec. Volumens. Es ist also, wenn m und C Constanten bedeuten, d. Zustandsgleichung, welche d. Gesetz d. gleichzeitigen Aenderung von v u. p angibt, d. Form hat:

I .... $p \cdot v^m = C$

Zunächst bemüht man sich nun d. Gestalt d. Zustandscurve zu ermitteln d.h. d. Charakter der Zustandscurve, welche d. Gesetz d. Zustandsänderung geometrisch darstellt, festzustellen.

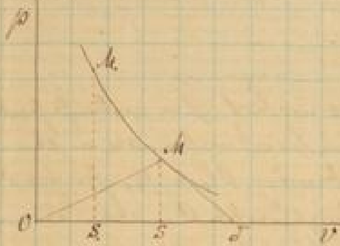
Zu dem Ende muß d. obige Zustandsgleichung differentiirt; man bekommt:

$$v^m\,dp + p\,m\,v^{m-1}\,dv = 0$$

Entwickelt man hieraus $\frac{dp}{dv}$, welcher Quotient bekanntlich d. tang. d. Winkels ist, welchen d. Tangente an d. Punkte (v, p) d. Zustandscurve mit d. v Achse bildet, so erhält sich:

II .... $\frac{dp}{dv} = -m\frac{p}{v}$

Setzt man nun in d. Zustandsgleichung $pv^m = C$, unter d. Voraussetzung daß d. Constanten m u. C endliche Werthe haben, $v = 0$, so wird nach Gl. I. $p = \infty$ und also auch nach Gl. II: $\frac{dp}{dv} = \infty$, es sind also $v = 0$, $p = \infty$ und $\frac{dp}{dv} = \infty$ zusammengehörende Werthe und aber nach d. analytischen Geometrie bekanntlich gleichbedeutend ist mit dem Umstand, daß d. Zustandscurve d. p Achse zur Asymptote hat.



Für $v = \infty$ ist nun zufolge auch Gl. I, wenn unter Berücksichtigung, daß m einen endlichen Werth hat: $p = 0$ und nach Gl. II $\frac{dp}{dv} = 0$. Also sind auch $v = \infty$, $p = 0$ und $\frac{dp}{dv} = 0$ zusammengehörige Werthe, entsprechend einem asymptotischen Anschmiegen d. Zustandscurve an d. v Achse.

D. allgemeine Charakter d. Zustandscurve, welche d. Zustandsgleichung: $pv^m = C$ entspricht, ist der, daß dieselbe sich asymptotisch den beiden Coordinatenaxen nähert.

Ist nun $S\vartheta = s$ d. Subtangente für den beliebigen Punkt M d. Zustandscurve mit d. Coordinaten $OS = v$ und $SM = p$, so ist für dieselben:

$$\frac{dp}{dv} = \div \frac{p}{s} \quad \text{also mit Rücksicht auf} \quad \frac{dp}{dv} = \div m \frac{p}{v}$$

$$\text{ist: } m = \frac{v}{s} = \frac{OS}{S\vartheta}$$

Ist p_1 d. Pressung und ϑ_1 d. absolute Temperatur, welche d. specifischen Volumen v_1 (mit $OS_1 = v_1$ dem Punkte M_1 d. Zustandscurve) entspricht, so ist, da in jedem Zustande d. Gleichung $pv^m = \text{const. } C$ stattfinden soll, auch:

$$p v^m = v_1^m p_1 \quad \text{und daraus also:}$$

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^m$$ d. h. in 2 verschiedenen, übrigens beliebigen Zuständen verhalten sich d. Pressungen umgekehrt wie d. $m$ten Potenzen d. spec. Volumen oder umgekehrt wie ... spec. Volumen selbst.

Ferner ist nach d. allgemeinen Zustandsgleichung d. Gase: $pv = R\vartheta$ und also auch: III

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1} = \frac{pv}{p_1 v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^m \frac{v}{v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1} = \frac{p}{p_1}\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}.$$

Die Expansionsarbeit E welche von 1 kg d. Gases beim Uebergange aus d. Zustand $M_1 (v_1\, p_1\, \vartheta_1)$ in den Zustand $M (v\, p\, \vartheta)$ verrichtet wird, ist nach d. allgemeinen Formel:

$$E = S_1 M_1 M S = \int_{v_1}^{v} p\,dv = p_1 v_1^m \int_{v_1}^{v} \frac{dv}{v^m}$$

$$\text{od. } E = \frac{p_1 v_1^m}{m-1}\left(\frac{1}{v_1^{m-1}} - \frac{1}{v^{m-1}}\right) = \frac{p_1 v_1}{m-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}\right] \quad \ldots\ldots \quad \text{IV}$$

Vermittelst d. Gleichungen III kann sie nun auch statt durch v durch p od. ϑ unter Bezug d. mit d. Anfangszustand M_1 gegebenen Größen ausgedrückt werden.

D. spec. Wärme, welche als Function von m hiermit zu bezeichnen ist, ist mit Rücksicht auf d. Gleichung Seite 62: $dQ = c\,d\vartheta + Ap\,dv = c\,d\vartheta + \frac{AR\vartheta}{v}dv$ und mit Rücksicht auf d. Zustandsgleichung $pv = R\vartheta$:

$$\mu = \frac{dQ}{d\vartheta} = c + Ap\frac{dv}{d\vartheta} = c + AR\frac{p\,dv}{d(p v)}$$

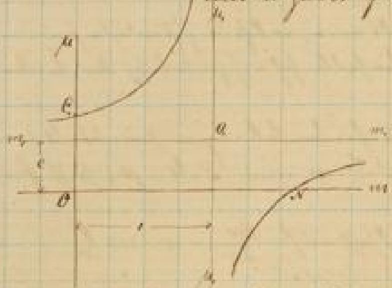
od. da: $c_p - c = AR$ und $\frac{c_p}{c} = n$ also $AR = c(n-1)$ ist und ferner: $d(p.v) = p\,dv + v\,dp$ ist, folgt:

$$\mu = c + \frac{c(n-1)\,p\,dv}{p\,dv + v\,dp} = c + \frac{c(n-1)}{1 + \frac{v\,dp}{p\,dv}}$$

oder endlich nach Gl. II:

V. .... $\mu = \left(1 + \frac{n-1}{1-m}\right) c = \frac{m-n}{m-1}\, c$

Diese spec. Wärme ist positiv für $m < 1$ od. $m > n$
und negativ für $1 < m < n$



Das Gesetz, nach welchem sich μ mit m ändert, ist in nebenstehender Figur durch d. Curve dargestellt, deren Coordinaten m u. μ sind; hiebei wurde d. μ Axe in d. Entfernung $OC_1 = c_1$, die Axe d. m in d. Entfernung $ON = n$ vom Anfangspunkt O. Die Curve ist eine gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten $M_1 m_1$ in d. Entfernung $= 1$ von $O\mu$ und $\mu_1 \mu_1$ in d. Entfernung $= 1$ von Om, denn mit $m = m_1 + 1$ und $\mu = \mu_1 + c$ wird ihre Gleichung für d. Axen $O_1 m_1$ und $O_1 \mu_1$:

$$m_1 \mu_1 = -(n-1)c = -(c_1 - c)$$

Wir schließen d. positive od. negative Wärme, welche d. Gase pro 1kg beim Übergange aus dem Zustand M_1 in den Zustand M mitgetheilt werden muß, aus der bekannten Formel:

VI. .... $Q = \mu(\vartheta - \vartheta_1)$

wenn man den Gleichungen III auch d. Werth v u. p ersetzen kann.

Wegen:

$$\vartheta - \vartheta_1 = -\vartheta_1\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}\right] = -\frac{p_1 v_1}{R} \cdot \frac{m-1}{p_1 v_1} \cdot L$$

$$= -\frac{m-1}{AR} \cdot AL = -\frac{m-1}{c(n-1)}\, AL = -\frac{m-n}{\mu(n-1)}\, AL$$

ist auch:

VII .... $Q = \frac{n-m}{n-1}\, AL$

also Q und zugleich d. entsprechenden Zeichen wie L, jenachdem $m < n$ od. $m > n$ ist.

Eine Zustandsänderung nach dem Gesetze $pv^m = \text{Const.}$ kann im Allgemeinen, zumal wenn stets nur [illegible] von m, vorausgesetzt werden, wenn d. Zustandscurve od. das Gesetz d. Wärmemittheilung nicht gegeben sind, sondern nach Beobachtungen abgeleitet werden müssen. Läßt sich aus denselben mit Hilfe d. Gleichungen III und IV d. Werth von m bestimmen, so ergibt sich d. Gesetz d. Wärmemittheilung aus Gleichg. V und VI; [illegible] Formel $pv^m = \text{Const.}$, indem m eine Constante annehmen, [illegible] erkennen.

Diese allgemeinen Formeln können nun benutzt werden um d. entsprechenden Werthe für verschiedene besondere Zustandsänderungen zu ermitteln, als spezielle Fälle [illegible] bekannt, [illegible] m ~~und n~~ in speziellen Werthe beilegt.

1) Angenommen es sei $m = 0$
dann ist $v^m = v^0 = 1$ und also d. Zustandsgleichung:
$pv^0 = p = C$ unter C eine Constante verstanden.

Man erhält damit also d. Zustandsänderung bei constanter Spannung p; die entsprechende Zustandscurve ist parallel mit d. v Axe gerichtete Gerade um d. Constante C von d. v Axe entfernt.

Mit $m = 0$ wird d. spec. Wärme: $\mu = \frac{-n}{-1}\, c$ oder da bekanntlich $n = \frac{c_1}{c}$
$\mu = c_1$ wie es auch zu erwarten war, indem c_1 eben d. spec. Wärme bei constanter Spannung bedeutet.

bei d. Erwärmung ausdehnt, so handelt es sich nur noch um d. Beziehung zwischen d. Temperatur und ihren Volumina in verschiedenen Zuständen. Diese Beziehungen sind gegeben durch die aus Gleich. III hervorgeht (mit $p = p_0$) ferner:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{v}{v_0}$$

Für d. Expansionsarbeit $\mathcal{E}$ erhält man den Wert mit $p = p_0$ und $m = 0$:

$$\mathcal{E} = p(v - v_0)$$

2) Es sei ferner $m = 1$; dann geht d. Zustandsgleichung über in:

$$p v = \text{const.}$$

Gemäß d. allgemeinen Zustandsgleichung d. Gase: $pv = R\vartheta$, wenn R für ein und dasselbe Gas constant ist, besagt diese Gleichung offenbar darauf hinaus, daß $\vartheta = \text{const.}$ ist, d.h.: daß d. Zustandsänderung bei constanter Temperatur erfolgt und daß d. Zustandscurve eine isothermische Curve wird und zwar ist diese isothermische eine gleichseitige Hyperbel wegen ihrer Gleichungsform: $pv = \text{Const.}$

Ferner ist in diesem Falle:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{v_0}{v},$$

und d. spez. Wärme $\mu = \infty$ weil $m - 1 = 0$ also d. Bruch $= \infty$ wird.

Für die Expansionsarbeit $\mathcal{E}$ ergibt sich mit $m = 1$ aus Gleich. IIII ein unbestimmter Ausdruck, nämlich $\mathcal{E} = \frac{p_0 v_0}{0}(1 - 1) = p_0 v_0 \frac{0}{0}$

Indessen läßt sich $\mathcal{E}$ direkt leicht bestimmen mit dem allgemeinen Ausdruck für d. Expansionsarbeit, nämlich: $\mathcal{E} = \int p\,dv$.

Setzen wir für p seinen durch Gleich. III bestimmten Wert, und schreiben wir d. constanten Größen $p_0 v_0$ vor d. Integral, so erhalten wir:

$$\mathcal{E} = p_0 v_0 \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = p_0 v_0 \, l\left(\frac{v}{v_0}\right)$$ wobei l d. natürlichen Logarithmus vorstellt.

Bei diesen isothermischen Curven ist bei Gasen d. isodynamische Curve identisch, indem für ein Gas bekanntlich d. Formel für d. spez. Änderung d. inneren Arbeitsvermögens

$$dU = W_c \, d\vartheta$$

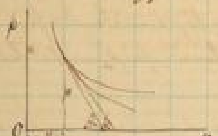
und, da nur Wärme ϑ constant sind, somit mit $d\vartheta = 0$ auch $dU = 0$ ist.

3) Für $m = n = \frac{c_p}{c}$ wird:

d. spez. Wärme: $\mu = 0$ und d. Zustandsgleichung: $p v^n = \text{Const.}$

und ferner auch natürlich: $dQ = 0$.

In diesem Falle geht also d. Zustandsänderung ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme also nach einer adiabatischen Curve vor sich, deren Gleich. $pv^n = \text{Const.}$ ist. Durch denselben Punkt (v, p) aus



verläuft sich dieselbe, immer asymptotisch sich annähernd an d. Axen, mit größerem Gefälle d. v Axe als d. isothermische Curve; es ist nämlich für d. spitzen Winkel, welchen d. erstere und für diejenige, welchen d. letztere in demselben Punkte mit d. v Axe bildet, für ferner Gleich. II:

$$tg\, \varphi_n = n\, tg\, \varphi_0$$ wenn n ein unechter Bruch $= \frac{c_p}{c}$ ist;

offenbar $tg\, \varphi_n > tg\, \varphi_0$ w. z. b. w.

Mit $m = n$ hat man weiter:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^n \qquad \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

und $$\mathcal{E} = \frac{p_0 v_0}{n-1}\left(1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^{n-1}\right)$$

Fall 4) für $m = \infty$ [illegible]:

[illegible] $pv^m = C$ [illegible] $p^{\frac{1}{m}} v = \sqrt[m]{C} =$ Const., [illegible]

$m = \infty$ [illegible]: $p^0 v =$ Const also $v =$ const. [illegible]

[illegible] v.

[illegible]: $\frac{p}{t} = C$

[illegible] v [illegible]:

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{p}{p_1}$$

[illegible] $= 0$, [illegible]

[illegible] $n = \frac{c_p}{c_v}$ [illegible]

[illegible] $n = \frac{c_p}{c_v}$ [illegible]:

[illegible] $= p_1$ [illegible] δ_1 [illegible] $= p_2$ [illegible] δ_2 [illegible] Fall 3) [illegible]:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{n}}$$

[illegible] δ_1, [illegible] p_3 [illegible] Fall 4):

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{p_3}{p_2}$$

[illegible]:

$$1 = \frac{p_3}{p_2}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \frac{p_3}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

od: $\frac{p_1}{p_3} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}}$ und folgt:

$$n = \frac{\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\log\left(\frac{p_1}{p_3}\right)} = \frac{\log p_1 - \log p_2}{\log p_1 - \log p_3}$$

[illegible] $n = \frac{c_p}{c_v}$ [illegible] n [illegible]

Verhalten d. Körper beim Uebergange aus d. festen in d. flüssige Aggregatform.

Wenn ein fester Körper in d. Änderung seiner Aggregatform begriffen ist, also wenn ein fester Körper im Schmelzen und ebenso wenn ein flüssiger in d. Erstarrung begriffen ist, so befindet er sich in einem Grenzzustand, welcher durch d. Pressung allein od. durch d. Temperatur allein vollkommen bestimmt ist. Sind also für einen solchen Grenzzustand p u. t zusammengehörende Werthe von Pressung und Temperatur in einem gewissen Augenblick und $p + dp$, $t + dt$ zusammengehörende Werthe in einem andern Augenblick d. Grenzzustandes, so findet zwischen dp und dt eine bestimmte Beziehung statt, indem Pressung und Temperatur sich gegenseitig bedingen. Um nun diese Beziehung zwischen d. gleichzeitigen Änderungen von Pressung und Temperatur zu bestimmen, sei: $y : (1-y)$ d. Gewichtsverhältniss d. flüssigen und festen Theile in irgend einem Augenblick und zwar y d. Gewichtsmenge d. flüssigen Bestandtheile, also $1-y$ d. Gewichtsmenge d. festen Bestandtheile in 1 kgr d. Gemisches von Körper gleicher Art aber verschiedener Aggregatform; es sei ferner w d. spec. Volumen d. im Schmelzen begriffenen Körpers in d. festen und $w + \Delta$ d. spec. Volumen desselben in d. flüssigen Aggregatform. Es ist also offenbar in dem betreffenden Augenblick d. entsprechend mittlere spec. Volumen v d. Gemisches:

$$v = (1-y)\,w + y\,(w+\Delta) = w + y\Delta.$$

Angenommen nun 1 kgr eines solchen ~~Gemisches~~ Körpers sei bei constanter Temperatur t u. d. entsprechender Pressung p in d. Schmelzung begriffen. Dann sind w und Δ vollkommen bestimmt durch p od. durch t. Bei constanten Werthen von t und p sind also auch w und Δ constant und d. ändert sich bei diesem Vorgange nur d. mittlere spec. Volumen zunehmend entsprechend um dv und y. Für eine unendlich kleine Zustandsänderung entsprechend einem unendlich kl. Schmelzungsprocess bei constanten Werthen von p u. t gilt also d. folgende Gleichung:

$$dv = \Delta\,dy$$

Nach d. allgemeinen Form d. Wärmegleichung Seite 89 ist nun d. Wärmemenge dQ, welche d. Körper bei dieser unendlich kl. Zustandsänderung mitzutheilen ist:

$$dQ = c_v\,d\vartheta + A\vartheta\frac{dp}{d\vartheta}\,dv$$

od. da man bekanntlich $d\vartheta$ und dt wechselseitig miteinander vertauschen darf:

$$dQ = c_v\,d\vartheta + A\vartheta\frac{dp}{dt}\,dv$$

Im vorliegenden Fall soll sich d. Zustandsänderung bei constanter Temperatur t stattfinden, es ist also auch $d\vartheta = 0$ und dem entsprechend, wenn man noch statt $\frac{dp}{dt}$ nun $\frac{dp}{dt}$ setzt:

$$dQ = A\vartheta\frac{dp}{dt}\,dv \qquad \text{od. mit } dv = \Delta\,dy$$

$$dQ = A\vartheta\Delta\frac{dp}{dt}\,dy$$

Ist nun mit r d. sog. spec. Schmelzwärme bezeichnet d. diejenige Wärmemenge, welche zur Schmelzung von 1 kgr d. Körpers bei d. Temperatur t u. d. entsprechenden Pressung p erforderlich ist, die Wärmemenge dQ also welche zum Schmelzen von dy kgr erforderlich ist:

$$dQ = r\,dy$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke für dQ einander gleich, so bekommt man:

$$\frac{dp}{dt} = \underline{A\vartheta\Delta} \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - -} \quad Q$$

= allgemeines Gesetz, nach welchem sich d. Temperatur und Pressung für einen solchen Process d. Uebergangs von d. festen in d. flüssige Aggregatform wiederum gegenseitig bedingt.

Offenbar gilt diese Gleichung $\mathfrak{A}$ allgemein für den Grenzzustand d. Übergangs aus einem in einen andern Aggregatzustand und also auch kann man diese Gleichung in d. Folge für den Übergang aus d. flüssigen in d. dampfförmigen Gebrauch genommen werden, wenn wir Δ und r d. entsprechend modificierten Bedeutungen beizulegen haben.

Zu erwähnen ist noch, daß, wie schon früher bei d. [illegible] d. Prinzips d. [illegible] d. [illegible] [illegible] wurde, sobald d. Schmelzung bei constanter Temperatur stets mit Wärmeaufnahme [illegible] [illegible] verbunden ist, die Allgemeingültigkeit [illegible] [illegible] und [illegible] d. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] eines positiven od. negativen Werthes [illegible] $\frac{dt}{dp}$ [illegible], je nachdem d. spec. Volumen beim Schmelzen [illegible] [illegible]. Beim [illegible] einer Flüssigkeit ist also $\frac{dt}{dp}$ immer positiv.

Diese Gleichung [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] d. Gleichung $\mathfrak{A}$ [illegible], [illegible] A u. r [illegible] [illegible] Größen sind, [illegible] $\frac{dt}{dp}$ $\pm$ [illegible] Δ $\pm$ [illegible]. Δ bedeutet aber, [illegible] allgemein bezogen, d. Unterschied d. spec. Volumens d. flüssigen resp. luftförmigen Aggregatzustands über d. spec. Volumen d. festen resp. flüssigen Aggregatzustands derselben Körper. Z. B. ist beim Schmelzen [illegible] Δ negativ, indem d. Volumen d. Wassers bei 0° kleiner ist als d. Volumen d. Eises bei 0°; dementsprechend ist auch [illegible] [illegible] [illegible] $\frac{dt}{dp}$ negativ.

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Δ beim [illegible] von Flüssigkeiten immer positiv, [illegible] d. spec. Volumen zunimmt, also ist bei diesem Vorgange auch d. Differentialquotient $\frac{dt}{dp}$ immer positiv.

Wie eben erwähnt ist $\frac{dt}{dp}$ für [illegible] [illegible] d. [illegible] [illegible] auch für [illegible] Wasser immer negativ; dieses [illegible] [illegible] [illegible] d. [illegible] [illegible], daß d. Schmelzpunkt d. Eises od. d. Gefrierpunkt d. Wassers mit wachsendem Druck [illegible] [illegible] und zwar fand Thomson mit einer Reihe [illegible] Versuche, daß dieses [illegible] d. Schmelzpunktes d. Eises um je $0{,}0075^\circ C$ [illegible] [illegible] bei einer Druckzunahme von 1 Atm. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

$$\frac{dt}{dp} = \div\, 0{,}0075$$

Zu demselben Resultate kommt man auch mit Hülfe d. Formel $\mathfrak{A}$. [illegible] [illegible] d. Schmelzwärme d. Eises [illegible] [illegible] [illegible] Atm. Druck:

$$r = 79 \text{ Cal.}$$

[illegible] kennt man auch d. Dichtigkeit d. Eises bei 0° also auch d. spec. Volumen d. Eises [illegible] d. Volumen von 1 kgr [illegible] Cubm [illegible]:

$$w = 0{,}001087$$

[illegible] beträgt d. spec. Volumen d. Wassers bei $0^\circ C$:

$$w + \Delta = 0{,}001000$$

[illegible] genommen ist $0{,}001000$ = d. spec. Volumen bei $4^\circ C$ als dem Zustand d. größten Dichtigkeit, während bei 0° d. spec. Volumen [illegible] [illegible] etwas zugenommen hat. [illegible] ist diese Zunahme so gering, daß [illegible] erst auf d. [illegible] Decimalstelle einen Einfluß haben würde. [illegible] Werth kann also bis auf 6 Decimalstellen genau für d. spec. Volumen d. Wassers bei 0° gelten.

[illegible] ist also:

$$\Delta = \div\, 0{,}000087$$

Diese Werthe in Formel $\mathfrak{A}$ eingesetzt giebt mit $A = \frac{1}{424}$ und wenn man p in Atm. statt in kgr pr. □m ausdrückt also d. Formel noch mit 10 333 multiplicirt, entsprechend d. [illegible], daß 10333 kgr pr. □m = 1 Atm. sind, so erhält man:

$$\frac{dt}{dp} = \div\, \frac{10333 \cdot 273 \cdot 0{,}000087}{424 \cdot 79} = \div\, 0{,}00733$$

also in sehr guter Übereinstimmung mit dem durch Versuche von Thomson [illegible] [illegible] Werthe $\frac{dt}{dp} = \div\, 0{,}0075$.

Wie schon oben erwähnt gilt d. Gleichung $\mathfrak{A}$ nicht nur für schmelzende Körper sondern auch für verdampfende Flüssigkeiten, nur versteht man dann unter Δ d. Unterschied d. spec. Volumen d. luftförmigen über d. flüssigen Aggregatzustand und unter r d. spec. Verdampfungswärme [illegible] d. Wärmemenge welche zum Verdampfen von 1 kgr d. Flüssigkeit bei constanter Temperatur und Druck erfordert wird.

Von besonderer Wichtigkeit in den technischen Anwendungen ist nun das:

Verhalten der Dämpfe
insbesondere des Wasserdampfs.

Unter Dampf versteht man bekanntlich einen luftförmigen Körper, welcher durch Wärmeentziehung flüssig gemacht und umgekehrt durch Wärmemittheilung aus Flüssigkeiten gebildet werden kann. Hinsichtlich d. Verhaltens d. Dämpfe und Gase müssen nun wesentliche Unterschiede angestellt werden:

Erfahrungsgemäß kann nämlich ein bestimmter Raum bei einer gewissen Temperatur von einem gewissen Dampf stets nur eine bestimmte Menge aufnehmen, wobei aber noch gleichzeitig andere luftförmige Körper in dem Raum enthalten sein können, ohne d. Quantität desselben für einen jeden Dampf durch ihre Gegenwart zu beeinflussen. Wenn ein solcher Raum mit Dampf gesättigt ist, so nennt man den Dampf selbst gesättigten Dampf. Der Zustand d. gesättigten Dampfes ist also ein Grenzzustand bezüglich auf den Übergang von d. Luftform in d. flüssige Aggregatform. Das spez. Gewicht d. gesättigten Dampfes $\gamma = \frac{1}{v}$ und seine Spannung p sind Maximalwerthe für d. betreffende Temperatur t, oder umgekehrt t ein Minimalwerth für d. betreffende γ und p. Mit Rücksicht hierauf sind also durch eines d. 3 Elemente $p\,\gamma\,t$ d. beiden anderen bestimmt unter d. Voraussetzung d. gesättigten Dampfes.

Im Gegensatz zum gesättigten Wasserdampf versteht man unter überhitztem Dampf einen solchen, für welchen d. Temperatur t größer ist als für gesättigten Dampf bei denselben γ od. p, od. für welchen γ und p kleiner sind als für gesättigten Dampf bei derselben Temperatur t. Bei einem solchen überhitzten Dampf ist ebenso wie bei Gasen und wie im Allgemeinen für jede Zustandsform eines Körpers, nur durch 2 d. Elemente $\gamma\,p\,t$ od. $v\,p\,t$ das dritte bestimmt.

Wenn bei einem überhitzten Dampf bei unveränderlichem spez. Gewicht γ und unveränderter Spannung p die Temperatur t immer mehr und mehr wächst, od. umgekehrt bei constanter Temperatur t d. Werthe γ und p mehr und mehr abnehmen, so nähert d. Zustand d. überhitzten Dampfes sich einem anderen Grenzzustand, nämlich d. Zustand eines Gases, welcher charakterisirt ist durch d. Zustandsgleichung $pv = \text{Const.}\,T$. Der Zustand d. gesättigten Dampfes und d. Gases sind also für d. Zustand d. Dampfes Grenzzustände, zwischen welchen d. verschiedenartigsten Zustände überhitzter Dämpfe liegen.

Nachdem d. Gaszustand im Vorhergehenden näher betrachtet wurde, so ist nun auch d. Grenzzustand d. gesättigten Dampfes näher zu untersuchen, um dann zur Betrachtung d. dazwischen liegenden Zustände überhitzten Dampfes überzugehen, zumal da auch meistens bei den technischen Anwendungen d. Dampfes, derselbe meistens im Zustand d. Gesättigtseins angewendet wird.

Offenbar wird nun ein Dampf nur dann gesättigt sein, wenn er im Beharrungszustand od. bei einer stetigen Zustandsänderung (Änderung d. Wärmezustands) mit Flüssigkeit derselben Art vermischt oder überhaupt mit in Berührung ist. Bei den speziellen Untersuchungen, welche d. Annahme od. Forderung, daß d. Dampf bei seinen Zustandsänderungen beständig gesättigt bleiben soll, bedingen, muß man daher im Allgemeinen ein solches Gemisch von Dampf und gleichartiger Flüssigkeit od. d. Berührung mit derselben Flüssigkeit voraussetzen.

Wenn bei einem solchen Gemisch von Flüssigkeit mit gleichartigem Dampf, also in einem gesättigten Dampf enthalten ist, w d. spez. Volumen d. Flüssigkeit und Δ d. Unterschied d. spez. Volumens d. Dampfes über d. spez. Volumen d. gleichartigen Flüssigkeit bedeutet, so ist bekanntlich, wenn man unter v d. spez. Volumen d. Gemisches und zwar d. mittlere spez. Volumen im Falle eines inhomogenen Gemisches:

$$v = w + y\Delta$$

unter y d. Gewichtsmenge Dampf verstanden, welche in 1 Kgr d. Gemisches enthalten ist. In dieser Gleichung sind w und Δ solche Größen, welche sich auf den Grenzzustand d. Flüssigkeit hinsichtlich ihrer Umwandlung in d. Luftform od. umgekehrt beziehen, welche also vollkommen bestimmt werden durch d. sich gegenseitig bedingenden Größen p und t, also vollkommen bestimmt sind durch p allein od. durch t allein. Die obige Gleichung stellt demnach unbedingt eine Beziehung zwischen $v\,p\,y$ od. eine Beziehung zwischen $v\ t$ und y etc. Diese Gleichung zwischen $p\ t\ y$ und $v\ p\ y$ soll nun in der Folge der Zustandsgleichung der Gemische im Dampf und Flüssigkeit [illegible] gemacht werden.

Was nun die Eigenschaften und namentlich die Aufstellung des gesättigten Dampfes betrifft, so müssen wir diese zu erkennen die Beziehung $\frac{dt}{dp}$ kennen, wozu aber erst die Größe [illegible] bekannt vorausgesetzt werden muss. Diese Beziehung zwischen p und t bei gesättigtem Dampf kann man nur durch Versuche bestimmen. In ausführlicher Weise sind diese Versuche während der letzten 20 Jahre durch [illegible] ausgeführt; [illegible] Untersuchungen von Regnault und speziell für gesättigten Wasserdampf auch von Magnus in Berlin ausgeführt worden, dessen Resultate sich mit denen von Regnault gefundenen in befriedigender Übereinstimmung befinden. Unmittelbar aus diesen Versuchen ergeben sich nur unregelmäßig aufeinanderfolgende Werthe von p und t. Um nun aber die gegenseitige Abhängigkeit der Größen p und t möglichst darzustellen in Form von Tabellen mit regelmäßig aufeinanderfolgenden Werthen, wird durch empirische Formeln seitens Forscher entsprechende Formeln gesucht.

Regnault legte eine solche zu Grunde, welche nur für verschiedene Temperaturintervalle gilt, indem für jedes andere Temperaturintervall die Constanten Coefficienten geändert werden. Die allgemeine Form ist die folgende:

I. $$\lg p = C + a\alpha^{t-t_0} + b\beta^{t-t_0}$$

worin $\lg$ einen gewöhnlichen Logarithmus für die Basis 10 und p die Spannung in mm Quecksilbersäule bedeutet, welche durch Division mit 760 die Spannung in Atmosphären ergeben wird, während letztere durch Multiplication mit 10333 die Spannung in kg pro qm liefert. Für die einzelnen Temperaturintervalle, für welche die Formel durch entsprechende Werthe der Constanten $C\ a\ b\ \alpha\ \beta$ den Versuchen angepasst werden soll und worin t eine beliebige Temperatur des Temperaturintervalls bedeutet. Um nun die Ausrechnung der Werthe der Constanten $C\ a\ b\ \alpha\ \beta$ aus den Versuchen zu bewerkstelligen, verfuhr Regnault folgendermaßen:

Die durch die Versuche gefundenen zusammengehörigen Werthe von p und t wurden als Ordinaten und Abscissen in möglichst großem Maßstabe aufgetragen und die betreffenden Punkte durch eine möglichst anschließende stetige Curve verbunden. Das Temperaturintervall $t_4 - t_0$, für welches die 5 Constanten bestimmt werden sollten, wurde in 4 gleiche Theile getheilt, so dass:

$$\Delta t = t_4 - t_3 = t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = t_1 - t_0$$

Damit konnten nun mit der Zeichnung zu den als Abscissen dargestellten Temperaturen $t_0\ t_1\ t_2\ t_3\ t_4$ die entsprechenden als Ordinaten dargestellten Spannungen $p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ p_4$ abgegriffen werden. Bezeichnet man nun die Größen:

$$\alpha^{\Delta t} = x \quad \text{und} \quad \beta^{\Delta t} = y$$

so hat man mit Rücksicht auf die obige Formel:

für $t = t_0$ also $t - t_0 = 0$:	$\lg p_0 = C + a + b$
für $t = t_1$ also $t - t_0 = \Delta t$	$\lg p_1 = C + ax + by$
" $t = t_2$ also $t - t_0 = 2\Delta t$	$\lg p_2 = C + ax^2 + by^2$
$t = t_3$ " $t - t_0 = 3\Delta t$	$\lg p_3 = C + ax^3 + by^3$
$t = t_4$ " $t - t_0 = 4\Delta t$	$\lg p_4 = C + ax^4 + by^4$

Auf diese Weise hat man 5 Gleichungen bekommen zur Bestimmung der 5 Constanten $C\ a\ b\ x\ y$ für das vorliegende Temperaturintervall; durch x und y sind dann aber auch die beiden übrigen Constanten α und β bestimmt.

Für den Gebrauch dieser Formel ist es aber bequemer dieselbe in eine etwas andere Form zu bringen: Es ist nämlich bekanntlich:

$$\lg(a\alpha^{t-t_0}) = \lg a + (t-t_0)\lg\alpha$$

also $a\alpha^{t-t_0} = \text{num}\lg(a_1 + \alpha_1 t)$ unter a_1 und α_1 der ersten Gleichung entsprechende Constanten verstanden. Ebenso kann man auch das letzte Glied der obigen Formel umschreiben und dadurch dieselbe in folgender von Zeuner angegebenen Form darstellen:

$$\lg p = C \pm \text{num}\lg(a' + \alpha' t) \pm \text{num}\lg(b' + \beta' t)$$

Für gesättigten Wasserdampf hat man den Regnault'schen Versuchen entsprechend in dieser Weise folgende Formeln abgeleitet, welche für d. Grenzen 0 – 100° und 100 – 200° gelten, nämlich:

Für $t = 0$ bis $100°$ ist: $\lg p = 4{,}739371 - \text{num}\lg(0{,}611741 - 0{,}00327446\,t)$
$+ \text{num}\lg(-1{,}868009 + 0{,}00686494\,t)$

Für $t = 100°$ bis $200°$: $\lg p = 6{,}264035 - \text{num}\lg(0{,}659312 - 0{,}00165614\,t)$
$- \text{num}\lg(0{,}020760 - 0{,}00595071\,t)$

Die nach diesen Formeln berechneten Werthe von p bekommt man ausgedrückt in mm Quecksilbersäule; durch Dividiren mit 760 (da 760 mm Quecksilbersäule = 1 Atm entsprechen) bekommt man dann p in Atm und aus diesen Werthen durch Multiplication mit 10333 p in kgr pr qm ausgedrückt, indem 10333 kgr pr. qm = 1 Atm entsprechen.

Nachdem nun solche empirische Formeln gefunden sind, welche d. Zusammenhang zwischen p u. t für gesättigte Dämpfe bestimmen, können diese nun weiter dazu dienen d. zusammengehörenden Werthe von p u. t in einer Tabelle zusammenzustellen (siehe Grashof's Wärmetheorie §26)

Für die weiteren Untersuchungen ist es indessen nicht nur wichtig d. Zusammenhang zwischen p u. t für gesättigte Dämpfe in analytischer Form zu kennen, sondern es ist auch wichtig d. Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ als Function von p u. t auszudrücken. Dies kann nun in folgender Weise geschehen:

Bekanntlich ist, wenn ln d. natürlichen Logarithmus und lg d. briggischen Logarithmus bezeichnet:

$$\ln p = k \log p$$

unter k verstanden: $k = \ln 10 = 2{,}302585$

Multiplicirt man also d. von Regnault zuerst aufgestellte Gleichung I mit k, so bekommt man:

$$\ln p = kC + ka\alpha^{t-t_0} + kb\beta^{t-t_0}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung in Bezug auf t bekommt man:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = ka.\ln\alpha.\,\alpha^{t-t_0} + kb.\ln\beta.\,\beta^{t-t_0}$$

oder da $\ln\alpha = k\lg\alpha$ und $\ln\beta = k\lg\beta$:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt} = k^2 a\lg\alpha.\,\alpha^{t-t_0} + k^2 b\lg\beta.\,\beta^{t-t_0}$$

Nach den Versuchsresultaten kann man nun d. Constanten $a\,b\,\alpha\,\beta$ als bekannt ansehen und kann nun setzen:

$$k^2 a\lg\alpha = m \quad\text{und}\quad k^2 b\lg\beta = n$$

wo d. Constanten m und n entsprechend d. Werthen von $a\,b\,\alpha\,\beta$ und $k = 2{,}302585$ berechnet werden können, man hat also nun:

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dt} = m.\,\alpha^{t-t_0} + n\beta^{t-t_0}$$

Für den Gebrauch ist es indessen bequemer, d. Logarithmen d. beiden Glieder auf d. rechten Seite als lineare Functionen von t zu berechnen, analog dem was für d. empirische Formel zwischen p u. t gesagt wurde. Offenbar ist es ganz einerlei in welcher Einheit p ausgedrückt ist zur Berechnung von $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$. Natürlich kann man auch diese Formel entsprechend d. den bestimmten Temperaturen entsprechenden Werthe von $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$ in einer Tabelle zusammenstellen, wie solche in Grashof's Wärmetheorie §26 angegeben ist.

Bei den technischen Anwendungen wird d. Zustand gesättigter Wasserdämpfe ist aber vorzugsweise nicht durch seine Temperatur charakterisirt sondern durch seine Spannung, oder wie man zu ... als gleichbedeutend zu sagen pflegt durch seine Spannung od. durch seinen Druck, welche durch Manometer gemessen also leicht beobachtet werden kann. Aus diesem Grunde ist es auch bequemer für d. technischen Anwendungen d. betreffenden Tabellen so anzuordnen, daß dieselben d. zu regelmäßig wachsenden Werthen von p gehörigen Temperaturen t d. gesättigten Wasserdampfes enthält. Diese Umordnung d. Regnault'schen Tabellen hat Zeuner vorgenommen welche sich hier beifolgen. (Siehe Grashof 829)

Interessant und zugleich wichtig ist es nun noch d. spec. Verdampfungswärme für gesättigten ~~Wasser~~ Dampf festzustellen. Flüssigkeiten festzustellen. Unter d. Verdampfungswärme einer Flüssigkeit für eine gewisse Temperatur t wird nach Clausius d. Wärmemenge verstanden, welche ihr zur Verwandlung in gesättigten Dampf von derselben Temperatur t mitgetheilt werden muß wenn dabei d. spezifische Druck constant = derjenigen Spannung p, welche d. Temperatur t d. betreffenden gesättigten Dampfes entspricht. Diese Verdampfungswärme pr. 1 kgr d. betreffenden Flüssigkeit also d. spec. Verdampfungswärme derselben soll in d. Folge mit r bezeichnet werden. Man kann dieselbe als eine für verschiedene Flüssigkeiten verschiedene Function von t oder p betrachten, mit Rücksicht auf d. vorhin genannte zwischen p u. t stattfindende Beziehung.

Auch diese Function von t kann nur durch Versuche ermittelt werden. Hier ist wieder Regnault, welcher d. Größe r für verschiedene Flüssigkeiten u. insbesondere für das am meisten interessante Wasser und für verschiedene Werthe von t und p bestimmt hat aber nicht unmittelbar sondern mittelbar, indem er diejenige Wärmemenge Q_0 maß, welche gesättigtem Dampfe von d. Spannung p und von entsprechender Temperatur t pr. 1 kgr entzogen werden mußte, um denselben unter constantem spec. äußeren Druck p zu Flüssigkeit von d. Temperatur t_0 ($< t$) zu verdichten. Diese Wärmemenge Q_0 ist natürlich auch umgekehrt diejenige Wärmemenge, welche d. Flüssigkeit von d. Temperatur t_0 pr. 1 kgr mitgetheilt werden muß, um sie bei constanter Spannung p in gesättigten Dampf von dieser Spannung zu verwandeln. Diese Wärmemenge Q_0 ist nun aber als aus 2 Theilen bestehend zu betrachten: es muß bei diesem Vorgange nun bis zunächst d. Flüssigkeit bei constanter Spannung p von d. Temperatur t_0 auf d. Spannung p entsprechende Temperatur t gebracht werden, wozu bekanntlich folgende Wärmemenge erforderlich ist bezogen auf 1 kgr:

$$= \int_{t_0}^{t} c_p\,dt$$ unter c_p d. spec. Wärme bei constanter Spannung verstanden.

Weiter durch geschehen muß d. Flüssigkeit von d. Temperatur t bei constanter ~~Temp~~ Spannung p in gesättigten Dampf von derselben Temperatur t verwandelt werden, wozu aber d. Definition d. spec. Verdampfungswärme entsprechend eine Wärmemenge $= r$ pr. 1 kgr Flüssigkeit erforderlich ist.

Es ist demnach:

$$Q_0 = \int_{t_0}^{t} c_p\,dt + r$$

od. da man d. Integral zerlegen kann in: $\int_0^{t} c_p\,dt - \int_0^{t_0} c_p\,dt$:

$$Q_0 = \int_0^{t} c_p\,dt - \int_0^{t_0} c_p\,dt + r$$

Hierin bedeuten nun offenbar $\int_0^{t} c_p\,dt$ und $\int_0^{t_0} c_p\,dt$ diejenigen Wärmemengen, welche erfordert werden um 1 kgr Flüssigkeit als Flüssigkeit von d. Temperatur ~~t_0~~ 0° auf d. Temperatur t resp. t_0 zu erwärmen.

Bezeichnet man diese Wärmemengen resp. mit q und q_0, so hat man:

f bei constanter Spannung

$$Q_0 = q - q_0 + r$$

Bei der nicht sehr großen Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten, kann man offenbar annehmen, daß die spez. Wärme bei constantem Druck nur unabhängig von der Größe des Druckes, so daß man also q und q_0 als diejenigen Wärmemengen bezeichnen kann, welche erforderlich sind um 1 kg Flüssigkeit als solche bei constantem atm. Druck von 0° auf $t°$ resp. t_0 zu erwärmen. Diese Größen q und q_0 wurden nun durch besondere Versuche von Regnault als Function von t bestimmt und zwar wie es ebenfalls zulässig erscheinen ist für constanten atm. Druck. Diesen Versuchen gemäß hat sich ergeben, daß die Wärmemenge q mit genügender Annäherung für verschiedene Flüssigkeiten und verschiedene Werthe von t ausgedrückt werden kann durch eine algebraische Function 3ten Grades der Temperatur t, also durch einen Ausdruck von der Form:

$$q = at + bt^2 + ct^3$$

worin $a\ b\ c$ den Versuchen entsprechende Constante vorstellen, welche für verschiedene Flüssigkeiten verschieden sein können.

Insbesondere für Wasser wurde gefunden: $q = t + 0{,}00002t^2 + 0{,}0000003t^3$ worin also q diejenige Wärmemenge bedeutet, welche erforderlich ist um 1 kg Wasser als solches bei constantem äußeren Druck von 0° auf $t°$ zu erwärmen.

Nachdem nun in dieser Weise Q_0 q und q_0 für die verschiedenen Fälle bekannt sind, kann man nun die spez. Verdampfungswärme r berechnen. Zunächst ergibt die Formel: $Q_0 = q - q_0 + r$:

$$Q_0 + q_0 = q + r.$$

Diese Größe $q + r$ ist nun offenbar diejenige Wärmemenge, welche 1 kg einer gewissen Flüssigkeit von 0° Temperatur mitgetheilt werden muß, um sie bei constantem Druck p in gesättigten Dampf von diesem Druck und der entsprechenden Temperatur t zu verwandeln, wenn p und t gemäß der vorstehenden früheren zusammengehörende Werthe sind. Diese Wärmemenge hat Regnault die Gesammtwärme der Flüssigkeit genannt, und wir wollen auch dieselbe ebenfalls mit Q bezeichnen. Dieselbe läßt sich nach Regnault im Allgemeinen ausdrücken durch eine ganze Function 2ten Grades der Temperatur t, nämlich der Form:

$$Q = a + bt + ct^2$$

worin $a\ b\ c$ Constante bedeuten, welche für verschiedene Flüssigkeiten verschiedene Werthe annehmen können.

Für Wasserdampf genügte schon eine lineare Function zu einer guten Übereinstimmung der durch Versuche gefundenen Werthe mit den Versuchswerthen, nämlich die Function:

$$Q = 606{,}5 + 0{,}305t.$$

Dieser Ausdruck stellt also diejenige Wärmemenge dar, welche 1 kg des Wassers von 0° Temperatur mitgetheilt werden muß, um es bei constantem Druck p in gesättigten Dampf von demselben Druck und der entsprechenden Temperatur t zu verwandeln.

Nachdem nun so diese Wärmemengen q und die Gesammtwärme Q als Temperaturfunctionen ausgedrückt sind, ergibt sich nun nach der gemäß der Beziehung: $Q = q + r$ die spez. Verdampfungswärme r als Function von t nämlich:

$$r = Q - q.$$

Insbesondere für Wasser ist diese spez. Verdampfungswärme nach den obigen Resultaten:

$$r = Q - q = 606{,}5 + 0{,}305t - t - 0{,}00002t^2 - 0{,}0000003t^3$$

In diesem Ausdruck sind die Glieder mit t^2 und t^3 von untergeordneter Bedeutung, so daß schon in den meisten Fällen genügen wird, die spez. Verdampfungswärme r wie ebenso die Gesammtwärme Q als lineare Functionen von t aufzufassen. Dabei ist es für die meisten technischen Anwendungen am angemessensten, die Constanten a u. b dieser vereinfachten Formel: $r = a - bt$ so zu wählen, daß sie besonders in der Nähe von $t = 100°$ den thatsächlichen Verhältnissen möglichst genau entspricht.

Aus d. Gleichung $Q = q + r$ folgt nun aber mit Rücksicht auf die obigen Resultate:

$$q = Q - r = 606,5 - a + (0,305 + b)t$$

und also $c_p = \frac{dq}{dt} = 0,305 + b$

Aus dem empirisch ermittelten Ausdruck für q findet man aber durch Differentiation nach t:

$$c_p = \frac{dq}{dt} = 1 + 0,00004t + 0,0000009t^2$$

und insbesondere für $t = 100°C$: $c_p = 1,013$

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$c_p = 0,305 + b = 1,013$$

also $b = 1,013 - 0,305 = 0,708$

und demnach d. Formel für r:

$$r = a - 0,708t$$

Hierin ist also nun noch a entsprechend d. vorgelegten Bedingung zu ermitteln; dies kann man leicht geschehen, indem man a so ermittelt, daß r genau den gefundenen Versuchswerten entspricht für $t = 100°$. Nach Regnault ist nun für $t = 100°$:

$$r = 536,2$$

und demnach $a = r + 0,708t = 536,2 + 70,8 = 607$.

Man bekommt also schließlich für d. spez. Verdampfungswärme d. Wassers d. zuerst von Clausius vorgeschlagene Formel, welche natürlich genau nur für $t = 100°$ genügend, annähernd aber auch für d. umliegenden Temperaturen gilt:

$$r = 607 - 0,708t$$

Diese spez. Verdampfungswärme r muß nun als aus 2 Theilen bestehend betrachtet werden. Wenn es sich nämlich darum handelt, wie es d. Definition d. spez. Verdampfungswärme entspricht, 1 kg einer Flüssigkeit bei einer gewissen Temperatur t in gesättigten Dampf von derselben Temperatur zu verwandeln, wobei d. spez. äußere Druck vorhanden – p – derjenigen Spannung ist, welche d. Temperatur t d. betreffenden gesättigten Dampfes entspricht, so muß bei dieser Verwandlung erstens:

1) d. innere Arbeitsvermögen (d. Disgregation) vermehrt werden, indem natürlich 1 kg gesättigten Dampfes von d. Temperatur t ein größeres inneres Arbeitsvermögen besitzt als 1 kg d. gleichartigen Flüssigkeit von derselben Temperatur t.

2) muß dabei eine gewisse Expansionsarbeit verrichtet werden, welche dazu dient, um dem neugebildeten Dampf d. äußeren Druck entgegen Platz zu schaffen.

Zu beiden Leistungen muß eine bestimmte Wärmemenge verwendet werden, welche beide zusammen d. spez. Verdampfungswärme ausmachen. Diese beiden Bestandtheile d. spez. Verdampfungswärme r sollen mit innerer und äußerer spez. Verdampfungswärme bezeichnet werden, wobei also d. innere spez. ~~Wärme~~ Verdampfungswärme zum Vermehren d. Arbeitsvermögens dient, während d. äußere spez. Verdampfungswärme zur Verrichtung d. äußeren Expansionsarbeit verwendet wird.

Diese äußere spez. Verdampfungswärme ist nun unmittelbar anzugeben:

Bezeichnet Δ d. Unterschied d. spez. Volumens d. gesättigten Dampfes über d. spez. Volumen d. Flüssigkeit bei gleicher Temperatur, so ist auch Δ d. Volumenvergrößerung, welche bei d. Verdampfung von 1 kg Flüssigkeit hervorgerufen wird, und da nun beim Verdampfen d. äußere Druck p derselbe geblieben ist, so ist bei dem ganzen Verwandlungsvorgange eine Arbeit $= p\Delta$ zu verrichten. Die Wärmemenge dieser Expansionsarbeit $= A p \Delta$ ist also d. äußere spez. Verdampfungswärme.

Bezeichnet man also mit ρ d. innere spec. Verdampfungswärme, so ist:

$$r = \rho + \Delta p A$$ unter A bekanntlich d. Wärmeäquivalent d. Arbeitseinheit verstanden.

Nachdem nun im Vorhergehenden d. spec. Verdampfungswärme r als Function d. Temperatur t durch Versuche abgeleitet ist, ist es nun nicht [illegible], die innere und äussere spec. Verdampfungswärme durch weitere Versuche empirisch zu bestimmen, indem dieselben auf theoretischem Wege aus den vorhergefundenen Resultaten abgeleitet werden können.

Clausius nämlich hat bei d. Betrachtung d. Verhaltens d. Dampfes beim Übergange aus einem Aggregatzustand in d. andern d. allgemeingültige Formel gefunden:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{A\vartheta\Delta}{r}$$ unter Δ und r jene dieselben Grössen wie jetzt verstanden und wenn A und ϑ d. bekannten Werthe bezeichnen, nämlich A = Wärmeäquivalent d. Arbeitseinheit $= \frac{1}{424}$ Cal und $\vartheta = t + 273$ = absolute Temperatur.

Dividirt man nun d. obige Gleichung durch $\frac{r}{\vartheta}$ und multiplicirt mit p, so erhält man:

$$Ap\Delta = \frac{p \cdot r \frac{dt}{dp}}{\vartheta} = \frac{r}{\vartheta \frac{1}{p}\frac{dp}{dt}}$$

Aus dem Vorhergehenden ist aber $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$ durch empirische Formeln als Function d. Temperatur t bestimmt und ebenso auch r als empirische Temperaturfunction gefunden worden. Mit Rücksicht auf $\vartheta = 273 + t$ kann man also mittelst dieser Formel auch d. äussere spec. Verdampfungswärme als Function von t bestimmen und dann unmittelbar auch gemäss d. Gleichung:

$$\rho = r - Ap\Delta$$ d. innere spec. Verdampfungswärme als Temperaturfunction entwickeln.

Ebenso wie r aus 2 Theilen besteht, muss man sich auch d. Wärmemenge q, welche dazu erfordert wird um 1 kg Flüssigkeit als solche bei constantem Drucke von $0°$ auf $t°$ zu erwärmen, als aus 2 Bestandtheilen bestehend betrachten, nämlich aus dem Unterschiede d. Eigenwärme d. Flüssigkeit bei d. Temperatur $t°$ über dieselbe bei d. Temperatur $0°$ und aus d. (übrigens sehr kleinen) Wärmeäquivalent d. Expansionsarbeit, welche bei d. Temperaturerhöhung und entsprechenden Ausdehnung von d. Flüssigkeit verrichtet wird. Jedenfalls sind d. Volumenänderungen einer Flüssigkeit als solcher daher sehr klein im Vergleich mit denjenigen Änderungen d. Volumens, welche durch d. Änderung d. Aggregatzustandes nämlich durch d. Verdampfung d. Flüssigkeit od. d. Condensation d. Dampfes zur Flüssigkeit bedingt werden. Man kann deshalb den 2ten Bestandtheil d. Wärmemenge q, nämlich d. Wärmeäquivalent d. Expansionsarbeit als sehr klein vernachlässigen und somit d. Grösse q als Unterschied d. Eigenwärme von 1 kg Flüssigkeit bei $t°$ über dieselbe bei $0°$ betrachtet werden. Nach Zeuner nennt man diese Grösse q deshalb auch d. spec. Flüssigkeitswärme. Ebenso kann auch d. Grösse $q + \rho$ als Unterschied d. Eigenwärme von 1 kg gesättigten Dampfes bei $t°$ über dieselbe von 1 kg d. betreffenden Flüssigkeit bei $0°$ betrachtet und auch d. spec. Dampfwärme genannt werden.

Die Gesammtwärme Q kann man nun auch ausdrücken:

$$Q = q + \rho + Ap\Delta$$

Die obige Formel für $Ap\Delta$ = d. äussere spec. Verdampfungswärme, ist nun aber für die numerische Berechnung ziemlich unbequem, indem darin d. empirische Temperaturfunction von $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$ vorkommt. Deshalb hat [illegible] auch d. äussere spec. Verdampfungswärme $Ap\Delta$ und somit auch innere spec. Verdampfungswärme ρ als einfache algebraische Functionen von t auszudrücken.

Nach Zeuner ist dies sehr genau möglich durch Formeln von d. empirischen Form: →

Innere spec. Verdampfungswärme:

$$\rho = a - bt - ct^2$$

worin $a\,b\,c$ für verschiedene Flüssigkeiten verschiedene Konstanten sein können. Für Wasserdampf kann man sehr genau das Glied mit t^2 fortlassen und setzen:

$$\rho = 575{,}4 - 0{,}791\,t$$

wobei diese Formel übrigens die beste Übereinstimmung mit den Versuchswerten für das große Temperaturintervall von $0^\circ - 200^\circ$ zeigt.
Nachdem nun auch ρ als empirische Temperaturfunktion bestimmt ist, bekommt man auch die äußere spec. Verdampfungswärme Apu als einfache Temperaturfunktion gemäß der Beziehung:

$$Apu = Q - q - \rho$$

in welche Formel man nur die betreffenden Temperaturfunktionen für Q, q und ρ einzusetzen hat. Mit Rücksicht auf die früher angegebenen Resultate findet man beispielsweise für Wasserdampf:

$$Apu = Q - q - \rho = 606{,}5 + 0{,}305\,t - t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3 - 575{,}4 + 0{,}791\,t$$

woraus sich mit Vernachlässigung der Glieder mit t^2 und t^3 ergibt:

$$Apu = 31{,}1 + 0{,}096\,t$$

Nach diesen beiden Formeln für ρ und Apu sind für verschiedene Temperaturen und Pressungen für Wasserdampf die betreffenden spec. innere und äußere Verdampfungswärme berechnet worden und tabellarisch zusammengestellt (Grashof 529). Mit den Tabellenwerten von q, ρ und Apu ergeben sich dann die entsprechenden Werte der spec. Dampfwärme $= q + \rho$,
der spec. Verdampfungswärme $= r = \rho + Apu$
und der Gesamtwärme $Q = q + \rho + Apu$
in der betreffenden Wasserdampf-Tabelle.

Außer den erwähnten Größen braucht man zu den folgenden Untersuchungen noch das spec. Gewicht gesättigter Dämpfe.
Die spec. Gewichte der Dämpfe ergeben sich nun in einfachster Weise aus den betreffenden Werten der spec. äußeren Verdampfungswärme Apu; man braucht nur zu dividieren durch Ap, so bekommt man, wenn p in Kg pro qm gegeben ist, u ausgedrückt in cbm. pro Kgr. Nun ist bekanntlich unter u der Unterschied des spec. Volumens des gesättigten Dampfes von der Temperatur t und des spec. Volumens der gleichartigen Flüssigkeit von derselben Temperatur verstanden. Zu diesem u hat man demnach nur das spec. Volumen w der Flüssigkeit zu addieren, um das spec. Volumen v des entsprechenden gesättigten Dampfes zu bekommen, woraus dann schließlich sich das spec. Gewicht γ des gesättigten Dampfes als reziproker Wert des spec. Volumens v ergibt, also:

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{1}{u + w}$$

Was nun die Größe w, nämlich das spec. Volumen der Wasser-Flüssigkeit betrifft, so ist dieser Wert streng genommen abhängig von der Pressung p und Temperatur t. Da aber alle Flüssigkeiten außerordentlich wenig zusammendrückbar sind, so wird die Größe der äußeren Pressung p auch nur einen verschwindenden Einfluss auf das spec. Volumen der Flüssigkeit ausüben. Einen größeren Einfluss muss aber schon die Temperatur genommen werden. So z. B. ist für Wasser das spec. Volumen w im Zustand der größten Dichtigkeit –

$w = 0{,}001$ (entsprechend d. Definition von 1 kgr.)

bei $t = 200°$ ist jedoch $w = 0{,}00113$

Wie man sieht ändert sich d. spec. Volumen d. Wassers innerhalb d. in den genannten Tabellen eingehaltenen Grenzen 0 – 200° nur in d. 4 Decimalstelle höchstens seinen Werth. Aus diesem Grunde kann man auch d. spec. Volumen w d. Wassers innerhalb besagter Grenzen als constant ansehen, namentlich zur Berechnung von v = spec. Gewicht d. Wasserdampfes, indem das zur Berechnung in Anwendung kommende Δ auch nur genau bis zur 4 Decimalstelle bestimmt werden kann. Man kann demnach d. spec. Volumen d. gesättigten Wasserdampfes setzen:

$$v = 0{,}001 + \Delta$$

, welcher Werth also innerhalb besagter Grenzen nur höchstens in d. 4t Decimalstelle um eine Einheit falsch sein kann.

Dementsprechend ist d. spec. Gewicht d. gesättigten Wasserdampfes zu berechnen nach d. Formel:

$$\gamma = \frac{1}{\Delta + 0{,}001}$$ = Gewicht pr. cubm gesättigten Wasserdampfs in kgr.

Vergleicht man die nach dieser Formel gefundenen Werthe von γ = d. spec. Gewicht d. Wasserdampfs mit dem spec. Gewicht d. atm. Luft von gleicher Temperatur und Pressung, also d. Werthe von $\gamma = \frac{1}{\Delta + 0{,}001}$ verglichen mit den Werthen von $\gamma = \frac{1}{v} = \frac{p}{29{,}27\,T}$ (Gewicht d. Gewichtseinheit d. atm. Luft) bei gleicher Pressung und Temperatur, so findet man d. Dichtigkeit δ d. gesättigten Wasserdampfs in Bezug auf atm. Luft, bei gleicher Pressung und Temperatur, wachsend mit d. Pressung und zwar

$$\delta = 0{,}621 \text{ bis } 0{,}676 \text{ für } p = 0{,}1 \text{ bis } 10 \text{ Atm.}$$

Es folgt hieraus, dass zu keinen Dämpfen man von einer Dichtigkeit eines gesättigten Dampfes in Bezug auf Luft spricht, indem diese Dichtigkeit auch z. B. bei gesättigtem Wasserdampf bei allen gesättigten Dämpfen bei verschiedenen Pressungen verschieden sein kann. Der Grund dieses Verhaltens ist darin zu suchen, daß d. gesättigten Dämpfe nicht wie permanente Gase angenommen werden, den beiden Gesetzen nämlich d. Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze nicht folgen. In solchen Fällen [illegible] d. Pressung [illegible] ist, also etwa wie Zustand d. [illegible] atm. Luft, kann man mit genügender Annäherung auch d. Dichtigkeit δ d. Wasserdampfs in Bezug auf atm. Luft als constant ansehen und etwa setzen $\delta = 0{,}625 = \frac{5}{8}$, vorausgesetzt, daß atm. Luft und Wasserdampf gleichen Pressungen und Temperaturen unterworfen sind. Bei höheren Pressungen wird jedoch ein solcher Werth unzulässig erscheinen.

In manchen Fällen ist es nun bequemer d. spec. Gewicht d. Wasserdampfes unmittelbar als Function d. Pressung p zu kennen. Hiefür wurde von Navier für gesättigten Wasserdampf folgende einfache Formel aufgestellt:

$$\gamma = a + bp$$

deren namentlich Pambour und auch später Redtenbacher in seiner Theorie d. calorischen Maschinen ausgedehnten Gebrauch macht, indem auf Grund d. älteren Versuche d. Constanten a u. b für Dämpfe niederer und höherer Spannung, nämlich unter und über 2 Atm. besonders bestimmt wurden. Indessen lassen d. Werthe von γ, welche man auf Grund d. neueren genaueren Versuche Regnaults berechnet, erkennen, daß d. Differenzen von γ, welche gleichen Differenzen von p entsprechen, nicht constant, sondern in sehr merklicher Weise veränderlich sind, so daß jene Formel [illegible], wenn man d. Constanten a u. b zwischen engeren Grenzen von p bestimmt. —

Eine viel bessere Übereinstimmung mit d. aus d. Regnault'schen Versuchen abgeleiteten Werthen, und zwar zwischen sehr weiten Grenzen von p, wird nach Zeuner bei passender Bestimmung d. Constanten a u. m durch d. Formel erhalten:

$$p v^m = a$$

Insbesondere für gesättigten Wasserdampf ergeben sich d. Werthe, wenn v in cubm pro 1 kgr und p in Atm. ausgedrückt ist:

$$a = 1{,}7049 \text{ und } m = 1{,}0646.$$

Um auf Grund dieser Beziehung d. spez. Gewicht d. gesättigten Dampfes als Function d. Spannung zu bekommen, kann man diese Gleichung mit d. Potenz $\frac{1}{n}$ erheben, man erhält dann:

$$p^{\frac{1}{n}} v = a^{\frac{1}{n}}$$

und ferner:

spez. Gewicht $= \gamma = \frac{1}{v} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} p^{\frac{1}{n}} = \alpha p^{\mu}$

wenn man bezeichnet $\alpha = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ und $\mu = \frac{1}{n}$

Für gesättigten Wasserdampf hat man:

$\alpha = 0{,}6058$ und $\mu = 0{,}9393$ bestimmt und somit hat als unmittelbare Beziehung zwischen γ und p für gesättigten Wasserdampf:

$$\gamma = 0{,}6058 \cdot p^{0{,}9393}$$

Die nach dieser Formel für verschiedene Spannungen u. entsprechende Temperaturen gerechneten Werte von γ stimmen mit d. genauen mit Versuchen ermittelten ziemlich gut überein, wenigstens tritt erst in d. 3ten Decimalstelle hie und da ein Unterschied ein.

Nachdem nun diese Bemerkungen bezüglich d. wesentlichsten Eigenschaften gesättigter Dämpfe vorausgeschickt sind, können wir nun übergehen zu dem:

Verhalten von Dampf mit gleichartiger Flüssigkeit.

Im besonderen handelt es sich nun zunächst um d. allgemeinen Formeln für unendlich kleine Zustandsänderungen solcher Gemische.

Bei d. Aufstellung dieser allgemeinen Formeln für solche Zustandsänderungen sollen nun wie früher allgemein folgende Buchstabenbezeichnungen benutzt werden:

p = spez. Spannung und zwar nimmt man d. Einheit derselben und d. spez. Spannung ~~in~~ Kgr. pr. □m. Wenn man einen Beharrungszustand annimmt, so kann man bekanntlich diese Spannung als in allen Punkten d. Gemisches gleich annehmen.

x bedeute d. in 1 Kgr. d. Gemisches enthaltene Dampfmenge ausgedrückt in Kgr.

also $1-x$ = Gewichtsmenge d. in 1 Kgr. Gemisch enthaltenen Flüssigkeit.

t = die Temperatur in Celsius'schen Graden ausgedrückt und gemessen vom Gefrierpunkt d. Wassers.

T = absolute Temperatur $= 273 + t$

q = Wärmemenge, welche dazu erforderlich ist, um 1 Kgr. Flüssigkeit als solche bei constanter Spannung von 0° auf t° zu erwärmen, od. als spez. Flüssigkeitswärme bezeichnet, = dem Unterschied d. Körperwärme von 1 Kgr. Flüssigkeit bei t° über dieselbe bei 0°.

r = spez. Verdampfungswärme d. h. d. Wärmemenge, welche d. betreffenden Flüssigkeit von t° Temperatur per 1 Kgr. zur Verwandlung in gesättigten Dampf von derselben Temperatur t mitgeteilt werden muss, wenn dabei d. spez. äussere Druck constant = derjenigen Spannung ist, welche d. Temperatur t d. betreffenden gesättigten Dampfes entspricht.

ρ = innere spez. Verdampfungswärme d. h. diejenige Körperwärme überschuss, welchen 1 Kgr. gesättigten Dampfes von d. Temperatur t mehr enthält als 1 Kgr. gleichartiger Flüssigkeit von derselben Temperatur.

w = spec. Volumen d. Flüssigkeit ausgedrückt in Cubm. pr. Kgr.
$w+\Delta$ = spec. Volumen d. Dampfes, welcher unmittelbar in dem Gemische steht [illegible].
v = spec. Volumen d. Gemisches, also mittleres spec. Volumen unter d. Voraussetzung einer [illegible] Gemisches. $v = w + y\Delta$.
Endlich U = spec. innere Arbeitsvermögen d. Gemisches. Dasselbe enthält in seinem Ausdruck im Allgemeinen immer einen unbekannten constanten Summanden, wenn man nicht d. Arbeitsvermögen in seiner Änderung von einem bestimmten Zustand zu einem andern gegebenen Zustand verfolgt. Im Folgenden sei immer angenommen, daß d. spec. Arbeitsvermögen von dem Zustand ausgemessen wird, in welchem d. ganze Gemisch flüssig also $y = 0$ und in welchem d. Temperatur $t = 0$ ist.

Die allgemeinen Gleichungen, welche nun zur Bestimmung eines solchen Gemisches von Dampf und zugehöriger Flüssigkeit zu Gebote stehen sind folgende:
1. die spec. Zustandsgleichung d. Gemisches nämlich $v = w + y\Delta$ — 1.
wobei man w als constant in Rechnung ziehen kann, indem die Volumänderungen einer Flüssigkeit als solche eine sehr kleine sind im Vergleich mit denjenigen Änderungen d. Volumens, welche durch d. Änderung d. Aggregatform also durch Verdampfung d. Flüssigkeit od. durch d. Condensation d. Dampfes hervorgebracht werden. Unter diesem Umstand braucht man auch keinen Unterschied zu machen zwischen d. spec. Wärme bei constantem Druck und constantem Volumen, indem dieser Unterschied gerade auf den Volumänderungen [illegible].
Fassen wir noch d. Volumdifferenz Δ als Funktion von p auf, und durch d. obige Gleichung [illegible] spec. Volumen d. Gemisches ausgedrückt als eine Funktion d. Drucks p und d. specifischen Dampfmenge y.
Ferner [illegible] d. innere Arbeitsvermögen ausgedrückt durch seinen Wärmewerth AU unter A d. Wärmewerth d. Arbeitseinheit verstanden. Dieses spec. innere Arbeitsvermögen U soll wie oben schon gesagt immer von dem Zustand ausgemessen werden, in welchem y und t = Null sind.
Der Wärmewerth von $U = AU$ ist d. spec. Körperwärme d. Gemisches bestehend offenbar aus d. spec. Körperwärme d. Flüssigkeit und d. Körperwärme d. dampfförmigen Theils d. Gemisches. Indem [illegible] q [illegible] constant angenommen wird, so kann man [illegible] q als Unterschied d. Körperwärme von 1 Kgr Flüssigkeit bei $t°$ über dieselbe bei $0°$ betrachtet werden [illegible] spec. Flüssigkeitswärme bezeichnet werden, ebenso können wir $q + \rho$ d. Unterschied d. Körperwärme von 1 Kgr gesättigten Dampfes bei $t°$ über dieselbe von 1 Kgr d. gleichartigen Flüssigkeit bei $0°$. ρ ist = d. spec. Dampfwärme.
Indem nun wieder in 1 Kgr Gemisch y Kgr Dampf u. $1-y$ Kgr Flüssigkeit enthalten sind, ist d. spec. Körperwärme d. Dampfes $= y(q+\rho)$ und d. spec. Körperwärme d. Flüssigkeit $= (1-y)q$.
[illegible] Zustandsänderung d. Gemisches, also d. spec. Körperwärme:

$$AU = (1-y)q + y(q+\rho)$$

$$AU = q + y\rho \qquad 2$$

Im vorliegenden Falle bedeutet also diese spec. Körperwärme nichts anderes als d. Unterschied d. Körperwärme, welche d. Gemisch bei $t°$ pr. 1 Kgr hat, über diejenige, welche d. Gemisch hat, wenn d. ganze Masse flüssig [illegible] $y = 0$ und dieses d. Temperatur $0°$ hätte.
Außer diesen Gleichungen hat man noch d. Gleichungen, welche stattfinden zwischen d. Pressung p und Temperatur t im Grenzzustand d. Übergangs aus einer in d. andere Aggregatform. In dem vorliegenden Gemisch befinden sich ja offenbar beide Theile, Flüssigkeit und Dampf in einem solchen Grenzzustande d. Übergangs von flüssiger in dampfförmige resp. von dampfförmiger in flüssige Aggregatform.
Es gilt bekanntlich für dieses Gemisch d. bekannte Beziehung:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{A\Delta}{r} \qquad 3$$

wobei r d. spec. Verdampfungswärme [illegible] welche bekanntlich ist:

$$r = \rho + Ap\Delta$$

Diese Gleichungen beziehen sich [illegible] nicht auf d. Geschwindigkeit, mit welcher d. Zustandsänderungen d. Gemisches vor sich gehen, sondern nur auf d. augenblicklichen Wärmezustand, gleichviel wie dieser aus [illegible] einem früheren Zustand hervorgegangen ist.
Was nun diese Geschwindigkeit betrifft, so kommt es besonders darauf an, diejenige Wärmemenge dQ zu bestimmen, welche dem Gemisch zu 1 kg [illegible] unendlich kleinen [illegible] Änderung d. Wärmezustandes mitgeteilt werden muss [illegible] Änderung d. Wärmezustandes mitgeteilt werden muss, welche mit einer unendlich kleinen Volumenänderung verbunden ist.
Diese Frage kann nun leicht beantwortet werden mit Hülfe d. allgemeinen Wärmegleichung, wenn man diese [illegible] zur Charakteristik d. Wärmezustandes [illegible] Gemisches [illegible].
Die allgemeine Form d. Wärmegleichung war nun:

$$W \cdot dQ = dU + p\,dv$$

wenn W d. Arbeit [illegible] d. Wärmeeinheit bedeutet und bekanntlich ist: $W = \frac{1}{A} = 424$ kgm.
d. Wärmegleichung kann man also auch schreiben, wenn man [illegible] A eine Constante ist:

$$dQ = d(AU) + Ap\,dv$$

[illegible] für AU [illegible] Werth [illegible]:

$$\text{3)} \quad dQ = d(q + y\varrho) + Ap\,dv = dq + d(y\varrho) + Ap\,dv$$

Dieser Ausdruck kann nun [illegible] umgestaltet und [illegible].
[illegible] Gleichung 1 $\quad v = w + y\Delta$ wenn w = constant angenommen wird, so ist auch

$$dv = d(y\Delta) \text{ und also } Ap\,dv = Ap\,d(y\Delta)$$

[illegible] Differentialgleichung kann man nun [illegible] schreiben:

$$Ap\,dv = Ap\,d(y\Delta) = A\,d(yp\Delta) - Ay\Delta\,dp$$

$$\left(\text{weil } d(xyz) = xy\,dz + z\,d(xy)\right)$$

d. letzte Ausdruck für dQ [illegible]

$$A\,d(yp\Delta) = d(y\,Ap\Delta) \text{ [illegible]}$$

dQ = weil A eine Constante ist, und ferner [illegible] für $A\Delta$ in dem letzten [illegible] Gleichung 2 [illegible] Werth:

$$A\Delta = \frac{dt}{dp} \cdot \frac{r}{T}$$

und daraus folgt: $\quad Ap\,dv = d(y \cdot Ap\Delta) - y\,dp\,\frac{dt}{dp}\,\frac{r}{T} = d(y \cdot Ap\Delta) - y\,\frac{r\,dt}{T}$

[illegible] in Gleichung 3 eingesetzt gibt:

$$dQ = dq + d(y\varrho) + d(y \cdot Ap\Delta) - y\,\frac{r\,dt}{T}$$

$$= dq + d\left[y(\varrho + Ap\Delta)\right] - y\,\frac{r\,dt}{T}$$

da $\varrho + Ap\Delta = r$

$$\text{4)} \quad dQ = dq + d(yr) - \frac{yr}{T}\,dt$$

[illegible] bekanntlich $dt = dT$ setzen kann weil $T = t + 273$ so kann man einfacher schreiben:

$$dQ = dq + d(yr) - \frac{yr}{T}\,dT = dq + T\,\frac{T\,d(yr) - yr\,dT}{T^2}$$

5) [illegible] Differentialgleichung: $\quad dQ = dq + T\,d\left(\frac{yr}{T}\right)$

Diesen erscheinenden Ausdruck für die Wärmemenge dQ welche dem vorliegenden Gemisch pro 1 kg bei einer unendlich kleinen umkehrbaren Zustandsänderung mitzutheilen ist, finden wir besonders häufig Anwendung. Von Weiter ist es jedoch vortheilhaft die Darstellung für dQ anzunehmen, indem man in die eingeführten Summanden von dQ ansetzt.

Bezeichnet c die spez. Wärme der Flüssigkeit, wobei man wie schon erwähnt, entsprechend der Abweichung einer Volumenänderung der Flüssigkeit keinen Unterschied zwischen spez. Wärme bei constantem Druck und constantem Volumen zu machen braucht. Dann ist bekanntlich:

$$c = \frac{dq}{dt} \quad \text{also} \quad dq = c\,dt$$

Setzen wir dies in Gleichung 4 ein und schreibt dann noch: $d(yr) = y\,dr + r\,dy$, so erhält man:

$$dQ = c\,dt + r\,dy + y\,dr + y\frac{r}{T}\,dt$$

$$= (1-y)\,c\,dt + r\,dy + y\left(c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}\right)dt$$

und wenn man die Summe bezeichnet:

$$c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T} = h \qquad \Big\} \; 6)$$

so bekommt man: $$dQ = (1-y)\,c\,dt + r\,dy + yh\,dt$$

Die Bedeutung dieser 3 Summanden von dQ ist leicht zu erkennen. Stellt man sich ein solches Gemisch von Dampf und zugehöriger Flüssigkeit vor und theilt diesem eine Wärmemenge mit, so erfährt dasselbe eine 3fache Änderung:

1) Es erhöht die Temperatur der Flüssigkeit, von welcher $(1-y)$ kg in 1 kg Gemisch enthalten sind.
2) Es verwandelt einen Theil der Flüssigkeit in Dampf, ändert also das Mischungsverhältnis y
3) erfährt der bereits vorhandene Dampf eine Zustandsänderung.

Diese 3 Bestandtheile von dQ, welche den einzelnen Zustandsänderungen entsprechen, sind nun offenbar durch die 3 Summanden ausgedrückt:

Es ist $(1-y)\,c\,dt$ die Wärmemenge zur Temperaturerhöhung der Flüssigkeitsmenge $= (1-y)$ kg.
Um ferner das Mischungsverhältnis y um ein unendlich Kleines zu ändern müssen dy kg Flüssigkeit verdampft werden, wozu also eine Wärmemenge erforderlich $= r\,dy$. dy kann offenbar $\pm$ sein, je nachdem eine Wärmemittheilung oder Wärmeentziehung, also Verdampfung oder Condensation erfolgt, entsprechend einem positiven oder negativen Werthe von dQ.
Ferner ist noch $yh\,dt$ die Wärmemenge, welche zur Temperaturerhöhung und entsprechenden Volumenänderung der Dampfmenge $= y$ kg verwendet wird.
Hiernach bedeutet demnach h eine Art spez. Wärme des Dampfes, nämlich diejenige, welche einer solchen Volumen- und Druckänderung bei der Wärmemittheilung entspricht, daß dabei der Dampf gesättigt bleibt. Diese spez. Wärme des gesättigten Dampfes, Größe h, wird uns bei weiteren Rechnungen eine wesentliche Rolle spielen.

Außer dieser Wärmemenge dQ, welche dem Gemisch pro 1 kg bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung mitgetheilt werden muß, kann man sich noch anders fragen, welches die Expansionsarbeit ist, welche von 1 kg des Gemisches von Dampf und zugehöriger Flüssigkeit bei einer solchen unendlich kleinen Änderung seines Zustandes verrichtet wird.

Selbstverständlich ist der allgemeine Ausdruck für die Expansionsarbeit bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung gilt:

$$dE = p\,dv$$

und da $v = w + yu$ und da w = constant: $$dE = p\,d(yu)$$

Nach d. allgemeinen Hauptgleichung ist aber d. Arbeitswerth WdQ der dem Gemisch beigeführten, einer kleinen Zustandsänderung mitzutheilenden Wärme – dem Zuwachs an innerem Arbeitsvermögen und d. Expansionsarbeit entsprechend, bei Änderung d. Wärmezustandes verrichtet wird, also nämlich:

$$WdQ = dU + pdv = dU + dE$$

also $dE = WdQ - dU$

oder $W = \frac{1}{A}$ gesetzt: Wärmewerth d. elementaren Expansionsarbeit:

$$AdE = dQ - AdU = dQ - d(AU)$$

Nach Gl. 2 ist aber:

$$d(AU) = d(q + y\varrho) = dq + d(y\varrho)$$

und nach Gl. 5:

$$dQ = dq + T\,d\left(\frac{yr}{T}\right)$$

diese Werthe eingesetzt giebt:

7) $$AdE = T\,d\left(\frac{yr}{T}\right) - d(y\varrho)$$

NB. Alle diese Formeln und ebenso d. daraus abgeleiteten Specialformeln gelten natürlich nur innerhalb d. Grenzen $y = 0$ und $y < 1$.

Mit Hülfe dieser Formeln kann man nun noch besondere Arten von Zustandsänderungen eines solchen Gemisches von Dampf und gleichartiger Flüssigkeit untersuchen, wie zunächst:

Zustandsänderung bei constanter Pressung oder Temperatur.

Wie aus den früheren Untersuchungen bekannt, ist für ein Gemisch von Flüssigkeit und gesättigtem Dampf bei constanter Pressung p auch d. dadurch bestimmte Temperatur t constant und umgekehrt. Da in diesem Fall d. Gleichgewicht keine [illegible] Zustandsänderung [illegible] mit d. v [illegible]. Also sind sämmtliche Formeln [illegible] Funktionen von p sind, also unveränderliche Größen geben, also $\Delta\, r\, \varrho$ = constant. Ebenso sind natürlich auch q und w constant.

Was sich in den Formeln bei Zustandsänderungen ändert, ist also nur d. spec. Dampfgehalt y und [illegible] Größe abhängige [illegible], nämlich d. spec. Volumen v d. Gemisches, entsprechend d. Zustandsgleichung d. Gemisches:

$v = w + y\Delta$, worin ferner w und Δ in diesem Falle constante Größen sind, so [illegible] y ändert und welcher auch d. spec. Volumen v ändert [illegible] Differentiation ist:

$$dv = \Delta\, dy$$

Bezeichnet man v_0 d. spec. Volumen im Anfangszustand und y_0 d. spec. Dampfgehalt d. Gemisches im [illegible] Anfangszustand, so geht wenn y_0 in y übergeht d. spec. Volumen

$v_0 = w + y_0\Delta$ in $v = w + y\Delta$ über.

Nach Gl. [illegible] d. Wärmewerth d. Änderung d. Arbeitsvermögens [illegible] d. Gemisches während einer Zustandsänderung von endlicher Größe, welche durch $v_0\, y_0$ und $v\, y$ gekennzeichnet ist:

$$A(U - U_0) = (y - y_0)\,\varrho$$

also d. Zuwachs an innerem Arbeitsvermögen mit $AW = 1$:

$$U - U_0 = W(y - y_0)\,\varrho$$

ferner d. bei d. Zustandsänderung von endlicher Größe pro 1 kg d. Gemisches verrichtete Expansionsarbeit:

$$E = p(v - v_0) = p\Delta(y - y_0)$$

mit $v = w + y\Delta$ und $v_0 = w + y_0\Delta$

[illegible] Wärmemenge, welche 1 kg d. Gemisches bei einer umkehrbaren Zustandsänderung von endlicher Größe [illegible] Verdampfungswärme r:

$$Q = r(y - y_0)$$

[illegible] v_0 und y_0 [illegible] v, U und Q als Functionen von y [illegible]

[illegible] a priori gegeben, [illegible] y [illegible]

[illegible] $e = \frac{v_0}{v}$ gegeben sein.

Um hieraus y zu bestimmen [illegible]:

$$e = \frac{v_0}{v} = \frac{w + y_0\Delta}{w + y\Delta}$$ [illegible] y entwickelt wird:

$$y = \left(\frac{1}{e} - 1\right)\frac{w}{\Delta} + \frac{1}{e}\, y_0.$$

$$\text{also } y - y_0 = \left(\frac{1}{e} - 1\right)\frac{w}{\Delta} + \left(\frac{1}{e} - 1\right) y_0 = \left(\frac{1}{e} - 1\right)\left(\frac{w}{\Delta} + y_0\right)$$

[illegible] y und $y - y_0$ [illegible] v, U u. Q [illegible] e [illegible]

Zustandsänderung bei constantem Volumen.

[illegible]

$$v = w + y\Delta \quad \text{und} \quad v_0 = w + y_0\Delta_0.$$

[illegible] v [illegible] W [illegible]:

$$y\Delta = y_0\Delta_0.$$

[illegible] Δ [illegible] y [illegible] p [illegible]

[illegible] Wärmemenge dQ, welche d. Gemisch von 1 kg [illegible]:

$$dQ = dq + d(y\rho) + Apdv$$

[illegible] $v = const$, $dv = 0$ [illegible] $= 0$.

[illegible] Wärmemenge Q [illegible] 1 kg [illegible]:

$$Q = q - q_0 + y\rho - y_0\rho_0.$$

[illegible]: $y\Delta = y_0\Delta_0$ [illegible]:

$$Q = q - q_0 + x_0 u_0 \left(\frac{\rho}{u} - \frac{\rho_0}{u_0}\right)$$

Diese Formel für d. Wärmemenge Q kommt unter Anderem zur Anwendung, wenn gefragt wird, wie lange Zeit = ϑ es erfordert um d. Spannung p_0 eines Gemisches von Flüssigkeit mit [illegible] Dampf, welches sich in einem eingeschlossenen Gefäß befindet, zu steigern bis zu p, wenn dem Gemisch eine gleichförmige Wärmemittheilung gestattet wird.

Nach der Formel oben kann man nämlich d. Wärmemenge berechnen, welche d. Gemisch per 1 kgr behufs einer Zustandsänderung entsprechend einer Zunahme d. Spannung von p_0 auf p, mitgetheilt werden muß. Sind nun aber M kgr d. Gemisches in d. geschlossenen Gefäß vorhanden, so ist MQ d. Wärmemenge, welche d. Spannung d. Gemisches von p_0 auf p bringt. Ist daher endlich Q_1 d. in d. Zeiteinheit d. Gemisch mitgetheilte Wärmemenge, so ist offenbar d. erforderliche Zeit:

$$\vartheta = \frac{MQ}{Q_1} \text{ Zeiteinheiten}$$

In diesem Falle befindet sich z. B. ein gefüllter Dampfkessel bei abgestellter Dampfableitung und Speisung aber unterhaltener Feuerung. (Vorübergehend d. Fall kann in einem Betrieb um d. Mittagszeit, wo d. Maschine stillsteht, also kein Dampf entnommen und kein Speisewasser zugeführt wird, und wenn dann d. Feuerung [illegible] nicht [illegible] wird [illegible]; wie lange kann dieser Zustand dauern, ehe d. Spannung im Kessel so groß wird, daß dieser springen könnte.)

[illegible] d. Speisung [illegible] Kessels [illegible] kleiner Theil d. vorhandenen Wassermenge, [illegible] d. Gesammtvolumen = V Kubikmeter, [illegible] Volumen d. Dampfes = αV und des Wassers = $(1-\alpha) V$ [illegible] Wasser durch [illegible] d. Spannung [illegible] kleiner als d. [illegible] Volumen d. Wassers, so kann d. Gewicht M d. im Kessel befindlichen Gemisches setzen:

$$M = 1000 (1-\alpha) V$$

indem 1 cubm. Wasser 1000 kgr wiegt [illegible] (1−α) V [illegible] d. im Kessel vorhandenen Wassers ist.

Ist ferner noch d. Größe d. Heizfläche = H qm und Q_0 d. Wärmemenge, welche per Minute und per qm Heizfläche in den Kessel eindringt, so ist:

$$Q_1 = H Q_0$$

und demnach:

$$\vartheta = 1000 (1-\alpha) \frac{V}{H} \cdot \frac{Q}{Q_0}$$

Ist beispielsweise d. Kessel ein mit äußerer Feuerung versehener einfacher cylindrischer Kessel vom Durchmesser d und d. Länge l, so ist nun:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} l$$

und wenn man annimmt, daß d. Heizfläche, wie es meistens d. Fall ist, etwa [illegible] d. Hälfte d. Umfläche d. Kessels einnimmt, also:

$$H = \frac{5}{9} \pi d l$$

so erhält man für diesen Kessel:

$$\vartheta = 450 (1-\alpha) \frac{Q}{Q_0} d$$

Die Wärmemenge Θ kann man jetzt nach den vorhin entwickelten Formeln berechnen, wenn man die in den fraglichen Formeln vorkommenden Größen kennt. Was das spec. [illegible] γ_0 im Anfangszustand betrifft, so kann man dieses offenbar wie folgt ausdrücken:

$$\gamma_0 = \frac{\alpha V \gamma}{M}$$ wobei γ das spec. Gewicht des [illegible] im Anfangszustand [illegible].

Setzt man den Werth für M ein, so ist:

$$\gamma_0 = \frac{\alpha V \gamma}{1000(1-\alpha)V} = 0{,}001\frac{\alpha}{1-\alpha}\gamma$$

Mit Rücksicht darauf, daß man setzen kann:

$$\gamma\Delta_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + 0{,}001} = 1$$ setzen kann, indem $0{,}001$ im Vergleich zu Δ_0 sehr klein ist,

so erhält man nach [illegible] Werthe:

$$\Theta = q - q_0 + 0{,}001\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\rho}{\Delta} - \frac{\rho_0}{\Delta_0}\right)$$

Da ein Dampfkessel nun im Allgemeinen den ganzen Raum [illegible] ausgefüllt, daß $\frac{2}{3}$ Wasser und $\frac{1}{3}$ [illegible] Dampf darin enthalten sind, so kann man also $\alpha = \frac{1}{3}$ setzen, und [illegible]:

$$\vartheta = 300\frac{\Theta}{\Theta_0}d \quad \text{wo} \quad \Theta = q - q_0 + 0{,}0005\left(\frac{\rho}{\Delta} - \frac{\rho_0}{\Delta_0}\right)$$

Diese Wärmemenge Θ kann man nun berechnen und tabellarisch zusammenstellen für die Fälle, daß die Spannung wachsen soll von 2 auf 3 von 3 auf 4 etc. — wie eine solche Tabelle [illegible] Grashof 332 [illegible] bis zu $p = 13$ Atm.; man setzt dann einfach zuerst $p_0 = 2$ $p = 3$ Atm. dann $p_0 = 3$ und $p = 4$ u. s. f. — $p_0 = 12$ und $p = 13$ Atm.

[illegible] per Minute ca 200 Cal. d. h. 200 Wärmeeinheiten pro qm der Heizfläche in den Kessel eindringen, also ist $\Theta_0 = 200$ ist, so hat man:

$$\vartheta = 1{,}5\,\Theta d \text{ Minuten.}$$

Mit Rücksicht auf die genannte Tabelle kann man nun leicht die Zeit ϑ berechnen, in welcher bei einem [illegible] cylindrischen [illegible] Dampfkessel von 1 cbm Inhalt, welcher zu $\frac{2}{3}$ seines Volumens mit Wasser gefüllt ist, beispielsweise die Anfangsspannung von 4 Atm. auf bis zu 12 Atm. bei fortdauernder Feuerung wächst, [illegible] Zeit [illegible] bei [illegible] des Kessels stattfinden kann.

Die Wärmemenge Θ welche [illegible] die Kesselfüllung [illegible] muß um deren Spannung von 4 Atm. auf 12 Atm. zu steigern, kann man sich zusammengesetzt denken aus den Wärmemengen, welche derselben Kesselfüllung [illegible] müssen um eine Erhöhung der Spannung von 4 auf 5 Atm., von 5 auf 6, von 6 auf 7 ——— von 11 auf 12 Atm. zu bewirken. Nach der genannten Tabelle erhält man die Zeit mit $d = 1$:

$$\vartheta = 1{,}5\,\Theta = 1{,}5(8{,}543 + 7{,}305 + \ldots\ldots 4{,}158) = 70 \text{ Minuten}$$

Hieraus kann man beurtheilen, wie gefährlich es ist, einen Dampfkessel eine längere Zeit ohne Aufsicht zu lassen, wenn kein Speisewasser zugeführt und kein Dampf abgeleitet wird [illegible] Feuerung [illegible] unterhält.

Zustandsänderung bei constantem Gewichtsverhältnisse von Dampf & Flüssigkeit.

Diese Zustandsänderung stellt sich dar durch y = Const.

In den beiden ersten Abschnitten sahen wir d. Zustandscurve immer eine gerade Linie und zwar im ersteren Falle d. Zustandsänderung bei constanter Pressung eine mit d. v Axe parallele Gerade und im 2ten Fall d. Zustandsänderung bei constantem Volumen eine mit d. p Axe parallele Gerade. Bei der nun zu untersuchenden Zustandsänderung ist d. Zustandscurve aber eine krumme Linie. Der Zweck ist also derjenige, genauer d. Charakter d. entsprechenden Zustandscurve kennen zu lernen d. h. d. Gesetz zu erkennen, nach welchem sich d. Pressung p und Volumen v bei d. Zustandsänderung von d. vorausgesetzten Art gleichzeitig ändern.

Für d. allgemeine Zustandsgleichung d. Gemisches von Flüssigkeit und gesättigtem Dampf

$$v = w + y\Delta$$

Ist im vorliegenden Falle außer w auch noch y = constant, und wenn Δ eine Function von p ist, so ist diese Gleichung eine Function zwischen Pressung und Volumen v und kann deshalb angesehen werden als d. Gleichung d. Zustandscurve, indem diese aber eine Gleichung einer Curve ist, deren Coordinaten v und p sind. Durch diese Zustandscurve wird dann d. Gesetz d. vorliegenden Zustandsänderung graphisch dargestellt. Um die Zustandscurve aber zu erkennen, muss Δ als Function von p ausgedrückt werden. Dies kann mit genügender Genauigkeit geschehen auf Grund d. Seite 100 angeführten, von Zeuner aufgestellten empirischen Gleichung zwischen d. spez. Gewicht und d. Pressung, nämlich:

$\gamma = \alpha p^{\mu}$ unter α und μ Constanten verstanden, welche für verschiedene Dampfarten verschiedene Werthe haben können, und welche für gesättigten Wasserdampf schon früher angegeben wurden: $\alpha = 0{,}6058$ und $\mu = 0{,}9393$

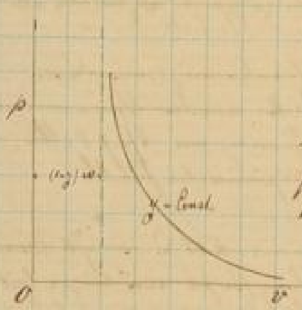
Nun ist aber Δ = d. spez. Volumen d. Dampfes − d. spez. Volumen d. Flüssigkeit, demnach:

$$\Delta = v - w = \frac{1}{\gamma} - w$$

und mit $\gamma = \alpha p^{\mu}$

$$\Delta = \frac{1}{\alpha p^{\mu}} - w$$

und demnach d. Zustandsgleichung:



$$v = w + y\left(\frac{1}{\alpha p^{\mu}} - w\right) = (1-y)w + \frac{y}{\alpha p^{\mu}}$$

Die Zustandscurve ist dieser Gleichung zufolge demnach eine Curve, welche sich asymptotisch d. v Axe nähert und einer Geraden anschmiegt, welche in dem Abstande $(1-y)w$ mit d. p Axe parallel läuft.

Denn setzt man $p = 0$, so erhält man $v = \infty$

und setzt man $p = \infty$, " " $v = (1-y)w$

Der besondere Zweck ist nun wieder d. Ausdruck für d. Wärmemenge dQ, welche 1 kg d. Gemisches bei einer unendlich kleinen und bestimmten Zustandsänderung mitgetheilt werden muss, wenn dabei d. verhältnissmässige Dampfmenge constant = y Kilogr. bleiben soll.

Von den verschiedenen früher entwickelten Ausdrücken für d. Wärmemenge dQ ist zu diesem Zweck am geeignetsten d. Seite 103 unter 6 genannte, nämlich:

$$dQ = (1-y)c\,dt + r\,dy + y\,h\,dt$$

wenn h d. Ausdruck bedeutet:

$$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}$$

und bezeichnet nach mit h jene Wärme d. Dampfes, welche einem kleinen Volumen und Druckveränderung bei d. Wärmemittheilung entspricht, daß dabei d. Dampf [illegible] gesättigt bleibt.

Im vorliegenden Fall ist nun aber y constant und mithin $dy = 0$, folglich wird d. Gleichung für $d\theta$ d. Mittelglied mit dy fortfällt, wenn dieselbe speciell für den zu betrachtenden Fall gelten soll. Also:

$$d\theta = (1-y)\,c\,dt + y\,h\,dt = [(1-y)c + y\,h]\,dt$$

Substituiren für d. Grenzfall, daß $y = 1$ d. h. daß d. Dampf noch gesättigt aber vollkommen trocken ist, also nicht mit Flüssigkeitsbläschen untermischt:

$$d\theta = h\,dt$$

Aus [illegible] dieser Gleichung kann man d. [illegible] Bedeutung von h erkennen.

[illegible] aus d. Gleichung für $d\theta$, daß d. Vorzeichen von h darüber entscheidend ist, ob einem gesättigten [illegible], also nicht mit Flüssigkeit gemischten Dampf, [illegible] bei d. Ausdehnung ([illegible] von t) [illegible] gesättigt und trocken bleiben soll, Wärme mitgetheilt od. entzogen werden muß.

Bei d. Expansion muß [illegible] mit wachsendem Volumen v der Druck p und mithin d. Temperatur t abnehmen, wenn d. [illegible] [illegible] y = constant bleiben soll, vorausgesetzt. Bei d. Expansion ist also immer dt negativ, dagegen umgekehrt bei d. Compression d. gesättigten Dampfes positiv. Wenn nun auch h negativ ist, so ist $d\theta$ positiv und wenn h positiv ist, so ist $d\theta$ negativ.

[illegible] daraus, daß, ob d. Vorzeichen von h darüber entscheidet, ob $d\theta$ positiv od. negativ ist bei einem negativen Werth von dt entsprechend d. Expansion, [illegible] positiven Werth von dt bei d. Compression.

Bei d. Expansion wird mit negativem h d. Dampf Wärme mitgetheilt mit: $d\theta = +$ für $h = -$
und mit positivem h . . . entzogen mit: $d\theta = -$ für $h = +$ } mit $dt = -$
Und bei d. Compression wird mit negativem h . . . entzogen mit: $d\theta = -$ für $h = -$
und mit positivem h . . . mitgetheilt mit: $d\theta = +$ für $h = +$ } mit $dt = +$

Für gesättigten Wasserdampf kann man nun leicht erkennen, daß h unter allen Umständen einen negativen Werth hat; man kann nämlich schreiben:

$$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T} = \frac{dq}{dt} + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T} = \frac{d(q+r)}{dt} - \frac{r}{T}$$

Unter $q + r$ versteht man d. sog. Gesammtwärme eines Dampfes, welche [illegible] für Wasserdampf ist: $q + r = 606{,}5 + 0{,}305\,t$, folglich wird:

$$h = \frac{d(606{,}5 + 0{,}305\,t)}{dt} - \frac{r}{T} = 0{,}305 - \frac{r}{T}$$

Was nun den Quotienten $\frac{r}{T}$ für gesättigten Wasserdampf betrifft, so findet man ihn durch betreffende Rechnung für d. Druck $p = \frac{1}{10}$ bis zu 14 Atm zwischen d. Grenzen 1,8 und 1.

Innerhalb dieser Grenzen $p = \frac{1}{10} - 14$ Atm und auch noch ziemlich weiter hinaus ist h für gesättigten Wasserdampf beständig negativ.

Gesättigtem, trockenem Wasserdampf muß demnach Wärme mitgetheilt werden, wenn er bei d. Expansion gesättigt und trocken bleiben soll und umgekehrt bei d. Compression Wärme entzogen werden, wenn er gleichfalls gesättigt und trocken bleiben soll.

Die meisten anderen Dämpfe verhalten sich ebenso wie gesättigter Wasserdampf mit Ausnahme d. Aetherdampfes, indem dieser innerhalb d. obigen Grenzen h beständig positiv hat, dem also bei d. Expansion Wärme entzogen werden und bei d. Compression Wärme mitgetheilt werden muß, wenn er immer gesättigt und trocken bleiben soll.

Das gleiche Verhalten findet man aber offenbar nicht nur dann statt, wenn d. Wasserdampf vollkommen gesättigt und trocken ist, sondern auch dann, wenn derselbe mit einer gewissen Menge Wassertheilchen gemischt ist, sofern d. Verhältniß y nicht unter einen bestimmten Grenzwerth herabsinkt. Dieser Grenzzustand ist dadurch charakterisirt, daß d. Quotient $\frac{dQ}{dt}$ den Werth [illegible] erhält, welcher also [illegible] diese Grenze 0 [illegible].

Für $\frac{dQ}{dt} = 0$ folgt nach der entsprechenden Gleichung von [illegible]

$$y = \frac{c}{c-h}$$

Einem solchen Gemisch von Wasser mit gesättigtem Wasserdampf, worin aber y nicht unter d. Grenze $\frac{c}{c-h}$ kommen darf, muß demnach, wenn d. verhältnißmäßige Dampfmenge y constant bleiben soll, bei d. Expansion Wärme mitgetheilt und bei d. Compression Wärme entzogen werden.
Mit Hilfe d. früher gefundenen Werthe [illegible] kann man diesen Werth, welchen y nicht überschreiten darf, damit d. betreffende Gemisch in d. gleichen Weise sich [illegible] verhalte wie trockener gesättigter Dampf, [illegible] berechnen.
Z. B. findet man zwischen d. Grenzen $p = \frac{1}{2}$ Atm — 8 Atm

$$y_{min} = \frac{c}{c-h} = 0{,}45 - 0{,}57$$

Derjenige Wasserdampf, welcher bei Dampfmaschinen [illegible] ist, [illegible] mit ziemlich viel Wasser [illegible], [illegible] 20 % [illegible], so daß $y = 0{,}80$ [illegible]. Dieser Dampf [illegible] verhält sich demnach [illegible] wie trockener gesättigter Wasserdampf. Einem solchen Dampfe muß also, damit y constant bleibt, bei d. Expansion Wärme mitgetheilt und bei d. Compression Wärme entzogen werden. Geschieht dies [illegible] nicht, [illegible] bei d. Expansion keine Wärme mitgetheilt, so muß nothwendig eine theilweise Condensation stattfinden, und wird d. Dampfe bei d. Compression keine Wärme entzogen, so muß nothwendig eine theilweise Verdampfung [illegible] stattfinden. Bei den Dampfmaschinen findet [illegible] statt, indem d. Expansion und Compression so schnell [illegible], daß [illegible] Wärmemenge [illegible] kann.

Diese Betrachtungen [illegible] Rankine [illegible] Theorie d. Dampfmaschinen [illegible] daß d. Mischungsverhältniß von Dampf und Wasser also y [illegible] constant bleibe [illegible] vollkommen falsch. —

Ferner kann noch bemerkt werden, daß d. innere Arbeit eines Gemisches von Dampf und [illegible] Flüssigkeit [illegible], wenn [illegible] d. verhältnißmäßige Dampfmenge y constant bleibt.
Allgemein ist nämlich d. Wärmewerth d. inneren Arbeit [illegible]:

$$AU = q + y\rho$$

Differentiirt man diese Gleichung nach t, [illegible] y constant [illegible] verhältnißmäßigen Dampfmenge y, so erhält man:

$$A\frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt} + y\frac{d\rho}{dt} \quad \text{wo d. } \frac{dq}{dt} \text{ [illegible] Wärme } c:$$

$$A\frac{dU}{dt} = c + y\frac{d\rho}{dt}$$

[illegible] $\frac{d\rho}{dt}$ [illegible]

$$\rho = 575,4 - 0,791\,t \quad \text{also} \quad \frac{d\rho}{dt} = -0,791$$

und folglich $$A\,\frac{dU}{dt} = c - y \cdot 0,791$$

Indem nun für Wasser c nahe $= 1$, [illegible] $A\frac{dU}{dt}$ [illegible]

[illegible] $v = \Delta\rho$ und dt [illegible] dU [illegible]

Zustandsänderung bei constantem inneren Arbeitsvermögen

[illegible]

$$U = \text{constant}$$

[illegible]

$$AU = q + y\rho = \text{constant} = q_0 + y_0\rho_0$$

wenn unter $q_0\ \rho_0\ y_0$ die Werthe von $q\ \rho\ y$ im Anfangszustand verstanden werden.

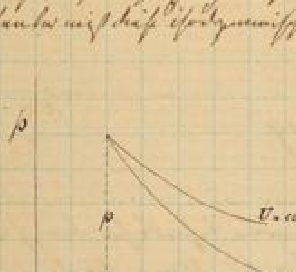
[illegible]

$$v = w + y\Delta,$$ wenn w [illegible]

[illegible]

$$y = \frac{q_0 + y_0\rho_0 - q}{\rho}$$ [illegible]

$$v = w + \Delta\,\frac{q_0 + y_0\rho_0 - q}{\rho}.$$ [illegible] v und p, indem $\Delta\ q\ \rho$ [illegible] v und p [illegible] $(v_0\ p_0)$ [illegible]



[illegible] v [illegible] y [illegible]

$$y = \frac{q_0 + y_0\rho_0 - q}{\rho},$$ [illegible]

$$y = y_0 + \frac{(q_0 + y_0 \rho_0) - (q + y \rho)}{\rho}$$

Hierin ist nun $q_0 + y_0 \rho_0$ [illegible] im Anfangszustande und $q + y\rho$ [illegible]

[illegible]

$$q_0 + y_0 \rho_0 > q + y \rho$$

[illegible]

[illegible] $y > y_0$ sein.

[illegible]

$$v = w + y u = w + \frac{q_0 + y_0 \rho_0 - q}{\rho} u$$

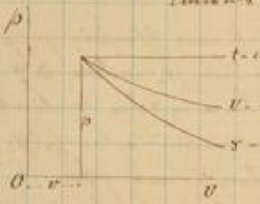
[illegible]

1) [illegible]

2) [illegible]

3) [illegible]

4) [illegible]



[illegible]

Zustandsänderung ohne Mittheilung od. Entziehung v. Wärme.

[illegible]

Ist bei Zustandsänderung je eine charakteristische durch:

$$dQ = 0$$

Für dQ, nämlich für die Wärmemenge, welche 1 kg des Gemisches von Flüssigkeit und gesättigtem Dampf bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung mitgetheilt werden muß, wurde früher ein Ausdruck gefunden (Seite 108). Wir setzen dort unter 3 genannten Werth von dQ nämlich:

$$dQ = dq + T\,d\left(\frac{yr}{T}\right)$$ so ergibt sich mit $dQ = 0$ die der vorliegenden Zustandsänderung charakteristische Gleichung:

$$0 = \frac{dq}{T} + d\left(\frac{yr}{T}\right)$$

Um nun diese Gleichung auf eine einfache Form zu bringen, sollen einige neue Buchstabenbezeichnungen eingeführt werden und zwar soll gesetzt werden:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dq}{T} = a \quad \text{und} \quad \frac{r}{T} = b.$$

Sobald q wie T und r Funktionen der Temperatur t sind, so sind auch a und b Temperaturfunktionen. Da aber weiter durch die Temperatur gesättigten Dampfes auch seine Spannung bestimmt ist, so kann man a und b auch als Funktionen von ~~t~~ p betrachten.
Durch Einführen der Werthe von a und b in die obige Gleichung bekommt man:

$$0 = da + d\,yb$$ und hieraus durch Integration ergibt sich die der vorliegenden Zustandsänderung charakteristische Gleichung:

$$a + yb = \text{Const} = a_0 + y_0 b_0$$

wenn $a_0\, y_0\, b_0$ die Werthe von $a\, y\, b$ für den Anfangszustand bezeichnen.

Die Größen a und b kann man nun mit Hilfe obiger Ausdrücke und mit Rücksicht auf die früher berechneten Tabellen als Funktionen von p berechnen und für verschiedene Werthe von p tabellarisch zusammenstellen. Ist dies geschehen, so kann man nun mit Hilfe der Gleichung die der vorliegenden Zustandsänderung entsprechende adiabatische Curve bestimmen, welche durch einen bestimmten Punkt hindurchgeht; man setzt nun nämlich in die allgemeine Zustandsgleichung: $v = w + y\Delta$ den diesem Fall entsprechenden Werth von y ein, und erhält dann:

$$v = w + y\Delta = w + \frac{a_0 + y_0 b_0 - a}{b}\,\Delta$$, worin $a_0\, y_0\, b_0$ als die dem Anfangszustand charakteristischen Größen als gegeben zu betrachten sind, während $a\, b\, \Delta$ als Funktionen von p erscheinen, sodaß diese Gleichung eine Beziehung zwischen v und p. w = spez. Volumen der Flüssigkeit ist gewöhnlich $= \text{const}$ zu setzen. Diese eben gefundene Gleichung ist also die Gleichung der Zustandscurve mit den Coordinaten v und p, welche der vorliegenden adiabatischen Zustandsänderung entspricht, also die Gleichung der adiabatischen Curve.

Bei bestimmter Flüssigkeit ist diese adiabatische Curve bestimmt, für Gemisch von Wasser und Wasserdampf und es ist dazu nöthig eine Tabelle für a und b entsprechend verschiedenen Pressungen zu haben.
Was nun b betrifft so kann diese Größe direkt berechnet werden, weil ja die früher angegebenen Temperaturfunktionen von r und T sind und mit Rücksicht auf dieselben berechneten Tabellen, es ist nämlich dann direkt zu setzen:

$$b = \frac{r}{T} = \frac{\varrho + Ap\Delta}{273 + t}$$, diese Formel liefert mit Hilfe der bekannten Werthe von ϱ und $Ap\Delta$ für verschiedene Temperaturen und also für verschiedene Pressungen die entsprechenden Werthe von b.

Was aber die Veränderliche Größe a betrifft, so ist hiefür eine Nebenrechnung erforderlich.
Es ist bekanntlich:

$$c = \frac{dq}{dt} \quad \text{also} \quad dq = c\,dt$$ und zwar wird für Wasser gefunden:

$$dq = c\,dt = \left(1 + \frac{4}{10^5}t + \frac{9}{10^7}t^2\right)dt$$ wo also hier für die spezifische Wärme c.

Demzufolge ist nun mit $T = 273 + t$:

$$a = \int_0^t \frac{dq}{T} = \int_0^t \frac{\left(1 + \frac{4}{10^5}t + \frac{9}{10^7}t^2\right)}{273+t}\,dt$$

Dieses Integral kann man nun nach den bekannten Regeln der Integralrechnung in eine einfache Funktion von t verwandeln, dessen Integration den folgenden Ausdruck ergibt:

$$a = 2{,}431884 \lg \frac{273+t}{273} - 0{,}0002057\,t + 0{,}00000045\,t^2$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man nun für a die verschiedenen Werte berechnen, indem mit t auch p bekanntlich bestimmt ist. Eine derartige Tabelle findet man Grashof 835.
Um vermittelst der folgenden Tabelle durch Interpolation die Werte von a und b auch für solche Werte von p zu bestimmen, welche nicht unmittelbar in der Tabelle enthalten sind, kann man bemerken, daß die Differenzen Δa und Δb von a und b mit den Differenzen von t als proportional angenommen werden können. Zum Zweck der Interpolation sind deshalb die Werte von t und die Differenzen von a und b für $\Delta t = 1$ in der folgenden Tabelle hinzugefügt worden, vermittelst welcher a und b genügend genau berechnet werden können.

Mit Hilfe genannter Tabelle ist es jetzt leicht für ein Gemisch von Wasser und Wasserdampf die entsprechende adiabatische Curve zu verzeichnen, welche durch einen gewissen gegebenen Punkt (v_1 p_1) hindurchgeht.

Mittelst der gegebenen Anfangsspannung p_1 lassen sich die dem Anfangszustand entsprechenden Größen a_1 und b_1 aus der genannten Tabelle entnehmen, ferner kann man mit Rücksicht auf früher erwähnte Tabellen den der Spannung p_1 entsprechenden Wert von Δ_1 bestimmen. Mit Rücksicht auf das gegebene Volumen v im Anfangszustand $= v_1$ kann man dann auch die dem Anfangszustand entsprechende verhältnismäßige Dampfmenge y_1 berechnen gemäß der Formel $v_1 = w + y_1\Delta$.

$$y_1 = \frac{v_1 - w}{\Delta} \quad \text{und mit } w = \text{spez. Volumen des Wassers} = 0{,}001:$$

$$y_1 = \frac{v_1 - 0{,}001}{\Delta}$$

Man kennt also jetzt v_1 y_1 a_1 b_1 Δ_1 und p_1 für den Anfangspunkt v_1 p_1.

Um nun irgend einen anderen Punkt der adiabatischen Curve zu finden, hat man für die angenommene p den entsprechenden Wert von v zu berechnen. Dies kann dadurch geschehen, daß man aus der früheren Tabellen für p den entsprechenden Wert von a und b entnimmt und ebenso aus der früheren Tabellen den der Spannung p entsprechenden Wert von Δ entnimmt. Mit Hilfe der Gleichung:

$$v = w + \frac{a_1 + y_1 b_1 - a}{b}\,\Delta$$ kann man dann auch den entsprechenden Wert von v berechnen und somit einen Punkt der adiabatischen Curve bestimmen. Ebenso kann auch eine beliebige Anzahl, überhaupt beliebig viele Punkte gefunden werden, welche miteinander durch eine stetige Curve zu verbinden sind um die gesuchte Form der adiabatischen Curve zu bekommen, welche durch den Punkt v_1 p_1 hindurchgeht.

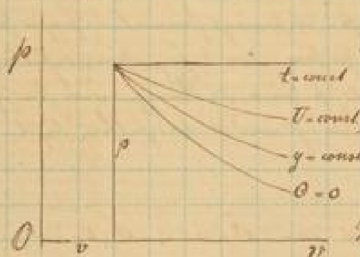
Interessant ist es nun auch zu untersuchen, in welcher Art und Weise d. adiabatische Curve und die Curve constanter Dampfmenge, welche durch denselben Punkt (v, p) gehen, sich schneiden.
Zu dieser Absicht kann man nun bemerken, daß dem früheren zufolge, schon d. verhältnißmäßige Dampfmenge y einen gewissen durch d. Gleichung Seite 110:

$$y_{min} = y_0 = \frac{c}{c-h},$$

wenn c und h bekanntlich die specifischen Wärmen bezeichnen, bestimmten Grenzwerth y_0 überschreitet, wenn d. Expansion d. Gemisches aus Dampf und Flüssigkeit, entsprechend einer adiabatischen Curve, eine theilweise Condensation von Dampf zu Flüssigkeit also eine Abnahme von y entstanden ist.
Bei einem Gemisch von Wasserdampf und Wasser jedenfalls nimmt dann $y > 0{,}5$, indem bei zu den früher besprochenen Versuchen d. Grenzwerth $y_0 = \frac{c}{c-h}$ sich einem ungefähr $0{,}5$ stellte.
Die Zustandsgleichung:

$$v = w + y\Delta$$

lehrt nun erkennen, daß bei d. Expansion (Zunahme von v) also bei abnehmender verhältnißmäßiger Dampfmenge y d. Werth Δ schneller wachsen muß, als wachsen würde, wenn y constant bliebe. Indem nun aber gewiß bei wachsendem Δ, p abnimmt, so kann man auch schließen, daß auch bei d. Expansion also bei einem Wachsen d. Volumens v nach adiabatischer Curve entsprechend einer gleichzeitigen Abnahme von y, p schneller abnehmen muß als wenn y constant bliebe entsprechend d. Expansion bei constanter verhältnißmäßiger Dampfmenge. Daraus folgt, daß d. adiabatische Curve $(\Theta = 0)$ für einen irgend einen Punkt (v, p) und für den Fall $y > y_0$ schneller d. v-Axe nähert als d. Curve constanter Dampfmenge $(y = const)$ und da diese sich auch schneller d. v Axe schneller nähert als d. isodynamische Curve $(U = const)$ so haben die in beifolgender betreffenden Zustand einer durch Dampf und Flüssigkeit gemischten in einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt (v, p) überhaupt eine solche Lage zu einander, wie nebenstehende Figur erkennen läßt.



Die Curven $\Theta = 0$ würde im Punkt $(v\,p)$ d. Curve $y = const$ berühren resp. zwischen ihr und d. Curven $U = const$ (für wachsende Volumina v) fallen, wenn $y = y_0$ resp. $y < y_0$ wäre.
Im Allgemeinen und besonders für Wasserdampf jedenfalls Bedingung erfüllt daß $y > y_0$ ist.

Mit Rücksicht auf d. bisherigen Bemerkungen ist es nun ... Arbeit d. Expansionsarbeit (E) kennen zu lernen, welche ... d. Gemisches bei d. Zustandsänderung nach d. adiabatischen Curve erhalten wird. Zu ihrer Bestimmung dient d. allgemeine Wärmegleichung:

$$W\,dQ = dU + dL.$$

Indem nun aber in d. vorliegenden Fall, nach Wärme weder mitgetheilt noch entzogen wird, ... ist, so muß auch $dQ = 0$ sein und folglich haben wir zu setzen:

$$-dU = dL.$$

Die Expansionsarbeit erfolgt also dann so, daß sich ein Theil d. innern Arbeitsvermögens in Expansionsarbeit umsetzt. Durch Multiplication mit A erhält man:

$$A\,dL = -A\,dU = -d(AU) \text{ weil } A = const.$$

D. Größe AU ist bekanntlich d. Wärmewerth d. innern Arbeitsvermögens d. spec. Körper nennen, für welche d. Gleichung gilt: (Seite 101 Gleich. 2)

$$AU = q + y\varrho$$

vorausgesetzt, daß d. Wärmemenge gemessen wird von dem Zustand aus, wo d. ganze Masse bei 0°C tropfbar flüssig war. Setzen wir diesen Werth AU ein, so ergiebt sich:

$$A\,dE = -\,dq - d(y\varrho)$$

Durch Integration bekommt man somit für eine Zustandsänderung endlicher Größe, bei welcher d. Pressung von p_1 bis p abnimmt, während d. verhältnißmäßige Dampfmenge im Anfange $= y_1$ war:

$$A E = q_1 - q + y_1 \varrho_1 - y \varrho$$

Hierin sind q_1 y_1 und ϱ_1 durch d. Anfangszustand gegeben. Wenn d. Größe d. Expansionsarbeit gegeben ist durch d. Pressung p im Endzustand, so sind auch q und ϱ bekannt. D. Werth von y ist nach d. Gleichung zu bestimmen:

$$a + y b = a_1 + y_1 b_1$$

woraus:

$$y = \frac{a_1 + y_1 b_1 - a}{b}$$

Es sind hierin a_1 b_1 und y_1 wieder bekannte Größen, indem a_1 und b_1 durch p_1 bestimmt sind, y_1 durch d. Anfangszustand gegeben ist und a u. b mit p bekannt sein würden entsprechend d. bekannten Größen a, b und p [illegible] Functionen.

Noch schwieriger würde es z. B. d. Arbeit zu berechnen, welche Dampf in einer Dampfmaschine durch Expansion verrichtet, wenn unsere Untersuchung im Cylinder abgeschlossen wird und [illegible] gegen Wärme [illegible], [illegible] außer d. Anfangszustand nicht sowohl d. Pressung im Endzustand als vielmehr d. Expansionsverhältniß

$$e = \frac{v_1}{v}$$

gegeben zu sein pflegt, [illegible] durch eine möglichst einfache Näherungsformel d. Expansionsarbeit als unmittelbare Function d. mit d. Anfangszustand gegebenen Größen und d. Expansionsverhältnisses e ausdrücken zu können. Dieser Zweck ist erreicht, wenn sich d. [illegible] Curve d. Dampfes [illegible] durch eine einfache Gleichung $p = f(v)$ unmittelbar zwischen p und v darstellen läßt, denn es ist dann [illegible] Expansionsarbeit E:

$$E = \int_{v_1}^{v} p\,dv = (\text{mit } p = f(v)) = \int_{v_1}^{v} f(v)\,dv = F(v) - F(v_1)$$

und da $e = \frac{v_1}{v}$ also $v = \frac{v_1}{e}$:

$$E = F\left(\frac{v_1}{e}\right) - F(v_1)$$

Es bleibt nun noch zu untersuchen, ob sich nicht eine Formel ähnlich derjenigen für Gase ermitteln läßt, welche bekanntlich $p \cdot v^n = \text{Const}$ war. Als Form hat man zuerst Rankine

$$p v^m = \text{Const} = p_1 v_1^m$$

vorgeschlagen. Hierbei wird zwar d. Exponent m nicht ebenso wie früher bei d. Gasen constant sein, sondern eine Function d. Expansionsverhältnisses e und d. den Anfangszustand bestimmenden Größen p_1 und v_1 sein. [illegible] wird d. Gleichung [illegible] gerechtfertigt, daß sich m als [illegible] wenig mit e p_1 und y_1 veränderlich herausstellt, um dafür bei gewissen Gruppen von Aufgaben einen annähernd festen constanten Mittelwerth setzen zu können.

Es kommt nun darauf an, den Exponenten m als eine Function von e p_1 und y_1 [illegible] darzustellen [illegible] für ein [illegible] Wasser und Wasserdampf [illegible] mit Rücksicht auf [illegible] Tabellen, welche d. in Betracht kommenden Größen unmittelbar als Functionen d. Pressung enthalten, [illegible] diese Bestimmung zunächst für gewisse Werthe von e p_1 und y_1 auszuführen, [illegible] bei [illegible] Bestimmung d. entsprechenden Werthe von e [illegible] d. Zusammenhang zwischen m und e p_1 y_1 findet.

Es ist nämlich:

$$p \cdot v^m = p_1 \cdot v_1^m \quad \text{also} \quad \left(\frac{v_1}{v}\right)^m = \frac{p}{p_1} = e^m$$

und daraus $$m = \frac{\lg \frac{p}{p_1}}{\lg e}$$

Hierin ist für Wasser:

$$v = 0{,}001 + y s \quad \text{und} \quad v_1 = 0{,}001 + y_1 s_1 \quad \text{und} \quad e = \frac{v_1}{v}$$

Auf diese Weise ergeben sich nun für verschiedene Werthe von p_1, y_1, p, welche zwischen solchen Grenzen gewählt werden müssen, daß sie alle bei der Expansion in Betracht kommenden Verhältnisse vollständig umfassen, die in einer Tabelle zusammengestellten Werthe von y, e und m, wie solche in Grashof § 35 aufgestellt sind.

Wenn man nun m auf den 3 Decimalstellen gefunden hat, so kann man die Werthe in die Formel einsetzen:

$$m = \alpha - \beta p_1 + \gamma \lg p_1 + b \lg e.$$

Hierin sind α β γ und b von y_1 abhängig und es ergibt sich mit Hülfe der vorstehenden Tabellen ihr Werth mit genügender Genauigkeit aus den Formeln:

$$\alpha = 1{,}0014 + 0{,}1924\, y_1 - 0{,}06\, y_1^2$$
$$\beta = 0{,}0024 - 0{,}002\, y_1$$
$$\gamma = \div 0{,}0852 + 0{,}194\, y_1 - 0{,}09\, y_1^2$$
$$b = -0{,}0495 + 0{,}104\, y_1 \div 0{,}04\, y_1^2$$

Die Genauigkeit dieser Werthe ist vollkommen genügend, denn berechnet man mit ihrer Hülfe für verschiedene Fälle die Exponenten m und vergleicht diese Werthe mit den in der Grashof'schen Tabellen angegebenen, so zeigt sich, daß noch dritte Decimalstellen vollkommen übereinstimmen.

Diese Formel ist jedoch für die praktische Anwendung zu complicirt. Eine viel einfachere, wenn auch weniger genaue Formel ist:

$$m = \frac{81{,}95 + 2983\,(1-y_1)^2 + \lg p_1}{72{,}20 + 2705\,(1-y_1)^2 - \lg e}$$

Die hieraus berechneten Werthe von m zeigen mit denen aus der Grashof'schen Tabellen entnommenen höchstens eine Abweichung von 2 Einheiten in der 3ten Decimalstelle.

Will man sich mit einer noch geringeren Genauigkeit begnügen, so kann man bemerken, daß der Exponent m in geringerem Grade von p_1 und e, als von y_1 abhängt, so daß er bloß in einer einzigen Beziehung als Function von y_1 allein dargestellt werden kann. Diese einfachste Function ist:

$$m = 1{,}035 + 0{,}1\, y_1$$

welche die Werthe von m von denen aus der Grashof'schen Tabelle um höchstens eine Einheit in der 2ten Decimalstelle abweichen.

Wenn man nun auf diese Weise den Exponent m in der vereinfachten Zustandsgleichung:

$$p v^m = \text{const.} = p_1 v_1^m$$

den Umständen entsprechend für eine Gruppe von Aufgaben angenähert bestimmt hat, so können auch die ohne Mittheilung der Beziehung von Wärme stattfindenden Zustandsänderungen der in Arbeit stehenden Gemische ohne Weiteres die früher für dieselben Zustandsänderungen eines Gases gefundenen Formeln angewandt werden, natürlich nur insoweit in denselben die Temperatur nicht vorkommt, indem deren Beziehungen zu p und v bei Gasen und Dämpfen wesentlich verschieden sind. Wenn also außer dem Anfangszustand noch das Expansionsverhältniß:

$e = \dfrac{v_1}{v}$ gegeben ist, so folgt nach dem Früheren:

die Expansionsarbeit pro 1 kg d. vorliegenden Gemisches:

$$E = \frac{p_1 v_1}{m-1}\left(1 - \epsilon^{m-1}\right)$$

und ermittelt man aus d. vorausgesetzten Zustandsgleichung $p v^m = p_1 v_1^m = p_1 \left(\frac{v_1}{\epsilon}\right)^m$ mit $v = \frac{v_1}{\epsilon}$ d. Spannung im Endzustand:

$$p = \frac{p_1 v_1^m}{v^m} = p_1 \epsilon^m .$$

Durch d. Spannung p im Endzustand sind dann auch d. übrigen davon abhängigen Größen als [illegible] Größe Δ bestimmt.
Es bleibt also nur noch übrig d. entsprechende spezifische Dampfmenge y für den Endzustand zu bestimmen. Dies kann aber leicht geschehen mit Hilfe d. Zustandsgleichung:

$$v = w + y\Delta \quad \text{worin } v = \frac{v_1}{\epsilon}$$

$$\frac{v_1}{\epsilon} = w + y\Delta$$

$$\text{Also } y = \frac{\frac{v_1}{\epsilon} - w}{\Delta} .$$

Mit Hilfe dieser 3 Formeln findet man demnach d. Expansionsarbeit E pro 1 kg d. Gemisches sowie die den Endzustand charakterisierenden Größen p und y.

Handelt es sich nun um Kompression statt um Expansion, so kann man auch dieselben Formeln beibehalten, nur kann man aber nicht d. Exponenten m direkt aus den bekannten empirischen Formeln entnehmen, man müßte vielmehr [illegible] Tabellen od. [illegible] m als Funktion d. Größen p, y und $\frac{1}{\epsilon}$ darzustellen. Jedoch ist diese Aufgabe von ganz geringer Wichtigkeit und daher auch noch gar nicht durchgeführt.

Die zur Kompression pro 1 kg aufzuwendende Arbeit ist natürlich nach oben:

$$-E = \frac{p_1 v_1}{m-1}\left(\epsilon^{m-1} - 1\right)$$

Um in diese Formel einen passenden Wert von m einzuführen kann man zunächst versuchsweise einen vernünftig richtigen Wert von m nehmen und mit dessen Hilfe nach obigen Formeln y und p berechnen und dann nachsehen ob die für m aufgestellten Formeln, in welche diese Werte p und y für p und y sowie $\frac{1}{\epsilon}$ für ϵ zu setzen sind, d. Richtigkeit d. angenommenen Wertes von m zeigen.
Wie schon erwähnt ist diese Aufgabe jedoch für d. Anwendung von ganz untergeordneter Bedeutung.

Nachdem nun im Vorhergehenden die technisch interessantesten und wichtigsten Fälle von Zustandsänderungen behandelt worden sind, ist noch ein Fall übrig zu besprechen, nämlich betreffend d. Zustandsänderungen eines Gemisches zweier verschiedener Dämpfe und Flüssigkeitsgemische verschiedener Art. Ein solches Gemisch kommt bei den technischen Anwendungen nicht häufig, unter Anderem auch bei Dampfmaschinen vor, indem da [illegible] immer bei jedem Hube eine gewisse Dampfmenge zurückbleibt, die [illegible] in einen andern Zustand übergeht [illegible] ein solches Gemisch entsteht, dessen Zustandsänderungen nun näher besprochen werden sollen.

Mischung zweier Dampf- und Flüssigkeitsgemische von gleicher Art und verschiedenem Zustande.

Die allgemeine Aufgabe für einen solchen Fall ist nun folgende:

Man denke sich 2 Gefäße; das eine enthalte m_1 kgr eines Gemisches von gesättigtem Dampf und gleichartiger Flüssigkeit, das Volumen sei $= V_1$, d. Pressung d. Gemisches $= p_1$ und d. verhältnißmäßige Dampfmenge $= y_1$. Im 2ten Gefäße vom Volumen V_2 seien m_2 kgr eines Gemisches von Dampf und Flüssigkeit derselben Art wie im 1sten Gefäß aber in einem anderen Zustand, indem d. Pressung $= p_2$ und d. verhältnißmäßige Dampfmenge $= y_2$ ist.

[illegible] eine Communication zwischen beiden Gefäßen hergestellt, so [illegible] offenbar eine Mischung ein, indem aus dem Gefäße, in welchem d. Pressung [illegible] ist [illegible] Gefäß stattfindet. Dieser Vorgang, offenbar [illegible] Zustandsänderung bestehend, [illegible] Zustand, [illegible] d. Mischung in den [illegible] Gefäßen [illegible] haben wird, [illegible] und sich ein Zustand d. Ruhe eine gleichförmige Mischung gebildet hat. Dieser Endzustand ist bestimmt durch [illegible] d. Pressung $= p$ und d. Dampfmenge $= y$ in 1 kgr d. enthaltenen Gemisches. [illegible] so stellt sich [illegible] beiden Gefäßen [illegible] Gemisch her, [illegible] y = d. [illegible] Dampfmenge [illegible]. [illegible] in beiden Gefäßen [illegible] Mengen [illegible] Flüssigkeitsgemenge, so [illegible] offenbar y [illegible] verhältnißmäßige Dampfmenge [illegible].

Q sei d. Wärmemenge, welche während d. Mischungsvorganges [illegible] d. Gefäße [illegible] d. [illegible] Wärme [illegible] d. [illegible] entspricht soll.

[illegible] 2 Gleichungen aufzustellen, mit deren Hilfe man [illegible] Größen p und y und [illegible] d. [illegible] bestimmen kann.

[illegible] Volumen V_1 d. ersten Gefäßes vor d. Herstellung d. Communication war:

$$V_1 = m_1 \cdot (\text{[illegible] Volumen d. Gewichtseinheit d. Gemisches})$$

d. Volumen d. Gewichtseinheit d. Gemisches [illegible] Gefäße [illegible] allgemeinen Formel:

$$v = w + y_1 \Delta_1 \quad \text{und daraus:}$$

$$V_1 = m_1 (w + y_1 \Delta_1)$$

Ebenso [illegible] 2ten Gefäße vor d. Communication d. Volumen:

$$V_2 = m_2 (w + y_2 \Delta_2)$$

Nachdem d. Communication [illegible] und Ruhe eingetreten [illegible], befinden sich in den beiden communicirenden Gefäßen: $(m_1 + m_2)$ kgr d. enthaltenen Gemisches, dessen spec. Volumen [illegible] allgemeinen Formel: $v = w + y\Delta$ ist. Das [illegible] Gesammtvolumen $V_1 + V_2$ d. beiden Gefäße ist also:

$$V_1 + V_2 = (m_1 + m_2)(w + y\Delta)$$

[illegible]:

$$V_1 + V_2 = m_1(w + y_1\Delta_1) + m_2(w + y_2\Delta_2)$$

und daraus die erste Gleichung zur Bestimmung von p und y.

$$(m_1 + m_2)(w + \Delta y) = m_1(w + y_1\Delta_1) + m_2(w + y_2\Delta_2)$$

y. .... oder: $(m_1 + m_2)\,y\Delta = m_1 y_1 \Delta_1 + m_2 y_2 \Delta_2$

Um nun eine 2te Gleichung zur Bestimmung von p u. y zu finden, soll d. allgemeine Gleichung d. Arbeitsvermögens für jed. d. beiden Gemische angewandt werden, [illegible] in d. Gemeinschaftsmischung. Diese allgemeine Gleichung war:

$$d(L + U) = dM + dP + W dQ$$

Sie drückt aus, daß bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung d. Summe d. Arbeitsvermögens bestehend aus d. Summen d. lebendigen Kraft und d. innern Arbeitsvermögens, zusammengesetzt ist aus d. Summen d. Molekularkräfte, d. äußeren Drucks und d. Wärmewerth d. mitgetheilten Wärme. Sehen wir aber allgemein in d. vorliegenden Fällen von d. Schwerkraft, als besonders in Betracht kommende Molekularkraft ab, indem dieselbe einen ganz zu vernachlässigenden Einfluß haben, so ist zu setzen:

$$dM = 0 \text{ und es bleibt:}$$

$$d(L + U) = dP + W dQ.$$

Wendet man nun diese Gleichung nicht erst auf einzelne Gemische an und integrirt dieselbe über den ganzen Verlauf d. gegenseitigen Mischung, so ist offenbar $\int dL = 0$, indem im Anfangszustand und im Endzustand Ruhe stattfindet, also d. resultirende Änderung d. lebendigen Kraft $= 0$ ist.
Bezeichnet man also mit ΔU_1 d. Änderung d. innern Arbeitsvermögens d. 1sten Gemisches, so ist diese:

$$\Delta U_1 = P_1 + W Q_1$$

unter P_1 u. Q_1 d. Arbeit d. äußeren Drucks und d. während d. Mischungsprozesses mitgetheilte Wärmemenge verstanden, welche Wärmemenge theilweise [illegible] theils von dem andern Gemisch zuströmen mag.
Ebenso ist nun d. Änderung ΔU_2 d. innern Arbeitsvermögens d. 2ten Gemisches, wenn P_2 und Q_2 d. Arbeit d. äußeren Drucks und die während d. Mischungsprozesses dem 2ten Gemisch mitgetheilte Wärmemenge bedeuten:

$$\Delta U_2 = P_2 + W Q_2$$

Beide Gleichungen addirt giebt d. Änderung d. innern Arbeitsvermögens d. resultirenden Gemisches. In dieser Summe ist aber offenbar $P_1 + P_2 = 0$, denn da d. Gefäßwände vollkommen in Ruhe sind, so können d. Arbeiten d. äußeren Drucks nur von dem gegenseitigen Druck zwischen beiden beiden Gemischen herrühren, im schließlichen Endzustand d. Ruhe heben sich diese Drücke auf [illegible] d. Gleichgewicht, woraus nun folgt, daß d. Summe ihrer Arbeiten $= 0$ sein muß.
Was nun d. Summe $Q_1 + Q_2$ betrifft, so rührt diese theils von d. während d. Mischungsprozesses mitgetheilten Wärmemenge Q und theils von dem gegenseitigen Wärmeaustausch d. beiden Gemische her. Da der vom gegenseitigen Wärmeaustausch d. beiden Gemische herrührende Bestandtheil von Q_1 und Q_2 sich aber entgegengesetzt [illegible], so ist $Q_1 + Q_2 = Q$ und d. h.
d. Änderung d. innern Arbeitsvermögens d. resultirenden Gemisches ist also:

$$\Delta(U_1 + U_2) = QW \text{ oder: } \Delta(AU_1 + AU_2) = Q$$

mit $W = \frac{1}{A}$.

In diesem Ausdruck ist offenbar $\Delta U_1 + \Delta U_2$ d. ges. Eigenwärme od. d. Wärmeinhalt d. in einem Arbeitsvermögen beider Gewichte zusammen, dann Änderung bei d. Mischungsvorgang muss aber aufgestellter Formel = d. mitgetheilten Wärme Q ist.

Allgemein ist aber d. ges. Eigenwärme eines solchen vorliegenden Gemisches von Dampf und Flüssigkeit auszudrücken:

$$\Delta U = q + y\rho$$

unter q d. Wärmemenge verstanden, welche dazu erforderlich wird, 1 kg Flüssigkeit bei constantem Druck von 0 bis t^o zu erwärmen und unter ρ d. ges. innere Verdampfungswärme verstanden.

Dieser Formel entsprechend ist nun demnach d. Gesammteigenwärme od. Gesammtwärmeinhalt d. innere Arbeitsvermögen beider Gewichte zusammengenommen:

Im Anfangszustand: $= m_1(q_1 + y_1\rho_1) + m_2(q_2 + y_2\rho_2)$

und im Endzustand: $= (m_1 + m_2)(q + y\rho)$

Beide sollen aber nur um Q verschieden sein, woraus sich ergibt:

$$(m_1 + m_2)(q + y\rho) = m_1(q_1 + y_1\rho_1) + m_2(q_2 + y_2\rho_2) + Q$$

In diesen beiden Bestimmungsgleichungen für p und y sind q, ρ und Δ bekanntlich gewisse Functionen von p, welche schon früher entwickelt wurden und in den Tabellen numerisch zusammengestellt wurden. Wenn man nun mittelst d. einen Gleichung eine Unbekannte z. B. y eliminirt so bleibt noch eine Gleichung zur Bestimmung von p übrig, woraus freilich p nur durch Probiren gefunden werden kann, indem d. Größen ρ, q und Δ zu complicirte Functionen sind, um p direct aus d. Gleichung zu entwickeln. Hat man p gefunden, so braucht man nur diesen Werth in eine Gleichung und natürlich in d. erste Bestimmungsgleichung einzusetzen um y zu bekommen, womit dann auch d. Endzustand d. resultirenden Gemisches gefunden ist.

Für d. technischen Anwendungen sind besonders noch einige Fragen von Wichtigkeit und zwar d. folgende:

Wenn nicht bekannt $Q = 0$ und $p_1 > p_2$ vorausgesetzt wird, wie groß ist dann diejenige Wärmemenge Q_1 resp. Q_2, welche der in den miteinander verbundenen Gefäßen vorhandenen Mischung in Wirklichkeit d. Gesammtmasse mitgetheilt resp. entzogen werden müsste, um ihre Spannung von p auf p_1 zu erhöhen resp. bis p_2 zu erniedrigen.

Der frühere Fall ist ein solcher, wie er früher untersucht ist, es ist nämlich eine Zustandsänderung eines Gemisches von Dampf und Flüssigkeit bei constantem Volumen. Es wird damit auch im Allgemeinen d. Wärmemenge Q angegeben, welche ~~früher~~ 1 kg d. Gemisches mitgetheilt werden müsste um bei constantem Volumen d. Spannung von p_1 auf p zu bringen, wenn nämlich Anfangszustand d. Gemisches durch $(p_1 v_1)$ bestimmt sei, man so eine solche Wärmemenge:

$$Q = q - q_1 + y_1\Delta_1\left(\frac{\rho}{\Delta} - \frac{\rho_1}{\Delta_1}\right)$$

Wendet man diese Formel auf d. vorliegenden Fall an, wo d. Spannung bei constantem Volumen $V_1 + V_2$ von p auf p_1 gebracht werden soll, so ist d. fragliche Wärmemenge Q_1, welche dem Gesammt dazu erforderlich ist:

$$Q_1 = (m_1 + m_2)(\text{Wärmemenge pr. 1 kg})$$

Die für 1 kg erforderliche Wärmemenge ergibt sich aber direct aus d. obigen Formel, indem man nur d. mit d. Index 1 versehenen Buchstaben mit d. ohne Index versehenen Buchstaben vertauscht. Man hat also:

$$Q = (m_1 + m_2)\left[q_1 - q + y\Delta\left(\frac{\rho_1}{\Delta_1} - \frac{\rho}{\Delta}\right)\right]$$

oder:

$$Q_1 = (m_1 + m_2)\left[q_1 - q + \gamma\Delta\frac{\rho_1}{\Delta_1} - \gamma\rho\right]$$

Setzt man in diese Gleichung die sich aus Gleichung 1 und 2) ergebenden Werthe für $\Delta\gamma$ und $q + \gamma\rho$, so erhält man:

$$Q_1 = (m_1 + m_2)\left[q_1 - q + \frac{m_1\gamma_1\Delta_1 + m_2\gamma_2\Delta_2}{m_1 + m_2}\frac{\rho_1}{\Delta_1} - \frac{m_1(q_1 + \gamma_1\rho_1) + m_2(q_2 + \gamma_2\rho_2)}{m_1 + m_2}\right]$$

$$= m_2 q_1 + m_1\gamma_1\rho_1 + m_2\gamma_2\Delta_2\frac{\rho_1}{\Delta_1} - m_1\gamma_1\Delta_1 - m_2(q_2 \overset{+q}{+} \gamma_2\rho_2)$$

$$Q_1 = m_2\left[q_1 - q_2 + \gamma_2\Delta_2\left(\frac{\rho_1}{\Delta_1} - \frac{\rho_2}{\Delta_2}\right)\right]$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem allgemeinen, welcher die Wärmemenge angibt, welche 1 kg eines Gemisches von Flüssigkeit und Dampf mitgetheilt werden muß, um dessen Pressung bei constantem Volumen von p_1 auf p zu erhöhen, so ist leicht ersichtlich, daß durch Q_1 diejenige Wärmemenge, welche erforderlich ist, um die Pressung des nunmehr entstehenden Gemisches bei constantem Volumen von p auf p_1 zu erhöhen, gleich ist der Wärmemenge, welche der Masse m_2 des 2ten Gemisches vor der Mischung mit dem ersten Gemisch hätte mitgetheilt werden müssen, um ihre Pressung von p_2 auf p_1 zu erhöhen.

Ebenso gilt auch genau dasselbe hinsichtlich der anderen Frage nach Q_2, indem die obige Formel entsprechend diese Wärmemenge Q_2, welche dem resultirenden Gemisch bei constantem Volumen entzogen werden müßte, um seine Pressung von p auf p_2 zu vermindern, gleich ist derjenigen Wärmemenge, welche der Masse m_1 der ersten Mischung vor der Zusammensetzung hätte entzogen werden müssen, um ihre Pressung bei constantem Volumen V_1 von p_1 bis p_2 zu vermindern.

Also $Q_2 = m_1\left[q_1 - q_2 + \gamma_1\Delta_1\left(\frac{\rho_1}{\Delta_1} - \frac{\rho_2}{\Delta_2}\right)\right]$

Ueberhitzter Dampf.

Wie schon früher erwähnt sind d. bekannten Zustände d. Gasförmigen und d. gesättigten Dampfes Grenzzustände d. überhitzten Dampfs, indem dem ersteren eine unendlich große und letzterem eine verschwindend kleine Ueberhitzung entspricht. In der That sind in den technischen Anwendungen d. in Gebrauch kommenden Dämpfe meistens immer mehr od. weniger überhitzt, so daß natürlich auch eine besondere Wichtigkeit ist d. Verhalten überhitzter Dämpfe allgemein zu untersuchen. Um diese Untersuchung unter beliebig gegebenen Umständen aber mit Hülfe d. allgemeinen Formeln d. mechanischen Wärmetheorie ausführen zu können muß man natürlich d. Zustandsgleichung d. Dampfs kennen, d.h. d. Beziehung zwischen d. spec. Volumen v, d. Pressung p und d. Temperatur t resp. absoluten Temperatur $T = 273 + t$. Jedenfalls muß diese Beziehung, wenn sie allgemein für den ganzen Umfang d. Zustandsgebietes vom Zustand d. Sättigung bis zu entgegengesetzten Grenzzustand d. Gaszustands, gelten soll, so beschaffen sein, daß sie in beiden äußersten Grenzzuständen in d. schon bekannten Beziehungen zwischen v p u. t resp. T übergeht.

Um diese allgemeine Zustandsgleichung für überhitzte Dämpfe aufzustellen muß man sich nun erst nach den zu Gebote stehenden empirisch gefundenen Grundlagen umsehen. Die erfahrungsmäßigen Thatsachen betreffen zunächst d. Frage, in welchem (Verhältnisse) d. überhitzten Dämpfe mehr od. weniger von d. Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze abweichen, welche insbesondere bereits, namentlich von Regnault, hauptsächlich auch nur für solche Zustände näher untersucht worden sind, welche d. Grenzzustand d. Sättigung nicht nahe kommen. Was nun diese Art d. Abweichungen d. Dämpfe von den festgestellten beiden Gesetzen betrifft, so sei:

$p_0\ v_0\ t_0$ d. Pressung, d. spec. Volumen und d. Temperatur eines Dampfes für irgend einen Zustand
und $p_1\ v_1\ t_1$ " " " " " " " " " " einen andern ",

setzt man nun:

$$m = \frac{v_1}{v_0} \quad \text{für } t_1 > t_0 \text{ und } p_1 = p_0$$

$$m_1 = \frac{p_1}{p_0} \quad \text{für } t_1 > t_0 \text{ und } v_1 = v_0$$

$$n = \frac{p_1 v_1}{p_0 v_0} \quad \text{für } t_1 = t_0 \text{ und } v_1 > v_0 \text{ also } p_1 < p_0$$

so sollte, wenn d. Dämpfe nach dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze folgen sollten, sein:

$$m_0 = m_1 = \frac{T_1}{T_0} \quad \text{und} \quad n = 1$$

und zwar unter allen Umständen, denn wenn die Dämpfe d. beiden Gesetzen vollkommen folgen sollen, so müßte auch ihre Zustandsgleichung ganz dieselbe sein wie diejenige für Gase, welche bekanntlich war:

$$p v = R T$$ unter R eine Constante verstanden.

Es müßte also d. Beziehung stattfinden: $$\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0} = \frac{T_1}{T_0}$$ daraus ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } p_1 = p_0 & \dfrac{v_1}{v_0} = m = \dfrac{T_1}{T_0} \\ \text{für } v_1 = v_0 & \dfrac{p_1}{p_0} = m_1 = \dfrac{T_1}{T_0} \end{array}\right\} \quad \text{und für } t_1 = t_0 \text{ also } T_1 = T_0 \quad \frac{p_1 v_1}{p_0 v_0} = n = 1.$$

In Wirklichkeit ergaben aber d. Versuche von Regnault, daß dies [illegible] nicht d. Fall ist, indem schon [illegible], welche man gewöhnlich ihrem Verhalten nach zu den Gasen zählt, schon [illegible] Dämpfe. Es fand sich nämlich, daß m und m_1 immer $> \frac{\delta_1}{\delta_0}$ und auch $m > m_1$ sich stellte:

$$m > m_1 > \frac{\delta_1}{\delta_0}$$

und zwar fanden diese Ungleichheiten um so mehr statt, je größer [illegible] ist, bei übrigens gleichen gegebenen Werthen von t_0 und t_1, indem d. Versuche, aus denen diese Resultate gezogen sind, sich immer auf 2 bestimmte Temperaturen, nämlich $t_0 = 0°$ und $t_1 = 100°C$ beziehen.

Ferner ergab sich, daß d. Verhältniß n nicht immer $= 1$, sondern daß n stets mehr oder weniger > 1 und zwar um so mehr, je größer p_0 und je größer $p_1 - p_0$ war. Die Abweichungen d. Dämpfe von den beiden festgesetzten Gesetzen finden also in einem um so größeren Maßstabe statt, je größer d. Spannung wird u. je mehr sich d. Dämpfe dem gesättigten Zustand nähern.

[illegible]

Andere Versuche zur Aufstellung d. allgemeinen Zustandsgleichung für Dämpfe sind [illegible] d. spec. Wärme C_p bei constantem Druck angestellt worden [illegible] von Regnault [illegible] C_p [illegible]. [illegible] So fand Regnault [illegible] als Mittelwerth für C_p gefunden: $C_p = 0{,}475$.

Nach späteren Versuchen fand er aber im Mittel: $C_p = 0{,}4805$ für $t = 128° - 216°C$.

[illegible] Regnault [illegible] Mittelwerth $0{,}4805$ [illegible] C_p d. Wasserdampfs [illegible]

[illegible] Wasserdampfs [illegible] Hirn in Cassel [illegible] Wasserdampf [illegible] Temperaturen t_1 [illegible] 837 [illegible]

[illegible] Cazin von Hirn [illegible]

[illegible] t_1 [illegible] Spannung p_1 [illegible] p_2 [illegible] t_2 [illegible]

Als Behälter zur Aufnahme d. Wasserdampfes wurden bei diesen Versuchen zwei cylindrische Gefäße aus Kupfer genommen, deren ebenfalls kupferne Böden in d. Mitte mit Öffnungen versehen waren, die jedoch mittelst Stöpseln geschlossen wurden, [illegible]

[illegible]

Wenn man die vorliegenden 10 Gruppen von zusammengehörenden Werthen von $p_1 t_1$ $p_2 t_2$ mit einander vergleicht, so findet man, daß dieselben sämmtlich einem folgenden Gesetz entsprechen:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^x$$

, denn wenn man nämlich d. Exponenten x entsprechend d. 10 Gruppen berechnet, so ergeben sich für x in allen 10 Fällen [illegible] Resultate, [illegible]. Es ergiebt sich nämlich $x = 0{,}233 - 0{,}237$ [illegible] Werthen x in 9 Fällen [illegible] und nur in einem Falle wird d. Grenze $0{,}237$ [illegible] überschritten, nämlich für $p_1 = 1{,}685$ Atm. wird $x = 0{,}2437$. Im Mittel dürfte x [illegible] $= 0{,}236$ anzunehmen.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

1 .... $$dQ = c_p \frac{d\tau}{dv} dv + c_v \frac{d\tau}{dp} dp$$

2 .... $$dQ = c_v d\tau + A\tau \frac{dp}{d\tau} dv$$

3 .... $$dQ = c_p d\tau - A\tau \frac{dv}{d\tau} dp$$

[illegible] dQ [illegible] $v - p$, $v - t$ [illegible] τ, $p - t$ [illegible] τ [illegible]

c_p [illegible] c_v [illegible]

A = [illegible] τ = [illegible] $= 273 + t$.

[illegible] p v [illegible] t [illegible]

4 .... $$A = \frac{\partial}{\partial p}\left(c_p \frac{\partial \tau}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(c_v \frac{\partial \tau}{\partial p}\right)$$

5 .... $$A\tau = (c_p - c_v) \frac{\partial \tau}{\partial v} \frac{\partial \tau}{\partial p}$$

[illegible]

Hiermit sind nun bereits 2 zur Geltung gekommene Zustandsgleichungen überhitzter Dämpfe entwickelt, [illegible] Zustand eines Gases sich nähernde Dämpfe [illegible] Zustand der Sättigung sich nähernde Dämpfe [illegible].

[illegible] Zustandsgleichung eines Gases: $pv = R\vartheta$ [illegible]:

$$PV = R\vartheta$$ [illegible], unter R und ϑ Constante [illegible] $\vartheta = 273 + t =$ absolute Temperatur, [illegible] ϑ eine [illegible] Function von p, ϑ, [illegible] p [illegible] p [illegible] V eine [illegible] Function von v, [illegible] v V [illegible] v [illegible].

[illegible] die Formel [illegible]:

$$\frac{p(v+a)}{1+bp} = R\vartheta$$

welche bei passender [illegible] Bestimmung der Constanten a b und R, [illegible] Zustandsgleichung [illegible] überhitzter Dämpfe [illegible] Zustand der Sättigung [illegible].

[illegible] Zustandsgleichung [illegible] Zustand der Dämpfe [illegible].

[illegible] Zustandsgleichung [illegible] von Hirn und Cazin [illegible]. [illegible] Hirn und Cazin [illegible] absolute Temperatur [illegible] Zustandsänderung [illegible].

Wenn man [illegible] Gesetz als allgemein gültig für alle Dämpfe [illegible], [illegible] Zustandsgleichung der Dämpfe [illegible] Zustandsgleichung der Gase [illegible] Zustandsänderung [illegible] absolute Temperatur [illegible].

Unter der Voraussetzung, daß

$$a\theta = 0$$

kann man [illegible] Zustandsgleichung der Dämpfe annehmen:

$$\vartheta = a p^{\text{Exponent}}$$

[illegible] Zustandsgleichung [illegible] für Dämpfe [illegible] Sättigungszustand [illegible] Zustandsänderung [illegible] Zustandsgleichung der Gase [illegible] Exponent $= \frac{n-1}{n}$ [illegible]:

$$\vartheta = a p^{\frac{n-1}{n}}$$

~~[illegible]~~ [illegible] Constante [illegible] a [illegible] n [illegible] $= \frac{c_p}{c_v}$ [illegible]. [illegible] $\frac{c_p}{c_v}$ [illegible] n [illegible] $\frac{c_p}{c_v}$ [illegible]. [illegible] n [illegible].

Durch Differentiation der obigen Gleichung erhält man:

$$\frac{d\vartheta}{dp} = a\frac{n-1}{n}\, p^{\frac{n-1}{n}-1} = a\frac{n-1}{n}\,\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{p} = \frac{n-1}{n}\,\frac{\vartheta}{p}$$

Für diesen Differentialquotienten kann man [illegible] allgemeinen Formeln [illegible] mit $a\theta = 0$ [illegible]. Nach Gleichung 3. Seite 126 ergibt sich [illegible] mit $a\theta = 0$:

$$\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{A\vartheta}{c_p}\,\frac{dv}{d\vartheta}$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke von $\frac{d\vartheta}{dp}$ einander gleich, so erhalten wir:

$$\frac{n-1}{n}\,\frac{\vartheta}{p} = \frac{A\vartheta}{c_p}\,\frac{dv}{d\vartheta}$$ und damit, da man bekanntlich $\frac{1}{\frac{dv}{d\vartheta}} = \frac{d\vartheta}{dv}$ setzen kann:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \frac{n}{n-1}\,\frac{Ap}{c_p}$$

Weiter müssen wir uns auf die beiden Hauptgleichungen [illegible] beziehen.
Setzen wir den eben gefundenen Werth von $\frac{d\vartheta}{dv}$ in Gleichung [illegible], so erhalten wir:

$$A = \frac{d}{dp}\left(c_p\,\frac{n}{n-1}\,\frac{Ap}{c_p}\right) - \frac{d}{dv}\left(c_v\,\frac{d\vartheta}{dp}\right)$$

$$A = \frac{n}{n-1}\,A - \frac{d}{dv}\left(c_v\,\frac{d\vartheta}{dp}\right)$$

$$\frac{d}{dv}\left(c_v\,\frac{d\vartheta}{dp}\right) = \frac{A}{n-1} = \text{const}$$

und hieraus durch Integration:

$$c_v\,\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{A}{n-1}\,v + \text{Const}$$

Diese Constante [illegible], welche wie bei der Integration nach v [illegible] eine Function von p [illegible]. Setzen wir die Integrationsconstante $= \vartheta(p)$, so erhalten wir:

$$c_v\,\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{A}{n-1}\,v + \vartheta(p)$$

[illegible] $c_v\,\frac{d\vartheta}{dp}$ [illegible] Gleichung 5 [illegible] Werth [illegible] $A\vartheta$ [illegible] so ergiebt sich, wenn man den [illegible] gefundenen Werth von $\frac{d\vartheta}{dv}$ einsetzt:

$$A\vartheta = (c_p - c_v)\,\frac{n}{n-1}\,\frac{Ap}{c_p}\,\frac{d\vartheta}{dp}$$

und hieraus:

$$c_v\,\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{n-1}{n}\,\frac{c_p\,c_v}{c_p - c_v}\,\frac{\vartheta}{p}$$

[illegible] beiden Ausdrücke von $c_v\,\frac{d\vartheta}{dp}$ [illegible] Gleichung [illegible] erhält man nämlich:

$$\frac{n-1}{n}\,\frac{c_p\,c_v}{c_p - c_v}\,\frac{\vartheta}{p} = \frac{A}{n-1}\,v + \vartheta(p)$$ oder durch Multiplication mit $\frac{n-1}{A}\,p$:

$$\frac{(n-1)^2}{n}\cdot\frac{1}{A}\,\frac{c_p\,c_v}{c_p - c_v}\,\vartheta = pv + \frac{n-1}{A}\,p\,\vartheta(p)$$

$$= pv + \vartheta_1(p)$$ wenn $\frac{n-1}{A}\,p\,\vartheta(p) = \vartheta_1(p)$

Es fragt sich nun noch, welche Werthe der [illegible] Function ϑ_1 beizulegen sind. Diese Frage kann [illegible]

[illegible] $\frac{c_p}{c_v} = n$ [illegible] $c_p - c_v = AR$ [illegible]

$R\vartheta = pv.$

[illegible] c_v [illegible] $\frac{c_p}{c_v} = n$ [illegible] $c_p = n c_v$ [illegible]

$$\frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{n c_v}{n-1} = \frac{(n-1)\,c_v}{A} = \frac{\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)c_v}{A}$$

$$= \frac{c_p - c_v}{A} = \frac{AR}{A} = R.$$

[illegible]

$$R\vartheta = pv + \vartheta_1(p)$$

[illegible] $R\vartheta = pv$, [illegible] $\vartheta_1(p) = \frac{n-1}{A} p\, \vartheta(p)$ [illegible] $= 0$ [illegible] $\vartheta_1(p) = 0$ [illegible] $\vartheta(p) = 0$ [illegible]

$$\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{1}{n-1} \frac{A}{c_v} v$$

[illegible] $$\frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{c_p c_v}{c_p - c_v}\, \vartheta = pv$$

[illegible] p v [illegible] ϑ [illegible] c_p [illegible] c_v [illegible] p v [illegible] ϑ [illegible]

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \frac{n}{n-1} \frac{A}{c_p} p \quad \text{und} \quad \frac{d\vartheta}{dp} = \frac{1}{n-1} \frac{A}{c_v} v \qquad \text{— a.}$$

[illegible]

$$\frac{(n-1)^2}{n} \frac{\vartheta}{pv} = \frac{A(c_p - c_v)}{c_p c_v} = \frac{A}{c_v} - \frac{A}{c_p}$$

[illegible] c_v [illegible] A [illegible] a.

$$\frac{A}{c_v} = \frac{n-1}{v} \frac{d\vartheta}{dp} \quad \text{und} \quad \frac{A}{c_p} = \frac{n-1}{n} \frac{1}{p} \frac{d\vartheta}{dv}$$

[illegible]

$$\frac{A}{c_v} - \frac{A}{c_p} = \frac{n-1}{v} \frac{d\vartheta}{dp} - \frac{n-1}{n} \frac{1}{p} \frac{d\vartheta}{dv} = \frac{(n-1)^2}{n} \frac{\vartheta}{pv}$$ [illegible]

[illegible] $\frac{pvn}{(n-1)^2}$:

$$\vartheta = \frac{n}{n-1} p \frac{d\vartheta}{dp} - \frac{1}{n-1} v \frac{d\vartheta}{dv}$$

Diese Gleichung ist nun eine partielle Differential-Gleichung zwischen p v und ϑ nach t, während die ursprüngliche Zustandsgleichung d. einfache Integral derselben ist.
Nach Regeln d. Integralrechnung findet man, daß d. Integral dieser Differentialgleichung von d. einfachsten Form ist

$$\varphi(x, y) = 0$$

unter φ eine ganz beliebige Function verstanden, während dabei x u. y bedeuten:

$$x = \vartheta v^{n-1}$$

$$\text{und } y = \frac{\vartheta}{p^{\frac{n-1}{n}}}$$

Es läßt sich diese Behauptung ziemlich leicht beweisen:
differentiirt man zunächst $\varphi(x y)$ nach v, so hat man da v eine mittelbare Function von x und y ist:

$$\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{dy}{dv} = 0$$

und durch differentiiren nach p, welches ebenfalls eine mittelbare Function von x und y ist:

$$\frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{dp} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dp} = 0$$

Zwischen diesen beiden Gleichungen kann man nun d. Differentialquotienten von φ eliminieren, man erhält indem man d. erste Gleichung mit $\frac{dx}{dp}$ und d. 2te mit $\frac{dx}{dv}$ multiplicirt, dann d. 2te von d. ersten subtrahirt und schließlich durch $\frac{d\varphi}{dy}$ dividirt:

β $$\frac{dx}{dp} \cdot \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \cdot \frac{dy}{dp} = 0$$

Betrachtet man nun unter x und y d. angedeuteten Ausdrücke, so ist zunächst offenbar x eine mittelbare Function von v und ϑ, indem v und ϑ sich gegenseitig bedingen, also bekommt:

$$\frac{dx}{dv} = \vartheta(n-1) v^{n-2} + v^{n-1} \frac{d\vartheta}{dv}$$

Ebenso ist auch y eine Function von ϑ und p nämlich: $y = \vartheta p^{-\frac{n-1}{n}}$ und folglich:

$$\frac{dy}{dp} = -\vartheta \frac{n-1}{n} p^{-\frac{n-1}{n}-1} + p^{-\frac{n-1}{n}} \frac{d\vartheta}{dp}$$ mit ϑ eine Function von p.

Da v und p unabhängig Veränderliche sind, so folgt:

$$\frac{dx}{dp} = v^{n-1} \frac{d\vartheta}{dp}$$

und weil p umgekehrt keine Function von v ist, ϑ aber mit v sich ändert:

$$\frac{dy}{dv} = p^{-\frac{n-1}{n}} \frac{d\vartheta}{dv}$$

Setzt man diese Werthe in d. obige Gleichung β ein, so erhält man:

$$v^{n-1} \frac{d\vartheta}{dp} p^{-\frac{n-1}{n}} \frac{d\vartheta}{dv} - \left(\vartheta(n-1) v^{n-2} + v^{n-1} \frac{d\vartheta}{dv}\right)\left(-\vartheta \frac{n-1}{n} p^{-\frac{n-1}{n}-1} + p^{-\frac{n-1}{n}} \frac{d\vartheta}{dp}\right) = 0$$

oder:

$$+\vartheta \frac{(n-1)^2}{n} v^{n-2} p^{-\frac{n-1}{n}-1} + (n-1) v^{n-2} p^{-\frac{n-1}{n}} \frac{d\vartheta}{dp} - \frac{n-1}{n} v^{n-1} p^{-\frac{n-1}{n}-1} \frac{d\vartheta}{dv} = 0$$

Multiplicirt man diese durch den mit ϑ verbundenen Factor, erhält man nun:

$$-\vartheta + \frac{n}{n-1} p \frac{d\vartheta}{dp} - \frac{1}{n-1} v \frac{d\vartheta}{dv} = 0$$

diese Gleichung ist offenbar ganz dieselbe

Differentialgleichung, welche integrirt werden sollte um d. Zustandsgleichung in endlicher Form zu bekommen. D. fragliche Differentialgleichung lautet einfach folgend:

$$\varphi(x, y) = 0,$$ wenn φ eine ganz beliebige Function sein kann und unter x und y d. angegebenen Ausdrücke verstanden werden.

Hiermit ist nun zwar die Zustandsgleichung d. Körpers in einer allgemeinen endlichen Form gefunden, dieselbe enthält außer d. bekannten Größen auch eine ganz willkürlich zu wählende Function φ und es wird dieselbe zunächst besonders darauf ankommen d. erforderliche Gestalt dieser Function näher zu bestimmen. Dies kann nur geschehen auf Grund weiterer Erfahrungen. Außer den schon angewandten Erfahrungsthatsachen stehen uns weiter keine genügend und zuverlässig zu Gebote, so daß man, um φ bestimmen zu können, weitere Annahmen machen muß und dann nachher untersuchen ob die damit gezogenen Schlüsse mit anderweitigen Erfahrungssätzen übereinstimmen. Als besonders zweckmäßig erweisen sich in dieser Hinsicht 2 Annahmen:

1) Es sei d. spec. Wärme C_p bei constanter ~~Volumen~~ Pressung unabhängig von v, also eine bloße Function von p

2) Es sei d. spec. Wärme C_v bei constantem Volumen unabhängig von d. Pressung p und nur eine bloße Function von v.

Wenn man nun zunächst annimmt, daß C_p unabhängig von v und nur eine Function von p ist, so kann man d. Gleichung:

$$\frac{d\sigma}{dv} = \frac{n}{n-1}\,\frac{Ap}{C_p}$$ ohne Weiteres integriren, man erhält:

$$\sigma = \frac{n}{n-1}\,\frac{A}{C_p}\,pv + Const$$, diese Integrationsconstante braucht natürlich keine Function von v zu sein, sie muß sogar v constant sein, wohl aber kann sie eine Function von $p = f(p)$ sein.

Also:
$$\sigma = \frac{n}{n-1}\,\frac{A}{C_p}\,pv + f(p)$$

Bezeichnet man nun mit: $R = \frac{n-1}{n}\,\frac{C_p}{A}$ und multiplicirt mit diesem Werthe d. ganze Gleichung so erhält sich:

$$R\sigma = pv + R\,f(p)$$

da nun C_p eine Function von p ist, ist auch R eine Function von p, so daß man setzen kann:

$$R\,f(p) = S\,p^{\frac{n-1}{n}}$$ wenn S eine mit Grund d. vorigen Beziehungen zu wählende willkürliche Function von p ist, so ist nun nach d. Substitution:

$$R\sigma = pv + S\,p^{\frac{n-1}{n}}$$

Diese Zustandsgleichung, in welcher R und S nur bloße Functionen von p sind, muß nun aber auch d. allgemeinen Form d. Zustandsgleichung: $\varphi(x, y) = 0$ entsprechen. Mit Rücksicht hierauf läßt sich dann leicht erkennen, daß R und S nicht nur bloße Functionen von p sind, sondern daß dieselben unveränderliche Größen sind. Denn dividirt man d. Zustandsgleichung durch $p^{\frac{n-1}{n}}$, so läßt sich d. Gleichung auch schreiben:

$$R\,\frac{\sigma}{p^{\frac{n-1}{n}}} = p^{\frac{1}{n}}\,v + S$$
$$R\,\frac{\sigma}{p^{\frac{n-1}{n}}} = \left(\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{\sigma}\,\sigma\,v^{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} + S$$

Hierin ist aber $\frac{\sigma}{p^{\frac{n-1}{n}}} = y$ und $\sigma v^{n-1} = x$, so daß d. Gleichung auch geschrieben werden kann:

$$R y = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{n-1}} + S$$

[illegible] $f(x,y) = 0$ [illegible] x, y [illegible] R und S [illegible]

[illegible] C_p [illegible]

$$R\vartheta = pv + S p^{\frac{n-1}{n}}$$

[illegible] R und S [illegible] $R = \frac{n-1}{n} \frac{C_p}{A}$ [illegible] n und A [illegible] $C_p = f(p)$ [illegible] C_p = constant [illegible].

[illegible] $C_p = f(p)$ [illegible]

[illegible] v [illegible]

$$R\vartheta = pv.$$

[illegible] $\frac{C_p}{C_v} = n$ [illegible].

[illegible] Seite 129 [illegible]:

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{(n-1)^2}{n} \frac{C_p}{A} \cdot \frac{\vartheta}{pv}$$

[illegible] $R = \frac{n-1}{n} \frac{C_p}{A}$:

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + (n-1) \frac{R\vartheta}{pv}$$

[illegible]:

$$\frac{R\vartheta}{pv} = 1 + S\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{pv} = 1 + \frac{S}{p^{\frac{1}{n}} v}$$ [illegible]:

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + (n-1)\left(1 + \frac{S}{p^{\frac{1}{n}} v}\right) = n + \frac{(n-1)\,S}{p^{\frac{1}{n}} v}.$$

[illegible] v [illegible] $\frac{C_p}{C_v} = n$ [illegible] v [illegible]:

$$\frac{C_p}{C_v} = n \text{ wird.}$$

[illegible] R und S [illegible]

[illegible] $C_p = 0{,}48$, [illegible] Regnault [illegible] Kgr [illegible] p [illegible] 10333 [illegible] 10333 Kgr [illegible] = 1 Atm [illegible] R [illegible] $\frac{1}{A} = 424$:

$$R = \frac{0{,}48 \cdot 424}{10333} \frac{n-1}{n} = 0{,}019696 \frac{n-1}{n}$$

Mit Rücksicht auf die so entwickelten Beziehungen zwischen den Constanten R, n und S braucht man eigentlich nur 2 zu bestimmen, indem dann die dritte durch frühere Gleichungen bestimmt ist.

Um zunächst n zu bestimmen, kann man auf folgende Art verfahren. Die gefundene Zustandsgleichung der Gesammtheit der Zustandsänderungen des Wasserdampfes und also auch den Grenzzustand des gesättigten Dampfes umfassen muss, indem nämlich die Constanten für gesättigten Wasserdampf und damit auch die zusammengehörenden Werthe von p v und Druck t genau durch frühere Versuche und den citirten Tabellen mit ziemlicher Genauigkeit bekannt sind, kann man die vorliegenden unbekannten Constanten verhältnissmässig leicht bestimmen, wenn man die gefundene Zustandsgleichung auf den Grenzzustand des gesättigten Wasserdampfes bezieht.

Angenommen es seien $p_1\ v_1\ \delta_1$ zusammengehörende Werthe für einen einen Zustand des gesättigten Wasserdampfes
und $p_2\ v_2\ \delta_2$ " " " " einen andern " " " "
so sind diese ohne Weiteres nach Regnault durch frühere Tabellen. Setzt man diese Werthe in die Zustandsgleichung ein, so erhält man:

$$R\delta_1 = p_1 v_1 + S p_1^{\frac{n-1}{n}}$$

$$R\delta_2 = p_2 v_2 + S p_2^{\frac{n-1}{n}}$$ und hieraus durch Elimination von S:

$$\frac{R\delta_1 - p_1 v_1}{R\delta_2 - p_2 v_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Setzt man nun die Zahlenwerthe für $p_1\ v_1\ \delta_1$, $p_2\ v_2\ \delta_2$ ein und substituirt ferner für R den oben gefundenen Werth:

$$R = 0{,}019696\,\frac{n-1}{n}$$

so erhält man schliesslich eine Gleichung für $\frac{n-1}{n}$, welche freilich vom transcendenten Grade ist und daher nur durch Probiren gelöst werden kann.

Um den Werthen $\frac{n-1}{n}$ möglichst genau abzuleiten, ist es natürlich angezeigt, die Differenzen zwischen p_1 u. p_2, v_1 und v_2, δ_1 und δ_2 möglichst gross zu nehmen. Die Ausführung der Rechnung ergibt dann:

$$\frac{n-1}{n} = 0{,}249$$

Nach Versuchen von Hirn und Cazin hat sich bekanntlich im Mittel für $x = \frac{n-1}{n}$ ergeben:

$x = 0{,}236$ entsprechend einer sogenannten adiabatischen Curve; es wird aber schon aus dem beträchtlichen Werthe ersichtlich, dass dieser gefundene Werth etwas zu klein sei, weil immerhin die $Q = 0$ gesetzte Wärmemenge, welche während der Ausströmung von Beständen des Gefässes mitgetheilt wird, einen etwas zu kleinen Werth liefern wird.

Um den gefundenen Werthen $\frac{n-1}{n}$ etwas abzurunden, kann man setzen:

$$\frac{n-1}{n} = 0{,}25 = \frac{1}{4} \text{ und also } n = \frac{4}{3}$$

und dem entsprechend:

$$R = 0{,}019696\,\frac{n-1}{n} = 0{,}019696 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}004924$$

Es bleibt also nur noch übrig, die Constante S zu bestimmen, natürlich auch für Wasserdampf.

Setzt man zu diesem Zweck die oben gefundenen Werthe für R und n in die Zustandsgleichung und entwickelt nach derselben S, so erhält man:

$$S = (0{,}004924\,\delta - pv)\sqrt[4]{\frac{1}{p}}$$

Nun sind aber für 11 verschiedenen Zustände von überhitztem Wasserdampf von Hirn die zusammengehörenden Werthe von p v δ durch directe Versuche bestimmt worden, wie schon früher erwähnt. Setzt man diese als bekannten Grössen zusammengehörende Werthe von p v δ nacheinander ein, so erhält man 11 Werthe für S. Diese Werthe sind freilich ziemlich bedeutend verschieden, die Abweichungen sind aber so unregelmässiger Natur, dass man

beibehalten nach d. Dampfdruck- und Siedepunktstabellen zu schreiben hat.
Im Mittel ergibt sich demnach:

$$S = 0,1829$$

Sucht man aber mittelst d. Zustandsgleichung nach d. [illegible] d. [illegible] [illegible] [illegible] für entsprechende zusammengehörige Werthe von $p\,v\,\vartheta$ d. [illegible] genau bekannt sind, so kann man mit Hilfe derselben auch direkt S noch genauer bestimmen, indem man aus verschiedenen Gruppen zusammengehöriger Werthe von $p\,v\,\vartheta$ [illegible] und daraus S berechnet. In d. That stimmen die so gewonnenen Resultate für S ziemlich [illegible] überein. D. Mittelwerth ist:

$$S = 0,1877$$

Im Durchschnitt kann man also noch mit ziemlicher Genauigkeit annehmen:

$$S = 0,186.$$

Dieser Werth ist wahrscheinlich derjenige, welcher sich ergibt wenn man unsere [illegible] Versuchungsresultate [illegible] Pressung zu Grunde legt.
Damit kann man nun d. fertige Gleichung als d. Zustandsgleichung d. überhitzten Dampfes hinschreiben, wenn man nur d. Werthe d. Constanten einsetzt. Also:

$$pv = 0,004924\,\vartheta \div 0,186\,\sqrt[4]{p}$$

[illegible] bezüglich d. Constanten R und S, d.h. d. Pressung p in Atm. ausgedrückt ist, während [illegible] für n [illegible] —

Diese Zustandsgleichung [illegible] auf Grund d. ganz willkürlichen Annahme, daß d. spec. Wärme c_p eine [illegible] Function von p sei, [illegible], daß dann auch c_p constant [illegible], während c_v eine Function d. d. Wärmezustand charakterisierenden Größen [illegible].
Diesem Umstand [illegible] kann man sich fragen, ob man nicht eine andere Annahme machen kann, welche eine Zustandsgleichung ergibt, die sich d. [illegible] Thatsachen [illegible] besser anschließt als d. [illegible].
In dieser Hinsicht ist eine [illegible] Annahme die, daß man d. spec. Wärme c_v bei constantem Volumen als eine [illegible] Function d. spec. Volumens v als unabhängig von d. Pressung p betrachtet
also

$$c_v = f(v)$$

Dieser Annahme entsprechend, bekommt man dann aus d. bekannten Formel:

$$\frac{d\vartheta}{dp} = \frac{1}{n-1}\,\frac{A}{c_v}\,v$$ durch Integration [illegible]:

$$\vartheta = \frac{1}{n-1}\,\frac{A}{c_v}\,pv + \text{Const.}$$

Da diese Integrationsconstante nur in Bezug auf p constant zu sein braucht, so kann sie immerhin doch noch eine Function von v sein $= V$, so [illegible] Gleichung wird:

$$\vartheta = \frac{1}{n-1}\,\frac{A}{c_v}\,pv + V$$

Setzt man nun zur Abkürzung $R = (n-1)\,\frac{c_v}{A}$, wo [illegible] R natürlich ebenso wie c_v eine [illegible] Function von v sein muß, indem n u. A constant sind, so erhält man durch Multiplication mit R:

$$R\vartheta = pv + RV$$

Da R und V beides [illegible] Functionen von v sind, so kann man [illegible] [illegible] auch eine einfache Function von v setzen:

$$RV = \frac{S}{v^{n-1}},$$ so [illegible] man [illegible] als [illegible] Zustandsgleichung [illegible].

$$R T = p v + \frac{S}{v^{n-1}}$$

Es ist jetzt aber leicht einzusehen, daß nicht nur R und S bloße Functionen von v sondern auch constante Größen sind, denn diese gefundene Zustandsgleichung muß nach d. früheren allgemeinen Form d. Zustandsgleichung [illegible] entsprechen, und dies ist nur erfüllt, wenn R und S constant sind. Multiplicirt man d. obige Gleichung mit v^{n-1}, so ergibt sich:

$$R T v^{n-1} = \left(\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{T}\, T v^{n-1}\right)^{\frac{n}{n-1}} + S$$

was man nun mit d. Bezeichnungen x und y einsieht, indem man setzt:

$$T v^{n-1} = x \quad \text{und} \quad \frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}} = y:$$

$$R x - \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{n-1}} - S = 0.$$

d. allgemeinen Form d. Zustandsgleichung $\varphi(x,y) = 0$ zufolge soll aber die Zustandsgleichung nur eine Beziehung zwischen x, y und constanten Größen sein, somit folgt daß in d. obigen Gleichung auch R und S constant sein müssen.

R war aber $= (n-1)\frac{c_v}{A}$, so daß mit constantem R auch c_v constant sein muß, während d. spec. Wärme c_p in diesem Fall auch nicht nothwendig $= 0$ sein kann, weil sonst d. adiabatische Zustandsänderung identisch würde mit d. Zustand d. Gase, [illegible] c_p = spec. Wärme bei constantem Druck ein d. den Wärmezustand charakterisirendes Element.

Aus d. allgemein giltigen Gleichung Seite 129: ergibt sich

$$\frac{(n-1)^2}{n}\,\frac{T}{pv} = \frac{A}{c_v} - \frac{A}{c_p}$$

ergibt sich durch Multipliciren mit $\frac{c_v}{A}$:

$$\frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{(n-1)^2}{n}\,\frac{c_v}{A}\cdot\frac{T}{pv}$$

oder $(n-1)\frac{c_v}{A} = R$

$$\frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{n-1}{n}\,\frac{R T}{pv}$$

oder gemäß d. obigen Zustandsgleichung: $R T = p v + \frac{S}{v^{n-1}}$:

$$\frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{n-1}{n}\,\frac{pv + \frac{S}{v^{n-1}}}{pv} = 1 - \frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{S}{p v^{n}}\right)$$

$$\frac{c_v}{c_p} = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\,\frac{S}{p v^{n}}$$

Es zeigt sich nun, wie d. gefundenen Resultate mit d. erfahrungsmäßigen Thatsachen übereinstimmen, [illegible] gemäß d. Annahme c_v = constant gefundenen [illegible] übereinstimmen mit d. [illegible] gemäß d. Annahme c_p = constant, gefundenen Resultate.

Zunächst kann man bemerken, daß d. Gleichung, daß d. Zustandsgleichung d. [illegible] bei unendlicher Veränderung [illegible] mit unendlich wachsendem v in d. Zustandsgleichung für Gase übergeht, und mit wachsendem v d. letzte Glied d. Zustandsgleichung mehr und mehr [illegible], schließlich d. Gleichung wird: $R T = p v$, welche die bekannte Zustandsgleichung d. Gase ist.

Ebenso wird aus d. Forderung ersichtl., daß d. Verhältniß $\frac{c_v}{c_p}$ mit d. Ganzzahligkeit einer Größe $= \frac{1}{n}$ und indem man d. letzten Gleichung für $\frac{c_v}{c_p}$ mit wachsendem v d. letzte Summand d. rechten Seite verschwindend erscheint und also d. Gleichung für unendlich überhitzten Dampf übergeht in:

$$\frac{c_v}{c_p} = \frac{1}{n}$$

Schon kann man bemerken, daß d. Art und Weise d. Abweichung d. Verhaltens d. gesättigten Dampfes von d. Mariotte- und Gay-Lussac'schen Gesetze, welche schon im Anfange dieses Abschnitts nach d. Versuchen von Regnault festgestellt haben, in d. gefundenen Gleichung vollkommen genügende Begründung finden.

Die technische Wichtigkeit [illegible] nun nach d. Konstanten R und S für Wasserdampf zu bestimmen.

Zunächst für Wasserdampf kann man nur wieder d. Werth $n = \frac{4}{3}$ beibehalten, indem derselbe auch nach d. Versuchen von Hirn gut übereinstimmt [illegible] derselbe für d. Rechnung bedeutende Bequemlichkeit darbietet. (Da nämlich d. entwickelten Zustandsgleichungen überhitzter Dämpfe immerhin nur als Annäherungen zu betrachten sind, so kann man bei d. Aufstellung derselben auch d. Bequemlichkeit d. Rechnung einige Rücksicht tragen.)

Die Konstante R kann man nun ebenso bestimmen wie im vorhergehenden Fall c_p = constant, d.h. indem man d. Zustandsgleichung auf d. Zustand d. Gesättigtheit bezieht und dann für $p\,v\,\vartheta$ empirisch d. 2 Gruppen zusammengehörender Werthe einsetzt, welche Größen aus d. bekannten Tabellen mit bedeutender Genauigkeit entnommen werden können. Sind diese zusammengehörenden Werthe $= p_1 v_1 \vartheta_1$ und $p_2 v_2 \vartheta_2$, so erhält man aus d. Zustandsgleichung:

$$R\vartheta_1 = p_1 v_1 + \frac{S}{v_1^{n-1}} \quad \text{und} \quad R\vartheta_2 = p_2 v_2 + \frac{S}{v_2^{n-1}}$$

$$R(\vartheta_1 v_1^{n-1} - \vartheta_2 v_2^{n-1}) = p_1 v_1^n - p_2 v_2^n$$

$$\text{also } R = \frac{p_1 v_1^n - p_2 v_2^n}{\vartheta_1 v_1^{n-1} - \vartheta_2 v_2^{n-1}}$$

und wenn man hierin d. Zahlenwerthe für $p_1 v_1 \vartheta_1$, $p_2 v_2 \vartheta_2$ einsetzt, so erhält man mit $n = \frac{4}{3}$ od. $n-1 = \frac{1}{3}$

$$R = 0{,}004792$$

und schließlich aus d. Zustandsgleichung:

$$S = (0{,}004792\,\vartheta - pv)\sqrt[3]{v}$$

Hieraus kann man nun S zu finden für $p\,v\,\vartheta$ [illegible] d. als Gruppen zusammengehöriger Werthe setzen und damit 11 Werthe für S bestimmen, deren Mittelwerth sich ergibt:

$$S = 0{,}1413$$

Andererseits kann man aber auch wieder für $p\,v\,\vartheta$ verschiedene d. Sättigungszustande d. Dampfes entsprechende zusammengehörige Werthe einsetzen und damit S als Mittelwerth bestimmen; man erhält dann d. genauere Resultat:

$$S = 0{,}1459$$

Im Durchschnitt kann also mit ziemlicher Genauigkeit gesetzt werden:

$$S = 0{,}144.$$

Damit ergibt sich nun unter d. Annahme c_v = constant d. Zustandsgleichung d. Dampfes:

$$pv = 0{,}004792\,\vartheta - \frac{0{,}144}{\sqrt[3]{v}}$$

wenn p in [illegible] mit Bezug auf R und S in Atm. ausgedrückt sein muß.

Was nun den hierbei aufgestellten formen d. Zustandsgleichung für Dämpfe ist nur d. letzte. Weil d. Aufschluß d. mit den Zustandsgleichungen gefundenen Resultate betrifft, um d. erfahrungsmäßigen Verhältnissen betrifft, so ist kaum von hier d. Vorzug zu geben, indem zu wenig derartige Beobachtungen und Versuchsresultate vorliegen und man demnach eine Menge formen von Zustandsgleichungen aufstellen kann, welche alle gleich gut diesen erfahrungsmäßigen Verhältnissen entsprechen.

Wegen einiger theoretischer Untersuchungen erscheint d. Annahme c_v = const an und für sich mehr gerechtfertigt als d. Annahme c_p = const. Indem jedoch thatsächlich beide formen d. Zustandsgleichung nur als Näherungen zu betrachten sind, empfiehlt sich d. Zeuner'sche Gleichung entsprechend d. Annahme c_p = const. durch d. Umstand, daß sie eine direkte Berechnung von v mittelst d. gegebenen Größen p und T gestattet, die formel also d. Zustand überhitzter Dämpfe in den Anwendungen allgemein [illegible] zu machen gestattet. Auch zeigt sie insbesondere für Wasserdampf im Grenzzustand d. Sättigung eine recht gute Übereinstimmung mit d. früher schon empirisch abgeleiteten Tabellen und Versuchsresultaten.

Aus diesem Grund soll nun zunächst d. zuerst von Zeuner aufgestellte Gleichung gemäß d. Annahme c_p = constant als Zustandsgleichung überhitzter Dämpfe verwendet werden, nämlich d. Gleichung:

$$RT = pv + Sp^{\frac{n-1}{n}}$$

wo R S und n d. früher bezeichneten Constanten bedeuten.

Für den praktischen Gebrauch empfiehlt es sich d. Gleichung folgendermaßen umzuschreiben:

$$pv = R\left(T - \beta p^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

wo $\beta = \frac{S}{R}$ bedeutet, also auch constant.

od. $$pv = R(T - P)$$

wo $P = \frac{S}{R} p^{\frac{n-1}{n}}$ ist, also eine Function d. Pressung p ist.

Speziell für Wasserdampf ist dann zu setzen mit Rücksicht auf früher gefundene Werte für d. Constanten:

$$R = 0{,}004924 \qquad \beta = 37{,}774 \text{ und } \frac{n-1}{n} = \frac{1}{4} \text{ also } n = \frac{4}{3}.$$

Um den Gebrauch dieser formel vorerst zu erleichtern, kann man d. Function $P = 37{,}774 \sqrt[4]{p}$ auch für verschiedene Werte d. Pressung berechnen und tabellarisch zusammenstellen. (siehe Grashof).

Soll d. gefundene Zustandsgleichung allgemein für d. ganzen Umfang überhitzter Dämpfe gelten, so muß sie auch für den Grenzzustand d. Sättigung gelten. Aus diesem Grund kann sie auch benutzt werden, um d. Beziehung, welche allgemein zwischen Temperatur und Pressung [illegible] genauer und bequemer darzustellen, als dies früher schon geschehen war, welche formeln bekanntlich empirisch ermittelt waren.

Es wurde nämlich schon früher darauf hingewiesen, daß die zwischen p u. v stattfindende Beziehung für gesättigten Dampf sich nahezu d. form hat:

$$pv^m = a$$

wenn man dann für d. Constanten m und a entsprechende Werte einsetzt. Insbesondere für gesättigten Wasserdampf hatte man zu setzen:

$$m = 1{,}0646 \quad \text{und} \quad a = 1{,}7049.$$

Setzt man diese Werte ein, so kann man direkt für gegebene Werte von p d. entsprechenden Werte d. spez. Volumens v berechnen, nämlich auch nur für gesättigten Wasserdampf.

[illegible] $pv^m = a$ [illegible]

[illegible]

$$pv = a^{\frac{1}{m}}\, p^{\frac{m-1}{m}} = R\alpha\, p^{\frac{m-1}{m}}$$

[illegible] $R \cdot \alpha = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{R}$ [illegible]

[illegible]

$$pv = R\left(\vartheta - \beta p^{\frac{m-1}{m}}\right)$$

[illegible]

$$\vartheta - \beta p^{\frac{m-1}{m}} = \alpha p^{\frac{m-1}{m}}$$

$$\vartheta = \alpha p^{\frac{m-1}{m}} + \beta p^{\frac{m-1}{m}}$$

[illegible] ϑ [illegible] $t = \vartheta - 273$ [illegible]

[illegible] $\vartheta = 273 + t$:

$$t = 335{,}24\, p^{0{,}06068} + 37{,}774\, p^{0{,}25} \div 273.$$

[illegible]

	$p = 1$	3	6	9	12 Atm
	$t = 100{,}01°$	$133{,}04°$	$159{,}86°$	$175{,}47°$	$187{,}08°C$
[illegible]	$t = 100$	$133{,}91°$	$159{,}22$	$175{,}77$	$188{,}41°C$
[illegible]	$+0{,}01$	$\div 1{,}13$	$+0{,}64$	$\div 0{,}30$	$\div 1{,}33$

[illegible]

[illegible]

$$dQ = C_p \frac{d\vartheta}{dv}\, dv + C_v \frac{d\vartheta}{dp}\, dp$$

$$dQ = C_v\, d\vartheta + A\vartheta \frac{\partial p}{\partial \vartheta}\, dv$$

$$dQ = C_p\, d\vartheta \div A\vartheta \frac{\partial v}{\partial \vartheta}\, dp$$

[illegible] v, p, v [illegible] ϑ [illegible]

Um d. praktische Umformung vorzunehmen, sind d. früher festgestellten Beziehungen erforderlich, nämlich:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \frac{n}{n-1}\,\frac{A}{c_p}\,p \quad\text{und}\quad \frac{d\vartheta}{dp} = \frac{1}{n-1}\,\frac{A}{c_v}\,v$$

welche Formeln hier gelten sollen auf Grund d. allgemeinen Anfangsannahme, [illegible] [illegible] d. absoluten Temperatur proportional einer [illegible] Pressung [illegible], wenn d. Zustandsänderung nach [illegible] Curve vor sich ginge. Setzt man nun diese Werthe für $\frac{d\vartheta}{dv}$ und $\frac{d\vartheta}{dp}$ in d. allgemeinen Formen d. Wärmegleichung, so erhält man:

$$1)\quad dQ = A\left(\frac{n}{n-1}\,p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp\right)$$

$$\text{od. } 2)\quad dQ = c_v\left(d\vartheta + \vartheta\,\frac{n-1}{v}\,dv\right)$$

$$\text{od. } 3)\quad dQ = c_p\left(d\vartheta - \frac{\vartheta}{p}\cdot\frac{n-1}{n}\,dp\right)$$

Diese Formeln gelten also d. allgemeinsten Formen für d. überhitzten Dämpfe, in denen d. [illegible] Annahme c_p = const. u. c_v = const. [illegible] [illegible] für [illegible] [illegible], so entsprechen also d. allgemeinsten Form d. Zustandsgleichung überhitzter Dämpfe:

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Setzt man nun beispielsweise für Wasserdampf $n = \frac{4}{3}$, so erhält man:

$$1)\quad dQ = A(4p\,dv + 3v\,dp)$$

$$\text{od. } 2)\quad dQ = c_v\left(d\vartheta + \frac{1}{3}\,\frac{\vartheta}{v}\,dv\right)$$

$$\text{od. } 3)\quad dQ = c_p\left(d\vartheta - \frac{1}{4}\,\frac{\vartheta}{p}\,dp\right)$$

= Wärmemenge, welche 1 kg überhitzten Wasserdampfs bei irgend einer unendlich kl. Zustandsänderung mitgetheilt werden muß.

Es fragt sich ferner d. Gleichung d. inneren Arbeit [illegible] [illegible] [illegible] überhitzter Dämpfe als Funktion d. den Wärmezustand bestimmenden Elemente [illegible]. Um diese festzustellen muß d. erste Form d. Wärmegleichung mit d. allgemeinsten Form derselben verglichen werden.
D. allgemeinste Form d. Wärmegleichung war nämlich:

$$W\,dQ = dU + p\,dv \quad\text{od. mit } A = \frac{1}{W}:$$

$$dQ = A\,(dU + p\,dv)$$

d. erste Form d. auf überhitzte Dämpfe angewandten Wärmegleichung hieß aber:

$$dQ = A\left(\frac{n}{n-1}\,p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp\right)$$

es muß also sein:

$$dU + p\,dv = \frac{n}{n-1}\,p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp$$

$$\text{d. } dU = \left(\frac{n}{n-1} - 1\right)p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp = \frac{1}{n-1}\,p\,dv + \frac{1}{n-1}\,v\,dp$$

$$= \frac{1}{n-1}\,(p\,dv + v\,dp) \quad\text{und d. } p\,dv + v\,dp = d(vp)$$

$$dU = \frac{1}{n-1}\,d(p.v)$$

; d. h. innere Arbeit [illegible] [illegible] ist einer Arbeitsmenge proportional d. Product aus Pressung und spez. Volumen.

Sind dagegen $p_0 v_0$ die Werthe von p und v in einem gegebenen Anfangszustande, so erhält man durch Integration:

$$U - U_0 = \frac{pv - p_0 v_0}{n-1}$$

Wie ersichtlich stimmt diese Gleichung in ihrem Aufbau genau mit derjenigen für Gase überein, wie es auch kaum anders zu erwarten war, indem die Beziehungen zwischen p und v für überhitzte Dämpfe und Gase dieselben waren.

Setzt man in dieser Gleichung die Constante $U_0 - \frac{p_0 v_0}{n-1}$ einer einzigen Constanten: $U_0 - \frac{p_0 v_0}{n-1} = C$, und multiplicirt dann die Gleichung mit A so erhält man:

$$AU = AC + \frac{A}{n-1}\, pv$$

nach [illegible] Zustandsgleichung für überhitzte Dämpfe

setzt: $pv = R(T - \Theta)$

wobei R eine Constante und unter Θ die [illegible] Function der Pressung verstanden.

Die spec. Energie ist dagegen:

$$AU = AC + \frac{AR}{n-1}(T - \Theta)$$

Die entwickelte, aber schon in Anwendung gebrachte Zeuner'sche Zustandsgleichung [illegible] unter der Annahme C_p = constant, wobei

$$R = \frac{n-1}{n}\,\frac{C_p}{A}$$ ebenfalls eine Constante war;

also: $$\frac{AR}{n-1} = \frac{C_p}{n}$$

und dagegen

$$AU = AC + \frac{C_p}{n}(T - \Theta)$$

Aus dieser kann schließlich die spec. Energie AU als Function von Pressung und Temperatur ausdrücken, indem bekanntlich

$T = 273 + t$ und $\Theta = \beta\, p^{\frac{n-1}{n}}$ worin β eine Constante bedeutet.

Am bequemsten jedoch ist es nun die Constanten C für Wasserdampf zu bestimmen.

Dieser Werth [illegible] ist abhängig von dem Zustande, von welchem aus man ausgeht. Gewöhnlich versteht man unter AU diejenige Größe, um welche die Energie von 1 kg Dampf bei $t°$ größer ist als die Energie von 1 kg derselben Flüssigkeit bei 0° Temperatur. Nach früherem entspricht dem für gesättigten Dampf

$$AU = q + \rho = \text{(spec. Dampfwärme)}$$

wobei q die Flüssigkeitswärme bedeutet, welche erforderlich wird 1 kg Flüssigkeit bei constanter Pressung von 0° auf $t°$ zu erwärmen und unter ρ die innere spec. Verdampfungswärme verstanden.

Aus der obigen Gleichung erhält man nun:

$$AC = AU - \frac{A}{n-1}\, pv$$ und da diese auch für den Zustand der Sättigung [illegible] annehmen muß, kann man $AU = q + \rho$ setzen;

$$AC = q + \rho - \frac{A}{n-1}\, pv$$ also:

welche Formel man [illegible] p in kg pro qm ausgedrückt ist.

Um nun AC für [illegible] Wasserdampf zu finden, hat man nur die früher gefundenen Werthe von q, ρ, A einzusetzen und dann noch für pv entsprechend zusammengehörige Größen festzustellen. z. B. erhält man für [illegible] Wasserdampf von atm. Pressung, wobei man also p mit 10333 zu multipliciren hat, wenn $p = 1$ gesetzt wird, entsprechend der früher [illegible] Tabellen:

$$AJ = 100{,}5 + 496{,}3 - \frac{3.10333 \cdot 1{,}6505}{424}$$

$$AJ = 476{,}13$$

[illegible]

$$AU = 476{,}13 + 3Apv$$

[illegible] $c_p = 0{,}48$ [nach Regnault'schen Versuche:]

$$\text{od } AU = AJ + \frac{c_v}{n}(T - T) = 476{,}13 + 0{,}36(T - T)$$

[illegible]

[illegible]

$$pv^m = C$$ [illegible]

[illegible]

$$pv = R(T - T)$$ [illegible]

[illegible]

$$pv = RT$$

[illegible] $T = \beta p^{\frac{m-1}{m}}$ [illegible] $\frac{c_p}{c_v}$ [illegible]

[illegible]

$$AU = AJ + \frac{A}{n-1}\,pv$$

$$\text{od } AU = AJ + \frac{AR}{n-1}(T - T)$$

$$\text{od } AU = AJ + \frac{c_v}{n}(T - T)$$

[illegible] $pv^m = C$:

$$v^m dp + pmv^{m-1} dv = 0$$

$$\text{also } \frac{dp}{dv} = -m\frac{p}{v}$$

[illegible]

$$pv^m = p_1 v_1^m \text{ und } pv = R(T - T):$$

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^m \text{ und } \frac{T - T}{T_1 - T} = \frac{pv}{p_1 v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}} = e^{m-1}$$

[illegible] $\frac{v_1}{v}$ [illegible]

[illegible]

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}} = e^{m-1}$$

Also auch diese Beziehungen zwischen pv und ϑ in 2 aufeinanderfolgenden Zuständen unterscheiden sich für Dampf und Gas nur dadurch, daß einmal ϑ (entsprechend Gas) $\vartheta - \mathfrak{T}$ zu setzen ist für Dampf. Da also die Temperatur nicht weiter in Betracht kommt, wird man ganz dieselben Resultate wie früher für Gase finden, sobald man die betreffenden Entwicklungen nicht allzu weit ausführt.

Man kann daher auch für Dämpfe den früher gefundenen Ausdruck für die Expansionsarbeit der Gase gelten lassen als deren Expansionsarbeit, nämlich:

$$E = \frac{p_0 v_0}{m-1}\left(1 - e^{m-1}\right)$$

Was endlich noch die Wärmemenge Q betrifft, welche der Dampf pro 1 kg mitgeteilt werden muß, um von dem Zustand $p_0 v_0$ in den Zustand pv zu gelangen, so gilt für diese Wärmemenge der allgemeine Ausdruck:

$$Q = A(U - U_0 + E)$$

wobei diese Wärmemenge teilweise zur Vergrößerung des inneren Arbeitsvermögens, teils zur Verrichtung der Expansionsarbeit verwendet wird.

Was nun die Zunahme des Dampfes an innerem Arbeitsvermögen = der Zuwachs der ges. Körperwärme $= A(U - U_0)$ betrifft, so ist dieselbe noch auszurechnen:

$$A(U - U_0) = \frac{A\mathfrak{R}}{n-1}\left(\vartheta - \mathfrak{T} - \vartheta_0 + \mathfrak{T}_0\right)$$

$$= \frac{A\mathfrak{R}}{n-1}\left(\vartheta_0 - \mathfrak{T}_0\right)\left[\frac{\vartheta - \mathfrak{T}}{\vartheta_0 - \mathfrak{T}_0} - 1\right]$$

u. da nach der Zustandsgleichung: $\mathfrak{R}(\vartheta_0 - \mathfrak{T}_0) = p_0 v_0$ ist:

$$A(U - U_0) = \frac{A\mathfrak{R}}{n-1} p_0 v_0 \left[e^{m-1} - 1\right]$$

$$= \div A \frac{m-1}{n-1} \frac{p_0 v_0}{m-1}\left(1 - e^{m-1}\right)$$

Nun aber ist $\frac{p_0 v_0}{m-1}\left(1 - e^{m-1}\right) = E$ und folglich:

$$A(U - U_0) = \div \frac{m-1}{n-1} AE$$

diesen Ausdruck oben eingesetzt gibt:

$$Q = \left(1 - \frac{m-1}{n-1}\right) AE = \frac{n-m}{n-1} AE.$$

Wie ersichtlich ist auch diese Formel ganz dieselbe wie sie früher für dieselbe Wärmemenge bei Gasen gefunden wurde. Überhaupt findet man in allen entsprechenden Ausdrücken bei Dämpfen und Gasen wie schon oben erwähnt keine Unterschiede gestellt, solange die Temperatur nicht mit in Betracht kommt.

Diese allgemeinen Formeln sollen nun auf Spezialfälle von Zustandsänderungen von Dämpfen, welche unter dem allgemeinen Gesetze stehen $pv^m = C$, angewendet werden:

1) Zustandsänderung bei constantem Volumen.

[illegible] Zustandsänderung [illegible] allgemeinen Zustandsgleichung, wenn man $m = \infty$ setzt; man kann nämlich die Zustandsgleichung $pv^m = C$ auch schreiben:

$$p^{\frac{1}{m}}\, v = C^{\frac{1}{m}} = \text{constant}$$

und mit $m = \infty$ folgt: $\quad v = \text{constant}.$

Die Beziehung zwischen Endzustand und Anfangszustand ist in diesem Falle gegeben durch:

$$\frac{\vartheta - \vartheta}{\vartheta_0 - \vartheta_0} = \frac{p}{p_0}$$

Die Expansionsarbeit E ist natürlich im vorliegenden Fall bei constantem Volumen $= 0$ also $E = 0$.

Die Wärmemenge Q, welche 1 kg [illegible] um die Pressung von p_0 auf p zu steigern [illegible] mit $m = \infty$ im vorliegenden Fall [illegible] $= 0 \cdot \infty$ [illegible] in diesem Fall die erforderliche Wärmemenge Q [illegible] allgemeinen Form:

$$Q = A(U - U_0 + E) \quad \text{und } E = 0.$$

$$Q = A(U - U_0)$$ [illegible] Wärmemenge Q [illegible] zur [illegible] Formel für [illegible]:

$$AU = AJ + \frac{A}{n-1}\, pv$$ [illegible] mit constantem v:

$$Q = A(U - U_0) = \frac{A}{n-1}\,(p - p_0)\, v$$

[illegible] Wärmemenge welche 1 kg [illegible] um die Pressung von p_0 Atm. auf p Atm. zu steigern, mit $n = \frac{4}{3}$ also $n - 1 = \frac{1}{3}$:

$$Q = 3A(p - p_0)\, v$$

2) Zustandsänderung bei constanter Pressung.

[illegible] allgemeinen Zustandsgleichung $pv^m = C$ in der $m = 0$ gesetzt wird, [illegible] $v^m = v^0 = 1$ und also geht die Zustandsgleichung über in:

$$p = \text{constant} = C.$$

Um in diesem Falle den Endzustand mit dem Anfangszustand zu verbinden [illegible] die Beziehungen zwischen [illegible] und Volumen im Anfangs- und Endzustand; [illegible] mit constantem p [illegible] constant [illegible]:

$$\frac{\vartheta - \vartheta}{\vartheta_0 - \vartheta} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{1} = \frac{v}{v_0}$$

[illegible] Zustandsänderung [illegible] Expansionsarbeit E betrifft, so [illegible] im vorliegenden Falle [illegible]:

$$E = p(v - v_0)$$

Die Wärmemenge Q, welche 1 kg [illegible] bei constanter Pressung [illegible] Volumen von v_0 auf v zu steigern, [illegible] allgemeinen [illegible] mit $m = 0$:

$$Q = \frac{n}{n-1}\, AE = \frac{n}{n-1}\, Ap(v - v_0)$$ [illegible] für

[illegible] mit $n = \frac{4}{3}$: $\quad Q = 4Ap(v - v_0)$

3) Zustandsänderung d. Dampfes bei constantem innerem Arbeitsvermögen und, was dasselbe ist, bei constanter spec. Temperatur.

Wie d. Ausdruck für d. spec. Arbeitsvermögen AU erkennen läßt, ist dieses constant bei den Änderungen von $p\,v\,T$, wenn d. Product pv = constant ist. Dieses ist immer d. Fall, wenn in d. Zustandsgleichung $m = 1$ ist, da dann:

$$pv = C = \text{constant wird.}$$

Dieser Gleichung gemäß ist d. Zustandscurve, in diesem Falle isothermische genannt, offenbar eine gleichseitige Hyperbel.

Die Beziehung zwischen Druck, spec. Volumen und Temperatur im Anfangs- und Endzustand sind im vorliegenden Falle:

$$\frac{T-\mathfrak{T}}{T-\mathfrak{T}_1} = 1 \quad \text{indem } pv = p_1 v_1 = \text{constant sein soll.}$$

Was d. Expansionsarbeit E betrifft, so ergibt sich dieselbe aus d. vorhin aufgestellten Formel in unbestimmter Gestalt, indem dieselbe mit $m = 1$ übergeht in $E = \frac{0}{0}$.

Hier kann man d. Expansionsarbeit direct aus d. allgemeinen Formel berechnen:

$$E = \int_{v_1}^{v} p\,dv \quad \text{wo } p = \frac{p_1 v_1}{v} \text{ in diesem Falle ist und [illegible] } p_1 v_1 \text{ constant ist:}$$

$$= p_1 v_1 \int_{v_1}^{v} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \ln\left(\frac{v}{v_1}\right)$$

Die mitgetheilte Wärmemenge Q dient im vorliegenden Falle nur dazu um d. Expansionsarbeit zu verrichten, so daß:

$$Q = AE = A p_1 v_1 \ln\left(\frac{v}{v_1}\right)$$ ist, wie sich dies auch aus d. allgemeinen Gleichung für Q mit $m = 1$ ergibt.

4) Zustandsänderung ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme als Zustandsänderung nach d. adiabatischen Curve.

Offenbar erhält man diese besondere Art von Zustandsänderung, wenn man in d. allgemeinen Zustandsgleichung $m = n$ setzt, denn soll $Q = 0$ werden, entsprechend keiner Mittheilung od. Entziehung von Wärme, so muß nach d. allgemeinen Gleichung für Q, $m = n$ sein.

D. entsprechende Zustandsgleichung heißt demnach:

$$p v^n = C = \text{constant.}$$

Nach d. Voraussetzung, welche d. ganzen Entwicklung d. allgemeinen Zustandsgleichung für Dämpfe zu Grunde gelegt wurde, ändert sich gemäß d. Versuchen von Hirn und Cazin d. absolute Temperatur bei d. Zustandsänderung nach d. adiabatischen Curve immer proportional einer gewissen Potenz d. Druckes, so daß man schreiben könnte:

$$\mathfrak{T} = a\, p^{\frac{n-1}{n}}$$ wenn a eine bestimmte Constante [illegible], übereinstimmt mit $T = \beta\, p^{\frac{n-1}{n}}$ unter β ebenfalls eine Constante verstanden.

Demnach ändert sich im vorliegenden Falle d. Zustandsänderung d. absolute Temperatur T nach einer proportional d. Function $\mathfrak{T}$. Man kann daher in diesem Falle [illegible] Verhältnis $\frac{T-\mathfrak{T}}{T_1-\mathfrak{T}}$ einfach setzen:

$$\frac{T-\mathfrak{T}}{T_1-\mathfrak{T}_1} = \frac{T}{T_1} \quad \text{und ferner} \quad \frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^n$$

Also: $\frac{\sigma}{\sigma_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = e^{n-1}$

welche Formeln vollkommen mit den entsprechenden für Gase früher entwickelten übereinstimmen.

Die Expansionsarbeit $\mathfrak{E}$ von 1 kg Dampf ist unter diesen Umständen nach der allgemeinen Formel mit $m = n$:

$$\mathfrak{E} = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left(1 - e^{n-1}\right)$$

und insbesondere für Wasserdampf $n = \frac{4}{3}$ d. $n - 1 = \frac{1}{3}$:

$$\mathfrak{E} = 3 p_1 v_1 \left(1 - \sqrt[3]{e}\right)$$

Alle diese Formeln gelten natürlich nur so lange, als der Sättigungszustand nicht überschritten ist. Sobald aber dieser Grenzzustand überschritten wird, also der Dampf in ein Gemisch von Flüssigkeit und gesättigtem Dampf übergeht, müssen die früheren für diesen Spezialfall entwickelten Formeln in Kraft treten.

Für den letzteren Fall ist es nur von besonderem Interesse, den Grad der Überhitzung zu bestimmen, welchen ein Dampf im Anfangszustand haben muss, damit derselbe bei der ~~[illegible]~~ Expansion im Verhältnis $\frac{v_1}{v} = e$ im Endzustand genau gesättigt wird, ohne daß ihm Wärme mitgeteilt oder entzogen wird.

Angenommen also 1 kg Dampf habe den Anfangsdruck p_1 und die absolute Temperatur desselben Dampfes im Zustand der Sättigung sei $= \sigma$ und der entsprechende Sättigungsdruck p, ferner sei im Anfangszustand der Dampf überhitzt, so daß man seine absolute Temperatur im Anfangszustand setzen kann $\sigma_1 = \sigma + x$, wobei x den Grad der Überhitzung im Anfangszustand vorstellt. Dieser Dampf expandiere nun im Verhältnis $e = \frac{v_1}{v}$ ohne Mitteilung oder Entziehung von Wärme. Es ist nun die Frage zu beantworten, wie groß muss der Überhitzungsgrad x im Anfangszustand gewesen sein, damit der Dampf im Endzustand genau gesättigt sein soll. (Wenn der Dampf weiter expandiert, so bleibt der Dampf nicht mehr trocken, sondern es wird ein Gemisch von Dampf und verdichteter Flüssigkeit, zu deren Berechnung die früher entwickelten Formeln Anwendung finden müssten.)

In den allgemeinen Formeln hat man diesen Angaben entsprechend zu setzen: $\sigma_1 = \sigma + x$: also die Beziehung:

$$\frac{\sigma}{\sigma + x} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Für die Bedingung, daß im Endzustand der Dampf genau gesättigt werden soll, haben wir die schon entwickelte Beziehung, welche im gesättigten Zustand von Dämpfen zwischen p und σ stattfinden muss, nämlich:

$$\sigma = \alpha p^{\frac{m-1}{m}} + \beta p^{\frac{n-1}{n}}$$

oder setzen wir der Kürze wegen: $\frac{m-1}{m} = a$ und $\frac{n-1}{n} = b$

$\sigma = \alpha p^a + \beta p^b$. Diese Beziehung muss natürlich nur dem Sättigungszustand entsprechend, aber genau bei Temperatur σ entsprechen, so daß man durch Substitution erhält:

$$\frac{\alpha p^a + \beta p^b}{x + \alpha p_1^a + \beta p_1^b} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^b$$

oder durch Multiplikation mit dem Nenner des links stehenden Quotienten und bei Division durch p^b:

$$\alpha p^{a-b} + \beta = x p_1^{-b} + \alpha p_1^{a-b} + \beta$$

und wenn man nun noch durch $\alpha (p_1)^{a-b}$ dividiert:

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{a-b} = \frac{x\,p_1^{-a}}{\alpha} + 1$$

$$\text{also } x = \alpha\, p_1^{\,a}\left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{a-b} - 1\right]$$

Nun ist aber: $\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^n = \varepsilon^n$

$$\text{also } x = \alpha\, p_1^{\,a}\left[\varepsilon^{n(a-b)} - 1\right] = \alpha\, p_1^{\,a}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n(b-a)} - 1\right]$$

Hiernach kann man nun leicht d. erforderlichen Unterstützungsgrad berechnen, damit ein Gleichstand d. Druckpunkte erhalten wird.

Zahlenmäßig für Wasserdampf erhält man x, wenn man die schon bekannten Zahlen einsetzt:

$$x = 335{,}24\, p_1^{\,0{,}06068}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{0{,}2524} - 1\right]$$

wenn aber p_1 in Atm. ausgedrückt sein muß.

Zur leichteren Ausführung kann man für verschiedene Werte von p_1 d. Werte von x berechnen und tabellarisch zusammenstellen (siehe Graphik).

Hydraulik.

A. Gleichgewicht d. Flüssigkeiten (Hydrostatik).

Allgemeine Gesetze; Niveauflächen.

Denken wir uns irgend eine relative Flüssigkeit in relativem Gleichgew. bezüglich auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem $x\,y\,z$. Die Flüssigkeit sei z. B. in einem Gefäße, sodaß, indem d. Flüssigkeit in relativem Gleichgew. bezüglich d. Gefäßes ist, dadurch auch d. Flüssigkeit sich in relativem Gleichgew. mit d. Coordinatensystem befindet, welches mit d. Gefäß fest verbunden ist.

Für irgend einen Punkt, dessen Coordinaten $x\,y\,z$ sind, sei nun d. Componente d. beschleunigenden, also d. auf d. Masseneinheit wirkenden Massenkraft $X\,Y\,Z$ im Punkte $x\,y\,z$ d. Flüssigkeit, wo diese Massenkraft einerseits herrühren kann, nicht nur von d. gegebenen äußeren Kräften als Schwerkräften, sondern auch von d. ergänzenden Kräften d. relativen Bewegung. Es sei ferner in demselben Punkte, dessen Coordinaten $x\,y\,z$ sind, d. Pressung d. Flüssigkeit bezeichnet mit p und die spezifische Masse mit μ. Im Allgemeinen ist diese Masse als eine veränderliche Größe zu betrachten, indem hinsichtlich d. Art d. Flüssigkeit keine einschränkende Voraussetzung gemacht ist. Diese Größen $X\,Y\,Z\;p$ und μ sind im vorausgesetzten Gleichgewichtszustande d. Flüssigkeit natürlich unabhängig von d. Zeit t, also Functionen lediglich d. Coordinaten. Bezüglich d. X Achse ist (siehe Seite

$$X - \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + \dots$$

Die Glieder d. rechten Seite enthalten d. Geschwindigkeitscomponenten $u\;v\;w$, diese sind aber im vorausgesetzten Fall $= 0$, da sich d. Flüssigkeit in relativer Ruhe bezüglich d. Achsen befindet, demnach ist d. rechte Seite $= 0$ und mithin:

$$\frac{dp}{dx} = \mu X; \quad \frac{dp}{dy} = \mu Y \text{ und } \frac{dp}{dz} = \mu Z.$$

Wenn man diese 3 Gleichungen d. erste mit dx, d. 2te mit dy und d. 3te mit dz multiplicirt und addirt, so erhält man links d. vollständige Differential von p, da p nur von $x\,y\,z$ abhängt.

Also: $$dp = \mu\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Diese Glch. lehrt diejenige Änderung kennen, welche d. Pressung d. Flüssigkeit erfährt, wenn man von irgend einem Punkte x zu einem unendlich nahen $x + dx$ etc. übergeht. Da nun d. linke Seite dieser Glch. das vollständige Differential einer gewissen Function d. Coordinaten ist, so muß dasselbe auch von d. rechten Seite gelten und dazu ist bekanntlich erforderlich, daß d. Größe μ folgenden Bedingungen entspricht:

$$\frac{d(\mu Y)}{dz} = \frac{d(\mu Z)}{dy}; \quad \frac{d(\mu Z)}{dx} = \frac{d(\mu X)}{dz} \text{ und } \frac{d(\mu X)}{dy} = \frac{d(\mu Y)}{dx}.$$

Angenommen es sei je nach den Umständen d. betreffenden Falls diese Function gefunden, von welcher $\mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ das vollständige Differential ist; diese Function sei bezeichnet mit $F(x\,y\,z)$, so folgt:

$$p = F(x\,y\,z) + B$$ unter B eine Constante verstanden, welche bestimmt sein wird durch d. Werth, welchen d. Pressung p in einem bestimmten Punkte besitzt, welcher nothwendig gegeben sein muß. Durch diese Glch. findet man dann d. Pressung

in jedem beliebigen anderen Punkt und ebenso findet man jetzt auch für jeden beliebigen Punkt d. im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit d. spec. Masse μ, denn dieselbe entspricht d. Gleichung:

$$\mu = \frac{1}{X}\frac{\partial \Im}{\partial x} = \frac{1}{Y}\frac{\partial \Im}{\partial y} = \frac{1}{Z}\frac{\partial \Im}{\partial z}.$$

Durch diese somit in allen Punkten d. im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit bekannten spec. Masse μ, kennt man auch d. spec. Gew. $\gamma = \mu g$ und somit auch d. Druckhöhe, worunter d. Quotient $\frac{p}{\gamma}$ zu verstehen ist; diese ist nichts anderes als d. Höhe einer Flüssigkeitssäule von d. Grundfläche 1, deren Gew. = d. Pressung p an d. betreffenden Stelle ist. Ferner findet man durch diese Gleich., durch welche p als Function von $x\,y\,z$ ausgedrückt ist, diejenige Pressung, die an verschiedenen Stellen d. Gefäßwandung stattfindet. Umgekehrt ist ferner durch diese Gleich., wenn d. äußere Druck gegeben ist, welcher auf d. freie Oberfläche wirkt, die Gestalt dieser freien Oberfläche bestimmt. —

Es ist nun ferner von Interesse, das Gesetz näher in Betracht zu ziehen, nach welchem sich d. Pressung von Punkt zu Punkt in d. Flüssigkeit ändert und dazu ist es von überwiegendem Vortheil einen neuen Begriff, nämlich den d. Niveauflächen einzuführen. Unter Niveaufläche wird jede so beschaffene Fläche verstanden, daß d. resultirende Massenkraft $\mathfrak{P} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ in jedem Punkt normal zu derselben gerichtet ist. Es läßt sich leicht angeben welches d. allgemeine Differentialgleich. dieser so definirten Niveaufläche ist:

Versteht man unter den Coordinaten, die nach beliebigen Raumcoordinaten bedeuteten, nun d. Coordinaten einer solchen Niveaufläche, so wird offenbar d. Niveaufläche charakterisirt durch d. Gleich.:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

denn $X\,Y\,Z$ sind proportional den cos d. Winkel, unter welchen d. Kraft $\mathfrak{P}$ gegen d. Axen geneigt ist; ebenso sind, wenn $x\,y\,z$ d. laufenden Coordinaten einer solchen Niveaufläche sind, $dx\;dy\;dz$ proportional den cos d. Winkel, welche irgend eine an d. gegebenen Punkt gezogene Tangente mit d. Axen bildet. Diese Gleich. drückt also aus, daß d. Winkel d. Richtung von $\mathfrak{P}$ normal zu jeder Tangente, und damit normal zur Fläche sei und dieses ist d. festgestellte Eigenschaft d. Niveaufläche. Damit ergiebt sich sofort eine andere, sehr natürliche Eigenschaft d. Niveaufläche, ~~denn, wenn dieser~~ Ausdruck für jede Niveaufläche $= 0$ ist, so ist mit Rücksicht auf Gl. 2 für jede Niveaufläche $dp = 0$ also $p = \text{const}$, es haben also d. Niveauflächen d. Eigenschaft, daß in allen ihren Punkten d. Pressung constant ist. —

Was d. endliche Gleich. d. Niveauflächen betrifft, so muß man bemerken, daß im Allgemeinen $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ kein vollständiges Integral zu sein braucht, da es dazu erforderlich, daß $X\,Y\,Z$ solche Functionen d. Coordinaten seien, die d. Bedingung entsprechen:

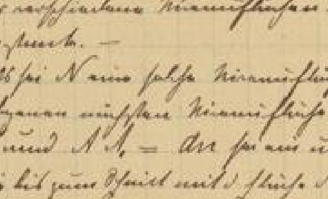
$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x},$$

dann ist aber μ ein Factor, welcher diese Function so stellt, daß sie ein allgemeines vollständiges Integral. Um also d. Gleich. d. Niveaufläche zu integriren, muß man sie mit μ multipliciren und erhält dann

$$\Im(x\,y\,z) = C.$$

unter $\Im$ diejenige Function verstanden, welche in Gleich. 4 vorkommt. Dabei ist d. Constante C, welche gleich p – $\Im$ einen verschiedenen Werth für verschiedene Niveauflächen und einen gleichen Werth für gleiche Niveauflächen hat eine arbiträre Constante. —

Es sei N eine solche Niveaufläche, in deren Punkten d. Pressung $= p$ ist, und d. unendlich nahe gelegenen nächsten Niveaufläche N_1 herrsche d. Pressung $p + dp$, es sei A irgend ein Punkt d. Niveaufläche N und $AA_1 = dn$ sei ein unendlich kl. Element d. im Punkte A zur Fläche N errichteten Normale, die bis zum Schnitt mit d. Fläche N_1 geht. D. Coordinatenaxen sollen so angenommen werden, daß A den Anfangspunkt bildet, während AA_1 d. X-Axe ist. Die Componenten und d. Richtungen d. Axen von dp sind:



$$y = z = 0 \quad \text{und} \quad X = \pm \mathfrak{P};$$

ferner ist $dx = dn$ und somit nach d. allgemeinen Gl. für dp:

$$dp = \pm \mu\,\mathfrak{P}\,dn$$

Wenn dp positiv ist, so kann in d. Gl. blos $+$ stattfinden, es ist dann:

$$dp = \mu\,\mathfrak{P}\,dn,$$

damit sieht offenbar, daß d. Kraft $\mathfrak{P}$ nur d. Richtung von A nach A_1 haben kann und zwar muß sie diese Richtung überall von einer zur anderen Niveaufläche besitzen, und zwar in dem Sinne, in welchem d. Pressung p wächst. Diese Entfernung $dn = AA_1$ wird an verschiedenen Stellen verschieden sein.

Da dp für diese Niveauflächen überall d. gleichen Werth hat, sich dn umgekehrt proportional dem Producte μ.P und da μ u. P endliche Werthe haben, so kann dn niemals = 0 sein. Denkt man sich jetzt ferner d. Flüssigkeit von Linien durchzogen, welche d. Niveauflächen senkrecht durchschneiden, so kann jede dieser Linien, eine Linie größter Pressungsänderung genannt werden; es ist d. resultierende Kraft P in jedem Punkte einer im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit tangential zu d. betreffenden Linie größter Pressungsänderung gerichtet und zwar in dem Sinne, in welchem d. Pr. wächst und d. Product aus P u. μ ist umgekehrt proportional d. Längenelement d. betreffenden Linie größter Pressungsänderung, welches zwischen 2 unendl. engen Niveauflächen enthalten ist. Wenn d. Flüssigkeit eine tropfbare ist, so kann man bei ihr 2 Oberflächen unterscheiden: d. Wandoberfläche und d. freie Oberfläche. —

Ist bei einer im Gleichgew. befindlichen tropfbaren Flüssigkeit d. angrenzende Druck in allen Punkten d. freien Oberfl. gleich groß, so ist d. freie Oberfl. selbst eine Niveaufl. Wenn nun auch d. Ausdruck $X dx + Y dy + Z dz$ nicht d. vollständige Differential zu sein braucht, so ist doch d. Fall bemerkenswerth, in welchem schon ohne Multiplication mit μ das vollständige Differential hergestellt ist. Die Function d. Coordinaten, deren Differential d. Ausdruck ist, sei U; U wird später d. <u>Kraftfunction</u> genannt. Es geht dann d. Gleich. für dp über in: $dp = \mu . dU$ und d. allg. Gl. d. Niveaufl. ist in diesem Fall: $U = C$. Wenn man d. Ausdruck von $dp = \mu\, dU$ und andererseits $= \mu P dn$ gleich setzt, so folgt:

$$P = \frac{dU}{dn}.$$

Dieser Ausdruck gilt nicht nur allgemein für d. Richtung AA, wo A, d. normale Richtung zur Niveaufl. ist, sondern auch für eine beliebige von A aus gezogene Richtung AS. ds sei ein unendl. kl. Stück auf d. Strecke AS, S d. Kraftcomponente von P in d. Richtung auf AS, so ist:

$$S = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds},$$

wenn dx dy dz d. Projectionen von ds auf d. Axen bedeuten, also:

$$S = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Diese Gl. ist nichts anderes als d. vollständige Differential von U, also:

$$S = \frac{dU}{ds}$$

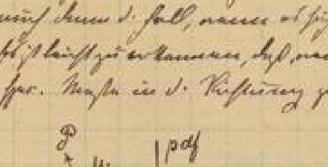
Ferner ist noch, da dp ein vollständiges Differential ist, μ dU auch ein vollständiges Differential, wenn aber μ eine Function von U ist, so ist U mit μ constant, also wenn U constant ist, so ist auch μ constant. —

Die Niveaufl. haben 3 Eigenschaften: 1) In allen Punkten ist d. resultierende Massenkraft normal zur Niveaufl. gerichtet.

2) Die Pressung in allen Punkten einer Niveaufläche ist constant

3) d. Wärmezustand ändert sich nur von einer zur anderen Niveaufl.

Handelt es sich um Flüssigkeiten, die gemischt sind, so finden diese Regeln nur statt, wenn in allen Punkten gleiches Mischungsverhältniß stattfindet. Wäre aber μ willkürlich gegeben, so könnte d. Ausdruck $\mu(X dx + Y dy + Z dz)$ nur dann ein vollständiges Differential sein, wenn schon d. Ausdruck in d. Klammer ein vollständiges Differential ist und dies kann bei Flüssigkeiten im Allgemeinen angenommen werden wegen ihrer geringen Zusammendrückbarkeit. Dasselbe ist auch dann d. Fall, wenn es sich um ein discontinuirliches Gemisch verschiedener Flüssigkeiten handelt. Es ist leicht zu erkennen, daß, wenn ~~....~~ in einem solchen Flüssigkeitsgemisch Gleichgew. herrscht, die spec. Masse in d. Richtung zunimmt, in welcher d. Richtung von P geht. Ist nämlich N eine solche Normalfläche, in welcher 2 Schichten von verschiedenen spec. Massen sich berühren, df ein unendl. kl. Stück dieser Fläche, die spec. Masse auf d. einen Seite $= \mu_1$ und auf d. anderen μ_2 und zwar sei μ_2 d. spec. Masse auf d. Seite, nach welcher d. Pr. zunimmt. Denkt man sich über df als Basis ein unendl. kl. Prisma abgegrenzt. Hierzu kommt ferner noch d. Masse wirkende Kraft = P und d. Masse d. Flüssigkeitselements, diese Masse ist also $\mu_1 . df . dn$, folglich die Massenkraft $= \mu_1 df . dn . P$ und mithin:



$$df(\mu_1 P dn - dp) = 0.$$

Nun ist d. Gleichgew. dann als ein sicheres zu bezeichnen, wenn in Folge einer unendl. kl. Störung dasselbe von selbst wieder hergestellt wird. Angenommen diese Störung werde dadurch herbeigeführt, daß in d. Raume d. Flüssigkeitselements eine unendl. kl. Flüssigkeitsmenge hineintrete, welche d. Flüssigkeitsmasse μ_2 hat, dann erhält man für diesen gestörten Zustand die resultirende Kraft, welche auf d. Flüssigkeitselement wirkt, indem man μ_2 an die Stelle von μ_1 in d. letzten Gl. setzt, also:

$$d\sigma(\mu_2 P\, dn - dp) = \text{d. resultirende Kraft.}$$

Soll d. Gleichgew. sicher sein, so muß dieser Ausdruck negativ sein. Setzen wir für dp seinen Ausdruck $\mu_1 P\, dn$, so ist dieser Ausdruck positiv od. negativ je nachdem μ_2 größer od. kleiner als μ_1 ist; offenbar ist diese Sicherheitsforderung gewiß gebunden an d. Umstand, daß μ_1 u. μ_2 eine endl. Verschiedenheit haben.

Handelt es sich um d. relative Ruhe, so ist es wesentlich, daß d. Massenkraft P in d. Componenten X Y Z auch diejenige ergänzende Kraft in sich begreift, die durch d. eigene Bewegung d. Coordinatensystems erfordert wird. Die 2te Ergänzungskraft d. relativen Bewegung ist aber für diesen Fall = 0, es kommt also nur d. erste Kraft hinzu, die zu ihrer Bestimmung nichts anderes ist, als d. entgegengesetzte Beschleunigung d. Punktes, wenn er mit d. Coordinatensystem fest verbunden ist. P ist also d. Resultante d. Schwerkraft und d. Kraft, welche hinzugefügt werden muß, um d. relative Ruhe wieder in absolute zu verwandeln. Die Ergänzungskraft ist gleich groß und gleich gerichtet mit d. Beschleunigung.

Natürlich kann dennoch nicht immer in einem solchen Fall d. relative Ruhe d. Flüssigkeit gegen d. Coordinatensystem möglich sein, nur bei ganz besonderen Bewegungsarten ist dies möglich; vor allen Dingen muß d. resultirende Massenkraft P durchaus unabhängig von d. Zeit sein, damit eine solche relative Ruhe dauernd bestehe, ferner ist erforderlich, daß d. Translationsbewegung d. Coord.-Systems mit einer Beschleunigung von constanter Größe und Richtung gegen d. Coord.-System stattfindet und daß, wenn gleichzeitig d. Coord.-System in Rotation begriffen ist, dieselbe um eine Axe von fester Lage stattfindet. —

Je nach d. Art d. gegebenen primären Massenkraft kann d. zulässige eigene Bewegung d. Coord.-Systems noch an andere Bedingungen geknüpft sein, d. folgenden allgemeinen Sätze gelten übrigens allgemein, von welcher Art d. Flüssigkeit auch sein mag. —

I. Gleichgewicht d. Wassers.

Voraussetzungen.

Es befinde sich d. Wasser in einem Gefäße, dessen Dimensionen als klein genug im Vergleich mit d. Dimensionen d. Erde vorausgesetzt werden sollen, um d. beschleunigende Schwerkraft g in allen Punkten als gleich groß und gleich gerichtet voraussetzen zu dürfen; diese beschleunigende Schwerkraft g schließt d. Einfluß d. Erdrotation bereits in sich, diese ist bereits d. Resultat d. Zusammenwirkung d. Anziehungskraft und d. Rotation d. Erde, so daß eine Ergänzung d. auf d. Flüssigkeit wirkenden Kraft nur noch dann eventuell erforderlich ist, wenn d. Gefäß eine eigene Bewegung bezüglich d. Erde besitzt, eine solche Bewegung soll daher hier schlechtweg d. Bewegung d. Gefäßes genannt werden.

Ich setze ferner hinsichtlich dieses relativen Gleichgew. voraus, daß d. äußere Druck pr. Flächeneinheit d. freien Oberfl. in allen Punkten gleich groß $= p_0$ sei; in d. Regel besteht dieser äußere Druck aus dem Atmosphärendruck und kann dann in d. That in allen Punkten als gleich groß vorausgesetzt werden. Die freie Oberfl. ist hiernach immer eine Niveaufl.

Wesentlich ist auch d. vorhergehenden allgemeinen Bedingungen d. Stabilität d. Gleichgew. an d. Bedingung geknüpft, daß d. Dichtigkeit d. Flüssigkeit im Sinne d. Drucksteigerungen, also in demselben Sinne wachse, in welchem P gerichtet ist; nun ist aber d. Dichtigkeit d. Wassers bekanntlich von d. Pressung in nur äußerst geringem Grade abhängig (alle tropfbaren Flüssigkeiten sind nur äußerst wenig zusammendrückbar) so daß eine Änderung d. Dichtigkeit nur von ~~einer übrigen~~ Temperaturverschiedenheit herrscht und deshalb kann d. Wasser sich nur dann im stabilen Gleichgew. befinden, wenn d. Dr., in welchem Sinne D wirkt, die Tangentialkraft im Wasser von Schicht zu Schicht kleiner wird. Bei d. folgenden Betrachtungen will ich indeß nur von solchen etwaigen Tangentialverschiebungen absehen; sodaß d. spez. Masse μ durchaus als constant vorausgesetzt werden darf, wenigstens an allen solchen Punkten d. Flüssigkeit die an d. Oberfl. eine endl. Entfernung haben. Unmittelbar an d. Oberfl. d. Flüssigkeit kann nämlich allerdings durch d. Einfluß d. Molekularkräfte eine ganz wesentlich verschiedene Dichtigkeit stattfinden, überhaupt eine ganz andere Molekularconstitution d. einzelnen Theile und es können dadurch d. Erscheinungen d. Gleichgew. besonders dann wesentlich modificirt werden, wenn d. Gleichgew. d. Flüssigkeit stattfindet, während dieselbe zwischen sehr engen festen Wänden, also in kleinen Röhren sich befindet, wodurch diese Molekularkräfte unter d. Namen Capillarität zusammengefaßt werden. Hievon muß jedoch auch abstrahirt werden. —— Die auf d. Flüssigkeit wirkenden Kräfte sind demnach: 1) die Schwerkraft und 2) eventuell d. erste Erzeugungskraft mit Rücksicht auf d. eigene Bewegung d. Gefäßes. –

Was die im Allgemeinen hierbei mögliche Art d. eigenen Bewegung d. Gefäßes betrifft, damit d. Wasser sich in relativer Ruhe gegen dasselbe befinden können, so ist hervorzuheben, daß dieselbe abgesehen von d. Massenkraft nur aus Translationsgeschwindigkeit und einer Rotationsgeschwindigkeit besteht, im vorliegenden Fall, wobei ferner Bestandtheil d. resultirenden Massenkraft P d. Schwerkraft hinzukommt muß offenbar d. weitere Beschränkung hinzugefügt werden, daß d. Axe d. Gefäßes, um welche dasselbe rotirt, durchaus vertical ist, widrigenfalls würden d. Componenten $X\ Y\ Z$ d. resultirenden Massenkraft d. Coordinatenaxen veränderlich werden gegen d. Richtung d. Schwerkraft, was nicht sein darf, wenn eine relative Ruhe d. Flüssigkeit gegen d. Gefäß bestehen soll.

a. Gleichgewicht d. Wassers ohne Rücksicht auf Molekularkräfte.

Niveauflächen und Druckhöhe in verschiedenen Fällen.

Die Coordinatenaxen seien zunächst fest verbunden mit d. Gefäße, d. Z Axe sei vertical und zwar positiv in d. Richtung von unten nach oben also z. B. d. Ursprung im Boden d. Gefäßes. Es sei:

1) das Gefäß in Ruhe od. es habe höchstens eine geradlinige und gleichförmige Translationsbewegung nach irgend einer Richtung.

In diesem Fall ist d. Erzeugungskraft d. relativen Bewegung $= 0$ und man hat also:

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad \text{und} \quad Z = \div g.$$

einfach als Componenten d. Massenkraft. Die Differentialgl. d. Niveaufl. ist:

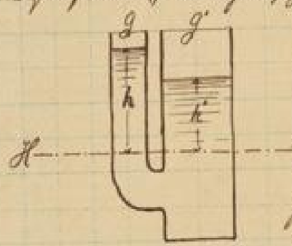
$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

in diesem Fall also: $\div g\,dz = 0$ und demnach d. Gl. d. Niveaufl. in endl. Form: $z = \text{const.}$ d. h. d. Niveauflächen sind horizontale Ebenen, insbesondere ist also im Gleichgew.-zustande auch d. freie Oberfl. d. Wassers eine Horizontalebene.

Was d. Dr. p betrifft, die an irgend einer Stelle in d. im Gleichgew. befindlichen Flüssigkeit stattfindet, so ist allgemein: $dp = \mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ also hier: $dp = \div \mu g\,dz$ und also $p = \div \mu g z + B$. — Ist nun besonders h d. Höhe d. freien Oberfl. d. Flüssigkeit über d. Ursprung d. Coord., so muß wenn man in dieser Gl. $z = h$ setzt, $p = p_0$ werden, also = dem gegebenen äußeren Druck auf d. freie Oberfl.; also $p_0 = -\mu g h + B$

oder $p - p_0 = \mu g (h - z)$; nun ist μg d. Product aus spez. Masse und Beschleunigung d. Schwere nichts anderes als d. spez. Gew. d. Wassers, welches natürlich auch constant ist und mit γ bezeichnet werde. Demnach d. Gl.: $\frac{p - p_0}{\gamma} = h - z$. Hier wurde d. Quotient $\frac{p}{\gamma}$ bereits früher d. Druckhöhe in d. Punkte genannt, in welchem d. Dr. p stattfindet, ebenso $\frac{p_0}{\gamma}$ an d. fr. Oberfl., und mithin $\frac{p - p_0}{\gamma}$ = Unterschied d. Druckhöhe in d.

beliebigen Punkt über den in d. freien Oberfl.; dieser Unterschied sei genannt: die Unterdruckhöhe in dem Punkte, in welchem d. Spannung = p ist, $h-z$ ist d. Tiefe dieses Punktes unter d. freien Oberfl. Diese Gl. drückt also nur in Worten, daß d. Unterdruckhöhe in irgend einem Punkte = der Tiefe dieses Punktes unter d. freien Oberfl. ist. Was d. Gesetz betrifft, daß in allen Punkten einer und derselben Horizontalebene ein gleicher Druck stattfindet, so ist dies Gesetz offenbar bedingt durch d. Voraussetzung, daß man von irgend einem Punkte d. Horizontalebene zu einem andern gelangen kann, indem man beständig innerhalb d. nämlichen Flüssigkeit von constanter Dichtigkeit bleibt. — Denken wir uns 2 communicirende Gefäße von irgend einer Form, in denselben mögen sich 2 verschiedene Flüssigkeiten befinden, die sich nicht miteinander mischen. Nach d. allgemeinen Gesetzen d. Hydrostatik kann d. Gleichgew. nur in d. Weise stattfinden, daß d. Ebene, in welcher sich d. Flüssigkeiten berühren eine horizontale sei. H sei diese Berührungsebene,



die eine Flüssigkeit stehe in d. einen Schenkel bis zur Höhe h über diese Ebene die andere bis zur Höhe h'. Damit d. Gleichgew. stabil sei muß d. Flüssigkeit im Gefäße G' die dichtere von beiden sein. Wenn ich also mit μ' die spec. Masse d. Flüssigkeit in G' bezeichne und mit μ d. spec. Masse d. andern, so muß $\mu' > \mu$ sein. Es wird in allen Punkten irgend einer Horizontalebene, die tiefer liegt als d. Berührungsebene H, eine durchweg gleiche Spannung stattfinden, denn man kann bei d. Fortgehen d. Gl. für Hydrostatik vollständig constant bekommen, dagegen für eine Horizontalebene, die höher als H liegt, müßte man durch d. Masse μ' hindurchgehen, hier trifft d. Bedingung nicht zu, es ebenfalls d. Höhe H in einer und derselben Ebene d. Sp. d. Flüssigkeiten gleich groß sei; bis zur Ebene H gilt dieses Gesetz in beiden Gefäßen zusammen, oberhalb nicht mehr. Es fragt sich nun, wie weit diese Ebene H hinaufreicht? Was dies betrifft, so kann man dieses Gesetz für jedes Gefäß für sich Anwendung bringen. Legt man also d. Ursprung d. Coord. in diese Horizontalebene H und versteht unter p_0 d. Sp. in irgend einem Punkte d. Ebene H, so erhält man mit Rücksicht auf d. erste Gefäß: $p - p_0 = \mu g h$. Für d. 2te Gefäß und zwar für alle Punkte, die oberhalb d. Ebene H liegen hat man: $p - p_0 = \mu' g h'$, wo in beiden Fällen $p - p_0$ denselben Werth hat, wenn ich d. äußeren Druck auf beide Gefäßoberfl. gleich groß sehe; also muß im Gleichgewicht: $\mu h = \mu' h'$ sein; es verhalten sich also d. Höhen, bis zu welchen d. Flüssigkeiten in communicirenden Röhren hinaufreichen, umgekehrt wie d. spec. Gew. d. Flüssigkeiten

2) Das Gefäß, in welchem d. Wasser in relativer Ruhe sei, befinde sich selbst in Bewegung.

Ich nehme wiederum d. Coord.-Axen fest verbunden mit d. Gefäße und zwar so, daß d. Z Axe vertical und gerichtet nach oben gerichtet ist. D. Gefäß kann, wie schon hervorgehoben allgemein eine solche Bewegung haben, daß es um eine verticale Axe mit constanter Winkelgeschwindigkeit rotirt und dabei gleichzeitig eine Translationsbeschleunigung besitzt. —

Die Z Axe möge mit d. Rotationsaxe d. Gefäßes zusammenfallen, dann steht es uns frei, die beiden andern Axen zweckmäßig zu wählen, ich nehme dieselben so gewählt, daß d. constante Richtung d. Translationsbeschl. d. Gefäßes beständig in d. XZ Ebene bleibt und also d. Componente im Sinne d. Y Axe = 0 ist. Dadurch sind d. Coord.-Axen in ganz bestimmter Weise angenommen bis auf d. willkürliche Lage d. Ursprungs. Die constante Winkelgeschwindigkeit d. Gefäßes um d. Z Axe sei = ω. Die Componente d. Translationsbeschl. im Sinne d. X Axe sei = $a g$, wo a eine positive Constante ist, welche durch Annahme von X erreicht werden kann. D. Componente d. Translationsbeschl. im Sinne d. Y Axe ist = 0 und im Sinne d. Z Axe kann sie ~~nicht allgemein mit~~ $\pm c g$ bezeichnet werden. Hier muß $\pm$ hinzugefügt werden, da über d. Sinn d. Z Axe schon verfügt war. Diese Componenten d. Translationsbeschl. d. Gefäßes bedingen entsprechende Bestandtheile d. Kraftcomponenten X Y Z, welche dieser Beschl.-componenten gleich aber parallel entgegengesetzt gerichtet sind. Was d. Rotation d. Gefässes mit d. Winkelgeschw. ω betrifft, so bedingt diese eine Beschl., welche horizontal, so dass sie d. Z Axe schneidet, deren Componenten dieser Centrifugalbeschl. entsprechen. diese sind $-\omega^2 x$ und $-\omega^2 y$ bezüglich beider Axen. Es sind diese 3 Componenten d. Beschl. d. Punktes $x\,y\,z$, welche er besitzt, wenn man ihn mit d. Gefäss fest verbunden denkt. diese 2 Beschl. bedingen nun auch entsprechende Bestandtheile d. Kraftcomponent $X\,Y\,Z$, welche diesen gleich aber parallel entgegen gesetzt gerichtet sind; schliesslich hat man in diesem Fall für $X\,Y\,Z$ also für d. Componenten d. beschleunigenden Massenkraft folgende Ausdrücke:

$$X = -ag + \omega^2 x; \quad Y = \omega^2 y \text{ und } Z = \mp cg - g$$

demnach lautet d. Differentialgl. d. Niveaufl.:

$$(-ag + \omega^2 x)\,dx + \omega^2 y\,dy - (1 \pm c)\,g\,dz = 0.$$

Wenn man d. Anfangspunkt d. Coord. im Sinne d. X Axe verlegt, so dass d. neue X Coord. $= x_1$ wird und zwar d. Art, dass $x = \frac{ag}{\omega^2} + x_1$, so ist $dx = dx_1$ und d. Gl. lautet:

$$\omega^2(x_1\,dx_1 + y\,dy) - (1 \pm c)\,g\,dz = 0$$

Wenn man d. ganze Gl. durch $\frac{\omega^2}{2}$ dividirt, d. 2te Glied auf d. rechte Seite bringt und dann integrirt, so folgt:

$$x_1^2 + y^2 = \left(x - \frac{ag}{\omega^2}\right)^2 + y^2 = 2\frac{(1 \pm c)}{\omega^2}\,g\,(z - C). \quad \text{---} \quad \alpha$$

die Gl. lässt sofort erkennen, dass d. Niveauflächen eine Gruppe congruenter Umdrehungsparaboloide sind die d. Parameter $2\frac{(1\pm c)}{\omega^2}g$ haben, deren gemeinschaftliche Axe in d. Entfernung $\frac{ag}{\omega^2}$ von d. Z Axe ist und es unterscheiden sich diese verschiedenen Niveaufl. nur dadurch, dass ihre Scheitelpunkte in verschiedenen Höhen über d. Ursprung d. Coordinaten liegen. Insbesondere stellt diese Gl. d. Gl. d. freien Oberfl. d. Flüssigkeit dar, wenn man d. Constante C nun so bestimmt, dass d. Volumen, welches durch d. betreffende Paraboloid von d. Gefässraum abgeschnitten wird, gleich d. gegebenen Wasservolumen. Es frägt sich ferner, welche Pressung unter solchen Umständen für eine gegebene Stelle stattfindet. Zu dem Ende will ich davon ausgehen, dass bekanntlich: $\frac{dp}{dz} = \mu Z$ ist und da: $Z = \mp cg - g$

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g(1 \pm c). \text{ hieraus folgt durch Integration: } p = -\mu g(1 \pm c)z + f(x\,y),$$

wenn $f(x\,y)$ eine von z unabhängige Function bedeutet.

diese Gl. liefert d. Pressung in einem Punkt A, dessen Coord. $x\,y\,z$ sind. denkt man sich durch A eine verticale Linie gezogen und bezeichnet mit A_0 ihren Schnittpunkt mit d. freien Oberfl., so sei h d. Z Coord. d. freien Oberfl., also d. Höhe über d. Ursprung; da nun in jedem Punkt A_0 dieselbe gegebene Pr. p_0 herrscht, so muss unsere Gl. befriedigt werden für $z = h$ und $p = p_0$ während x u. y dieselben bleiben, also: $p_0 = -\mu g(1 \pm c)h + f(x\,y)$ und subtrahirt man beide Gl. von ~~einander~~:

$$p - p_0 = \mu g(1 \pm c)(h - z) \text{ oder wenn ich d. Product } \mu g = \text{spec. Gew. mit } \gamma \text{ bezeichne:}$$

$$\frac{p - p_0}{\gamma} = (1 \pm c)(h - z)$$

$\frac{p - p_0}{\gamma}$ ist wieder d. sog. Ueberdruckhöhe; dieselbe ist also proportional d. vertical gemessenen Tiefe d. Punktes unter d. freien Oberfl. die Ueberdruckhöhe würde dieser Tiefe genau gleich sein, wenn $c = 0$ wäre, also wenn d. Gefäss keine Verticalbeschleunigung hätte. Durch dieses Gesetz ist d. Bestimmung d. Pr. in allen Punkten zurückgeführt auf d. Bestimmung d. freien Oberfl. — Was d. besonderen Fälle betrifft, die in d. hier vorausgesetzten allgemeinen Aufgabe enthalten sein können, so vorausgesetzt, es habe d. Gefäss **nur eine Translationsbeschleunigung**, also $\omega = 0$, so wird d. zuvor oben stehende Gl. α unbrauchbar, indem die rechte Seite derselben für $\omega = 0$ unendl. wird. Man muss also zurückgehen auf d. Differentialgl., aus welcher diese Gl. entstanden ist, nämlich: $(-ag + \omega^2 x)\,dx + \omega^2 y\,dy - (1 \pm c)\,g\,dz = 0$.
Setzt man hier $\omega = 0$, so lautet d. Gl.: $-a\,dx - (1 \pm c)\,dz = 0$. und hieraus durch Integration:

$$z = -\frac{a}{1 \pm c}\,x + C.$$

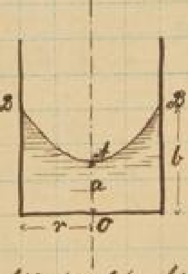
die Niveaufl. sind also in diesem Falle parallele Ebenen, welche d. XZ Ebene rechtwinklig schneiden in solchen Geraden, die mit d. X Axe den Winkel φ bilden derart, dass: $tg\,\varphi = \mp\frac{a}{1 \pm c}$ ist. diese Ebenen wären horizontal, wenn $tg\,\varphi = 0$ wäre, also wenn $a = 0$ wäre. das ist d. Fall, wenn d. Translationsbeschl. vertical ist. Bemerkenswerth ist hierbei noch d. Fall, dass d. Gefäss selbst vermöge d. Schwere frei fällt. dann hat d. Gefäss eine Translationsbeschl. mit einer constanten Beschl., welche in diesem Fall = d. Beschleunigung g d. Schwere wäre. →

Dann ist: $a = 0$ und $\pm c = -1$. Hiernach würde folgen: $z = \frac{0}{0}x + C$. Dies ist offenbar von vornherein leicht begreiflich, in diesem Fall ist d. resultierende Kraft P für irgend eines Flüssigkeitselement $P = Z = 0$. Es wirkt hier d. primäre Schwerkraft auf d. Massenteilchen pr. 1 Kgr. hinzu kommt ein entgegengesetzter, d. i. die eigene Bewegung d. Gefäßes, d. aber so groß ist, also $P = 0$, es kann also in diesem Fall d. Wasser sich in jeder beliebigen Form gegen d. Gefäß im Gleichgew. befinden. –

Von größerem Interesse ist d. Fall, daß d. Gefäß nur um d. Z Axe rotirt, für diesen Fall erhält man d. Gl. d. Niveauflächen aus d. allgemeinen Gl. indem man $a = c = 0$ setzt, also:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - C).$$

Die angewandten paraboloidischen Umdrehungsflächen haben d. Z Axe selbst zur gemeinschaftlichen Axe. Ist d. Gestalt d. Gefäßes selbst beliebig, habe dasselbe d. Gestalt eines verticalen Kreiscylinders, der horizontale Querschnitt ist also ein Kreis vom Radius r. O sei d. Coord. Ursprung. d. Meridianschnitt d. freien Oberfl. ist eine Parabel, dieselbe sei DAD. Ist h d. Höhe d. Scheitelpunktes A über O also $AO = a$ und $BO = b$, dann handelt d. Aufgabe darin a u. b zu bestimmen, wenn r und d. Wasservolumen V im Gefäß gegeben ist. $V = \pi r^2 h$. also h d. Höhe, bis zu welcher diese Wassermenge im Gefäß reichen würde, wenn dasselbe nicht rotirt.



Wenn nun ein solches Gefäß mit d. Radius r mit d. constanten Winkelgeschw. ω um seine geometrische Axe in Rotation versetzt wird, so fragt es sich, wie groß werden a u. b im Gleichgew.-zustand sein. Die entsprechende Gl. d. freien Oberfl. ergibt sich aus d. allgemeinen Gl., wenn man $C = a$ setzt, da C die Höhe d. Scheitelpunktes über d. Ursprung bedeutet, da für $C = z - C$, $x = y = 0$ wird; also:

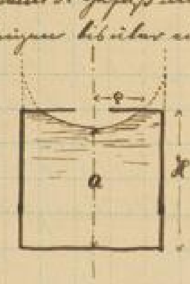
$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - a)$$

Es ist nun bekanntlich d. Volumen eines Umdrehungsparaboloids = d. Hälfte eines Kreiscylinders von gleicher Grundfl. und Höhe, also d. Volumen, welches enthalten ist zwischen d. freien Oberfl. und d. Ebene BD, ist = d. Hälfte eines Cylinders von d. Grundfläche πr^2 und d. Höhe $b - a$, also ist auch dasjenige Wasservolumen, welches zwischen der durch d. Scheitelpunkt A und durch DD gehenden Horizontalebenen = d. Hälfte des zwischen diesen beiden Ebenen liegenden Cylinders vom Radius r. Also das über A befindliche Wasservolumen ist $= \frac{1}{2}\pi r^2(b - a)$. Dieses Wasservolumen läßt sich anderweitig ausdrücken: Im Ruhezustand d. Gefäßes hat dieselbe Wasservolumen d. Gestalt eines Kreiscylinders von d. Grundfl. πr^2 und d. Höhe $h - a$. Also folgt: $b - a = 2(h - a)$ oder: $b + a = 2h$.

Wenn man andererseits in d. Gl. d. freien Oberfl. $z = b$ setzt, so wird $x^2 + y^2 = r^2$ und folglich erhält man aus dieser Gl.: $b - a = \frac{r^2\omega^2}{2g}$. Nun ist $r\omega$ offenbar d. Peripheriegeschwindigkeit, bezeichnet mit u und also: $b - a = \frac{u^2}{2g}$. Mit Hilfe dieser beiden Gl. sind a u. b bestimmt und man findet: $a = h - \frac{u^2}{4g}$ und $b = h + \frac{u^2}{4g}$.

Also wenn ein solches cylindrisches Gefäß ursprünglich ruht und das darin befindliche Wasser im Gleichgew. ist, und wenn dann d. Gefäß mit d. Winkelgeschw. ω um seine Axe gedreht wird, so wird d. Wasser in d. Mitte um ebensoviel herabgedrückt, wie es am Rand an d. Höhe gewinnt, nämlich um d. Hälfte d. Geschwindigkeitshöhe, welche d. Peripheriegeschw. d. Gefäßes entspricht.

Wenn d. Gefäß nun aber oben durch einen horizontalen Deckel geschlossen wäre, wodurch d. Emporsteigen bis über eine gewisse Grenze verhindert wird, so kann sich in dieser Weise d. Gleichgew. natürlich nicht ausbilden, es wird dann d. freie Oberfl. eine veränderte Form. Dies ist ein Fall, der in d. Technik sehr oft vorkommt und es fragt sich, welches wird unter diesen Umständen die Höhe a sein? Es muß natürlich in diesem Fall die Höhe dieses oberen Randes über d. Ursprung $= H$ gegeben sein, welche Höhe größer als h vorausgesetzt ist, damit bei ruhendem Gefäß d. obere Fläche noch etwas tiefer als dieser Rand steht. Angenommen sei H kleiner als d. Höhe b, bis zu welcher



d. Randlinie steigen würde, wenn d. Deckel nicht vorhanden wäre, also: $b > H > h$.

Es fragt sich, wenn nun d. Rotation eintritt, bis zu welcher Tiefe fällt nun a; es sei in diesem Fall d. Halbmesser d. Kreises, in welchem d. freie Oberfl. die obere Deckelebene trifft $= \varrho$, dann ist d. Volumen, welches zwischen dieser Deckelebene und d. freien Wasseroberfl. enthalten ist $= \frac{1}{2}\pi\varrho^2(H-a)$, dieses selbe Volumen ist aber $= \pi r^2(H-h)$, denn ursprünglich hatte dieses Luftvolumen d. Gestalt eines Cylinders von d. Grundfl. πr^2 und d. Höhe $H-h$. Wenn man in dieser Gl.:

$$\frac{1}{2}\pi\varrho^2(H-a) = \pi r^2(H-h)$$

für ϱ^2 seinen Werth setzt, welcher sich aus d. Gl. d. freien Oberfl. ergibt indem $z = H$ gesetzt wird, also wenn man hiefür setzt: $\varrho^2 = \frac{2g}{\omega^2}(H-a)$ so erhält man:

$$\frac{g}{\omega^2}(H-a)^2 = r^2(H-h)$$

und daraus ergibt sich, wenn man $r\omega = u$ setzt:

$$a = H - u\sqrt{\frac{H-h}{g}}.$$

Was d. Dr. betrifft, welcher in einem solchen Fall an irgend einer Stelle herrscht, so findet man diesen mit Rücksicht darauf, daß d. Ueberdruck an dieser Stelle gleich ist d. vertical gemessenen Tiefe dieses Punktes unter d. freien Oberfl., wobei man sich diese Oberfl. ergänzt denken muß bis über den Deckel hinaus. —

Hydrostatischer Druck auf ausgedehnte Flächen.

Wenn man in irgend einer Flüssigkeit d. Dr. so kennt, sowie d. Druck auf d. Oberfl., so kann man daraus den resultirenden Druck berechnen, den d. Wasser auf irgend eine Fläche ausübt. Es kommen dabei 2 Auffassungen in Betracht, entweder handelt es sich um jenen Druck, den d. Wasser vermöge seiner Schwere ausübt oder um denjenigen, den es mit Rücksicht auf d. Schwere und den Druck auf d. freie Oberfl. ausübt. Diese Berechnung ist nur für den Fall von besonderem Interesse, wenn d. freie Oberfl. eine horizontale Ebene ist, welches hiemit vorausgesetzt sei. Dann kann d. Druck, der auf irgend eine Fl. ausgeübt wird, aufgefaßt werden als ausgeübt von d. Schwere, sowie auch von dem umgebenden Druck d. Atmosphäre. In d. ersten Auffassung kann d. Druck d. **Ueberdruck** und in d. 2ten d. **Gesammtdruck** genannt werden. Die Art und Weise d. Berechnung ist in beiden Fällen dieselbe; d. Gesammtdruck ist von d. gesammten Druckhöhe in den verschiedenen Punkten d. Fläche abhängig, ebenso d. Ueberdruckhöhe. Die Ueberdruckhöhe ist die Tiefe d. Punktes unter d. freien Oberfl., die gesammte Druckhöhe eine Höhe, die um $\frac{p_0}{\gamma}$ höher liegt als d. wirkliche freie Oberfl. Es sei deshalb im folgenden die eine od. die andere bezügliche Druckhöhe begriffen und mit dem Buchstaben z bezeichnet und unter d. Wasseroberfl. sei entweder d. wirkliche Wasserfl. oder d. um $\frac{p_0}{\gamma}$ höhere Wasserfl. verstanden. —

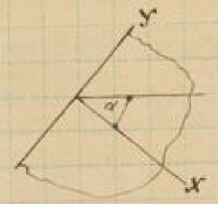
Zunächst sei vorausgesetzt, die gedrückte Fl. F sei eben, dann sind d. Dr. auf alle Elemente dieser Ebene parallel und ihre Resultante ist einfach = ihrer Summe. Gemäß d. Bedeutung d. Druckhöhe z ist dann insbesondere d. Druck auf d. Element dF d. gegebenen Fl. gleich dem Gew. einer Wassersäule von d. Grundfl. dF und d. Höhe z also $= \gamma z\,dF$ unter γ d. spec. Gew. d. Wassers verstanden. Der Gesammtdruck demnach:

$$P = \int \gamma z\,dF.$$

ausgedehnt über d. ganze Fl. Hier kann γ als constanter Factor herausgesetzt werden und wenn z_0 d. Druckhöhe für d. Schwerpunkt d. gegebenen Fl. bedeutet d. h. die Tiefe d. Schwerpunktes unter d. freien Oberfl., so ist:

$$P = \gamma z_0 F.$$

also = dem Gew. einer Wassersäule, deren Grundfl. $= F$ und deren Höhe = d. Höhe d. Schwerpunktes unter d. freien Oberfl. ist. Dieser Druck ist nicht gleichmäßig vertheilt, sondern d. tieferen Elemente erleiden einen höheren Druck als d. oberen; die Richtungslinie von P geht also nicht durch d. Schwerpunkt, sondern durch einen Punkt S_1, der tiefer liegen muß als d. Schwerpunkt und welcher d. <u>Mittelpunkt d. hydrostatischen Drucks</u> genannt wird. Um diesen Punkt zu bestimmen werde angenommen, d. Fl. sei gegen d. Horizont geneigt unter d. Winkel α und werde d. Fl. F ausgedehnt bis zum Durchschnitt mit d. Oberfl. Diese Durchschnittslinie sei als Y Axe angenommen und eine Neigungslinie d. Ebene F als X Axe, so daß d. X Axe gleichfalls den Winkel α mit dem Horizont bildet.



Für dieses Coord.-System seien nun x u. y d. Coord. eines beliebigen Punktes $d\delta$ d. gedrückten Fläche, x_0 u. y_0 d. Coord. d. Schwerpunktes S_0 und x_1 y_1 d. gesuchten Coordinaten von S_1; die entsprechenden Abstände von d. Horizontalebene seien z, z_0 u. z_1. Nach d. bekannten Regel zur Bestimmung d. Mittelpunktes eines Systems paralleler Kräfte ist: $x_1 = \frac{1}{D}\int \gamma z\, d\delta \cdot x$ und $y_1 = \frac{1}{D}\int \gamma z\, d\delta \cdot y$.
Setzt man hierin für D seinen Werth, so erhält man:
$x_1 = \frac{1}{F z_0}\int x z\, d\delta$ und $y_1 = \frac{1}{F z_0}\int y z\, d\delta$; übrigens ist: $\frac{z}{x} = \frac{z_0}{x_0} = \sin\alpha$ also auch $\frac{z}{z_0} = \frac{x}{x_0}$ und somit:

$$x_1 = \frac{1}{F x_0}\int x^2\, d\delta \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{1}{F x_0}\int x y\, d\delta.$$

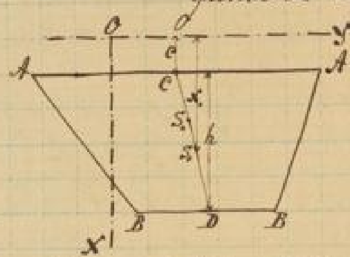
Nun ist bekanntlich $\int x^2\, d\delta$ d. Trägheitsmoment d. gedrückten Fl. in Beziehung auf ihre Durchschnittslinie mit d. Oberfl. Denkt man sich durch d. Schwerpunkt S_0 d. gedrückten Fl. eine Gerade gezogen parallel d. Y Axe, so sei d. Trägheitsmoment d. Fl. F in Beziehung auf diese Gerade bezeichnet mit $F k^2$. D. Trägheitsmoment d. Fl. F in Beziehung auf d. Y Axe also $\int x^2 d\delta$ ist bekanntlich = diesem Trägheitsmomente + d. Product d. Fl. F und d. Abstand von d. durch S_0 mit d. Y Axe parallelen Gerade also $= F(x_0^2 + k^2)$. Setzt man dieses oben ein, so erhält man:

$$x_1 = \frac{x_0^2 + k^2}{x_0} = x_0 + \frac{k^2}{x_0}.$$

Die Coord. y_1 würde $= 0$ sein, wenn die X Axe Symmetrieaxe wäre.

Von besonderen Fällen in dieser Beziehung sind folgende bemerkenswerth:

1) Es sei d. gedrückte ebene Fläche ein Trapez, dessen beide parallele Seiten horizontal liegen, also AA und BB horizontal und parallel d. Y Axe. Es sei also d. Ebene d. Figur die unter d. Winkel α gegen d. Horizont geneigte Ebene F. Es sei $AA = a$ und $BB = b$, d. Höhe d. Trapezes sei $= h$ und d. Entfernung d. Seite AA von d. Y Axe sei $= c$. Jedenfalls liegt hier d. Schwerpunkt sowie d. Druckmittelpunkt in d. Mittellinie d. Trapezes, also in d. Linie CD, wo C u. D d. Mitten zwischen AA resp. BB sind. Es sei nun S_1 d. Druckmittelpunkt, S_0 d. Schwerpunkt, x_1 d. Abstand d. Druckmittelpunktes von d. Y Axe, dann ist: $x_1 = c + \xi_1$, wenn mit ξ_1 die Entfernung d. Druckmittelpunktes S_1 von d. Seite AA bezeichnet wird. Um ξ_1 zu finden, kann man sich d. Trapez in Streifen zerlegt denken durch horizontale Linien; und es ist dann, wenn $d\delta$ d. Inhalt eines solchen Streifens bedeutet: $\xi_1 = \frac{1}{\gamma z_0 F}\int \gamma z\, d\delta\, \xi$ unter ξ die Entfernung d. Flächenstreifens $d\delta$ von d. Seite AA verstanden, es ergibt sich:



$$x_1 = c + \frac{1}{F x_0}\int x \xi\, d\delta = c + \frac{\int_0^h (c+\xi)\xi\left[a - \frac{\xi}{h}(a-b)\right]d\xi}{h\frac{a+b}{2}\cdot c + \frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}}$$

da $x = c + \xi$ ist und da d. Länge eines solchen Flächenstreifens in d. Entfernung ξ von $AA = a - \frac{\xi}{h}(a-b)$ ist. Hiernach findet sich nun: $x_1 = c + \frac{h}{2}\cdot\frac{2c(a+2b) + h(a+3b)}{3c(a+b) + h(a+2b)}$. —

Wenn insbesondere d. horizontale Seite AA d. Trapezes mit d. Y Axe zusammenfällt, so ist $c = 0$ und es wird:

$$x_1 = \frac{h}{2}\,\frac{a+3b}{a+2b}.$$

Wird d. Trapez ein Dreieck, dessen AA in d. Y Axe fällt, während $BB = 0$ wird, so wird $c = b = 0$, also

$$x_1 = \frac{h}{2}.$$

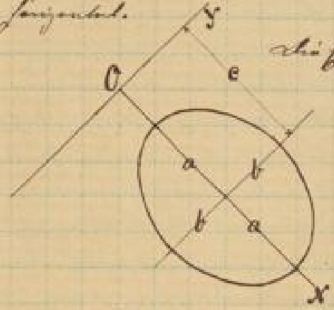
Um von d. Fall eines Trapezes zu einem Parallelogramm überzugehen hat man $b = a$ zu setzen, so erhält man:

$$x_1 = c + \frac{h}{3}\,\frac{3c+2h}{2c+h}.$$

Wenn man d. Höhe $h = d - c$ setzt, also d d. Entfernung d. unteren Seite d. Parallelogrammes von d. Y Axe, so geht dieser Ausdruck über in:

$$x_1 = \frac{2}{3}\,\frac{d^3 - c^3}{d^2 - c^2}. \text{ —}$$

2) Es sei d. gedrückte Fläche eine Ellipse und zwar sei dieselbe so gelegen, daß d. eine Durchmesser $= 2a$ in einer Neigungslinie liegt, also etwa in d. X Axe und d. andere Durchmesser $= 2b$ horizontal.



Die Entfernung d. Mittelpunktes d. Ellipse von d. Y Axe sei $= c$, natürlich liegt d. Druckmittelpunkt irgendwo im Durchmesser $2a$ und es handelt sich nur um d. Entfernung desselben von d. Y Axe. Dieselbe ist aus dem früheren Ausdruck: $x_1 = x_0 + \frac{k^2}{x_0}$ zu berechnen.
Nun ist: $x_0 = c$. Was k^2 betrifft, so ist d. Trägheitsmoment d. Ellipse bezüglich d. Durchmessers $2b$: $\mathfrak{F} k^2 = \frac{\pi a^3 b}{4}$ also $k^2 = \frac{a^2}{4}$ und folglich: $x_1 = c + \frac{a^2}{4c}$ und $P = \gamma \pi abc \sin\alpha$.
πab ist d. gedrückte Fl. und $c \sin\alpha$ d. Druckhöhe über d. Schwerpunkt.

Wenn d. gedrückte Fl. eine krumme Fl. ist, dann lassen sich d. Elementardrücke im Allgemeinen nicht zu einer Resultanten zusammensetzen, es kann sich also nur handeln um d. hydrostatischen Druck, welchen dieselbe nach irgend einer gewissen Richtung AB auszuhalten hat. Dieser Druck auf eine gegebene krumme Fl. nach einer gegebenen Richtung AB ist folgendermaßen zu berechnen: Zunächst sei vorausgesetzt, d. krumme Fläche werde von irgend einer zu AB parallelen Geraden nur in einem Punkte geschnitten, $d\mathfrak{F}$ sei irgend ein Element d. krummen Fl., z sei d. Druckhöhe für dieses Flächenelement. Ist nun α d. Winkel, unter welchem d. Normale (im Sinne dieses Normaldruckes genommen) gegen d. Druckrichtung geneigt ist, so ist d. Componente dieses Druckes nach d. Richtung AB $= \gamma z\, d\mathfrak{F} \cos\alpha$. Also:

$$P = \int \gamma z\, d\mathfrak{F} \cos\alpha = \gamma \int z\, d\mathfrak{F} \cos\alpha .$$

Wenn man sich d. Fl. projiciert denkt auf irgend eine zu d. Linie AB senkrechten Projektionsebene, so sei $d\mathfrak{F}'$ d. Projection von $d\mathfrak{F}$, dann ist: $P = \gamma \int z\, d\mathfrak{F}'$.

Ist d. gegebene Fl. von solcher Art, daß sie von einer in d. Richtung AB gezogenen Geraden in mehr als einem Punkt geschnitten wird, so kann man d. Fl. so zerlegen, daß jeder Theil d. Fl. von d. Geraden AB nur in einem Punkte geschnitten wird, dann kann man jeden Theil für sich berechnen und schließlich daraus d. algebraische Summe ziehen, um so d. resultierenden Druck zu erhalten.

1) Ist d. Richtung AB, nach welcher sich dieser Druck P bezieht, horizontal, dann ist, wo man nun d. Projektionsebene senkrecht zu AB annehmen muß, z zugleich d. Entfernung dieser Projection $d\mathfrak{F}'$ von d. Wasseroberfl., es ist dann $\gamma z\, d\mathfrak{F}'$ d. hydrostatische Druck auf d. Element $d\mathfrak{F}'$ in d. Ebene, in welche sich d. Element projiciert, man kann sagen es ist d. Horizontaldruck = demjenigen hydrostatischen Druck, welchen d. Projection dieser krummen Fl. auf irgend eine zur gegebenen horizontalen Richtung senkrechten Projektionsebene erfahren würde. Daraus ist insbesondere sofort ersichtlich, daß d. resultierende Horizontaldruck, den irgend ein eingetauchter Körper nach irgend einer Richtung auszuhalten hat $= 0$ ist. Es zerfällt immer d. resultierende Druck in solche Bestandtheile, die sich 2 u. 2 gegenseitig aufheben, weil immer d. ganze Oberfl. in solche Theile zerfällt, die sich gegenseitig decken.

2) Wenn insbesondere d. Richtung AB vertikal ist, wenn es sich also um d. resultierenden Vertikaldruck auf eine krumme Fl. $\mathfrak{F}$ handelt, so ist $\gamma z\, d\mathfrak{F}'$ offenbar = d. Gew. eines vertikalen Wasserfadens, der sich von d. Flächenelement $d\mathfrak{F}$ erstreckt bis zur Wasseroberfl. und es ist also P d. resultierende Vertikaldruck auf d. gegebene Fl. $\mathfrak{F}$ = d. Gew. einer Wassermasse, welche begrenzt ist durch d. gedrückte Fl. $\mathfrak{F}$, durch d. horizontale Wasseroberfl. und durch eine vertikale Cylinderfläche, und zwar ist d. resultierende Vertikaldruck nicht nur d. Größe nach, sondern auch d. Richtungslinie nach übereinstimmend mit d. Gew. dieser Wassermasse. Daraus ergibt sich sofort, daß insbesondere d. Vertikaldruck auf d. Oberfl. eines eingetauchten Körpers d. Größe und d. Richtungslinie nach übereinstimmt mit d. Schwerpunkt d. von diesem verdrängten Wassers und da d. Horizontaldruck $= 0$ ist, so übt also immer d. im Gleichgew. befindliche Wasser auf d. Oberfl. d. eingetauchten Gegenstandes einen Auftrieb, welcher übereinstimmt mit d. Schwerkraft dieses eingetauchten Körpers. Dieses Gesetz ist bekannt unter d. Namen: Archimedisches Princip. Der Vertikaldruck pflegt d. Auftrieb genannt zu werden.

Bewegung d. Flüssigkeiten.

Die im folgenden zu untersuchenden Bewegungen von Flüssigkeiten sind theils strömende theils oscillirende Bewegungen, von denen d. letzteren jedoch nur als Wellenbewegung d. Wassers besondere Wichtigkeit haben. Strömende Bewegungen d.h. solche, welche dauernd in gleichem Sinne stattfinden, können durch feste Wände begrenzt und hinsichtlich ihrer Gesetze beliebig zu werden, jedoch ist angemessen, je nach d. Art dieser Wände od. Leitflächen verschiedene Fälle zu unterscheiden. Bei d. Bewegung in Gefäßen und Röhren d.h. in solchen Leitungen durch welche d. Flüssigkeit ringsum umschlossen wird, so daß sie ohne freie Oberfl. (außer am Anfang und am Ende d. ganzen Leitung) sich strömend bewegt, kann dieselbe wasserförmig od. luftförmig sein, und es sind daher namentlich d. beiden Fälle d. Ausflusses ~~aus~~ aus Gefäßmündungen und d. Bewegung in längeren Röhren zu behandeln. Bei luftförmigen Flüssigkeiten beschränkt sich hierauf d. Untersuchung, da dieselben überhaupt nur durch einschließende Wände eine bestimmt geregelte Bewegung erhalten; was aber d. wasserförmigen Flüssigkeiten betrifft, so ist d. Bewegung d. Wassers in Canälen von nicht geringerer Wichtigkeit d.h. in oben offenen Leitungen, längs deren ganzer Länge somit d. Oberfl. d. strömenden Wassers theils frei, theils Wandoberfl. ist. Von beschränkterem technischem Interesse ist d. Bewegung freier Wasserstrahlen, namentlich in Beziehung auf d. Wurfhöhe eines in d. Luft vertical aufsteigenden, sog. springenden Strahls.

In allen Fällen strömender Bewegung ist d. Beharrungszustand od. d. permanente Bewegung von besonderer Wichtigkeit, charakterisirt durch d. Unveränderlichkeit d. äußeren und inneren d.h. d. Bewegungs- und Massenzustandes in jedem bestimmten Punkt d. Raumes, sofern d. Zustand von Ort zu Ort, nicht aber an demselben Orte mit d. Zeit veränderlich ist. Mit Rücksicht auf deren eigene Bewegung d. Gefäßes, d. Röhre, d. Canals überhaupt d. festen Leitung (bezüglich auf d. Erde) ist dabei unter einem bestimmten Punkt d. Raumes stets ein solcher zu verstehen, welcher eine bestimmte Lage gegen d. Leitung (bei freien Wasserstrahlen gegen d. Erde) besitzt, mit welcher auch d. zeitweilige System von Coordinatenaxen fest verbunden zu denken ist. —

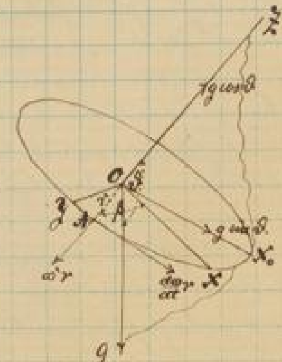
Zu den Aufgaben d. Hydraulik gehört endlich d. Untersuchung d. gegenseitigen Druckes zwischen Flüssigkeiten und festen Körpern bei ihrer relativen Bewegung, bezüglich auf d. festen Körper, wenn derselbe theils als bewegender od. beschleunigender Druck, theils als hemmender Widerstand d. Mittels in Betracht kommen. Dabei sind wieder verschiedene Fälle je nach d. Begrenzung d. Flüssigkeit zu unterscheiden, welche entweder ein isolirter freier Strahl sein od. den festen Körper allseitig umschließen od. auch als wasserförmige Flüssigkeit mit freier Oberfl. nur unterhalb derselben einen theilweise eingetauchten Körper umgeben kann. —

Zur Lösung dieser verschiedenen Aufgaben sind bekanntlich im Allgemeinen 7 Größen als Functionen d. Coordinaten x y z und d. Zeit t zu bestimmen; nämlich d. Geschwindigkeitscomponenten u_x u_y u_z, d. spec. Volumen v, d. Pressung p, die Temperatur und d. innere Arbeitsvermögen. Zur Verfügung sind dabei d. 3 Differentialgleichungen, welche d. Gleichgew. zwischen d. auf ein Massenelement wirkenden Massen- und Flächenkräften und d. Trägheitskräften gegen seine Beschl. entsprechen und welche d. Grundgleichungen heißen mögen, dann d. Continuitätsbedingung, eine Gl. bezüglich auf d. Wärmevertheilung im Innern d. Flüssigkeit, die Zustandsgl. d. Flüssigkeit und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens. Die 5 ersten dieser Gl. sind partielle Differentialgl. und allgemein gültig, die beiden letzten sind für verschiedene Flüssigkeiten verschieden; in d. 4 ersten sind d. Temperatur und d. innere Arbeitsvermögen, in d. 3 letzten d. Geschw.-Componenten nicht enthalten. Die Integrationen müssen mit Rücksicht auf d. Grenzbedingungen bezüglich auf Zeit und Raum d.h. mit Rücksicht auf d. gegebenen Anfangszustand und auf d. Oberflächenbedingungen vorgenommen werden. Letztere betreffen theils d. Gestalt d. Oberfl. theils d. äußeren Druck an derselben, theils d. etwaigen Wärmeaustausch zwischen d. Flüssigkeit und andern Körpern. —

schließlich muß diese allgemeine Untersuchung leicht einsehen, daß d. allgemeine Durchführung d. Aufgaben nicht möglich ist, wenigstens in zuverlässig begreiflicher Hinsicht. Außerdem mußten dazu noch an d. früher erhaltenen Coordinaten angenommen werden hinsichtlich erfahrungsmäßiger Coefficienten, [illegible] mit Rücksicht auf d. Abweichungen d. dabei in Betracht kommenden Flüssigkeiten von dem in d. theoretischen Gl. vorausgesetzten idealen Zustande vollkommener Flüssigkeit und mit Rücksicht auf solche Bewegungswiderstände, welche in jenen Gl. und in d. analytischen Grenzbedingungen nicht zum Ausdruck gebracht werden konnten. Aus diesem Grunde ist es daher nothwendig bei d. verschiedenen in d. Hydraulik vorkommenden technischen Aufgaben auf Grund specieller Voraussetzungen vorzugehen. –

Wenn zunächst keine bedeutende Mittheilung od. Entziehung von Wärme an d. Oberfl. und Wärmeentwicklung durch Bewegungswiderstände und deshalb auch nur unbedeutende Wärmeleitung im Innern stattfindet, so kann eine Vereinfachung wesentlich dadurch herbeigeführt werden, daß eine gewisse Beziehung zwischen d. Pr. p und d. spec. Volumen v von vornherein angenommen wird, insbesondere z. B. Gl.: $p\,v^m = \text{const.}$, unter m eine Constante verstanden, welche, wenn d. Zustandsänderung als bei constanter Temperatur stattfindend vorausgesetzt werden kann, für tropfbare Flüssigkeiten $= \infty$ (also $v = \text{const}$, p unabhängig von v), für Gase $= 1$ zu setzen ist, aber bei Zustandsänderungen ohne Mittheilung resp. Entziehung von Wärme für Gase $= k$ d. h. $=$ d. Verhältniß d. spec. Wärmen bei constantem Pr. und bei constantem Volumen, für Dämpfe und (erfahrungsmäßig und innerhalb gewisser Grenzen) für Gemische von Dampf und gleichartiger tropfbarer Flüssigkeit $=$ einem anderweitigen constanten Werth zu setzen ist. Dadurch sind d. Temperatur und d. inneren Arbeitsänderungen von d. Untersuchung ausgeschlossen, und sind d. 3 Geschwindigkeitscomponenten nebst d. Größen p u. v durch d. vorausgesetzte Beziehung zwischen d. letzteren und durch d. 4 ersten d. vorhin genannten 7 Gl. (durch d. 3 Fundamentalgl. und d. Continuitätsgl.) mit Rücksicht auf d. gegebenen Grenzbedingungen bestimmt. Zu leichteren Lösungen d. h. zur Entwicklung ihrer Ausdrücke in endlicher Form, können weitere Vereinfachungen durch d. vorläufige Abstraction von d. inneren Reibungen (nämlich von d. Gliedern mit R in d. 3 ersten d. allgemeinen Gl.) und durch gewisse Annahmen in Betreff d. Gesetzes, wonach sich d. Geschw.-Componenten mit d. Coord. ändern, herbeigeführt werden. Letzteres wird auch besonders dann nöthig, wenn wegen erheblicher Wärmeleitungen und Wärmeentwicklungen durch Bewegungswiderstände d. zuerst genannte Vereinfachung unzulässig ist, d. Geschwindigkeit d. Temperaturänderungen u. inneren Arbeit mit untersucht werden muß. Eine willkürliche, wenn auch im Allgemeinen d. Verhältnissen angepaßte Annahme in Betreff d. Änderungsgesetzes d. Geschwindigkeiten ist dann um so mehr gerechtfertigt, als dieses Gesetz durch d. Einfluß d. Wärme und d. Widerstände mittelbar od. unmittelbar in einer solchen Weise beeinflußt werden kann, welche sich d. analytischen Untersuchung gänzlich entzieht. Was d. beschleunigenden Massenkräfte betrifft, welche bei d. technisch interessantesten Fällen in Betracht kommen, so reduciren sich diese auf d. Schwerkraft und 2 sogenannte Ergänzungskräfte d. relativen Bewegung. Indem die Dimensionen d. Systems von Flüssigkeiten immer nur gering gegen d. Dimensionen d. Erde ausfallen, so kann man d. Beschleunigung g d. Schwerkraft pr. Masseneinheit als gleich groß für jeden Ort und zu jeder Zeit voraussetzen. Die beiden Ergänzungskräfte spielen besonders dann eine wichtige Rolle, wenn es sich nicht nur um d. relative Bewegung d. Flüssigkeiten in d. Gefäß handelt, sondern auch um d. Bewegung dieser Flüssigkeiten gegen d. Erde handelt. In diesen Fällen gehören außer d. Schwerkraft auch diese beiden Ergänzungskräfte zu d. beschleunigenden Massenkräften. Von Interesse ist es nun diese beiden Ergänzungskräfte festzustellen für d. technisch wichtigsten Anwendungen, also insbesondere wenn d. Gefäß od. was dasselbe bedeutet, wenn das an dem Gefäße feste Coord.-System in Rotation um eine feste Axe begriffen ist.

Es sei angenommen d. Coord.-System, auf welches d. relative Bewegung d. Flüssigkeit bezogen wird, drehe sich um eine feste Axe und zwar sei d. Z Axe als Rotationsaxe angenommen, um welche d. Rotation mit d. Winkelgeschw. ω erfolgt, welche im Allgemeinen im Laufe d. Zeit [illegible] ϑ sei d. constante Winkel d. Z Axe mit d. Richtung d. Schwerkraft = Og. Durch d. Ursprung O denkt man eine Ebene gelegt senkrecht zur festen Rotationsachse OZ, welche von d. durch g OZ bestimmten Ebene in d. Geraden OX_0 geschnitten wird. Die Zeit t werde gerechnet von dem Augenblick an, in welchem d. X Axe, welche ebenso wie d. Y Axe immer in d. Ebene X_0OA bleibt, durch diese Gerade OX_0 geht; zur Zeit $t=0$ hat demnach d. X Axe d. Lage OX_0 und zur Zeit t habe sie d. Lage OX und d. Y Axe d. Lage OY. In d. Zeit t hat d. X Axe sich demnach gedreht um d. Winkel X_0OX, welcher offenbar gleich ist:



$$X_0OX = \int_0^t \omega\, dt.$$

Zerlegt man d. Beschl. g d. Schwerkraft in 2 Componenten nach d. Richtung OX_0 und OZ, so hat man in d. Richtung OZ d. Componente $g.\cos\vartheta$ und in d. Richtung OX_0 d. Componente: $g.\sin\vartheta$; letztere kann man wieder in 2 Componenten nach OX und OY zerlegen und erhält dann offenbar als d. Componenten d. Beschl. d. Schwerkraft nach d. 3 Axenrichtungen:

Nach d. Richtung OX od. im Sinne d. X Axe: $= g.\sin\vartheta.\cos X_0OX = g.\sin\vartheta.\cos\left[\int_0^t \omega\, dt\right]$

im Sinne d. Y Axe: $= g.\sin\vartheta.\cos X_0OY = -g\sin\vartheta\sin\int_0^t \omega\, dt$

im Sinne d. Z Axe: $= g.\cos\vartheta.$

Sind nun X Y Z d. im Sinne d. ungedrehten Coord.-axen genommenen Componenten d. gesammten beschleunigenden Wirkung, so sind d. obigen Componenten diejenigen Bestandtheile dieser Beschleunigungscomponenten, welche von d. Schwerkraft herrühren. Hinzu kommen nun noch d. von d. beiden Trägheitskräften herrührenden Bestandtheile. — d. Beschl.

Was nun d. erste Trägheitskraft d. relativen Bewegung betrifft, so ist diese ja bekanntlich ebenso groß aber genau entgegengesetzt gerichtet d. Beschl. eines mit d. Coord. System fest verbundenen Punktes, in welchem sich d. betrachtete [illegible] Punkt augenblicklich befindet. Ist nun A irgend ein Punkt (hier ist er in d. xy Ebene liegend angenommen, was d. Einfachheit wegen geschieht und was sich auch nachher als vollkommen zulässig erweist, [illegible]) im Abstand r von d. Rotationsachse fest mit d. Coord. verbunden, so beschreibt dieser Punkt einen Kreis vom Radius r mit d. Winkelgeschw. ω und seine Beschl. kann demnach zerlegt werden in eine Centripetalbeschl. $\omega^2 r$ und eine Tangentialbeschl. $= \frac{d\omega}{dt} r$, welche nach d. Richtung AO resp. tangential an den von A beschriebenen Kreis im Sinne d. Geschw. ω gerichtet sind. Da nun aber d. erste Trägheitskraft genau ebenso groß aber entgegengesetzt gerichtet ist d. Beschl. dieses Punktes A und demnach ihre Componenten in derselben Beziehung zu einander stehen, so haben d. Componenten d. Beschl. d. ersten Trägheitskraft d. Größen $\omega^2 r$ und $\frac{d\omega}{dt} r$ und d. Richtungen OA resp. AA_1. Diese beiden Componenten kann man nun wieder zerlegen in Componenten nach d. Axenrichtungen. Ist $A\hat{O}X = \beta$ so ist d. Componente im Sinne d. Z Axe natürlich $= 0$ (was sich offenbar auch ergeben würde, wenn A nicht in d. Ebene xy liegend angenommen wäre), während d. Beschl. Comp. im Sinne d. X Axe ist herrührend von d. Centripetalbeschl. $\omega^2 r$: $= \omega^2 r\cos\beta = \omega^2 x$

und im Sinne d. Y Axe " " " " " : $= \omega^2 r\sin\beta = \omega^2 y.$

ferner im Sinne d. X Axe herrührend von d. Tangentialbeschl. $\frac{d\omega}{dt} r$: $= \frac{d\omega}{dt} r\cos(\beta - \frac{\pi}{2}) = \frac{d\omega}{dt} r\sin\beta = \frac{d\omega}{dt} y$

im Sinne d. Y Axe " " " " " " " : $= \frac{d\omega}{dt} r\sin(\beta - \frac{\pi}{2}) = -\frac{d\omega}{dt} r.\cos\beta = -\frac{d\omega}{dt} x$

denn offenbar ist $r\cos\beta = x$ und $r.\sin\beta = y$ d. Coordinaten d. Punktes A.

demnach ~~[illegible]~~ sind d. von d. ersten Ergänzungskraft d. relativen Bewegung herrührenden Bestandtheile d. Beschl.-Componenten des Gesammten Massenkräfte:

Im Sinne d. X Axe: $\omega^2 x + \frac{d\omega}{dt} y$ (kommt zu X hinzu)

" " Y Axe: $\omega^2 y \div \frac{d\omega}{dt} x$ (kommt zu Y hinzu). —

Die 2te Ergänzungskraft hängt bekanntlich ab von d. relativen Geschw. d. Punktes A gegen d. Coord.-System. Ist nämlich u_{xy} d. Projection d. relativen Geschw. des beliebigen materiellen Punktes A gegen d. Coord.-System auf die zur Rotationsachse OZ senkrechte XY Ebene, so ist d. durch d. 2te Ergänzungskraft bewirkte Beschleunigung bekanntlich $= 2\omega u_{xy}$ und zwar hat sie eine senkrechte Richtung zur Z Axe und d. Projection u_{xy} senkrechte Richtung, und zwar in solchem Sinne, daß eine Drehung von 90° um d. Z Axe im Sinne von ω diese letztere Beschl. in d. Richtung von u_{xy} versetzen würde. Ist nun α d. Winkel zwischen u_{xy} und d. X Axe, so sind d. Componenten d. Beschl. $2\omega u_{xy}$ offenbar:

Im Sinne d. X Axe: $= 2\omega u_{xy} \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = 2\omega u_{xy} \sin\alpha$

" " " Y Axe: $= 2\omega u_{xy} \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \div 2\omega u_{xy} \cos\alpha$.

Nun ist aber offenbar $u_{xy} \sin\alpha = u_y$ und $u_{xy}\cos\alpha = u_x$ die Componenten d. relativen Geschw. d. materiellen Punktes im Sinne d. Y und X Axe, so daß d. fraglichen Beschl.-Componenten herrührend von d. 2ten Ergänzungskraft auch sind: $= 2\omega u_y$ im Sinne d. X Axe und $\div 2\omega u_x$ im Sinne d. Y Axe. —

demnach wären nun d. Componenten d. Beschl. d. Gesammtmassenkräfte:

$$X = g \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\left[\int_0^t \omega\, dt\right] + \omega^2 x + \frac{d\omega}{dt} y + 2\omega u_y$$

$$Y = \div g \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\left[\int_0^t \omega\, dt\right] + \omega^2 y \div \frac{d\omega}{dt} x \div 2\omega u_x$$

$$Z = g \cdot \cos\vartheta$$

In den meisten Fällen vereinfachen sich diese Ausdrücke noch dadurch, daß d. Leitflächen und mit ihnen d. an denselben feste Coord.-System um d. feste Axe mit constanter Winkelgeschw. rotiren, wie bei d. Wasser welches durch eine Turbinenröhre fließt. Wenn aber $\omega = const.$ ist, so folgt: $\int_0^t \omega\, dt = \omega \int_0^t dt = \omega t$ und dementsprechend d. Ausdrücke für X u. Y.

Untersuchung d. strömenden Bewegungen von Flüssigkeiten.

In den meisten Fällen, welche in d. Praxis vorkommen, ist d. strömende Bewegung d. Flüssigkeiten durch Leitflächen derartig eingeschränkt, daß man von vornherein d. Bahnen bestimmen kann, welche von d. verschiedenen materiellen Punkten durchlaufen werden, wenigstens wenn man von stoßweisen und wirbelförmigen Bewegungen absieht, diese vielmehr später durch empirische Coefficienten in Rechnung bringt. Wenn z. B. Wasser in einer geraden cylindrischen Röhre strömt, so ist es offenbar anzunehmen, daß alle Wassertheilchen parallele Linien mit d. Mittellinie d. Cylinders durchlaufen. Ebenso werden auch ganz offenbar d. Bahnen aller Flüssigkeitstheilchen, welche einen kegelförmigen Canal durchfließen, in dessen Spitze zusammentreffen. Ebenso wird d. Bewegung bei vielen anderen Fällen sein. Dadurch wird natürlich von vornherein d. Aufgabe ganz wesentlich vereinfacht, indem d. Bewegungszustand ~~durch eine einzige~~ Größe vollkommen bestimmt ist. Also an Stelle d. 3 unbekannten Geschw.-Componenten u_x u_y u_z tritt hier nur d. Größe u zu jedem Ort und zu jeder Zeit hinzu. Wenn ferner d. Verhältnisse derart sind, daß noch eine gewisse Beziehung zwischen

d. Dr. p und d. spec. Volumen v nach d. 2ten Hauptsatz als unabhängig gesetzt werden darf, so sind also überhaupt nur 2 Größen, d. als Functionen d. Orts und d. Zeit bestimmt werden müssen, nämlich d. Geschw. u und d. Dr. p und es handelt sich darum, allgemeine G. aufzustellen, vermittelst deren namentlich diese beiden Größen u u. p bestimmt werden können, wenn d. Linien gegeben sind, d. von d. Flüssigkeitstheilchen durchlaufen werden.

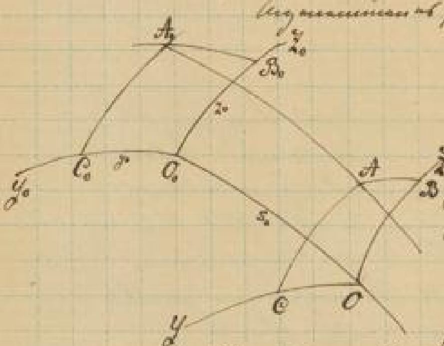
Vorher ist es in d. Regel vortheilhaft, das bisher angenommene rechtwinklige Coord.-System aufzugeben und es zu ersetzen durch ein anderes Coord.-System, welches sich enger genau d. anschließt an d. Strömungslinien. Zu dem Zweck mögen folgende Festsetzungen dienen:

Unter einem Querschnitt d. strömenden Flüssigkeit sei jede Fl. zu verstehen, welche d. ganze System von gegebenen Linien rechtwinklig schneidet. Ist gegeben ein Theilchen an d. Oberfl. d. strömenden Flüssigkeit, jedenfalls ein Theil dieser Linie in sich enthalten d. Oberfl. d. Flüssigkeit [illegible] tangential an diesem Theilchen [illegible], so wird auch diese Theilch. von d. Querschnitt rechtwinklig geschnitten. Z. B. im Falle einer [illegible], wenn d. Linien alle in einem Punkte convergiren, d. System d. Querschnitte concentrische Kugelfl. sein. Durch ein solches System von in unendl. kl. Abständen sich befindenden Querschnitten kann man sich d. Flüssigkeit in unendl. dünne Schichten zerlegen, irgend ein solcher Querschnitt sei bezeichnet mit $\mathfrak{F}$. Um nun innerhalb eines solchen Querschnitts d. Ort eines Punktes zu fixiren, erscheint es angemessen, 2 Systeme von sich rechtwinklig schneidenden Curven in einem solchen Querschnitt anzunehmen. Ist A im Allgemeinen A irgend ein Punkt d. Querschnitts $\mathfrak{F}$, AS d. Linie, welche durch diesen Punkt hindurchgeht, welche also in A d. Querschnitt $\mathfrak{F}$ rechtwinklig schneidet. Diese im Allgemeinen doppelt gekrümmte Linie AS hat in A 2 ausgezeichnete Normalen, den Krümmungsradius und d. binormale senkrecht zu d. ersteren; beide Normalen fallen natürlich in d. Berührungsebene d. Querschnitts $\mathfrak{F}$.

Wählen wir nun insbesondere d. Krümmungsradius d. Linie AS vor, wenn man im Querschnitt $\mathfrak{F}$ diesen Krümmungsradius um ein unendl. kl. Stück AA_1 fort, so wird d. Querschnitt auch in A_1 rechtwinklig von A_1S_1 geschnitten. Wir denken uns jetzt wieder ein unendl. kl. Linienelement gezogen für d. Krümmungsradius d. Linie A_1S_1, so erhält man eine Curve in d. Querschnittsfl., welche dadurch charakterisirt ist, daß ihre sämmtlichen Tangenten zusammenfallen mit d. Krümmungsradien d. Linien, welche durch d. betreffenden Punkte d. Querschnitts $\mathfrak{F}$ hindurchgehen.

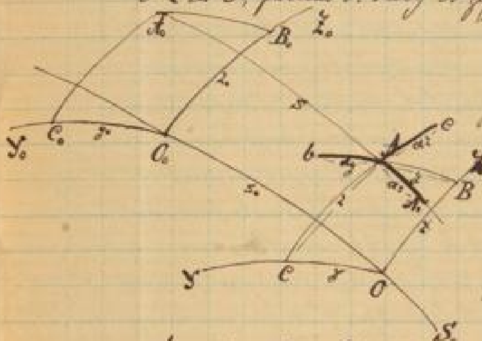
Diese Curven seien d. Krümmungscurven genannt. Denkt man nun ein solches System von Krümmungscurven in d. Querschnitt angenommen hat, kann man sich dieses System von Krümmungscurven durch ein anderes Curvensystem rechtwinklig durchschnitten denken, welche d. Normalcurven genannt werden sollen und welche dadurch charakterisirt sind, daß deren Tangenten zusammenfallen mit d. Binormalen d. Linien, welche durch diese Punkte hindurchgehen. Hiernach läßt sich nun d. Lage irgend eines beliebigen Raumpunktes, in welchem d. strömende Bewegung d. Flüssigkeit stattfindet, durch 3 Coord. bestimmen.

Angenommen es sei $\mathfrak{F}_0$ irgend ein bestimmter Querschnitt d. strömenden Flüssigkeit, von welchem ausgegangen wird; in diesem Querschnitt werde d. Punkt O_0 zunächst vorläufig als Ursprung eines neuen sinnigen Coord.-Systems angenommen, es sei O_0Y_0 d. durch d. Punkt O_0 im Querschnitt $\mathfrak{F}_0$ gehende Krümmungscurve und O_0Z_0 sei d. durch d. Punkt O_0 gehende Normalcurve und endlich O_0S_0 sei d. durch O_0 gehende Linie. Um nun d. Lage irgend eines beliebigen Punktes A durch 3 Coord. zu bestimmen, kann man sich durch diesen Punkt A d. betreffenden Querschnitt $\mathfrak{F}$ gelegt denken, welcher von d. Linie O_0S_0 ein gewisses Stück $O_0O = s$ abschneiden wird; ist umgekehrt dieses Stück $O_0O = s$ gegeben, so ist damit d. Querschnitt $\mathfrak{F}$ gegeben. Um nun d. Lage d. Punktes A in d. Querschnitt $\mathfrak{F}$ zu bestimmen, kann man so verfahren, daß man sich d. Linie denkt, welche durch d. Punkt A hindurchgeht. Dieselbe schneidet d. Querschnitt $\mathfrak{F}_0$ in A_0. Durch d. Punkt A_0 werde in d. Querschnitt $\mathfrak{F}_0$ erstens d. Krümmungscurve A_0B_0 und zweitens d. Normalcurve A_0C_0 gelegt, d. erstere schneidet O_0Z_0 in B_0 und d. letztere O_0Y_0 in C_0 und sodann kann man d. 3 Größen $O_0O = s$, $O_0C_0 = y$ und $O_0B_0 = z$ als Coord. d. Punktes A betrachten. Durch diese 3 Größen ist d. Lage d. Punktes A bestimmt, denn durch d. Bogen $O_0C_0 = y$ ist d. Normalcurve C_0A_0 bestimmt, durch d. Bogen



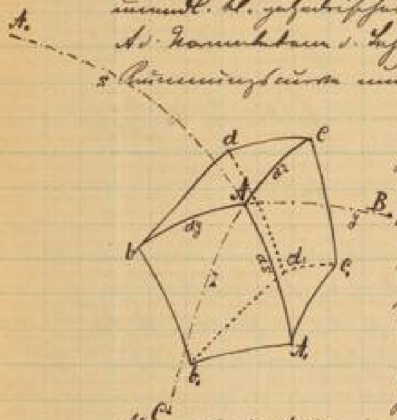
$O_0 B_0 = z_0$ ist d. Krümmungscurve $B_0 A_0$ bestimmt und durch $O_0 O = S$ auch $A_0 A$.

Man kann auch d. Coord. d. Punktes A anders festsetzen. Zu dem Zweck denke man sich im Durchschnitt [illegible] vom Punkte O aus gezogen d. betreffende Krümmungscurve OY gezogen, ebenso d. betreffende Normalcurve OZ, ferner d. durch d. Punkt A gehende Krümmungscurve im Durchschnitt [illegible], diese schneidet d. Curve OZ in B, ferner d. durch A gehende Normalcurve, welche OY in C schneiden möge. Ist hier nun d. Länge $A_0 A$ d. durch A gehenden Linie = S, ferner d. Curvenbogen AB d. durch A gehenden Krümmungscurve = y, d. Bogen AC d. durch A gehenden Normalcurve = y. Z [illegible]



[illegible] $S_0\ y_0\ z_0$ [illegible] $S\ y\ z$ [illegible] $S\ y\ z$ [illegible] $S_0\ y_0\ z_0$ [illegible] $S\ y\ z$ als Coord. von A betrachtet werden, [illegible] S von A_0 gegen A, y von B gegen A und z von C gegen A [illegible]

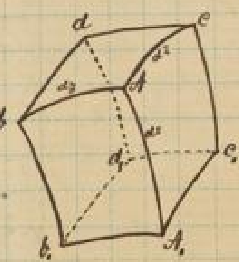
[illegible] $S = S_0$ $y = y_0$ und $z = z_0$, [illegible] $S\ y\ z$ als Coord. d. Punktes A betrachtet werden. [illegible] $AA_1 = ds$ [illegible] $BA = y$ [illegible] $Ab = dy$ [illegible] $AC = dz$ [illegible]



[illegible] $A_1 A b$ in $A_1 b$ und d. Ebene $A_1 A C$ in $A_1 C_1$ [illegible] $b A A_1$ in $b b_1$ und Ebene $b A C$ in $b d$, also ist $b_1 b d$ d. Normalebene d. Krümmungscurve Ab für d. Punkt b. [illegible] $C_1 C d$. [illegible] $b_1 d_1$ $C_1 d_1$ und $A d_1$ [illegible] A [illegible] $b d c$ [illegible] f_s, [illegible] $A_1 A c$ mit f_y und endlich $A_1 A b$ mit f_z. [illegible] AA_1, Ab und AC [illegible]

$$f_s = dy\,dz \qquad f_y = ds\,dz \qquad f_z = ds\cdot dy.$$

[illegible] f_s [illegible] $b_1 A_1 c_1$ [illegible] f_s [illegible] $f_s + df_s$; [illegible] f_y [illegible] $f_y + df_y$ und d. [illegible] f_z [illegible] $f_z + df_z$. [illegible] f_s = d. Product d. von A auslaufenden Seiten $dy\ dz$ [illegible] $f_s + df_s$ also $b_1 d_1 c_1$ = d. Product d. von A_1 auslaufenden Seiten [illegible] $= A_1 b_1 \cdot A_1 C_1$ mit d. Winkel $b_1 A_1 C_1$ [illegible] R [illegible] $b_1 A_1 C_1$ [illegible] bAC [illegible] $f_y + df_y$ d. Winkel $b_1 b d$ [illegible] R [illegible] $f_y + df_y = bb_1 \cdot bd$ ist und ebenso $f_z + df_z = CC_1 \cdot Cd$. [illegible]



Es sei d. Krümmungshalbmesser für d. Linie AA_1 für d. Punkt A bezeichnet mit ρ und zugleich soll dieser Krümmungsradius + gesetzt werden für d. Fall, daß d. Linie für ein Sinne d. + y Richtung also $A.b$ concav gekrümmt ist. Ferner denke man sich für d. Punkt A diejenigen beiden Normalschnitte d. Durchschnittsfl. σ, welche resp. d. Krümmungscurven bA und d. Normalcurven CA berühren, es sei ρ' d. Krümmungsradius d. erstgenannten Normalschnitts Ab d. Durchschnittsfl. und ρ'' d. Krümmungsradius d. anderen Normalschnitts AC, diese beiden sollen + gesetzt werden für d. Fall, wenn ein Linie AA_1 concav gekrümmt, wie Figur zeigt. Es sei angenommen daß alle d. Krümmungsradien + seien wie in d. Figur, so werden also d. beiden Linienelemente Ab und A_1b von A nach gerechnet gegen einander convergieren unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{ds}{\rho}$, demnach folgt: $bb_1 = ds(1-\frac{dy}{\rho})$. Da ferner d. Krümmungsradius ρ' d. Normalschnitts Ab d. Fl. σ + ist, so convergieren AA_1 und bb_1 von Ab aus gerechnet unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{dy}{\rho'}$, so daß $A_1b_1 = dy(1-\frac{ds}{\rho'})$ ist; ferner ebenso [illegible] in d. Fall, daß auch d. Normalschnitt AC d. Fl. σ concav gekrümmt gegen AA_1 ist, also ρ'' + ist, so convergieren AA_1 und CC_1 unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{dz}{\rho''}$ und es ist also: $A_1C_1 = dz(1-\frac{ds}{\rho''})$.

Es bleibt nun noch übrig, d. Linien bd und Cd mitzubestimmen. Die beiden Linien AC und bd sind im Allgemeinen nicht parallel anzunehmen, sie divergieren von Ab aus unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{dy}{r'}$, wo ein negativer Werth von r' d. Fall entsprechen würde, daß bd und AC nicht divergieren sondern convergieren, dann ist: $Cd = dy(1+\frac{dz}{r'})$; endlich sei noch angenommen, daß auch Ab und Cd von AC aus gerechnet divergieren unter d. unendl. kl. Winkel $\frac{dz}{r''}$, wo ein negativer Werth von r'' d. entgegengesetzten Fall entspricht, so wird d. Fall sein: $bd = dz(1+\frac{dy}{r''})$. Nun kann man d. d. Punkt A gegenüberliegenden Flächen ausdrücken und es ist mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen 2ter Ordnung:

$$f_s + df_s = b_1A_1c_1d_1 = A_1b_1 \cdot A_1C_1 = dy\,dz\left(1-\frac{ds}{\rho'}\right)\left(1-\frac{ds}{\rho''}\right) = f_s\left(1-\frac{ds}{\rho'}-\frac{ds}{\rho''}\right).$$

$$f_y + df_y = b_1bdd_1 = bb_1 \cdot bd = ds\,dz\left(1-\frac{dy}{\rho}\right)\left(1+\frac{dy}{r''}\right) = f_y\left(1-\frac{dy}{\rho}+\frac{dy}{r''}\right)$$

$$f_z + df_z = C_1Cdd_1 = CC_1 \cdot Cd = \cancel{AA_1}\,dy\left(1+\frac{dz}{r'}\right) = f_z\left(1+\frac{dz}{r'}\right).$$

Daß $CC_1 = AA_1$ ist folgendermaßen nachzuweisen, $b_1A_1C_1$ ist nach d. Annahme senkrecht zur Tangente in A_1, d. Linie dieser Tangente liegt in d. Schwingungsebene für d. Punkt A_1 also in $A.A.b$, also ist $b_1A_1C_1$ senkrecht zu $A.Ab$, andererseits auch zu $C.A.A$, weil sie zusammen fällt mit $A.AC$ senkrecht zu $A.Ab$. Man hat also 2 Ebenen, d. gleichzeitig auf $A.Ab$ senkrecht stehen und d. sich in AC schneiden, folglich $A.C.$ senkrecht zu Schwingungsebene und parallel zu AC, also $AA_1 = CC_1$. —

Das Volumen dieses gekrümmten Raumelements sei bezeichnet mit dV, welches bei Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung gesetzt werden kann: $dV = f_s\,ds = f_y\,dy = f_z\,dz$. Demnach folgt nach obigen Gl.:

$$df_s = -\left(\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''}\right)dV;\quad df_y = \left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{\rho}\right)dV \text{ und } df_z = \frac{1}{r'}\,dV.$$

Gehen wir nun über zur Elementarbetr. d. Bewegung für diejenige Flüssigkeitsmenge, welche sich augenblicklich in diesem gekrümmten Raumelement befindet, so kommt es besonders zunächst darauf an, d. innere Reibung mitzubetrachten, womit die, dieses gekrümmte Element umgebende Flüssigkeitsmenge, [illegible] auf d. Seitenflächen AA_1, Ab und AC [illegible] innere Reibung betrifft, so sei [illegible] im Allgemeinen [illegible] entwickelt wurde. Es sei A ein beliebiger Punkt im Innern einer in Bewegung befindlichen Flüssigkeit, AX AY und AZ 3 zu einander senkrechte Richtungen, u v w d. Comp. d. Geschw., welche augenblicklich in A stattfindet nach AX AY und AZ. Es findet dann in demselben Augenblick in A d. Ebene YAZ eine [illegible] innere Reibung statt, welche sich im Allgemeinen in 3 Componenten zerlegen läßt nach AX AY u. AZ [illegible] d. [illegible] sich in 3 Comp. zerlegen lassen, nur daß, [illegible] abhängig sind von

von d. Geschwindigkeiten und Verschiebungen, die inneren Reibungen abhängig sind von d. relativen Geschw. von Punkt zu Punkt im Raume. Wenn man sich d. innere Reibung pr. Flächeneinheit, welche im Punkte A d. Ebene YAZ stattfindet in 3 Comp. zerlegt denkt, so sei d. erste bezeichnet mit σ_x und d. anderen mit τ_{xy} und τ_{xz}. So haben dann diese 3 Comp. d. spec. inneren Reibung in A d. Ebene YAZ folgende Ausdrücke:

$$\sigma_x = 2\,\mathfrak{R}\frac{du}{dx} \qquad \tau_{xy} = \mathfrak{R}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \text{ und } \tau_{xz} = \mathfrak{R}\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right).$$

$\mathfrak{R}$ bedeutet hierbei eine Constante, welche nur erfahrungsmässig bestimmt werden kann, und für verschiedene Flüssigkeiten und verschiedene Zustände derselben Flüssigkeit verschieden ist. — Wendet man dies nun an, um in vorliegendem Fall für d. 6 begrenzenden Fl. d. gedachten Flüssigkeitselementes d. inneren Reibungen zu erhalten. Was d. Vorzeichen betrifft, so ist hinzuzufügen, daß d. inneren Reibungscomp. [illegible] sind als d. Resultante d. Einwirkung d. im Sinne d. positiven Axen gelegenen Flüssigkeitselemente auf d. jenseits d. Ebene XYZ gelegenen. Wenden wir dies nun an, so erhalten wir:

1) d. Fl. $b\,A\,C = f_s$ betreffend. Hier ist an Stelle von AX, AA_1 zu setzen, sodaß an Stelle d. X Axe hier d. S Axe tritt. Unter dieser Voraussetzung ist hier u, was dort d. Geschw.-Comp. im Sinne d. X Axe bedeutete, hier d. resultierende Geschw. d. Axe S, wogegen d. anderen Geschw.-Comp. $= 0$ sind. Damit ergibt sich d. innere Reibung, welche in d. Fl. $b\,A\,C$ stattfindet $= f_s$: 1) im Sinne $AA_1 = 2\,\mathfrak{R}\frac{du}{ds} f_s$,
nach d. Richtung Ab ist d. Comp. d. inneren Reibung in dieser Teilfl.: $= \mathfrak{R}\frac{du}{dy} f_s$ und
nach d. — AC . . . . . . $= \mathfrak{R}\frac{du}{dz} f_s$, wobei aber berücksichtigt werden muß, daß d. hier in Betracht angrenzenden Flüssigkeitsteilchen von d. Teilfl. f_s aus gerechnet nicht im Sinne d. positiven S Axe gelegen sind, sondern umgekehrt, sodaß d. Zeichen $\div$ hinzuzufügen sind:
Also nach $AA_1 = \div 2\,\mathfrak{R}\frac{du}{ds} f_s$ nach Ab: $\div\,\mathfrak{R}\frac{du}{dy} f_s$ nach AC: $\div\,\mathfrak{R}\frac{du}{dz} f_s$.

2) Was d. Seitenebene $A_1 AC = f_y$ betrifft, so gelten hier ganz analoge Ausdrücke für d. betreffenden Comp. d. inneren Reibung. σ_y d. Normalcomp. d. inneren Reibung ist $= 0$, weil $v = 0$ ist, d. Comp. τ_{yz}, welche d. Faktor $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$ enthält, ist auch $= 0$, weil $v = w = 0$ ist, es bleibt nur d. Reibung übrig, welche d. Richtung AA_1 hat und welche ist $= \div\,\mathfrak{R}\frac{du}{dy} f_z$, weil d. angrenzenden Flüssigkeitsteile im Sinne d. negativen Y Axe gelegen sind, demnach d. Componenten nach d. 3 entsprechenden Richtungen:
nach AA_1: $-\,\mathfrak{R}\frac{du}{dy} f_z$ nach Ab: 0 nach AC: 0.

3) Was d. dritte um A herumliegende Teilfl. $f_z = A_1\,A\,b$ betrifft, so sind d. betreffenden Comp. d. spec. inneren Reibung hier zu bezeichnen mit $\sigma_z\ \tau_{zs}$ und τ_{zy}; σ_z ist $= 0$ weil d. Geschw.-Comp. $w = 0$ ist, τ_{zy} ist $= 0$ weil auch d. Geschw. $v = 0$ ist; es bleibt also nur τ_{zs} übrig, eine innere Reibung nach d. Richtung AA_1, welche im Allgemeinen $= \mathfrak{R}\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{ds}\right)$ ist, also mit $w = 0$:
nach AA_1: $-\,\mathfrak{R}\frac{du}{dz} f_z$ nach Ab: 0 nach AC: 0

4) Gehen wir nun zur Teilfl. $b_1 A_1 C_1 = f_s + d f_s$ über, um diejenige innere Reibung zu erhalten, welche in dieser Teilfl. und zwar nach d. Richtung d. Tangente an d. Achse im Punkte A_1 stattfindet, so haben wir nur nötig an Stelle von f_s zu setzen $f_s + d f_s$ und zu $\frac{du}{ds}$ d. partielle Differential von $\frac{du}{ds}$ nach S hinzuzufügen und außerdem d. Vorzeichen umzukehren, weil hier d. angrenzenden Flüssigkeitsteile demnach im Sinne d. positiven S gelegen sind, also d. innere Reibung $= +\,2\,\mathfrak{R}\left(\frac{du}{ds} + \frac{d^2u}{ds^2}ds\right)\left(f_s + d f_s\right)$,
ebenso erhält man d. Comp. d. inneren Reibung in dieser Teilfl. nach d. Richtungen $A_1 b_1$ und $A_1 C_1$, wenn man d. Vorzeichen umkehrt, zu $\frac{du}{dy}$ und $\frac{du}{dz}$ ihre partiellen Differentiale bezüglich S hinzufügt und an d. Stelle von f_s immer $f_s + d f_s$ setzt. Demnach hat man d. folgenden Componenten:
nach $A_1 A$: $2\,\mathfrak{R}\left(\frac{du}{ds} + \frac{d^2u}{ds^2}ds\right)\left(f_s + d f_s\right)$ — nach $A_1 b_1$: $\mathfrak{R}\left(\frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dy\,ds}ds\right)\left(f_s + d f_s\right)$; nach $A_1 C_1$: $\mathfrak{R}\left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz\,ds}ds\right)f_s$

5) Was d. Teilfl. $f_y + d f_y = b_1\,b\,d$ betrifft, so erhält man für diese d. darin stattfindende innere Reibung und zwar nach d. Richtung $b b_1$, wenn man d. Ausdruck unter Berücksichtigung nimmt, zu $\frac{du}{dy}$ d. partielle Differential nach y hinzufügt und für f_y setzt $f_y + d f_y$. Also d. Componenten:
nach $b b_1$: $\mathfrak{R}\left(\frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dy^2}dy\right)\left(f_y + d f_y\right)$ — — —

6) Ebenso behandelt man d. Reibung in d. Seitenfl. $f_z + df_z$, für d. man CC_1: $R\left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}dz\right)(f_z + df_z)$. — —

Dabei ist zu bemerken, daß während d. Kräfte unter 1) 2) u. 3) d. Richtungen AA_1, Ab und AC haben, d. Kräfte unter 4 5 u. 6 genau genommen nicht diese Richtungen haben, sondern etwas abweichende. Z.B. zunächst d. unter 4) gefundene. Die erste Kraft welche in $f_s + df_s$ nach d. Richtung d. Tangente an d. Curve im Punkte A_1 angreift, läßt sich zerlegen in 2 Comp. nach d. Richtungen AA_1 und Ab. Da d. Tangente d. Curve im Punkte A_1 mit d. Tangente d. Curve im Punkte A nur einen unendl. kl. Winkel bildet, dessen cos. also nur um eine unendl. kl. Größe 2ter Ordnung von d. Einheit verschieden ist, so kann d. Comp. dieser Kraft genommen nach d. Richtung AA_1 d. unter 4 gefundenen Kraft gleich gesetzt werden. Es kommt jedoch noch eine unendl. kl. Comp. nach d. Richtung Ab hinzu, welche erhalten wird, wenn d. Größe dieser Kraft für den Punkt A_1 multiplicirt wird mit d. cos. d. Winkels, den ihre Richtung mit Ab bildet. Offenbar ist aber d. cos dieses Winkels $= 1R \div$ den Contingenzwinkel d. Curve AA_1; Ab ist d. Richtung d. Krümmungshalbmessers d. Curve für d. Punkt A und d. Winkel, welchen d. Tangente d. Curve für d. Punkt A_1 mit d. Tangente im Punkte A an Ab bildet ist $= R \div$ dem Winkel, den d. Tangente d. Curve in A_1 mit d. Tangente d. Curve in A bildet; dieser ist aber = d. sin desselben und da d. Contingenzwinkel unendl. kl. ist so genügt es, wenn man unendlich kleine Größen höherer Ordnung zu vernachlässigen, statt d. sin = d. Winkel selbst also $= \frac{ds}{\varrho}$; da dieser Multiplicator $\frac{ds}{\varrho}$ unendl. kl. ist, so genügt es nur d. hauptsächlichsten Bestandtheile zu berücksichtigen, also Glieder höherer Ordnung vernachlässigen. Demnach ist: $2R\frac{du}{ds}f_s\frac{ds}{\varrho}$ d. Comp. d. ersten Kraft aus 4) nach d. Richtung Ab. — Was ferner in derselben Seitenfl. d. 2te Kraftcomp. nach d. Richtung A_1b_1 betrifft, so ist d. Comp. dieser nach A_1b_1 gerichteten Kraft, genommen im Sinne Ab, dieser Kraft wieder gleich zu setzen; aber diese Kraft nach d. Richtung A_1b_1 liefert noch eine unendl. kl. Comp. nach d. Richtung AA_1, welche erhalten wird, wenn man jene Kraftgröße multiplicirt mit d. cos d. Winkels, ~~dessen~~ den d. Richtung A_1b_1 mit AA_1 bildet. Dieser Winkel ist $= 1R +$ d. Contingenzwinkel d. Curve AA_1; dessen cos ist aber $= \div \sin\frac{ds}{\varrho} = \div\frac{ds}{\varrho}$; es liefert also d. 2te Kraft aus 4) auch eine Comp. nach d. Richtung AA_1, welche erhalten wird, wenn man diese Kraft mit $-\frac{ds}{\varrho}$ multiplicirt, wobei es wieder genügt, nur d. Hauptbestandtheile zu berücksichtigen; diese Kraftcomponente nach d. Richtung AA_1 ist demnach: $-R\frac{du}{dy}f_s\frac{ds}{\varrho}$.

Die 3te Kraft in d. Seitenfl. $f_s + df_s$ hat d. Richtung A_1C_1; diese Richtung ist aber parallel AC, wie früher bewiesen. Diese Kraft ist also ohne Weiteres = d. nach d. Richtung AC.

Was ferner d. Kraft 5) betrifft, die in d. Seitenfl. $f_y + df_y$ nach d. Richtung bb_1 wirkt, so liefert diese Kraft zunächst nach AA_1 eine ihr gleich zu setzende Kraft, sowie eine unendl. kl. Comp. nach d. Richtung Ab, welche erhalten wird, wenn man d. Kraft nach d. Richtung bb_1 multiplicirt mit d. cos d. Winkels, den d. Richtung bb_1 mit Ab bildet. Dieser ist $= 1R +$ d. Contingenzwinkel d. Normalschnitts Ab d. Oberflächenschnitt. also $= 90° + \frac{dy}{\varrho'}$, d. cos hiervon ist aber $= \div \sin\frac{dy}{\varrho'} = \frac{dy}{\varrho'}$ und demnach d. Componente nach d. Richtung Ab: $= -R\frac{du}{dy}f_y\frac{dy}{\varrho'}$.

Endlich bleibt noch d. Kraft 5) übrig; sie zerfällt in eine ihr selbst gleich zu setzende Kraft nach d. Richtung AA_1 und eine nach d. Richtung AC, welche erhalten wird analog d. früheren. Winkel $ACC_1 = 1R + \frac{dz}{\varrho''}$ also $\cos ACC_1 = \div \sin\frac{dz}{\varrho''} = \div\frac{dz}{\varrho''}$ und folglich d. Componente nach d. Richtung AC: $= \div R\frac{du}{dz}f_z\frac{dz}{\varrho''}$.

Wenn nun d. sämmtlichen Reibungskräfte nach d. Richtung AA_1 sowie d. nach d. Richtung Ab und nach AC für sich addirt werden, sodann jeder dieser Ausdrücke durch d. Volumenelement dV dividirt wird, so erhält man d. innere Reibung nach d. Richtungen AA_1, Ab und AC p. Volumeinheit Flüssigkeit. Diese inneren Reibungen seien entsprechend ihren Richtungen bezeichnet mit R_s, R_y, R_z. Dieselben sind demnach mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung:

$$R_s = R\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2\frac{df_s}{dV}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{df_y}{dV}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{df_z}{dV}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$R_y = R\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial y} + \frac{df_s}{dV}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{\varrho'}\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$R_z = R\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial z} + \frac{df_s}{dV}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\varrho''}\frac{\partial u}{\partial z}\right].$$

Setzt man nun in diesen Gln. für d. Verhältnisse $\frac{df_s}{dV}$ $\frac{df_y}{dV}$ und $\frac{df_z}{dV}$ ihre Werthe, so folgt:

$$R_s = R\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\left(\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}\right)\frac{\partial u}{\partial s} + \left(\frac{1}{r''} - \frac{2}{\varrho}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{r'}\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

$$R_y = R\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial y} + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial s} - \left(\frac{2}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$R_z = R\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial z} - \left(\frac{1}{\varrho'} + \frac{2}{\varrho''}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right].$$

Die Kräfte, welche überhaupt auf dieses gekrümmte Volumenelement wirken, sind zunächst 2erlei: theils äußere Massenkräfte, welche auf d. Masse d. Flüssigkeit wirken, theils Oberfl.-Kräfte, welche von d. angrenzenden Flüssigkeit herrühren; letztere sind theils [illegible] theils [illegible] [illegible] d. [illegible] [illegible] und es handelt sich darum [illegible] d. [illegible] d. Dr. pr. Volumeneinheit nach denselben Richtungen, womit d. umgebende Flüssigkeit auf dieses gekrümmte Flüssigkeitselement pr. Volumeneinheit wirkt. Zu diesem Zweck würde es nicht nothwendig sein, d. Flüssigkeitselement gekrümmt abzugrenzen, sondern es würde [illegible] sein, das Flüssigkeitselement sich als ein rechtwinkliges parallelepipedisches Element zu denken, da es bei d. Dr. ganz gleichgültig ist, von welcher Gestalt d. Flüssigkeitselement abgegrenzt wird. Theilt man diese, so ist z. B. d. Dr. d. äußerlich angrenzenden Flüssigkeit auf d. Seitenfl. $bAC = p f_s$, wenn p d. spec. Dr. im Punkte A d. Flüssigkeit bedeutet. Für d. gegenüberliegende Seitenfl., die für sich auch $= f_s$ ist, ist spec. Dr. um p verschieden und zwar $= p + \frac{dp}{ds}ds$, also d. Dr. für d. ganze Seitenfl.: $= (p + \frac{dp}{ds}ds)f_s$. Was d. Vorzeichen betrifft, so ist zu bemerken, daß für diese durch A gehende Seitenfl. b, A, C d. angrenzende Flüssigkeit in d. positiven S Richtung gelegen ist und also d. Dr., welche d. angrenzende Flüssigkeit auf d. Element ausübt, d. Richtung A_1A hat, so daß d. letztere [illegible] ist, es ist also d. resultierende Gesammtwirkung d. angrenzenden Flüssigkeit auf d. parallelepipedische Element nach d. Richtung d. Achse: $= p f_s - (p + \frac{dp}{ds}ds) f_s$ und wenn man [illegible] d. spec. Dr. durch Division mit dV erhält, so ergibt diese spec. Dr.: $= \frac{-\frac{dp}{ds}ds\,f_s}{dV} = -\frac{\frac{dp}{ds}ds\,f_s}{f_s\,ds} = -\frac{dp}{ds}$, so ist also d. Pressung, herrührend von d. äußeren angrenzenden Flüssigkeit im Sinne d. Achse bezogen auf d. Volumeneinheit = d. partiellen Ableitung von p nach S, ebenso ergibt sich für d. nach d. Richtung d. [illegible] [illegible] wirkende Pressung d. angrenzenden Flüssigkeit pr. Volumeneinheit $= -\frac{dp}{dy}$ und nach $AC = -\frac{dp}{dz}$. Schließlich ist nun also d. gesammte Oberfl.-Kraft, welche von d. umgebenden Flüssigkeit auf d. Oberfl. ausgeübt wird, bezogen auf d. Volumeneinheit und zwar an [illegible] nach d. Richtung AA_1: $= R_s - \frac{dp}{ds}$ nach d. Richtung Ab: $= R_y - \frac{dp}{dy}$ und im Sinne d. [illegible] gesuchten Normalen AC: $= R_z - \frac{dp}{dz}$. Multiplicirt man diese [illegible] Kraft-Comp., welche sich auf d. Volumeneinheit beziehen, mit d. Volumen d. Masseneinheit, so erhält man d. betreffende Kraft-Comp. pr. Masseneinheit. Bezeichnet man so d. spec. Masse d. Flüssigkeit im Punkte A d. h. = Masse pr. Volumeneinheit, so ist $\frac{1}{\mu}$ offenbar d. Volumen pr. Masseneinheit. Wenn man also d. betreffenden Kräfte-Comp., welche sich auf d. Volumeneinheit beziehen, mit $\frac{1}{\mu}$ multiplicirt, so erhält man d. betreffenden [illegible]-Kräfte im Punkte A pr. Masseneinheit. Diesen [illegible]-Kräften pr. Masseneinheit sind d. äußeren Massenkräfte pr. Masseneinheit hinzuzufügen. Die Componenten derselben sollen mit K_s K_y K_z bezeichnet werden, also K_s d. spec. äußere Massenkraft im Sinne d. Achse etc. Fügt man diese hinzu, so folgt:

$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right)$ als d. resultierende Gesamtkraft, welche pr. Masseneinheit nach d. Richtung d. Bahn im Punkt A einwirken ist. Ebenso ist

$K_y + \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{dp}{dy}\right)$ d. Gesamtkraft im Sinne d. Krümmungsradius pr. Masseneinheit im Punkt A.

$K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{dp}{dz}\right)$ d. Gesamtkraft pr. Masseneinheit im Sinne d. Normalen AC für den Punkt A.

Diese 3 resultierenden Kraft-Comp. nach d. Richtungen AA_1, AB und AC müssen nun natürlich gleich sein d. Beschl.-Comp., welche nach AA_1, AB und AC stattfinden, denn diese Beschl., welche im Punkte A nach diesen Richtungen stattfinden, müssen ja von den auf d. Masseneinheit bezogenen äusseren und inneren Kräften, welche in A auf d. Flüssigkeit wirken. Nun lässt sich aber d. Beschl. eines Flüssigkeitselements bei A, da dieses sich in d. Bahn AA_1 bewegt, bekanntlich zerlegen in eine Bahn- und eine Normalcomponente. d. Beschl. irgend eines materiellen Punktes lässt sich an jeder Stelle zerlegen in eine Comp. nach d. Tangente d. Bahn und in eine Centripetalbeschl. Die Bahnbeschl. nach d. Richtung d. Tangente ist = dem Differentialquotienten d. Geschw. nach d. Zeit t also hier = $\frac{du}{dt}$, wo dies d. vollständige Differential ist mit Rücksicht darauf, daß u eine Function d. 4 Veränderlichen t s y u. z ist. d. Centripetalbeschl. nach d. Richtung AB und zwar im Sinne gegen d. Krümmungsmittelpunkt hin ist = $\frac{u^2}{\varrho}$ und d. Beschl. Comp. nach d. Richtung AC also im Sinne d. Binormale d. Beschl. = 0 ist:

$$K_s = \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = \frac{du}{dt}; \quad K_y = \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{dp}{dy}\right) = \frac{u^2}{\varrho} \text{ und } K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{dp}{dz}\right) = 0.$$

Diese Tangentialcomp. d. Bahnbeschl. ist d. vollständige Ableitung von u nach d. Zeit t, welche auch folgendermaßen geschrieben werden kann: $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$, weil u erstens eine unmittelbare, zweitens eine mittelbare Function d. Zeit t, also auch u eine Function von s y u. z und diese Coord. selbst Functionen d. Zeit sind. In d. Ausdruck für $\frac{du}{dt}$ sind $\frac{ds}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ nichts anderes als d. Geschw.-Comp., welche in A nach AA_1, AB und AC stattfinden. Da aber AA_1 d. Richtung d. Bahn ist, so sind d. Geschw.-Comp. nach AB und AC = 0 und nach AA_1 = d. Geschw. selbst, es ist also: $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt} = 0$ und $\frac{ds}{dt} = u$, so daß: $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}$ ist; d. 3 gesuchten Fundamentalgleichungen sind demnach:

$$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$K_y + \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{dp}{dy}\right) = \frac{u^2}{\varrho}$$

$$K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{dp}{dz}\right) = 0$$

Zu diesen 3 Fundamentalgleich. kommt d. sogenannte Continuitätsbed., die hier nur eine etwas andere Form als früher erhalten wird, wo ein rechtwinkliges parallelepipedisches Massenelement zu Grunde gelegt wurde. Was diese Continuitätsbed. betrifft, so ist d. Flüssigkeitsmasse, welche zur Zeit t in diesem gekrümmten Raumelement befindet $= \mu\, dV$ wobei μ d. spec. Masse vorstellt, welche zur Zeit t im Punkte A stattfindet. Während d. nächst folgenden Zeitelements dt ändert sich im Allgemeinen die im selben Raumelement enthaltene spec. Masse und zwar um d. partielle Differential bezüglich d. Zeit, also um $\frac{\partial \mu}{\partial t}\, dt\, dV$. Diesen selben Zuwachs an Masse innerhalb d. Raumelements dV kann man auch anders ausdrücken. Mit Rücksicht auf d. Art und Weise, wie hier dieses Raumelement abgegrenzt wurde, fließt während d. Zeitelements dt Flüssigkeit nur ab- und nur durch d. Fl. A B C und $A_1 B_1 C_1$, in d. angrenzenden Fl. fließt nie Flüssigkeit vorbei, es muß also dieser Zuwachs an Masse auch gleich sein d. Überschuß derjenigen Flüssigkeitsmasse, welche während d. Zeitelements dt durch d. Fl. BAC einfließt über die, welche durch $B_1A_1C_1$ hinausfließt.

Was nun d. Flüssigkeit betrifft, d. während d. Zeitelements dt durch bAC hineinfließt, so ist d. Volumen dieser Flüssigkeit = d. Product aus d. Größe f_s d. Seitenfl. bAC und $u.dt$, also:
$= f_s\, u.dt$, denn $u\,dt$ ist d. Factor, welcher anzeigt, daß irgend ein Flüssigkeitstheilchen während d. Zeitelements dt vermöge d. Geschw. u durch d. Fl. f_s fließt. Das Flüssigkeitsvolumen, welches während d. Zeit dt in d. fraglichen Raum hineinfließt ist also $f_s\, u\,dt$, also d. entsprechende Flüssigkeitsmenge, welche während d. Zeit dt hineinfließt $= f_s\, \mu . u\,dt$. –

Man erhält andererseits diejenige Flüssigkeitsmenge, welche in derselben Zeit aus d. Raum dV herausfließt, wenn man einfach in diesem Ausdruck $f_s + df_s$ für f_s setzt und wenn man ferner $\mu . u$ um ihr partielles Differential nach s vermehrt, also ist dieselbe:

$$=(f_s + df_s)\left(\mu . u + \frac{d\mu u}{ds} ds\right) dt.$$

Wenn man dieses von d. hereinfließenden Menge abzieht, so erhält man diejenige Menge, welche während d. Zeitelements dt in d. Raum mehr hinein als herausfließt; dieser Zuwachs war: $= \frac{d\mu}{dt}\, dt . dV$, also:

$$\frac{d\mu}{dt}\, dt\, dV = f_s\, \mu\, u\, dt - (f_s + df_s)\left(\mu u + \frac{d\mu u}{ds} ds\right) dt$$

Oder: $$\frac{d\mu}{dt}\, dV = -\frac{d\mu u}{ds} f_s\, ds - \mu\, u\, f_s$$ da d. letzte Product unendl. kl. höherer Ordnung ist.

Dividirt man durch dV, so folgt: $$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{d\mu u}{ds} + \mu u \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right)$$

oder: $$\frac{d\mu}{dt} + \frac{d\mu u}{ds} = \mu u \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right).$$ Dies ist d. sogenannte

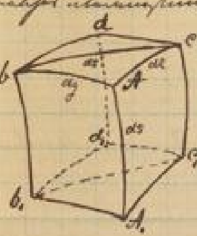
Continuitätsgleichung.

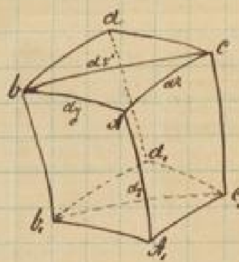
Diese Gl. vereinfacht sich wesentlich, wenn d. spec. Masse d. Flüssigkeit constant ist, wie dies namentlich mit bedeutender Annäherung bei d. Strömung einer tropfbaren Flüssigkeit vorausgesetzt werden kann, vorausgesetzt, daß d. Temperatur eine unwesentlich veränderliche ist, wie dies auch diesen allgemeinen Entwicklungen zu Grunde gelegt wurde. Ist dies d. Fall so ist d. spec. Volumen v auch ungefähr als constant zu setzen, also $\mu = const.$, folglich:

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \quad \text{ferner:} \quad \frac{d\mu u}{ds} = \mu \frac{du}{ds} \quad \text{und demnach:}$$

$$\frac{1}{u}\frac{d\mu}{ds} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}.$$ — Continuitätsgleichung einer tropfbaren Flüssigkeit bei constanter spec. Masse. —

Was d. Grenzbedingungen betrifft, so sind diese besonders abhängig von d. äußeren Reibungen, welche zwischen d. Oberfl. d. strömenden Flüssigkeit und d. festen Leitfl. stattfindet. Diese äußere Reibung, auf d. Flächeneinheit bezogen mit R' bezeichnet, ist natürlich immer d. relativen Bewegung d. Flüssigkeit längs d. Leitfl. gerade entgegengesetzt gerichtet. Sie ist übrigens eine (noch empirisch zu bestimmende) Function d. Geschw., ferner abhängig von d. Oberfl.-Beschaffenheit d. Wand ferner von d. Art und dem Zustand d. Flüssigkeit. Es sei nun mit ds' ein Linienelement d. Curve bezeichnet, in welcher eine solche feste Leitfl. von einem Querschnitt geschnitten wird, unter Querschnitt d. zu allen Stromfäden senkrechte Fläche verstanden. In d. nebenstehenden Figur, darstellend ein Flüssigkeitselement, welches ebenso wie oben d. ~~[illegible]~~ Coordinatenflächen begrenzt wird, sei bc ein solches Element ds'. Es werde dann ein unendl. dünner Flüssigkeitsfaden betrachtet, welcher längs d. Leitfl. bcc_1b_1 hinfließt. Dieser Flüssigkeitsfaden hat einen verschwindend kleinen Querschnitt bAC, dessen Hypothenuse $= ds' = bc$ ist und dessen Katheten unendl. kl. Elemente d. durch d. Punkt A gehenden Krümmungs- und Normallinien sind $= Ab = dy$ und $AC = dz$. Betrachtet man nun d. Gleichgew. d. Kräfte an einem unendl. kl. Stück eines solchen Fadens, welches herausgeschnitten wird durch 2 unendl. nahe benachbarte Querschnitte gehend durch d. beiden unendl. nahen Punkte A u. A_1 d. Linie, so muß d. wirkenden





Die algebraische Summe aller auf d. Element wirkenden Kräfte im Sinne d. Achsenrichtung AA_1 = 0 sein. Was d. Fl. betrifft, welche auf d. Flen. $A_1b_1c_1$ und Abc [illegible], so reduciren sich diese offenbar auf unendl. kl. Größen 3ter Ordnung, wenn auf d. Richtung AA_1 bezogen. Ebenso verhalten sich d. [illegible]kräfte. Es müssen demnach d. Kräfte von unendl. kl. Größe 2ter Ordnung für sich = 0 sein. Die übrig bleibenden Kräfte sind aber d. äußeren Reibung längs d. Fl. bcb_1c_1, und d. inneren Reibungen längs d. Flen. AA_1c_1c und AA_1b_1b.

D. Größe d. Fl. bb_1cc_1 ist nun mit Vernachlässigung unendl. kl. Größen höherer Ordnung $= ds.ds'$ und demnach d. äußere Reibung in d. Seitenfl. bb_1c_1c $= R'ds.ds'$; da diese aber immer d. entgegengesetzte Richtung d. Bewegung d. Elements gegen d. Leitfl. hat, so ist sie $= \div R'ds.ds'$ im Sinne d. Richtung AA_1.

Für d. Seitenfl. AA_1b_1b ist d. innere spec. Reibung $= R\frac{du}{dz}$ und also d. Gesamtreibung genommen nach d. Richtung AA_1 $= \div R\frac{du}{dz}ds.dy$.

Endlich ist d. spec. Reibung d. Seitenfl. AA_1c_1c $= R\frac{du}{dy}$ und also d. Gesamtflächenreibung nach d. Richtung AA_1 $= \div R\frac{du}{dy}ds.dz$.

Die algebraische Summe aller dieser Kräfte muß nun = 0 sein, man hat also d. Bedingung:

$$\div R'ds.ds' - R\frac{du}{dz}ds.dy - R\frac{du}{dy}ds.dz = 0$$

, od. wenn man mit $\div R\,ds.ds'$ dividirt,

$$\frac{R'}{R} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dy}{ds'} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dz}{ds'} = 0.$$

Diese allgemeine Oberfl.-Bedingung muß also stattfinden für alle diejenigen Punkte, in welchen d. [illegible] Flüssigkeit in Berührung ist mit d. festen Leitfl. also dort, wo äußere Reibung stattfindet. Diese Gl. kann unter besonderen Umständen dienen um d. Constanten zu bestimmen, welche sich bei d. Integration d. vorhin erhaltenen Differentialgleichungen ergeben. —

Es läßt sich nun leicht begreifen, daß d. Benützung d. vorhin gefundenen allgemeinen Glen. sich erspart wird für besondere [illegible] Fälle durch d. vereinfachten Ausdrücke, namentlich durch diejenigen, welche sich für d. Reibungscomponenten R.. ergeben. Jedoch vereinfachen sich diese in manchen Fällen außerordentlich, wo besondere Annahmen gemacht werden können.

Ist insbesondere u = const. für jeden Punkt und alle Querschnitte als Ebenen anzusehen, so wird offenbar:

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho''} = 0$$

, denn ϱ' und ϱ'' bedeuten d. Krümmungsradien d. Normalschnitte d. Querschnitts durch A, welche d. [illegible] und [illegible] [illegible], da diese Schnitte aber unter d. Voraussetzung ebener Querschnitte auch eben sind, so sind ihre Krümmungsradien $= \infty$ also $\varrho' = \varrho'' = \infty$. Demnach ergibt sich dann auch Seite [illegible] d. Reibungscomponenten im Sinne senkrecht zur Achse = 0, also $R_z = R_y = 0$. weil mit u = const d. Ableitungen von $\frac{du}{d\varrho}$ = 0 werden. Ebenso würde sich auch auf d. Reibungscomponente im Sinne d. Achse vereinfachen. Wenn d. vereinfachende Voraussetzung auch nicht genau stattfindet, so kann man doch in vielen Fällen mit großer Annäherung [illegible] und demnach von d. Reibungscomponenten senkrecht zur Achse abstrahiren und zwar entsprechend ihrer betreffenden [illegible], um so mehr, je weniger veränderlich d. Geschw. u ist und je mehr d. Querschnitte sich ebenen Flächen nähern d.h. je mehr sich ϱ' und ϱ'' d. Unendlichkeit nähern. —

genau

Ein [illegible] solcher Fall, in welchem d. Querschnitte Ebenen sind, sind alle Bahnen offenbar [illegible] Curven. [illegible] ist daher insbesondere d. Fall, daß <u>alle Querschnittsebenen einer Geraden parallel</u> sind. Z.B. wenn es sich handelt um d. Bewegung von Wasser in einem [illegible] Kanal, dessen Querschnitte nur wenig verschieden sind. Man kann dann

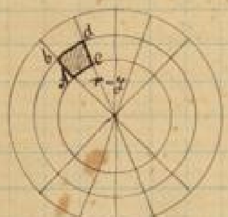
d. Querschnitte als vertikale Ebenen ansehen, (also parallel d. Richtung d. Achse) und ebenso d. Schichten als horizontale ... Curven. Als Normalcurven und Krümmungscurven kann dann ein System von sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien angenommen werden, welche in obigem Beispiel eben so anzunehmen wären, daß d. Krümmungscurve eine horizontale Gerade und d. Normalcurve eine vertikale Gerade sei. In diesem Falle wird d. Seitenfläche d. Elements $= ACbd$ ein Rechteck und demnach $r' = r'' = \infty$, weil die Richtungen von AC u. bd sowie Ab u. Cd, welche d. unendl. kl. Winkel $\frac{dy}{r'}$ und $\frac{dz}{r''}$ mit einander bilden, nun parallel sind. Unter dieser Annahme vereinfacht sich d. betreffende Ausdruck ungemein, denn mit $\rho' = \rho'' = \infty$, $\frac{du}{ds} = 0$ und $r' = r'' = \infty$ wird d. erste Reibungscomponente im Sinne d. Achse:

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho}\frac{du}{dy}\right)$$ und natürlich wie vorhin $R_y = R_z = 0$.

Wenn endlich d. ebenen Querschnitte nicht nur einer Geraden parallel sind, sondern alle untereinander parallel sind, demnach alle Schichten parallele horizontale ~~Linien~~ Geraden sind, wie dies bei d. Beweg. von Wasser in Röhren und Canälen d. Fall ist, so wird:

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$ denn dann ist offenbar auch $\rho = \infty$ d.h. d. Krümmungsradius d. Schichte in d. fraglichen Punkte $= \infty$.

In einem solchen Fall wird es mitunter zweckmäßiger sein, statt d. Systems sich rechtwinklig schneidender gerader Linien ein anderes System von sich rechtwinklig schneidenden Linien als Coord.-System einzuführen z.B. kann man in nämlichem Fall als Krümmungscurven ein System von geraden Linien annehmen, welche sich in einem Punkte schneiden und als Normalcurven concentrische Kreise um d. gemeinschaftlichen Schnittpunkt als Centrum.



Die Zweckmäßigkeit dieses Coord.-Systems wird insbesondere von unleugbarem Werth sein, wenn es sich handelt um d. Beweg. von Wasser in einer geraden cylindrischen Röhre, wo dann d. Röhrencentrum zugleich d. Mittelpunkt d. Querschnitts ist. Für diesen Fall hat man dann in d. allgemeinen Formel zu setzen: $\rho = \infty$ weil alle Schichten gerade Linien sind,
ferner: $\rho' = \rho'' = \infty$ weil d. Normalschnitte d. Querschnitts gerade Linien werden. Was r' betrifft, so muß man offenbar wieder $r' = \infty$ setzen, denn betrachtet man d. Querschnitt eines sektorförmigen Elements $= Abcd$, so ist hier $bd \parallel Ac$ also ihr Neigungswinkel $= \frac{dy}{r'} = 0$ demnach $r' = \infty$ etc. Andererseits ist aber $r'' = r$ zu setzen, unter r d. Radius eines solchen concentrischen Kreises verstanden, denn es bedeutet bekanntlich $\frac{dz}{r''}$ den Neigungswinkel von Ab mit Cd, dieser ist aber nun $= \frac{dz}{r}$ und also $r'' = r$; endlich ist natürlich für dy — dr in d. Formel einzuführen. Setzt man diese Werthe ein, so erhält man:

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

während d. Reibungscomponenten senkrecht zur Achse $= 0$ werden wie vorhin gezeigt.

Gewöhnlich wird man indessen in solchen Fällen noch weitere vereinfachende Voraussetzungen zu Grunde legen dürfen, z.B. die, daß in allen Punkten eines Parallelkreises d. Geschw. gleich groß ist und daß diese selbe nur von Parallelkreis zu Parallelkreis veränderlich ist. In diesem Falle ist also auch $\frac{du}{dz}$ d.h. d. Ableitungen von Geschw. u nach z $= 0$ zu setzen, und demgemäß auch u nur als Function von r zu betrachten, so daß an Stelle d. partiellen Differentialquotienten (∂) nur d. vollständigen Differentiale (d) von u treten. Man hat dann:

$$R_s = R\left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right) = \frac{R}{r}\left(r\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr}\right) = \frac{R}{r}\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{du}{dr}\right).$$

Ist jedoch d. Geschw. u auch abhängig von d. Zeit t, so müssen natürlich d. partiellen Differentiale (∂) stehen bleiben. Von dieser Formel wird später Gebrauch gemacht bei d. Lösung d. Widerstandes d. Beweg. von Flüssigkeiten in geraden cylindrischen Röhren.

Bis hierher wurde immer vorausgesetzt, daß d. Geschw. u nicht nur eine Function d. Coord. sondern auch eine Function d. Zeit t sei. Von großem technischen Interesse ist nun aber d. Fall, daß die Geschw. nicht abhängig von d. Zeit t ist, also eine sogenannte permanente Bewegung stattfindet. Man nennt nämlich eine permanente Bewegung eine solche, bei welcher sich d. Geschw. nur von Punkt zu Punkt nicht aber im Verlaufe d. Zeit in demselben Punkte ändert. Wenn dies d. Fall ist, und besonders vorausgesetzt, daß d. Oberfl. Kräfte und d. Grenzbedingungen unabhängig von d. Zeit gegeben sind, so werden d. Ableitungen nach d. Zeit $t = 0$, also:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0.$$

Wenn daher nun weiter vorausgesetzt wird, daß d. spec. Masse μ als Function d. Dr. p gegeben ist, so kommt es nur darauf an d. Dr. p und d. Geschw. u als Function d. Coord. zu bestimmen. Hierzu dienen d. genannten 3 Fundamentalgleichungen und d. Continuitätsgl., welche sich aber im vorliegenden Falle noch vereinfachen, indem mit $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ d. Continuitätsgl. sich nach Seite 23:

$$\frac{d(\mu u)}{ds} = \mu u \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Übrigens läßt sich diese noch in einfacher Schreibweise ~~und~~ ~~Gestalt~~ so, daß sie für d. Gebrauch noch bequemer und angenehmer wird.

Es sei nämlich A ein Punkt d. Querschnitts σ und A_0 d. Durchschnittspunkt d. durch A gehenden Linie mit d. im entgegengesetzten Sinne d. Bewegung unendl. nahe benachbarten Querschnitt σ_0, so sei ein unendl. kl. Flächenelement in σ_0, welches d. Punkt A_0 in sich schließt. Durch alle Punkte d. Umfangs d. Flächenelements f_0 werden d. betreffenden Linien gelegt. Diese Linien bestimmen d. Mantelfl. eines fadenförmigen Raumes, welcher d. Querschnitt σ in d. Element f schneidet, das natürlich d. Punkt A in sich enthält. Das Querschnittsverhältniß d. Flüssigkeitsfadens, welcher durch 2 unendl. nahe benachbarte Querschnitte σ_0 und σ geschnitten wird, ist demnach $= \frac{f}{f_0} = \alpha$. Ändern aber d. Änderung d. Querschnitts gegeben ist, so ist auch dieses Querschnittsverhältniß stets als Function d. Coord. gegeben.

Nun besagt bekanntlich d. Continuitätsgl. daß in irgend einer Zeit durch d. Querschnitt f ebensoviel Flüssigkeitsmasse hindurchströmen muß wie durch f_0, einer continuirlichen Raumerfüllung durch Masseelemente entsprechend. Ist nun u d. spec. Geschw. und μ d. spec. Masse d. durch d. Element f hindurchfließenden Flüssigkeit, so ist d. Masse dieser Flüssigkeit pro Zeiteinheit $= \mu f u$; ist ebenso μ_0 d. spec. Masse und u_0 d. Geschw. d. durch f_0 hindurchfließenden Flüssigkeit, so ist deren Masse $= \mu_0 f_0 u_0$; beide Theile müssen aber gleich groß sein d. h. es muß:

$$\mu f u = \mu_0 f_0 u_0$$

also $\alpha \mu u = \mu_0 u_0$ sein. Diese Gl. kann nun an Stelle d. Continuitätsgl. gesetzt werden, wobei d. Querschnittsverhältniß α als Function d. Coord. als gegeben zu betrachten ist. Dieses Verhältniß ist offenbar abhängig von d. Krümmungen d. Querschnitte in denjenigen Punkten, in welchen d. Querschnitte σ und σ_0 von d. Linie geschnitten werden. Diese Beziehung ist auch leicht aus den oben gefundenen Gl. abzuleiten, indem man sie nach s zu differentiiren braucht; man erhält dann nach einigen Umformungen:

$$\frac{1}{\mu u} \cdot \frac{d(\mu u)}{ds} + \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = 0$$

Oder da nach oben:

$\frac{d(\mu u)}{ds} = -\mu u \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$ ist, erhält man: $\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 0.$

Statt d. Summe d. Krümmungsradien d. Normalschnitte, welche d. Krümmungslinien und Normalen für d. betreffenden Punkt bezeichnen, kann man auch d. Summe d. Krümmungsradien zweier beliebiger zu einander senkrechter Normalschnitte d. Querschnitts genommen, indem diese bekanntlich immer einander gleich sind. —

Von d. 3 Fundamentalgl. ist insbesondere d. erstere wichtig, und mit Rücksicht auf spätere Benützung erscheint es zweckmäßig, derselben eine andere Form zu geben in welcher sie später mit Vorteil angewandt werden kann. Nach Seite ... hieß d. erste Fundamentalgl.:

$$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{ds}.$$

Diese Gl. bezogen auf d. Masseneinheit, soll nun mit $\frac{1}{g}$ (g = Beschl. d. Schwere) d. h. mit d. Masse d. Gewichtseinheit multipliziert werden, so ist nun d. Gl. dann auf d. Gewichtseinheit bezogen bekommen. Außerdem soll noch d. Gl. mit d. Lagenelement ds d. Linie multipliziert werden, wobei d. gehaltenen Differentiale nach s d. Einfachheit wegen mit d bezeichnet werden sollen, also es ist zu setzen:

$$\frac{dp}{ds}ds = dp \quad \text{und} \quad \frac{du}{ds}ds = du$$

ferner sei d. Produkt $\mu \cdot g$ = spez. Gew. mit γ bezeichnet = Gew. d. Volumeneinheit. Setzt man dies alles ein und berücksichtigt daß $\frac{du}{dt} = 0$ ist, so folgt:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{u\,du}{g} = \left(\frac{K_s}{g} + \frac{R_s}{\gamma}\right)ds.$$

Nun ist aber offenbar:

$$\frac{dp}{\gamma} = d\left(\frac{p}{\gamma}\right) - p\,d\left(\frac{1}{\gamma}\right) \quad \text{und ferner} \quad \frac{u\,du}{g} = d\left(\frac{u^2}{2g}\right)$$

so daß d. Gl. dann heißt:

$$d\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) = p\,d\frac{1}{\gamma} + \left(\frac{K_s}{g} + \frac{R_s}{\gamma}\right)ds.$$

Hierin bedeutet bekanntlich nun $\frac{p}{\gamma}$ die spez. Druckhöhe im Punkt A d. h. d. Höhe einer Flüssigkeitssäule vom Querschnitt = 1, deren Gew. = p ist und deren spez. Gew. = d. spez. Gew. an d. betreffenden Punkt A d. Flüssigkeit ist.
Ferner ist $\frac{u^2}{2g}$ d. sogenannte Geschw.-Höhe im Punkt A.
Die eben gefundene Gl. drückt also d. Gesetz aus, nach welchem sich d. Summe d. Druckhöhe und Geschw.-Höhe von Punkt zu Punkt ändert. Integriert man diese Gl. längs d. Lage $A_0 A$ d. Linie, so erhält man:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} - \left(\frac{p_0}{\gamma_0} + \frac{u_0^2}{2g}\right) = E + M + \int_0^s \frac{R_s}{\gamma}\,ds$$

wobei $p_0\ \gamma_0$ u. u_0 d. betreffenden Größen für d. Punkt A_0 verstanden und unter s d. Entfernung $A_0 A$, gemessen auf d. Linie, verstanden. Ferner bedeutet hierin E d. auf d. Weg von A_0 bis A verrichtete Expansionsarbeit, denn es ist gesetzt worden: $E = \int_0^s p\,d\frac{1}{\gamma}$, welcher Ausdruck aber bekanntlich d. Ausdruck für d. Expansionsarbeit pr. 1 kgr bedeutet.
Ferner bezeichnet M d. Ausdruck $\int_0^s \frac{K_s}{g}\,ds$; dies ist aber offenbar d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte pr. 1 kgr. Flüssigkeit, denn es wurde mit K_s d. spez. äußere Massenkraft pr. Masseneinheit im Sinne d. Linie bezeichnet, so ist also $\frac{K_s}{g}$ d. äußere Massenkraft pr. Gewichtseinheit im Sinne d. Linie bezeichnet. Endlich bezeichnet d. Integral d. Arbeit d. inneren Reibung auf d. Weg von A_0 bis A, verrichtet d. Arbeit d. nach d. Linie $A_0 A$ gerichteten Reibungskomponente R_s. Wenn also $A_0 A$ irgend ein Stück einer im Sinne $A_0 A$ durchlaufenen Linie ist, so ist d. Summe aus Druckhöhe und Geschw.-Höhe in d. Punkt A = d. entsprechenden Summe aus Druck- und Geschw.-Höhe ~~+ d. Zuwachs~~ d. W in d. Punkt A_0 + d. während d. Wegs $A_0 A$ ~~pro~~ 1 kgr verrichteten Expansionsarbeit + d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte pr. 1 kgr + d. pr. 1 kgr Flüssigkeit verrichteten Arbeit d. inneren Reibung im Sinne d. Linie, od. auch man kann sagen: die Summe d. Druck- und Geschw.-Höhe in 2 verschiedenen Punkten A und A_0 unterscheiden sich durch die von A_0 bis A pr 1 kgr verrichteten Expansionsarbeit + d. Arbeit d. äußeren Massenkraft + d. Arbeit d. inneren Reibung im Sinne d. Linienrichtung, alles bezogen auf d. Gewichtseinheit. In dieser Form soll nun d. erste Fundamentalgl. immer zur Anwendung kommen.

Die Geschwindigkeit lässt sich später als Function von p und p_0 mit Rücksicht auf d. als gegeben vorausgesetzte Beziehung zwischen μ u. p bestimmen. Ebenso auch d. Querschnittsfläche. Die Arbeit d. inneren Reibung lässt sich in d. meisten Fällen hingegen nur angenähert bestimmen und zwar als Function d. von A_0 bis A durchlaufenen Strecke. Angenommen dies sei alles geschehen, alsdann stellt d. oben gefundene Gl. eine Beziehung zwischen d. entsprechenden Größen p p_0 u. $\mu - \mu_0$ in d. beiden Punkten A u. A_0 dar, d. h. in 2 Punkten einer und derselben Linie. Eine 2te Beziehung zwischen denselben Größen wird durch d. vorhin gefundene Continuitätsgl.

$$\mu u = \mu_0 u_0$$

dargestellt, so daß man nun 2 Beziehungen zwischen 4 Größen hat, so daß und demzufolge wenn 2 Größen gegeben sind, die beiden anderen bestimmt werden können. —

Die beiden anderen Fundamentalgl. stellen d. Gesetz dar, nach welchem sich d. Dr. p im Sinne d. y u. z Axe, also im Sinne d. Querschnitts von Punkt zu Punkt ändert. ~~und~~ Was dieses Gesetz betrifft, nach welchem sich d. Dr. p von Punkt zu Punkt im Querschnitt ändert, so läßt sich Folgendes bemerken: Je weniger d. Querschnitte gekrümmt sind (also je mehr ρ' und $\rho'' = \infty$ werden), je weniger verschieden d. Geschw. u von Punkt zu Punkt sich ändert und je weniger d. Linien gekrümmt sind, welche d. Querschnitt durchsetzen (also um so mehr $\rho = \infty$ wird) um so mehr genauer kann man voraussetzen, daß d. Dr. p sich nur nach hydrostatischen Gesetzen ändert. Denn wie schon früher gesehen, würde mit vollkommen ebenen Querschnitten ($\rho' = \rho'' = \infty$) und mit $\frac{du}{ds} = 0$ $R_y = R_z = 0$. Wenn ferner d. Linien sehr wenig gekrümmt sind, so kann mit $\rho = \infty$ $\frac{u^2}{\rho} = 0$ gesetzt werden, so daß d. beiden letzten Fundamentalgl. übergehen in:

$$\frac{dp}{dy} = \mu Y \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dz} = \mu Z$$

also in Bedingungen, welche nur von d. äußeren Massenkräften beeinflußt werden, entsprechend d. Eigenschaft d. hydrostatischen Gesetze, so daß p also dann nur nach d. hydrostatischen Gesetzen von Punkt zu Punkt veränderlich ist in ein und demselben Querschnitt.

Wichtig ist es, dies von vornherein festzuhalten, indem man sich öfters nach solchen vereinfachenden Bedingungen umsehen muß.

Was d. äußeren Massenkräfte betrifft, so ist zur Herbeiführung einer permanenten Beweg. offenbar erforderlich, daß für jeden Punkt d. Geschw.-Beweg. als blosse Functionen d. Coord. gegeben sein müssen. Die Bewegung d. Flüssigkeit kann also nur eine permanente sein, wenn d. resultierende Massenkraft K für jeden Punkt x y z eine unveränderliche Größe und Richtung gegen d. Coord.-Richtungen habe, daß also d. Massenkraft K in Bezug auf Größe und Richtung constant sei. Wenn dieses Coord.-System selbst in Beweg. begriffen ist, so muß, wenn man d. Schwerkraft als d. wichtigste Massenkraft betrachtet, die Resultante K d. äußeren Massenkräfte = d. beschleunigenden Schwerkraft + d. beiden Ergänzungskräften d. relativen Bewegung sein. In diesem Fall kann sich jedenfalls nur eine permanente Beweg. ausbilden, wenn d. Schwerkraft und d. Ergänzungskräfte d. relativen Beweg. gegen d. Coord.-Axen eine dieselbe Richtung haben. Wenn also z. B. d. festen Leitflächen und mit ihnen das an ihnen befestigte Coord.-System in Rotation begriffen ist, so muß diese Rotation immer um eine vertikale Axe mit constanter Winkelgeschw. stattfinden, denn nur dann bildet d. Richtung d. Schwerkraft immer denselben Winkel mit d. Axen; ferner muß d. Winkelgeschw. ω constant sein, weil sonst d. Ergänzungskräfte als Functionen d. Zeit erscheinen und also d. Definition einer permanenten Beweg. widersprechen würde. Außerdem kann aber auch unbeschadet d. permanenten Beweg. das um d. feste Axe rotierende System eine Translationsbeweg. im Sinne d. festen Rotationsbeweg.-Axe mit constanter Geschw. besitzen. Es fragt sich nun, wie sich alsdann d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte ausdrücken läßt?

Es wird also vorausgesetzt, daß mit d. Leitfl. fest verbundene Coord.-System habe eine eigene Beweg. und zwar eine Rotation um eine feste Axe mit d. constanten Winkelgeschw. ω und ferner eine Translationsbewegung im Sinne d. festen Rotationsaxe mit d. constanten Beschl. f welch letztere gerichtet von oben nach unten und entgegen von unten nach oben gerichtet werden soll. Ferner sei h die Höhe d. Punktes A_0 über A und r_0 und r d. resp. Abstände d. Punkte A_0 und A von d. festen Rotationsaxe. Die Arbeit M d. äusseren Massenkräfte besteht dann aus mehreren Theilen. d. Schwerkraft nämlich verrichtet auf einem d. Beweg. d. Flüssigkeit von A_0 nach A d. Arbeit $= 1 \cdot h$ pr. Gewichtseinheit, was ferner d. Trägheitskräfte d. relativen Beweg. betrifft, so kommt d. Coriolis gar nicht weiter in Betracht, indem dieselbe immer senkrecht normal zur relativen Bahn d. Massenelements und demnach ihre Arbeit $= 0$ ist. Die erste Trägheitskraft, welche bekanntlich d. System eine Beschl. ertheilt, welche gleich groß aber entgegengesetzt gerichtet ist d. Beschl. d. betreffenden Punktes, die dieser erhalten würde wenn er mit d. sich bewegenden Coord.-System fest verbunden wäre, kann man als aus 2 Theilen bestehend gedacht werden, nämlich herrührend von d. Rotation und Translation. Die Arbeit d. 1sten Trägheitskraft im Sinne d. Translation ist nun offenbar $= \div \frac{f}{g} h$ pr. Gewichtseinheit indem ferner ihre Beschl. im Sinne d. Translation $= \div f$ ist, ferner wird d. System von d. 2ten Trägheitskraft im Sinne d. Rotation eine Beschl. $= \frac{\omega^2}{g} r$ erhält, die Arbeit pr. Element d. Abstandes von d. Rotationsaxe also $= \frac{\omega^2}{g} r\,dr$, und schließlich d. Arbeit während d. Beweg. d. Flüssigkeit von A_0 nach A $= \int_{r_0}^{r} \frac{\omega^2}{g} r\,dr = \frac{\omega^2}{g} \int_{r_0}^{r} r\,dr = \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - r_0^2)$

Demnach ist d. resultirende Arbeit M d. äusseren Massenkräfte:
$$M = \left(1 - \frac{f}{g}\right) h + \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - r_0^2).$$

Wenn d. System nur eine Beschl. nur eine Translationsbeweg. hat, dann kann diese offenbar derart beschaffen sein, daß ihre Beschl. f eine constante Größe ~~von~~ besitzt und eine ganz beliebige Richtung habe, ohne daß d. genannte relative Beweg. d. Flüssigkeit durch diesen Behälter verändert würde. Dann ist d. Arbeit d. äusseren Massenkräfte: $M = h - \frac{f}{g} s'$ unter s' ist d. Projection d. Bogens $A_0 A$ d. Bahn entsprechend auf d. Richtung d. Beschl. f. —

Wenn aber d. Flüssigkeit verhältnißmäßig leicht ist, (Gase, Dämpfe) und man demgemäß von d. Einwirkung d. Schwere abstrahiren kann, so daß nur d. Trägheitskraft d. relativen Beweg. in Betracht kommt als äussere Massenkraft, so kann d. relative Beweg. d. Beschl. wieder in einer Rotation ω um eine gewisse Axe bestehen und in einer Translation im Sinne dieser Axe, wo braucht diese Axe dann nicht mehr vertical gerichtet zu sein. In einem solchen Falle ist:
$$M = -\frac{f}{g} s' + \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - r_0^2)$$
wo r und r_0 dieselbe Bedeutung haben wie im ersten Fall und s' d. Bedeutung wie im 2ten Fall. —

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich immer allgemein auf d. stationäre Beweg. von Flüssigkeit in irgend welchen Behälter. Wir wollen nun zu den speciellen Fällen übergehen nämlich zu den Strömungen in Gefäßen und Canälen d. h. in Behälter, welche d. Flüssigkeit ganz einschließen. Der Ausfluß von Flüssigkeiten aus Öffnungen kann dabei offenbar als Specialfall d. Strömung in Canälen angesehen werden. —

Strömende Bewegungen von Flüssigkeiten in Canälen.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

nur noch Functionen von s und nicht mehr Functionen d. Zeit t. Wird ferner mit G d. Gew. d. Flüssigkeit bezeichnet, welche in d. Zeiteinheit durch jeden Querschnitt hindurchströmt, so kann d. allgemeine Aufgabe, aus welcher durch Verknüpfung von gegebenen und gesuchten Größen sowie durch Specialisirung eine große Zahl wichtiger und besonderer Aufgaben abgeleitet werden können, folgendermaßen ausgesprochen werden:

Es sollen d. Größen $p\ v\ T\ U\ u$ als Functionen von s in jedem Querschnitt bestimmt werden, wenn sie für einen bestimmten Querschnitt gegeben sind, wenn ferner d. Art d. Flüssigkeit, die Constante G = Gewicht d. Schwere, d. Gestalt d. Röhre, die auf d. Flüssigkeit einwirkenden Massenkräfte, ferner d. Widerstand d. Leitung und d. Wärmemittheilung durch d. Röhrenwand hindurch gegeben sind.

Um nun diese Aufgabe zu lösen, müssen 5 Beziehungen sich ergeben zwischen diesen 5 unbekannten Größen $p\ v\ T\ U\ u$ und d. Veränderlichen s.

Eine erste solche Gl. erhält man einfach dadurch, daß man nun das durch den Querschnitt F pro Zeiteinheit hindurchfließende Flüssigkeitsvolumen 2mal ausdrückt. Dieses ist nämlich einmal $= F u$ und andererseits auch = d. pro Zeiteinheit durchfließenden Flüssigkeitsgew. mal d. Volumen pro Gewichtseinheit also $= G.v$

Dementsprechend hätte man als erste Beziehung:

$$G.v = F u.$$

Diese Gl. enthält offenbar d. Continuitätsbed., daher sie auch deshalb auch Continuitätsgl. genannt werden soll. —

2 andere Beziehungen bekommt man aus d. von d. mechanischen Wärmetheorie her bekannten sogenannten Gln. d. lebendigen Kraft, aus d. Wärmegl. und aus d. Gl. d. Arbeitsvermögens, von welchen jedoch nur d. beiden ersten unabhängig von einander sind, während d. 3te d. Folge d. beiden ersten ist. Bekanntlich heißen diese Gln.:

Gleichung d. lebendigen Kraft: $dL = dM + dP - dR - dS + dE$

Die allgemeine Wärmegl.: $dU = WdQ + dR + dS - dE$ und aus diesen beiden durch Addition d. Gl. d. Arbeitsvermögens d.h. d. Summe d. äußeren und inneren Arbeitsvermögens: $d(L + U) = dM + dP + WdQ.$

Hierin bedeutet:
- dL = Zuwachs d. lebendigen Kraft in irgend einem Zeitelement
- dU = Zuwachs d. inneren Arbeitsvermögens " " "
- dM = Arbeitssumme d. Massenkräfte " " "
- dP = Arbeit d. auf d. Oberfl. wirkenden Drucks " " "
- dR = Arbeitsverlust erzeugt durch äußere Reibung " "
- dS = " " " " innern Widerstand " "
- dE = Expansionsarbeit
- WdQ = Arbeitswerth d. von Außen mitgetheilten Wärme dQ " " "

Diese 3 Gl. sind nun nur noch etwas anders umzugestalten um 2 von einander unabhängige Beziehungen zwischen d. 5 Größen $u\ p\ T\ U\ u$ zu bekommen. Die Gl. sind bezogen auf d. Zustandsänderungen, welche d. im Zeitelement dt durch Querschnitt F hindurchfließende Flüssigkeitsschicht erfährt, während d. Schwerpunkt S d. Querschnitts d. Element ds d. Mittellinie durchläuft.

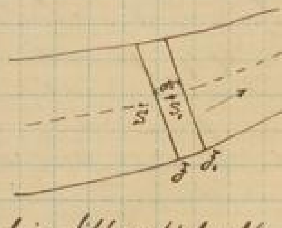
Das im Zeitelement dt durch Querschnitt F hindurchfließende Gew. d. Flüssigkeitsmenge ist offenbar $= G.dt$ und da d. Geschw. $= u$ ist, so folgt als Änderung d. lebendigen Kraft:

$$dL = G\,\frac{dt}{g}\,d\left(\frac{u^2}{2}\right) = G.dt.\,\frac{u\,du}{g}.$$

Was ferner d. im Zeitelement dt verrichtete Expansionsarbeit betrifft, so ist diese offenbar:

$$dE = G.dt\; p\,dv. —$$

Was d. Arbeit d. äußeren Drucks betrifft, so sei σ ein Querschnitt und σ_1 ein unendl. nahe benachbarter Querschnitt, deren Schwerpunkte S resp. S_1 nicht gerade in den Ebenen dieser Querschnitte zu liegen brauchen, indem dieselben bekanntlich krumme Flä. sein können. Offenbar ist nun:



$\sigma p u \, dt$ = Arbeit d. Drucks, welchen d. nachfolgende Flüssigkeit auf d. Hinterfl. σ d. Schicht pr. Zeitelement dt ausübt und analog d. auf d. Vorderseite σ_1 d. Schicht entgegengestellte Druck, also im negativen Sinne d. Bewg., = d. vorigen, vermehrt um sein Differential, also $= \div [\sigma p u + d(\sigma p u)] \, dt$.

Außerdem wirkt aber noch ein äußerer Druck auf d. Wände d. Flüssigkeitsschicht, indem aber dieser Druck senkrecht gegen d. Richtung d. Bewg. gerichtet ist, so ist ihre Arbeit im Sinne d. Bewg. $= 0$. Demnach ist zu setzen:

$$dP = \sigma p u \, dt \div [\sigma p u + d(\sigma p u)] dt = \div d(\sigma p u) . dt$$

Nach d. bei dem gefundenen Continuitätsbed. ist aber: $u = G \frac{v}{\sigma}$ und demgemäß:

$$dP = \div G . dt \, d(pv). \text{—}$$

Setzt man diese Ausdrücke dP, dL und dL in d. allgemeinen Gl. ein und dividirt diese dann durch $G.dt$, so bezieht man dieselben dadurch offenbar auf d. Gewichtseinheit und Zeiteinheit, während sie vorher auf d. Gew. d. Flüssigkeitsschicht und Zeitelement dt bezogen waren. d. Größen dR, dS, dM und WdQ sollen aber so gefaßt bleiben, daß sie dann auch auf Gewichtseinheit und Zeiteinheit bezogen sind. Aus d. Gl. d. lebendigen Kraft bekommt man nun:

$$\frac{u \, du}{g} = dM - d(pv) - dR - dS + p \, dv$$

α ... oder: $\frac{u \, du}{g} + d(pv) - p \, dv = dM - dB$ wenn unter dB d.

$\div \; u \frac{du}{g} + v . dp = dM - dB.$ Summe d. Arbeiten d. inneren und äußeren Leitungswiderstände verstanden wird $= dR + dS$.

Andererseits liefert d. Wärmegl.:

β .... $$dU + p \, dv = WdQ + dB$$

Und aus diesen beiden durch Addition:

γ .... $$\frac{u \, du}{g} + dU + d(pv) = dM + WdQ.$$

Von diesen 3 Gl. $d(pv)$ ist wie schon ersichtlich eine immer d. Folge d. beiden anderen, so daß man in diesen 3 Gl. demnach nur 2 unabhängige Beziehungen zwischen d. Größen $u \; p \; v \; \sigma \; U$ hat. Im Ganzen haben wir also nun mit d. Continuitätsbed. 3 unabhängige Beziehungen. Es fehlen also noch 2. Diese bisher gefundenen Beziehungen waren allgemein gültig für jede Flüssigkeit in beliebigem Zustande, die beiden noch fehlenden Beziehungen können dagegen nicht so allgemein aufgestellt werden, indem dieselben von d. Art und Aggregatform d. betreffenden Flüssigkeit abhängen. Diese beiden Beziehungen sind nämlich d. aus d. Wärmetheorie her bekannten Zustandsgleichung und Gleichung d. inneren Arbeitsvermögens. Die Zustandsgl. drückt eine Beziehung zwischen d. Größen $p \; v \; t$ aus und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens ist eine Gl. zwischen d. Größen $v \; p \; t \; U$, welche Beziehungen aber bekanntlich im Allgemeinen für jede verschiedene Flüssigkeitsart und jede verschiedene Aggregatform verschieden sein können. — Handelt es sich um eine nicht homogene Flüssigkeit, sondern um ein Gemisch gleichartiger Flüssigkeit in verschiedenen Aggregatformen, so kommt noch eine 6te unabhängige Veränderliche hinzu, nämlich d. Mischungsverhältnis y. In diesem Fall ist aber auch noch eine 6te Beziehung vorhanden, indem bekanntlich für den in einem solchen Gemisch entsprechenden Grenzzustand d. Übergangs von einer Bewegungsform in d. andere, zwischen d. Neigung β und d. Tangente t sowie d. Geschwindigkeitsverhältnis η eine besondere Beziehung stattfindet. Wenn man also in einem solchen Falle mit d. Zustandsgl. und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens mit Hilfe dieser besonderen Beziehung zwischen β t η, η ~~mit~~ eliminieren, so ist man dann noch außer d. 3 schon vorher genannten allgemein giltigen noch 2 für besonderen Falle speziell aufzustellende unabhängige Beziehungen zwischen d. 5 Größen p v T U u hat, um genau übereinstimmend d. erforderlichen 5 Beziehungen zu haben. Diese 5 Bestimmungsgleichungen sind freilich teilweise noch Differentialgleichungen, deren Integration aber mit Rücksicht auf d. weiter gegebenen Bedingungen möglich ist. —

Wenn nun hiermit auch d. Lösbarkeit d. allgemeinen Aufgabe dargethan und ihre Elemente nachgewiesen ist, so müssen doch noch einige Bemerkungen über einige Größen gemacht werden, nämlich über dM, dQ, dW und dB.

Wenn, wie gewöhnlich, Massenkräfte nur mit d. Schwerkraft und d. eigenen Bewg. d. Leitfläche herrühren, so gelten für d. Größe dM d.h. für d. Arbeitssumme d. Massenkräfte pr. Gewichtseinheit Flüssigkeit auf einem beliebigen endlichen Wege d. ~~früher~~ erhaltenen Ausdrücke, wenn man anstatt d. Elements ds d. Bahn nur d. frühere endliche Stück $s\,s_0$ setzt. Indessen soll dM noch etwas ausgedrückt werden mit Rücksicht auf d. Annahme eines gleichen Mittelzustandes in allen Querschnittpunkten.

S = Schwerpunkt d. Querschnitts F sei ein Punkt d. Mittellinie, dessen Bewg. mit d. Geschw. u im Sinne d. Schritts gegen d. Leitfläche (Röhre, Kanal etc.) vor sich geht. Diese Leitfl. habe nun eine eigene Bewg. so daß, wenn d. Punkt S fest mit d. Leitfl. verbunden wäre, dieser Punkt S eine Beschl. f erlangt, deren Richtung mit d. Mittellinie d. Winkel φ bildet. Die Arbeit dM ist nun, weil d. eigene Bewg. d. Leitfl. unbeschränkt, nur von d. ersten Ergänzungskraft abhängig, indem d. 2te immer normal zur relativen Bahn gerichtet ist also deren Arbeit im Sinne d. Bewg. = 0 ist. Nun ist aber d. von d. 1sten Ergänzungskraft herrührende Beschl. immer gerade ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet d. Beschl. d. Punktes, welche dieser haben würde wenn er mit d. Leitfl. fest verbunden wäre d.h. diese Beschl. ist auch ~~ent~~ gerichtet. Die Beschl. d. resultierenden Massenkraft ist demnach d. Resultante aus f und aus g d.h. aus d. Beschleunigungen d. ersten Ergänzungskraft d. relativen Bewg. und d. Schwerkraft.

Pr. Masseneinheit ist nun d. Beschl. d. Schwerkraft offenbar $= \frac{g}{g} = 1$

. . . . d. ersten Ergänzungskraft $= \frac{f}{g}$

und demnach d. resultierende Beschl.: $= (1 \cdot \cos\psi - \frac{f}{g}\cos\varphi)$

folglich: $dM = (\cos\psi - \frac{f}{g}\cos\varphi)\,ds.$

Für d. Möglichkeit einer genannten Bewg. müssen nun bekanntlich d. Größen ψ f und φ unabhängige Funktionen von d. Zeit t sein. Hiervon ausgenommen ist d. Fall, wenn d. Leitfl. um eine feste Axe rotiert mit constanter Winkelgeschw. und auch noch, wenn außerdem eine Translationsbeschl. f im Sinne d. festen Rotationsaxe stattfindet. Oder dann, wenn d. Winkelgeschw. = 0 d.h. d. Leitfl. keine Rotation besitzen, die Translationsbeschl. eine beliebige Richtung haben und wenn man ganz von d. Schwere, wie bei Gasen und Dämpfen, abstrahieren darf, so können d. Richtungen d. Rotationsaxe und d. Translationsbewg. beliebig sein. Ferner kann man d. allgemeinen Ausdruck auch anwenden, wenn d. Größen ψ f u. φ periodische Funktionen d. Zeit t sind, dann sind aber diese Größen nur als Mittelwerte zu betrachten, welche sich aus d. Beobachtungen während einer größeren Anzahl Zeitperioden ergeben.

Was d. Glied dQ in d. allgemeinen Gl. betrifft, d. h.: d. Wärmemittheilung durch d. Rohrwand, so kann diese zunächst positiv od. negativ sein, positiv gerechnet d. Richtung d. Wärmemittheilung von Außen nach Innen. Diese Wärmeleitung ist namentlich wichtig, wenn dieselbe herrührt von einer Flüssigkeit, welche sich außerhalb d. Rohrwand befindet und ebenfalls in Beweg. ist. Es sei dann ϑ_1 d. absolute Temperatur d. äußeren Flüssigkeit an demjenigen ~~Stück~~ d. Querschnitts, ~~an~~ in welchem im Innern d. Rohre in d. Flüssigkeit d. absolute Temperatur ϑ herrscht. Es sei ferner dF_1 ein Element d. Rohrwandfläche, herausgeschnitten ~~worden~~ von 2 unendl. nahe benachbarten Querschnitten, welche d. Element ds d. Mittellinie begrenzen; ferner sei k d. sogenannte Wärmedurchlässigkeitscoefficient d. h. diejenige Wärmemenge, welche durch 1 □m Wandfläche in 1 Sek. und für jeden Grad Temperaturdifferenz d. beiderseits angrenzenden Flüssigkeiten übertragen wird in d. Richtung von Außen nach Innen. Dies vorausgesetzt ist offenbar:

$k(\vartheta_1-\vartheta)\,dF_1 =$ die pr. 1 Sek. durch dF_1 hindurch von Außen mitgetheilte Wärmemenge. Diese ist aber offenbar auch $= G.dQ$ unter dQ d. pr. Gewichtseinheit mitgetheilte Wärmemenge verstanden, denn diese Wärmemenge wird demjenigen Flüssigkeitselement vom Gew. G mitgetheilt, welches gerade in derselben Zeit an dem Flächenelement dF_1 vorbeiströmt. Folglich:

$$k(\vartheta_1-\vartheta)\,dF_1 = G.\,dQ.$$

Die Größe dQ hat man nun später mit Rücksicht auf diese Gl. zu bestimmen, vorausgesetzt man d. Wärmedurchlässigkeitscoefficienten k in geeigneter erfahrungsmäßiger Weise kennt. Damit ein permanenter Zustand möglich wird, müssen natürlich d. verschiedenen in Betracht kommenden Größen wieder unabhängig von d. Zeit t sein. — Was d. Wärmedurchlässigkeitscoefficienten k betrifft, so ist ersichtlich, daß derselbe abhängig ist von d. Wärmeübergangscoefficienten an d. inneren und äußeren Rohrwandfl., welche wiederum abhängig sind von d. Oberfl.-Beschaffenheit d. Rohrwand, ferner von d. Wärmeleitungscoefficienten d. Materials d. Rohrwand, von d. Dicke und Krümmung d. Rohrwand und endlich auch noch von d. Temperaturdifferenz $\vartheta_1-\vartheta$. — Außerdem kann hierbei d. Fall vorkommen, daß d. äußere Flüssigkeit d. Rohre nicht ringsum gleichmäßig umspült, sondern daß nur an einem Theile d. Rohrwand eine solche Wärmedurchlässigkeit stattfindet. z. B. wenn man d. Heizkanal eines Dampfkessels durch d. zu erwärmende Wasser hindurchführt, so daß d. Flüssigkeit ringsum d. Kanal bespült; wenn aber d. Heizkanal äußerlich am Kessel vorbeiführt, so findet nur an einem Theile d. Kessels eine Wärmedurchlässigkeit statt, während an d. anderen Stellen nur wenig Wärme durchgelassen wird. —

Für unsere Betrachtung erfordert nun d. Glied dB, welches sich auf d. hydraulischen Widerstände bezieht. Dieselben pflegen in d. Hydraulik in Rechnung gebracht zu werden durch Vergleichung mit d. Schwerkraft als sogenannte Widerstandshöhen. Unter d. Bewegungshöhe für d. Beweg. d. Flüssigkeit vom Querschnitt F_0 bis zum Querschnitt F versteht man diejenige Höhe, um welche 1 Kgr. Flüssigkeit niedersinken müßte, um vermöge seiner Schwere eine Arbeit = derjenigen Arbeit zu verrichten, welche auf d. Weg. vom Querschnitt F_0 bis F pr. 1 Kgr. durch d. Bewegungs-Widerstand verbraucht werden. Die Arbeit, welche 1 Kgr. beim Niedersinken von einer gewissen Höhe vermöge d. Schwere verrichtet, ist dann zahlenmäßig gleich dieser Höhe selbst, und es bedeutet also d. Größe B in d. allgemeinen Gl. nichts anderes, als diese Widerstandshöhe für ein gewisses Stück d. Rohre von endlicher Länge, aber für ein Längenelement ds d. Rohre. Gewöhnlich wird nun aber diese Widerstandshöhe wiederum auf einen anderen Begriff, auf d. sogenannten Widerstandscoefficienten zurückgeführt. Setzt man nämlich $B = \zeta\frac{u^2}{2g}$ unter u d. mittlere Geschw. verstanden, mit welcher d. Flüssigkeit durch d. Endquerschnitt F d. fraglichen Strecke F_0F hindurchfließt, so nennt man ζ d. Widerstandscoefficienten für F_0F. Derselbe für eine gewisse Rohrstrecke bedeutet also d. Verhältniß d. Widerstandshöhe für diese Rohrstrecke zu derjenigen Geschw.-Höhe $\frac{u^2}{2g}$, die d. Mittelgeschw. u entspricht, vermöge welcher d. Flüssigkeit von d. fraglichen Rohrstrecke durch den

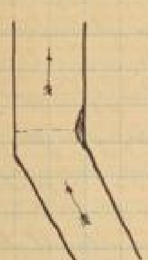
Endquerschnitt d. abfliesst. Zuweilen wird auch noch d. Widerstandscoeff. auf d. mittlere Geschw. in irgend einem anderen Querschnitt bezogen in d. Weise, dass wenn aber u' d. mittlere Geschw. in einem beliebigen anderen Querschnitt bedeutet, dann d. betreffende hierauf bezogene Widerstandscoeff. ζ' durch d. Gl. bestimmt ist: $B = \zeta' \frac{u'^2}{2g}$; und es muss, wenn in dieser Weise d. Widerstandscoeff. aufgestellt wird, immer ausdrücklich hinzugefügt werden, dass d. Widerstandscoeff. bezogen werden soll auf einen gewissen Querschnitt; wird aber schlechtweg von d. Widerstandscoeff. für eine gewisse Rohrstrecke gesprochen, so soll er immer stillschweigend bezogen werden auf d. Endquerschnitt d. fraglichen Strecke, also auf d. mittlere Geschw. in demselben. —

Diejenigen Widerstände insbesondere, welche auf d. ganzen jeweils in Betracht gezogenen Weg einer Flüssigkeit hemmend wirken und welche verursachen, dass d. Endgeschw. auf diesem ganzen in Betracht gezogenen Weg kleiner ist als sie sein würde, wenn keine Bewegungswiderstände vorhanden wären, diese Widerstand wird häufig auch auf andere Weise, nämlich durch d. Geschwindigkeitscoeff. in Rechnung gebracht, welcher mit φ bezeichnet werden soll. Zwischen ζ und φ besteht dann aber eine ganz bestimmte einfache Beziehung. Ist nämlich u' diejenige Endgeschw., welche unter sonst übrigens gleichen Umständen stattfinden würde, wenn keine Bewegungswiderstände vorhanden wären, so zerfällt d. Geschw.-Höhe $\frac{u'^2}{2g}$ in 2 Bestandtheile, nämlich d. effective Geschw.-Höhe und d. Widerstandshöhe, d. h. es ist: $\frac{u'^2}{2g} = (1+\zeta)\frac{u^2}{2g}$. Nun wird unter d. Geschw.coeff. φ d. Verhältniss $\frac{u}{u'}$ verstanden,

welches aber nach letzter Gl. $= \frac{u}{u'} = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$

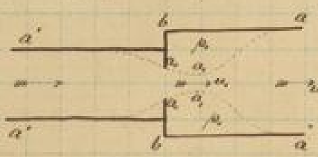
also umgekehrt: $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1$. —

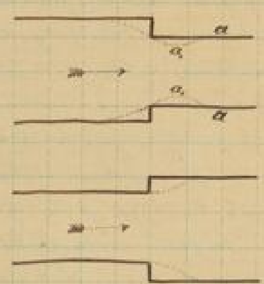
In Beziehung auf diese bedingenden Umstände können d. gebräuchlichsten Bewegungswiderstände unterschieden werden in solche, d. längs d. ganzen Leitung stetig einwirken und in solche, die nur unter gewissen Umständen an gewissen Stellen vorkommen. D. ersteren sollen zusammengefasst werden unter d. Bezeichnung d. allgemeinen Leitungswiderstandes; sie wirken an d. äusseren und inneren Leitungsflächen. Die diesem allgemeinen Leitungswiderstand entsprechende Widerstandshöhe wird später unter gewissen Voraussetzungen näher untersucht werden. Was aber d. eventuell an gewissen Stellen vorkommenden besonderen Widerstände betrifft, so werden diese verursacht durch plötzliche Änderung d. Querschnitts oder d. Änderung d. Richtung d. Mittellinie d. Rohrs. Dabei kann es d. Fall sein, dass solche plötzlichen Richtungsänderungen d. Leitröhre zugleich plötzliche Änderungen d. Querschnitts verursachen. Ist so aber unterstellt eine Leitröhre, welche an einer gewissen Stelle eine plötzliche Richtungsänderung erleidet.



An d. Stelle wo diese gewaltsame Richtungsänderung stattfindet, werden d. Bahnen d. Wasserteilchen gewaltsam gekrümmt und zwar namentlich an d. inneren Seite mit einem sehr kleinen Krümmungshalbmesser. Dieser Umstand muss nothwendig zur Folge haben, dass d. Pressung in d. betreffenden Querschnitt in d. Richtung nach innen sich äusserst beträchtlich vermindert. Erinnern wir uns an d. allgemeine Gl. $Xy + \frac{1}{\mu}(Ry \pm \frac{dp}{dy}) = \frac{u^2}{\rho}$, die bezogen war auf d. Gesetz d. Pressungsänderung in irgend einem Querschnitt im Sinne d. Krümmungsradius: wenn nun in d. Gl. d. Krümmungshalbmesser ρ d. betreffenden Linie sehr klein wird, also $\frac{u^2}{\rho}$ sehr gross wird, so wird d. Änderung von p im Sinne von y, also gegen d. Krümmungsmittelpunkt hin vorzugsweise durch $\frac{u^2}{\rho}$ bedingt sein, so dass man hat: $\frac{dp}{dy} = -\mu \frac{u^2}{\rho}$; also je kleiner ρ ist und je grösser u ist, in desto höherem Grade muss d. Pr. im Querschnitt im Sinne gegen d. Krümmungsmittelpunkt hin bedeutend abnehmen, so dass sich an d. scharfen Stelle gar keine strömende Bewegung befindet. Es findet also eine örtliche Änderung d. Flüssigkeitsstromes statt. Es handelt sich nun darum für d. besonderen Widerstand in allen solchen Fällen wenn möglich einen durch d. Erfahrung bestätigten allgemeinen einfachen Ausdruck zu gewinnen. Für d. Widerstandshöhe, durch welche ein solcher besonderer Widerstand gemessen wird, lässt sich ein solcher allgemeiner einfacher Ausdruck in d. That gewinnen für alle diejenigen Fälle, wo eine derartige plötzliche Querschnittsänderung d. Flüssigkeitsstromes verbunden ist mit einer Trennung d.

d. Flüssigkeitsteilch. an d. Rohrwand stattfindet. Dabei ist es vollkommen gleichgültig für d. Gültigkeit d. Formel, ob diese Änderung unmittelbar durch eine plötzliche Änderung d. Röhrenquerschnitts selbst hervorgerufen werde, oder ob durch eine plötzliche Richtungsänderung d. Rohrmittellinie. Der besonderen Vorzug d. Formel entspricht nur in d. ersten Fall, während in solchen Fällen, wie d. eben erwähnten, nur ganz besondere Versuche zu einer einwandfreien Bestimmung führen. Es soll also ein solcher Fall vorausgesetzt werden, in welchem d. plötzliche Querschnittsänderung d. Flüssigkeitsstromes verursacht wird durch eine plötzliche Änderung d. Röhrenquerschnitts, während jedoch d. einzelnen Rohrstücken eine gemeinsame Achse haben. D. Querschnitt $a'a'$ zieht sich zunächst plötzlich zusammen bis zu $a_0 a_0$ und dehnt sich dann plötzlich wieder aus bis zu $bb = aa$. Die Folge davon wird sein, daß ungefähr bereits in d. Röhre, in der d. Flüssigkeit ankommt, eine Ablösung derselben von d. Rohrwand stattfindet, wonach dann durch $a_0 a_0$ kann eine sogenannte Zusammenziehung d. Flüssigkeitsstroms stattfinden etwa bis zu $a_1 a_1$ und erst dann dehnt er sich aus, so daß d. Kurven $a'a_0\ a_1 a$ d. Krümmung darstellen. Der hier in d. Figur angenommene Fall ist nur ein allgemeiner Fall, derselbe kann verschiedene Modificationen erleiden. Wesentlich für den zu bestimmenden Widerstand ist nur d. plötzliche Erweiterung d. Querschnitts d. Flüssigkeitsstroms von $a_1 a_1$ bis aa, dieselbe ist aber nicht notwendig an d. Voraussetzung obiger Figur gebunden, es könnte auch eine weitere Röhre plötzlich in einer engeren übergehen und umgekehrt.





D. kleinste Querschnitt $a_1 a_1$ sei bezeichnet mit F_1, d. volle Querschnitt aa mit F, so ist es im Wesentlichen diese plötzliche Querschnittsänderung von F_1 bis F, welche d. in Rede stehenden Widerstand verursacht; es fragt sich, wie d. allgemeine Ausdruck für d. entsprechende Widerstandshöhe gewonnen wird. Was d. Querschnitte F_1 und F betrifft, so können sie als eben vorausgesetzt werden, da an d. Stelle d. kleinsten Querschnitts d. Fasern parallel geworden sind, ebenso bei aa. In einem solchen Falle, wo ebene Querschnitte von parallelen und unveränderten geradlinigen Fasern geschnitten werden, ist d. Änderungsgesetz d. Pr. von Punkt zu Punkt d. Querschnitts nur von äußeren Massenkräften abhängig. Wird nun hier von d. Wirkungen d. Schwere abgesehen, so darf in d. ganzen Querschnitt F_1 eine gleichförmige Pressung $= p_1$ stattfindend vorausgesetzt werden, und ebenso im Querschnitt F eine gleichförmige Pr. $= p$. Die mittlere Geschw. im Querschnitt F_1 sei bezeichnet mit u_1 und die in F mit u. D. spec. Volumen d. Flüssigkeit in d. Zustande, in welchem sie F_1 durchströmt, sei bezeichnet mit v_1 und in F mit v. In d. ganzen Raume $a_0 a_1 a b$ hat sich d. Flüssigkeitsstrom von d. Rohrwand getrennt, da d. hier befindliche Flüssigkeit nicht an d. Beweg. Theil nimmt. Ist dies d. Fall, so wird innerhalb dieses Raumes auch keine Ursache für eine erheblich veränderte Pr. stattfinden, man kann also annehmen, daß hier eine überall gleiche Pr. herrscht, da kein Grund zu einer anderen Annahme vorhanden wäre. Diese Pr. kann aber keine andere sein als diejenige Pr. p_1, die im ganzen Querschnitt F_1 stattfindet, widrigenfalls hier eine Ausgleichung stattfinden würde. In d. übrigen Querschnitten zwischen F und F_1, welche aber nicht ebene Querschnitte sind, wird zwar an d. ebenen St. d. Flüssigkeitsmasse gleichfalls d. Pr. p_1 stattfinden, aber es wird von Punkt zu Punkt in diesen gekrümmten Querschnitten eine ganz bedeutende Pr.-Änderung stattfinden. Offenbar ist nun $P = (p_1 - p)\, F$, d. Druck auf d. ganzen Strecke, deren Längsschnitt $aa_1 a_1 a$ ist, herrscht, derart d. nämliche auf d. Flüssigkeit begrenzt außen durch F. D. dem hier entsprechende resultierende Druck im Sinne d. Beweg. ist also $p_1 F$; andererseits herrscht im d. ganzen Strecke F die nämliche Pr. $= p$ und zwar im entgegengesetzten Sinne, so daß d. resultierende Druck $P = (p_1 - p)\, F$ ist. Wesentlich anders würden d. Verhältnisse sein, wenn nur d. Querschnittsänderung d. Flüssigkeitsstroms von F_1 bis F nicht außer Berührung mit d. Rohrwand, sondern mit Berührung

37

derselben stattfinden lassen, wenn also d. Röhre eine solche Querschnittsänderung erfährt; denn wenn es d. Fall sein, daß d. Querschnittsänderung d. Stromes d. Querschnittsänderung d. Röhre vollständig folgt ohne sich von d. Röhrenwand zu trennen; muß

für einen δ_0 und δ also als eben zu betrachten und demnach p_0 und p als constant angenommen, aber d. gegenseitige Normaldruck, d. jetzt hier an d. krümmen Fläche d. Flüssigkeit stattfindet würde jetzt nicht mehr $= p_0$ sein. d. genauen Bestimmung dieser Dr. würde ganz wesentlich abhängig sein von d. Gesetz nach welchem sich d. Querschnitt d. Röhre ändert. Soviel ist gewiß, daß d. Mittelwerth dieser Dr. zwischen δ_0 u δ welche $= p_2$ sei, jetzt größer als p_0 sein muß, denn durch d. Röhrenwand wird d. Flüssigkeitsstrom verhindert sich auszudehnen bis zu einer in wirbelförmiger Bewegung befindlichen Masse. diese Bewegung kann nur dadurch aufgehoben werden, daß d. Dr. p_2 im Mittel größer ist, als sie sein würde, wenn diese Erweiterung d. Stromes unter stattfindender Wirbel, um wieviel $p_2 > p_0$ ist, hängt ab von d. Gesetz d. Querschnittsänderung d. Röhre. Man kann sofort leicht sich begreifen, daß d. Unterschied zwischen p_2 und p_0 um so größer sein wird, je schneller diese Querschnittsänderung erfolgt bis $p_2 = p_0$ wird, wenn diese Änderung so schnell vor sich geht, daß eine Trennung von d. Röhrenwand stattfindet. In einem solchen Fall ist also d. Dr. δ auf d. dazwischen befindliche Flüssigkeitsmasse

$$\delta = p_0\delta_0 - p_2(\delta-\delta_0) - p\delta = -(p'-p_0)\delta,$$

wobei also p' jedenfalls größer als p_0. Wenn auch in diesem zuletzt genannten Fall sich d. Bestimmung d. Widerstandshöhe $\mathfrak{B}$ d. Rechnung entzieht, so ist es doch immerhin d. allgemeinere Fall und d. ursprünglich vorausgesetzte ist nur ein specieller Grenzfall. Es soll deshalb d. allgemeine Ausdruck vorausgesetzt werden, um dann zur Grenze überzugehen.

Zunächst handelt es sich nun darum, eine Beziehung zu gewinnen zwischen p_0 u p und u_0, u. Diese muß aus d. bekannten Prinzip d. Antriebs od. Impulses und d. Bewegungsgröße bekannt sein. demnach ist bekanntlich für ein ganz beliebiges Massensystem d. Zuwachs an Bewegungsgröße nach einer gewissen Richtung in jedem einem Zeitmoment = d. sogenannten Antrieb d. resultierenden äußeren Kraft nach dieser Richtung. Unter d. Bewegungsgröße eines solchen Massensystems nach einer gewissen Richtung versteht man d. Summe d. Produkte aus d. einzelnen Massenelementen in d. Geschw. Comp. nach d. festgesetzten Richtung. Wenn also d. X Axe d. fragliche Richtung darstellt, und u_x d. Geschw. Comp. eines Massenelements m nach dieser Richtung ist, so ist d. Bewegungsgröße dieses Systems nach d. X Axe $= \Sigma m u_x$ und d. Zuwachs an Bewegungsgröße d. Systems im Sinne d. X Axe während d. Zeitelements $dt = d\Sigma m u_x$. Dieser Zuwachs an Bewegungsgröße d. beliebigen Massensystems im Zeitelement dt ist nach d. fraglichen Gesetz d. Antriebs d. resultierenden äußeren Kraft nach derselben Richtung. d. resultierende äußere Kraft nach d. Richtung d. X Axe ist = d. Summe d. nach d. X Axe genommenen Comp. aller einzelnen äußeren Kräfte, die etwa auf d. Massensystem wirken $= \Sigma X dt$. Die inneren Kräfte womit d. einzelnen Massenelemente gegenseitig auf einander wirken kommen nicht in Betracht, indem sie paarweise gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, also sich gegenseitig aufheben. Man hat demnach:

$$d\Sigma m u_x = \Sigma X dt.$$

dieses Prinzip muß nun angewendet werden auf diejenige strömende Flüssigkeitsmasse, die sich augenblicklich zwischen δ_0 und δ befindet und auf ein unendl. kl. Zeitelement dt. Es handelt sich also um d. Zuwachs an Bewegungsgröße, den diese Flüssigkeitsmasse zwischen δ_0 und δ während d. Zeitelements dt erfährt. derselbe ist mit Rücksicht auf d. vorausgesetzten Beharrungszustand d. Bewegung = d. Unterschied derjenigen Bewegungsgröße, womit ein unendl. kleine Flüssigkeitsschicht im Zeitelement dt durch d. Querschnitt δ geht über diejenige Bewegungsgröße, womit eine ebensolche Schicht durch δ_0 geht. d. Masse d. Flüssigkeitsschicht, d. im Zeitelement dt durch jeden einen Querschnitt hindurch geht ist $= Q\frac{dt}{g}$. diese Flüssigkeitsmasse geht nun durch d. Querschnitt δ mit d. Geschw. u, sie geht dagegen durch d. Querschnitt δ_0 mit d. Geschw. u_0, also d. Unterschied d. einen über d. andern: $= Q\frac{dt}{g}(u-u_0)$. dies ist nun auch d. Zuwachs d. Bewegungsgröße d. zwischen d. Querschnitten δ_0 u δ befindlichen Flüssigkeit im Zeitelement dt. dieser muß nun gleich sein d. Antriebe d. resultierenden äußeren Kraft, welche im Sinne d. strömenden Bewegung auf diese Flüssigkeitsmasse wirkt.

So kann möglicher Weise auf diese Flüssigkeitsbewegung eine äußere Massenkraft als Schwerkraft wirken, indessen kann man d. Einfluß derselben auf diesem kurzen Wege abschätzen, so daß nur d. Oberfl.-druck übrig bleibt. Dieser ist oben bezeichnet mit P und sein Antrieb im Zeitelement dt ist $= P\cdot dt$, für d. allgemeinen Fall ist $P = (p'-p)F$ also erhält man:

$$G\frac{dt}{g}(u-u_1) = P\cdot dt = (p'-p)F\,dt \quad \text{woraus folgt:} \quad p-p' = \frac{G}{gF}(u_1-u)$$

und mit Rücksicht auf d. Continuitätsgl. $G = F\frac{u}{v}$ auch:

$$p-p' = \frac{u(u_1-u)}{gv}.$$

Siehe 33. d)

Nun ist aber nach d. Gl. d. lebendigen Kraft (d) wenn sie integrirt wird vom Querschnitt F_1 bis zum Querschnitt F, die betreffende Widerstandshöhe B, die sich auf diesen besonderen Vorgang bezieht:

$$B = \int_u^{u_1}\frac{u\,du}{g} - \int_{p_1}^{p} v\,dp.$$

die äußeren Massenkräfte wurden außer Acht gelassen, das erste Integral ist $= \frac{u_1^2-u^2}{2g}$ und d. 2te $= vp - \int p\,dv$ also:

$$B = \frac{u_1^2-u^2}{2g} - (pv - p_1v_1) + \int_{v_1}^{v} p\,dv.$$

In diesem (folgenden) Falle bedeutet nun aber p nicht d. besonders bestimmte Pr. im Querschnitt F, sondern eine veränderliche Pr., d. sich auf d. Änderung von v_1 bis v bezieht; während dieser Änderung ist d. Pr. d. Flüssigkeit zunächst stetig; also:

$$B = \frac{u_1^2-u^2}{2g} - (p-p')v - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v} p\,dv.$$

Setzen wir nun für $p-p'$ seinen Werth, setzt man nun außerdem noch bedenkt, daß d. Zahl d. Expansionsarbeit pr 1 kg von F_1 bis F ist: f.

$$B = \frac{u_1^2-u^2}{2g} - \frac{2u(u_1-u)}{2g} - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v} p\,dv$$

$$= \frac{(u_1-u)^2}{2g} - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v} p\,dv.$$

Diese Gl. gilt allgemein für eine plötzliche Querschnittsänderung, also auch für d. Fall einer plötzlich stattfindenden Querschnittserweiterung, nur läßt sich in diesem letzten Fall d. Werth von p' nicht vorhinein bestimmen. Von wesentlichem Nutzen ist diese Formel nur in d. Grenzfall, daß eine so plötzliche Querschnittsänderung stattfindet, daß eine Trennung d. Flüssigkeitsstrahls von d. Wandung damit verbunden ist, dann ist $p'=p_1$ und zwar ist p_1 ein min. von p' und somit d. Werth von B ein max. Für diesen Grenzfall ergiebt sich dann:

$$B = \frac{(u_1-u)^2}{2g} + p_1(v_1-v) + \int_{v_1}^{v} p\,dv$$

d. Bedeutung dieses Zahlwerths ist auch abhängig von besonderen Umständen; wenn diese Formel nun für solche Fälle in Anwendung gebracht werden soll, wo d. spez. Volumen so zu sagen als constant anzunehmen ist, so verschwindet für diesen Fall d. 2te und 3te Glied d. Gl.; für d. Bewg. einer tropfbaren Flüssigkeit ergiebt sich demnach d. Widerstandshöhe:

$$B = \frac{(u_1-u)^2}{2g}. -$$

Handelt es sich um d. strömende Bewg. eines Gases od. Dampfes od. Gasmischung, so können d. beiden letzten Glieder unbedingt nach finger. Für d. wichtigsten besonderen Fall, ist $v_1 = v$ und also d. Widerstandshöhe $B = \frac{(u_1-u)^2}{2g}$

gesetzt werden kann, ist nun d. entsprechende Widerstandscoeff. ζ = d. Widerstandshöhe dividirt durch d. Geschw.-Höhe, d. d. Geschw. u entspricht, also:

$$\zeta = \left(\frac{u_1}{u} - 1\right)^2$$

od. da in diesem Fall d. mittlern Geschw. umgekehrt proportional d. Querschnitten sind, so ist auch:

$$\zeta = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1\right)^2 . —$$

Vereinigung verschiedener Flüssigkeitsströme zu einem einfachen Strome.

Praktische Anwendungen dieser Theorie sind d. Wasserstrahlpumpe, Wasserstrahlgebläse, Dampfstrahlapparate etc., welche betreffenden Vorrichtungen zu Kategorie d. Injectorpumpen für Flüssigkeiten gehören. —

Es soll nun d. allgemeine Fall vorausgesetzt werden, daß an einer bestimmten Stelle verschiedene Ströme zusammenfließen und zwar unter folgenden Voraussetzungen:

1) die einzelnen Ströme fließen alle in derselben Richtung in d. Vereinigungskammer ein, in welcher sie nachher vereinigt d. Kammer verlassen. — A · x.

2) In d. kleinsten Querschnitten d. verschiedenen Strahlen herrsche d. Pr. p' und ebenso gestalte auch $= p'$ sei d. Druck, d. auf d. Oberfl. d. gesammten strömenden Flüssig. in d. Vereinigungskammer ausgeübt wird bis zum Querschnitt, durch welchen d. resultirende Strom abfließt, wogegen im Querschnitt σ d. Druck $= p$ sei. Diese Voraussetzung d. constanten Drucks $= p'$ in d. kleinsten Querschnitten ist offenbar an d. Umstand gebunden, daß d. Vereinigungskammer hinreichend groß genug ist, um zu verhindern, daß d. strömende Flüssigkeit sich bis zur Wand ausbreitet.

3) Sei vorausgesetzt, daß außer d. Vereinigung d. einzelnen Ströme zu einem resultirenden Strome von d. Wirkung etwaiger Massenkräfte od. einer etwaigen Wärmeabgabe durch d. Wand d. Kammer abgesehen werden darf. —

Es sei nun G d. Gew. d. resultirenden Flüssigkeit, welche pr. Sek. durch d. Querschnitt σ stationär aus d. Vereinigungskammer abfließt. Im Querschnitt σ sei d. Geschw. $= u$, d. resultirende Flüssigkeit habe hier d. spez. Volumen v u. d. Arbeitsvermögen U; es sei ferner G_m d. Gew., welches durch irgend einen d. beliebig vielen Ströme z.B. d. $m$ten pr. Sek. d. Vereinigungskammer zugeführt wird, d. kleinste Querschnitt d. verschiedenen Strahls, als welcher diese Flüssigkeit sich in d. Vereinigungskammer ergießt sei σ_m, d. Geschw. $= u_m$, d. spez. Volumen $= v_m$ und d. spez. innere Arbeitsvermögen $= U_m$, dann hat man mit Rücksicht auf d. Beharrungszustand:

$$1)\quad G = \Sigma G_m \qquad G = \frac{\sigma u}{v} \quad \text{und} \quad G_m = \frac{\sigma_m u_m}{v_m}.$$

Ferner ist, wenn man diejenige Flüssigkeitsmenge ins Auge faßt, d. sich von d. sämmtlichen Querschnitten σ_m d. in d. Vereinigungskammer einmündenden verschiedenen Strahlen erstreckt bis zum Querschnitt σ, d. resultirende äußere Druck, welcher im Sinne d. Beweg. nach d. Richtung auf d. Oberfl. wirkt $= (p' - p)\sigma$, da von einer äußeren Massenkraft abgesehen wird. Dieselbe Kr. kann auch betrachtet werden als d. Antrieb dieser äußeren Kr. pr. Sek.; dieser Antrieb ist nun gleich d. Zuwachs an Beweg.-Größe d. fraglichen Masse nach d. Richtung Ax pr. Sek., indem aber pr. Sek. d. Flüssigkeit durch d. Endquerschnitt σ hindurchfließt mit d. Beweg.-Größe $\frac{G}{g} u$, wogegen d. einzelnen beliebig vielen Flüssigkeitsströmen durch d. kl. Querschnitte σ_m zufließen mit d. Beweg.-Größe $\Sigma \frac{G_m}{g} u_m$, so ist d. Zuwachs an Beweg.-Größe pr. Sek.:

$$\frac{G}{g} u - \Sigma \frac{G_m}{g} u_m = (p' - p)\sigma = \frac{1}{g} \Sigma G_m (u - u_m)$$

da offenbar $\Sigma G_m u = u \Sigma G_m = uG$ ist.

Also

2) $$p - p' = \frac{1}{g\,\mathfrak{F}}\, \Sigma\, G_m (u_m - u)$$

Aus 3t Gl. ergibt sich mit d. Gl. d. Arbeitsvermögens (Seite 32, γ), wenn man diese Gl. bezieht auf 1 kg Flüssigkeit eines einzigen Flüssigkeitsfadens, sie dann multiplicirt mit G_m und integrirt von $\mathfrak{F}_m$ bis $\mathfrak{F}$, [illegible] ... ist also d. rechte Seite d. [illegible] Gl. dann $= 0$ wird:

$$\Sigma\left[G_m\left(\frac{u^2 - u_m^2}{2g} + U - U_m + pv - p'v_m\right)\right] = 0$$

od. durch Multiplication mit -1:

$$\Sigma\left[G_m\left(\frac{u_m^2 - u^2}{2g} + U_m - U + p'v_m - pv\right)\right] = 0$$

Nun ist aber: $\frac{u_m^2 - u^2}{2g} = \frac{(u_m - u)^2}{2g} + \frac{u(u_m - u)}{g}$; ferner ist: $p'v_m - pv = p'(v_m - v) + (p' - p)v$

od. nach Gl. 2): $p'v_m - pv = p'(v_m - v) - \frac{v}{g\,\mathfrak{F}}\, \Sigma\, G_m (u_m - u)$

od. da: $\frac{v}{\mathfrak{F}} = \frac{u}{G}$ ist:

$$p'v_m - pv = p'(v_m - v) - \frac{u}{g}\left(\frac{\Sigma G_m u_m}{G} - u\right);$$ demnach folgt:

$$\Sigma\left\{G_m\left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + U_m - U + \frac{u}{g}\left(u - \frac{\Sigma G_m u_m}{G}\right)\right]\right\} = 0$$

Nun ist aber: $\Sigma\, G_m\left[\frac{u}{g}\left(u - \frac{\Sigma G_m u_m}{G}\right)\right] = 0$, denn dies ist $= \frac{u}{g}\left[\Sigma\, G_m (u_m - u)\right] = 0$

Also hat man:

3) $$\Sigma\left\{G_m\left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + U_m - U\right]\right\} = 0.$$

Diese Gl. 1) 2) 3) in Verbindung mit d. Zustandsgl. und d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens [illegible] ... Seite 32, α u. β, [illegible] ... Gl. β, Seite 32, [illegible] ... Wird nun diese Gl. mit G_m multiplicirt, sie dann integrirt über d. ganzen [illegible] ..., so erhält man $\mathfrak{B}$, also d. zu [illegible] Arbeitsverlust, indem d. dem [illegible] entsprechende Wärmeaustausch $= 0$ vorausgesetzt wird:

$$\mathfrak{B} = \Sigma\left\{G_m\left[U - U_m + \int_{v_m}^{v} p\, dv\right]\right\}$$

od. nach Gl. 3):

$$\mathfrak{B} = \Sigma\left\{G_m\left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + \int_{v_m}^{v} p\, dv\right]\right\}$$

[illegible] ... d. Arbeitsverlust auch d. [illegible] ... in sich begreifen. [illegible] ...

zu theilen, sondern mit einem einzigen Strom, ist an Stelle von M d. Zeiger 1 zu setzen und d. Summenzeichen ist zu streichen, man erhält dann, wenn man denselben noch durch g. dividirt, d. Ausdruck: $B = \frac{(u_1-u)^2}{2g} + p'(v_1-v) + \int_v^{v_1} p\,dv$, welche Formel übrigens übereinstimmt mit d. schon früher Seite 32 gefundenen nur mit d. Unterschied, daß sie hier mit p' bezeichnet worden ist. —

Untersuchung d. permanenten strömenden Bewegung d. Wassers.

Das Wasser ist zu betrachten als Repräsentant irgend einer tropfbaren Flüssigkeit. Hierbei ist d. spez. Volumen v in ganz geringem Grade von d. Dr. abhängig; wenn daher also außerdem vorausgesetzt wird, daß d. Temperatur nur in sehr geringem Grade veränderlich sei, also $T = const$ gesetzt wird, so darf auch $v = const$ gesetzt werden. d. innere Arbeitsvermögen U ist eine Function von v und T, sind also v u. T constant, so ist auch $U = const$. Von d. 5 Größen p, v, T, U, u sind im Allgemeinen als Functionen von s zu bestimmen; sind also 3 von vornherein gegebene Constante, und es reducirt sich d. Aufgabe darauf, nur d. übrigen beiden Größen zu bestimmen für jeden Querschnitt F. Dazu sind erforderlich 2 Gl., genügend und es dienen dazu d. Continuitätsgl. und d. Gl. d. lebendigen Kr. Die Continuitätsgl. besteht in diesem Falle einfach darin, daß $F u = const$ ist, also: $F u = F_0 u_0$ und zwar ist d. Bedeutung dieses Products nichts anderes als dasjenige Wasservolumen, welches pr. Sek. durch einen Querschnitt hindurchfließt, ist $const = V$. —

Was d. Gl. d. lebendigen Kraft betrifft, so ergibt sich mit d. allgemeinen Form derselben (Gl. 2 S. 32), wenn man sie integrirt vom Querschnitt F_0 bis F und wenn man ferner statt d. spez. Volumens nun d. spez. Gew. d. Wassers in d. Rechnung einführt $= \frac{1}{v} = \gamma$, so folgt:

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + M - B,$$

wenn mit M d. Arbeit d. Massenkräfte und mit B d. Arbeit d. Bewegungswiderstände pr. 1 kgr. Flüssigkeit auf d. Wege von F_0 bis F bezeichnet wird.

Was d. Glied M betrifft, so kommen in Betracht als äußere Massenkräfte nur d. Schwerkraft und d. übrigen Ergänzungskräfte d. rel. Bewegung mit Rücksicht auf d. eigene Bewegung d. Gefäßes, in welchem. Bezeichnet h d. Höhe d. Punktes S_0 über S, unter S_0 d. Schwerpunkt d. Querschnittes F_0 und unter S d. von F verstanden, so ist d. Arbeit d. Schwerkraft pr. 1 kgr. Flüssigkeit auf d. Wege von F_0 bis F $= h$; hat d. Röhre eine eigene Bewegung, so kommt von d. beiden Ergänzungskräften nur d. erste in Betracht, da d. 2te normal gegen d. relative Bahn gerichtet ist. Bezeichnet also K d. Arbeit d. ersten Ergänzungskraft, so ist: $M = h + K$. d. Größe K ergibt sich aus d. Integral d. 2ten Bestandtheils von dM (Seite 33)

$$K = -\frac{1}{g}\int_0^s f \cos\varphi \, ds$$

worin f d. Beschl. d. Röhre selbst wegen ihrer eigenen Bew. an d. Stelle eines beliebigen Punktes d. Mittellinie, φ d. Richtung derselben gegen d. Richtung d. Bewegung und s bedeutet d. ganze Länge $S_0 S$ d. Mittellinie. Setzt man für M d. Ausdruck ein, so ergibt sich als Hauptfundamentalgl.:

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h + K - B.$$

Dieselbe soll jedoch in eine etwas einfachere Form gebracht werden. Wäre unter übrigens gleichen Umständen d. Wasser in d. Röhre in relativer Ruhe, also $u = 0$ und $u_0 = 0$, so wäre auch $B = 0$, es wäre daher also d. Unterschied d. Druckhöhe im Querschnitt F über d. Druckhöhe im Querschnitt F_0, also d. Größe $\frac{p-p_0}{\gamma} = h + K$. diese Größe soll bezeichnet werden als d. „hydrostatische Unterdruckhöhe“ d. Wasserstrecke $F_0 F$ d. Röhre. Im Gegensatz dazu soll unter d. „hydraulischen Unterdruckhöhe“ verstanden werden d. Unterschied d. Druckhöhe im Querschnitt F über die im Querschnitt F_0 für d. Zustand d. strömenden Bewegung d. Wassers in d. Röhre. Um diese letztere von d. hydrostatischen Unterdruckhöhe zu unterscheiden sei d. hydraulische Unterdruckhöhe bezeichnet mit $\left(\frac{p-p_0}{\gamma}\right)$. Wenn man d. hydraulische von d. hydrostatischen Unterdruckhöhe ergiebt, also $(p_0-p_0) \div \frac{p-p_0}{\gamma}$ bleibt, da und derselbe ist, wenn man d. algebraische Summe bildet $h+k-\frac{p-p_0}{\gamma}$, so soll diese Größe mit d. Buchstaben H bezeichnet werden und dieselbe d. wirksame Druckhöhe für d. Wasserfaden $\delta_0\delta$ genannt werden. Sie ist nämlich derjenige Theil d. hydrostatischen Gesamtdruckhöhe, welcher auf d. Erhaltung d. strömenden Beweg. verwendet wird. Mit Hilfe dieser Bezeichnung kann nun d. Fundamentalgl. geschrieben werden:

$$\frac{u^2-u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}.$$

Ein Theil dieser wirksamen Druckhöhe setzt sich in Geschw. um, ein anderer Theil wird dazu gebraucht um d. hydraulischen Wid.- Widerstände von δ_0 bis δ zu bewältigen. —

Ist nun ζ d. Widerstandscoeff. für d. Wasserfaden $\delta_0\delta$, dann kann mit Rücksicht auf d. früher festgestellten Bemerkungen eine solche Widerstandscoeff. $\mathfrak{B} = \zeta\frac{u^2}{2g}$ gesetzt werden und man hat demnach: $\frac{u^2-u_0^2}{2g} = H - \zeta\frac{u^2}{2g}$. Hieraus folgt:

$$u = \sqrt{\frac{u_0^2+2gH}{1+\zeta}}$$

Ist φ d. entsprechende Geschw.-Coeff. d. zu bekanntlich zu ζ in d. Beziehung steht: $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$, so ist auch:

$$u = \varphi\sqrt{u_0^2+2gH}$$

Die Continuitätsgl. $\delta u = \delta_0 u_0 = V$ in Verbindung mit d. Gl. d. lebendigen Kraft $\frac{u^2-u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}$ od. was auf dasselbe herauskommt, d. Continuitätsgl. in Verbindung mit d. Gl. d. Geschw. $u = \sqrt{\frac{u_0^2+2gH}{1+\zeta}} = \varphi\sqrt{u_0^2+2gH}$ sind also d. Grundformeln zu betrachten zur Beantwortung aller Fragen, die sich auf d. permanente Strömung d. Wassers beziehen, wobei zu berücksichtigen ist $H = h + k + \frac{p_0-p}{\gamma}$ ist.

Diese verschiedenen Aufgaben nun, für deren Behandlung diese Gln. als d. Fundamentalgln. zu betrachten sind, beziehen sich theilweise auf d. Ausfluß d. Wassers aus Gefäßen, theilweise auf d. Beweg. d. Wassers in längeren Röhren. Es ist also:

1) $\delta u = \delta_0 u_0 = V$ — d. Continuitätsgl.

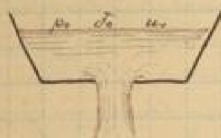
2) $\frac{u^2-u_0^2}{2g} = H - \mathfrak{B}$ — d. Gl. d. lebendigen Kraft.

3) $u = \sqrt{\frac{u_0^2+2gH}{1+\zeta}} = \varphi\sqrt{u_0^2+2gH}$ — d. Geschw.- Gl.

wobei $H = h + k + \frac{p_0-p}{\gamma}$ und $k = -\frac{1}{g}\int_{s_0}^{s} f\cos\varphi\, ds$ ist. —

Ausfluß d. Wassers aus Gefäßen. —

Denken wir uns in einem beliebig gestalteten Gefäß, Wasserspiegel halten und d. in diesem Gefäß befindliche Wassermenge durch entsprechenden äußeren Zufluß constant erhalten, während d. Wasser gleichzeitig durch eine Öffnung im Boden d. Gefäßes ausfließt, dann hat man es zu thun mit einer Beweg., welche unter sich gleichbleibenden Umständen in gleichbleibender Weise stattfindet. Die Ausflußöffnung befindet sich in einem solchen Fall entweder als einfache Wandöffnung unmittelbar in d. Gefäßwand, od. sie befindet sich am Ende eines sogenannten Mundstücks, welches aber hier als so kurz vorausgesetzt werden soll, daß d. Reibungswiderstände in demselben vernachlässigt werden können. Es sollen hier d. Flächeninhalt d. Mündung bezeichnet mit A. Diese Mündung $= A$ wird dabei angesehen als eine ebene Fl., begrenzt von d. inneren Wandfl. d. Gefäßes od. resp. d. Mundstücks. Diese ebene Mündung $= A$ ist also im Allgemeinen nicht ein Querschnitt d. strömenden Flüssigkeit in dem bis dahin ~~betrachteten~~ Sinne d.h. d. Bahnen d. Flüssigkeitstheilchen brauchen durchaus nicht diese Mündung A normal zu durchschneiden, im Gegentheil, es wird im Allgemeinen dies nicht d. Fall sein. Denken wir uns



Z.B.: ist in einem ebenen Boden eines Gefäßes befindet sich d. Mündung A, so fließt im Innern d. Gefäßes von verschiedenen Seiten d. Wasser dieser Mündung A zu. diese Fasern werden gegen d. Mitte hin d. Mündung A senkrecht schneiden können, gegen d. Rand hin werden d. Fasern mehr od. weniger schief gerichtet sein können. Mit dieser schiefen Richtung d. Fasern gegen d. Mündungsebene hin, nimmt auch d. Pressung d. Fasern von d. Mitte nach d. Rand hin entsprechend zu. diese, nach d. Rand hin zunehmende Pressung d. Fasern wird auch eine nach d. Rande hin abnehmende Geschw. in d. Mündung A entsprechen und wird demnach nicht d. Geschw. in allen Punkten d. Mündung A gleich groß sein, sondern sie wird in d. Mitte am größten sein. Ferner wird d. Folge dieses Umstands sein, daß d. Wasserstrahl, nachdem er d. Mündung A passirt hat, eine weitere Contraction seines Querschnitts erfährt, aber in d. Weise, daß d. kleinste Querschnitt dieses contrahirten Strahls erst in einer gewissen Entfernung von d. Mündungsebene erreicht sein wird. An d. Stelle dieser stärksten Zusammenziehung kann man d. Querschnitt d. Flüssigkeitsstrahls wieder als eben vorausgesetzt werden und kann man auch in diesem kleinsten Querschnitt wieder eine gleichförmige Geschw. vorausgesetzt werden und zwar wird diese gleichförmige Geschw. gleich sein ~~derjenigen~~ zu setzen sein derjenigen Geschw., welche in d. äußeren Raum an d. Mündung herrscht und die $= p$ sei. Was d. Wassermenge betrifft, d. sich von diesem kleinsten Querschnitt bis zur Mündung A erstreckt, so wird an deren Oberfl. nach d. Geschw. p herrschen, nach d. Mitte hin aber eine größere. d. kleinste Querschnitt dieses contrahirten Strahls sei mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet und d. Verhältniß dieses kleinsten Querschnitts zur Mündung A sei mit α bezeichnet also $\alpha = \frac{\mathfrak{F}}{A}$, man nennt dieses Verhältniß d. Contractionscoefficienten. d. mittlere Geschw. u, welche im Querschnitte $\mathfrak{F}$ stattfindet soll kurzweg d. Ausflußgeschw. genannt werden. Unter p_0 werde ein Pressung d. Gr. verstanden, welche in d. freien Oberfl. d. Wassers im Gefäß stattfindet. $\mathfrak{F}_0$ sei d. Größe dieser Oberfl. und u_0 d. mittlere Geschw., womit in dieser freien Oberfl. d. Wassertheilchen sich bewegen. Es ist nun d. Wasservolumen V, welches pr. Sek. ausfließt $V = \mathfrak{F}.u$ od. mit Rücksicht auf d. Contractionscoeff.: $V = \alpha A u$, worin nach voriger: $u = \varphi\sqrt{u_0^2 + 2gH}$ ist, also:

$$V = \alpha\varphi A\sqrt{u_0^2 + 2gH}$$

worin $H = h + k + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist unter h d. Höhe d. ~~sogenannten~~ freien Oberfl. d. Wassers über d. Schwerpunkt d. Querschnitts $\mathfrak{F}$ verstanden. d. Product aus d. Contractionscoeff. α und d. Geschw.-Coeff. φ pflegt häufig mit einem besonderen Buchstaben μ bezeichnet, als sog. Ausflußcoefficient in d. Folge in Rechnung eingeführt zu werden. Es ist dann also auch:

$$V = \mu A\sqrt{u_0^2 + 2gH}.$$

die Geschw. u_0 an d. freien Oberfl. ist nun im Allgemeinen nicht gegeben, sie bestimmt sich aus durch V, denn es ist $u_0 = \frac{V}{\mathfrak{F}_0}$; setzt man diesen Werth für u_0 ein, so setzt und diese Gl. man durch μA dividirt, denn d. Gl. quadrirt und u_0^2 auf d. linke Seite gebracht wird:

$$V^2\left(\frac{1}{(\mu A)^2} - \frac{1}{\mathfrak{F}_0^2}\right) = 2gH \text{ also } V = \mu A\sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{\mu A}{\mathfrak{F}_0}\right)^2}}$$

nun ist aber $u = \frac{V}{\alpha A} = \frac{V}{\mathfrak{F}}$ also:

$$u = \varphi\sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{\mu A}{\mathfrak{F}_0}\right)^2}}.$$

dies sind d. allgemeinen Formeln für d. Ausflußmenge und Ausflußgeschw. d. Wassers aus einem Gefäß. In d. meisten Fällen ist nun A im Vergleich zu $\mathfrak{F}_0$ klein genug um hierfür einfach schreiben zu dürfen:

$$V = \mu A\sqrt{2gH} \quad \text{und} \quad u = \varphi\sqrt{2gH} \qquad *$$

und zwar darf man diese einfachen Formeln immer dann unbedenklich anwenden, wenn $\frac{A}{\mathfrak{F}_0} < \frac{1}{10}$ ist, indem man dann nur einen Fehler begeht, d. weniger beträgt als $\frac{1}{2}\%$ d. wahren Werthes und weil man nur bis zu einer solchen Genauigkeit im Stande ist überhaupt d. Werthe von μ und φ anzugeben.

(daß man keinen größeren Fehler begeht, ist leicht ersichtlich: Hat man eine Form $\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$ worin x ein kl. Bruch ist, so ist bei Vernachlässigung unendlich kl. Größen höherer Ordnung $= \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2$ und wenn man diese ganze Größe $= 1$ setzt, so begeht man einen Fehler $= \frac{1}{2}x^2$ für jede Einheit, ist nun $x < \frac{1}{10}$ so ist dieser Fehler für jede Einheit $= \frac{1}{200}$ also $= \frac{1}{2}\%$.) —

Was d. wirksame Druckhöhe H betrifft, so soll, [illegible] bemerkt werden, dass sich d. Gefäss selbst in Ruhe [illegible] befindet, [illegible] Wasser eine horizontale freie Oberfl. im Gefäss bildet [illegible]. Es ist dann H d. Bedeutung $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$. h bedeutet d. Höhe d. horizontalen freien Oberfl. im Gefäss über d. Schwerpunkt d. Querschnitts J, während p_0 d. Druck d. äusseren Mediums an d. freien Oberfl. und p d. Druck an d. Mündung bedeutet. Wenn d. Gefäss [illegible] Luft umgeben ist, [illegible] d. Luft an d. Stelle d. Gefässbodens $= \lambda$ bezeichnet wird, $p - p_0$ d. Unterschied d. äusseren Luftdrucks an d. Stelle d. Mündung über d. äusseren Luftdruck in d. Höhe d. freien Oberfl. im Gefässe $=$ d. Gew. einer Luftsäule von d. Grundfl. $= 1$ und d. Höhe h also $p - p_0 = h\lambda$ und folgt: $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = h\left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right)$. [illegible] ist nun aber $\frac{\lambda}{\gamma}$ so klein, dass man [illegible] 1 [illegible] mit Rücksicht [illegible] μ u. φ [illegible]. Es ist dann:

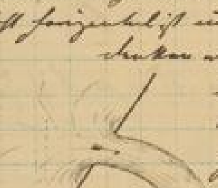
$$V = \mu A \sqrt{2gh} \quad \text{und} \quad u = \varphi \sqrt{2gh}$$ *

Wenn d. Wasser unter gleichen Voraussetzungen wie oben, durch eine Öffnung in d. Seitenwand [illegible] Gefäss, in welchem gleichfalls ein constanter Wasserstand erhalten wird, so kann d. [illegible] freien Oberfl. wirkende spez. Druck in beiden Gefässen [illegible] gleich und zwar $= p_0$ gesetzt werden. Ist dann h d. Höhe

d. Wasserspiegels im ersten und h_1 d. im 2ten über d. Schwerpunkt d. Querschnitts d. [illegible], so ist offenbar $p = p_0 + \gamma h_1$, also $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = h - h_1$.

Nun müsste man eigentlich in jedem besonderen Fall d. Höhe [illegible] Schwerpunkts [illegible] d. [illegible] d. Fall ist, [illegible] unter h d. Höhe d. freien Wasseroberfl. im [illegible] über d. Schwerpunkt d. Mündung A selbst zu verstehen, [illegible] Bedeutungen [illegible] Bedeutungen [illegible] bestimmt werden müssen. [illegible] φ u. μ wenn d. Wasser [illegible] Seitenöffnung ausfliesst. [illegible] d. Formel [illegible] d. Mündung [illegible] nicht horizontal ist und d. [illegible] nicht sehr klein im Vergleich mit h ist.

Denken wir uns z. B.: eine ebene Seitenwand eines Gefässes, welche [illegible] unter d. Winkel ϑ gegen d. Horizont geneigt sein mag. In derselben



befinde sich eine grosse Öffnung, so können in einem solchen Fall d. Geschw. in verschiedenen Punkten d. Mündung A bedeutend verschieden sein und wenn es auch [illegible] sein, d. mittlere Geschw. $=$ derjenigen zu setzen, welche im Schwerpunkt stattfindet. Es fragt sich nun, ob unter ~~diesen~~ Umständen [illegible] sich [illegible] lässt. Zu dem Ende sollen H, H_1 und H_2 d. Werte von $h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ für d. Schwerpunkt, d. tiefsten und d. höchsten Punkt d. Mündung bezeichnen, für einen beliebigen Punkt d. Mündung sei d. Grösse $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ mit z bezeichnet. Nun denke ich mir d. ganze Mündungsebene durch horizontale Linien in unendl. schmale Flächenstreifen zerlegt. D. Entfernung eines solchen Streifens von d. durch d. Schwerpunkt d. Mündung gezogenen Horizontale sei bezeichnet mit x, wobei x positiv od. negativ gesetzt werden soll, jenachdem d. Streifen höher od. tiefer liegt als d. Schwerpunkt d. Mündung. D. Länge dieses Streifens sei bezeichnet mit y, d. unendl. kl. Breite desselben ist $= dx$, also $y\,dx$ d. Inhalt eines solchen Flächenstreifens. Auf diesen beliebigen Flächenstreifen bezieht sich auch d. beliebige z. An Stelle d. Formel $V = \mu A \sqrt{2gH}$ wird nun streng genommen [illegible]

Formel zu beachten haben: $V = \mu \int y\,dx\sqrt{2gz}$, indem z d. Wert dieser Größe H für d. beliebigen Flüssigkeitsfaden bedeutet. D. Gl. kann auch geschrieben werden: $V = \mu\sqrt{2g}\int y\sqrt{z}\,dx$. Nun ist: $z = H + x.\sin\psi$ also $dx = \frac{dz}{\sin\psi}$ und $V = \frac{\mu\sqrt{2g}}{\sin\psi}\int y\sqrt{z}\,dz$. Hat man hiernach je nach d. Form d. Mündung V bestimmt, so findet man d. Ausflußgeschw.:

$$u = \frac{V}{\alpha A}.$$

Ist z. B.: d. Ausflußöffnung ein Rechteck und zwar so gelegen, daß 2 Seiten derselben horizontal sind, dieselben seien $= b$ und d. beiden anderen $= a$. In diesem Falle ist also $y = \text{const} = b$ und somit $V = \frac{\mu b\sqrt{2g}}{\sin\psi}\,\frac{2}{3}\left(H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}\right)$. Die mittlere Ausflußgeschw. u ergibt sich hiermit durch Division mit αA; es ist aber $A = ba$ und auch $a = \frac{H_1 - H_2}{\sin\psi}$ und somit:

$$u = \frac{2}{3}\varphi\sqrt{g}\,\frac{H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}}{H_1 - H_2}.$$

Unabhängig hiervon läßt sich auch leicht eine für alle Fälle ausreichende Näherungsformel durch Folgendes finden. Es ist nämlich:

$$\sqrt{z} = \sqrt{H + x.\sin\psi} = \sqrt{H}\sqrt{1 + \frac{x\sin\psi}{H}}.$$

D. Größe $\frac{x\sin\psi}{H}$ ist ein echter Bruch und man kann daher mit Annäherung nach d. Binomialsatz schreiben:

$$\sqrt{z} = \sqrt{H}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x\sin\psi}{H} - \frac{1}{8}\left(\frac{x.\sin\psi}{H}\right)^2\right).$$

Wird dann wieder d. Faktor $\frac{1}{\sin\psi}$ unter d. Integral und für $\frac{dz}{\sin\psi}$ wieder dx geschrieben, so ist wieder $y\,dx$ nichts anderes als d. Inhalt eines Flüssigkeitsfadens, welcher auch mit dA bezeichnet werden kann; dann ist: $V = \mu\sqrt{2gH}\int dA\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x\sin\psi}{H} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{H^2}\sin^2\psi\right)$. Nun ist $\int dA = A$, ferner $\int x\,dA = 0$, da d. Inhalt dieser Flüssigkeitsfäden multipliziert mit ihrer Entfernung vom Schwerpunkt $= 0$ sein muß; d. dritte Glied verwandelt sich auch $\int x^2\,dA$. Diese Summe d. Produkte aus d. Inhalt d. Flüssigkeitsfäden in d. Quadrat ihrer Abstände von d. Schwerpunktsachse als d. Trägheitsmoment d. Mündungsfläche A in Bezug auf d. Schwerpunktsachse sei bezeichnet mit Ak^2. Dann wird:

$$V = \mu A\sqrt{2gH}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{k^2}{H^2}\sin^2\psi\right) \text{ und } u = \frac{V}{\alpha A}$$

Wie man sieht unterscheidet sich diese verringerte Formel für V u. u nur dadurch, daß dazu ein gewisser Korrektionsfaktor hinzugekommen ist und es fragt sich, unter welchen Umständen man bei Vernachlässigung dieses Faktors nur einen Fehler von $\frac{1}{2}$ % begeht. Beispielsweise soll dies durchgeführt werden für ein Rechteck und eine Ellipse:

Ist d. Mündung A ein Rechteck mit d. Seiten b u. a, wo b horizontal ist, so ist bekanntlich: $Ak^2 = \frac{a^3b}{12}$ also $k^2 = \frac{a^2}{12}$. Bezeichnet man d. Korrektionsfaktor mit $1-f$, so ist also für diesen Fall: $f = \frac{1}{96}\left(\frac{a.\sin\psi}{H}\right)^2$ und durch d. Weglassung dieses Koeffizienten begeht man einen Fehler, d. weniger beträgt als $\frac{1}{2}$ %, wenn $f < \frac{1}{200}$ ist; man überzeugt sich leicht, daß dies d. Fall ist wenn $\frac{a.\sin\psi}{H} < 0{,}7$ ist. —

Für d. Fall einer Ellipse seien a u. b d. beiden Hauptachsen, wovon b horizontal, dann ist: $Ak^2 = \frac{\pi ab}{4}k^2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3\frac{b}{2}$ also $k^2 = \frac{a^2}{16}$ und somit: $f = \frac{1}{128}\left(\frac{a.\sin\psi}{H}\right)^2$. Diese Größe ist nun $< \frac{1}{200}$ wenn $\frac{a\sin\psi}{H} < \frac{8}{10}$ ist. Dies ist in d. meisten Fällen wirklich so; ist aber $\frac{a\sin\psi}{H} >$ als diese Zahlen, so empfiehlt man doch zweifellos d. alte Formel zu wählen, da, wenn man auch diese verringerte Formel anwendet, sie ja doch auch abhängig sind von H u. d. Dimensionen d. Mündung, die nur durch ungenaue Versuche bestimmt werden können. Es wird also in d. Weise wie sie je d. Werth hineingezogen werden müssen, daß d. Schwerpunkt d. unbekannten Punktes anders liegen kann und daher erhalten diese noch d. Einfluß dieser unwesentlichen Korrektionsfaktoren $1-f$. —

Die Größe d. Reaktion entzieht sich einer genauen theoretischen Bestimmung, jedoch läßt sich immer ein gewisser Grenzwerth angeben, unter welchen d. Reaktionscoeff. α herunter sinken kann. Es läßt sich beweisen, daß α mindestens $= \frac{1}{2}$ sein muß, wenn an allen denjenigen Stellen d. Gefäßwand d. Geschw. d. entlang fließenden Wassers nicht unendl. kl. ist und d. entwickelt gedachte Normale mit einem spitzen Winkel mit d. Richtung d. Ausflußgeschw. bildet. Dieser Grenzwerth d. Reaktionscoeff. $\alpha = \frac{1}{2}$ hängt zusammen mit einem zunächst zu besprechenden Verhalten d. Reaktion d. aus einem Gefäß ausfließenden Wassers.

Es seien mit einem Gefäß 2 rechtwinklige Coord.-Axen X u. Y fest verbunden; sie seien angenommen in einer Verticalebene, welche parallel sein soll mit d. Richtung von u und zwar soll X vertical abwärts und Y horizontal in einem solchen Sinne, daß d. Richtung dieser positiven Y Axe einen spitzen Winkel mit d. Richtung von u bildet, also wie d. beiden Pfeile in d. Zeichnung zeigen. Derjenige Winkel, welchen d. Richtung d. Ausflußgeschw. mit d. X Axe bildet sei $= \psi$. — Betrachten wir nun d. Wassermasse, welche sich momentan in d. Ausflußgefäße befindet, welche gerechnet wird bis zum kleinsten Querschnitt F d. contrahirten Strahls. Der Zuwachs an Bewegungsgröße, den diese Wassermasse beziehungsweise im Sinne d. X und Y Axe in einem Zeitelement dt erfährt ist offenbar $= \gamma \frac{V}{g}(u \cos\psi - u_0)\, dt$ im Sinne d. X Axe und $\gamma \frac{V}{g} u \sin\psi\, dt$ im Sinne d. Y Axe, wenn u_0 d. mittlere vertical abwärts gerichtete Geschw. bedeutet, welche bereits an d. freien Oberfl. im Gefäß stattfindet. Dieser Zuwachs an Bewegungsgröße entspricht d. Unterschied derjenigen Beweg.-Größe, womit im Zeitelement dt d. Wasser im Querschnitt F ausfließt über den, womit es im Querschnitt F zufließt. Nun ist V d. Wasservolumen, welches in d. Zeiteinheit ausfließt, also γV d. ausfließende Gew. und $\gamma \frac{V}{g}$ d. in d. Zeiteinheit ausfließende Masse. Diese erfährt im Sinne d. X Axe einen Geschw.-Zuwachs $= u \cos\psi - u_0$ und im Y Sinne: $u \sin\psi$. Dieses sind also d. Größen, um welche sich d. Bew.-Größen während eines Zeitelements dt im Sinne d. Axen ändern. Nach d. Prinzip d. Arbeit muß d. erste Zuwachs an Bew.-Größe $= X\,dt$ und d. andere $= Y\,dt$ sein, wenn X u Y d. im Sinne d. Axen genommenen Comp.-Summen d. äußeren Kräfte bedeuten, d. auf d. Wassermasse wirken. Es ist also d. Größe d. resultirenden Kraft, welche auf d. Wassermasse im Gefäß im Sinne d. Axen ausgeübt wird:

$$X = \gamma \frac{V}{g}(u \cos\psi - u_0) \qquad Y = \gamma \frac{V}{g} u \sin\psi.$$

Mit ebenso großer Kraft aber gerade umgekehrt wirkt d. Wasser an seiner Oberfl. auf seine Umgebung zurück. Wäre d. Mündung, mit welcher d. Wasser ausfließt, geschlossen und d. Wasser im Gefäß in relativer Ruhe, so würde d. Wasser auf d. Gefäßwand keinerlei resultirende Druckwirkung ausüben und es sind X u Y diejenigen Größen um welche d. Druck, d. d. Wasser auf d. Gefäß beziehungsweise im Sinne d. Axen ausübt durch den Zustand d. Bew. d. Wassers vermindert wird, oder umgekehrt: X u Y sind diejenigen Kräfte, womit d. Wasser während d. Ausfließens entgegengesetzt im Sinne d. X u Y Axe auf d. Wasser zurückwirkt. Gewöhnlich kann diese kl. Geschw. u_0 im Vergleich mit $u \cos\psi$ vernachlässigt werden. Geschieht dieses also $u_0 = 0$, so ist d. resultirende Reaktion d. ausfließenden Wassers auf d. Ausflußgefäß:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \gamma \frac{V}{g} u.$$

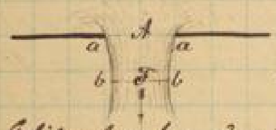
Es ist also bei Vernachlässigung dieser Geschw. u_0 d. Reaktion einfach = derjenigen Bew.-Größe, womit d. Wasser p. Sek. ausfließt und wie in diesem Falle d. Ausdruck von X u Y erkennen lassen, so ist diese Reaktion R gerade entgegengesetzt gerichtet im Sinne von u.

Setzt man $V = F u$, so kann man auch d. Ausdruck für d. Reaktionsdruck schreiben:

$$R = 2\gamma \frac{F u^2}{2g}.$$

d. h. es ist diese Größe = Reaktionsdruck = dem doppelten Gew. einer Wassersäule deren Grundfl. $= F$ und deren Höhe = d. Ausflußgeschw.-Höhe ist. Setzt man ferner $F = \alpha A$ und $u = \varphi\sqrt{2gH}$

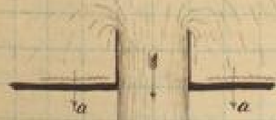
gewöhnlichen für d. Reactionsdruck $R = 2\alpha\varphi^2\gamma A H$.
Dieser letzte Ausdruck kann man dazu dienen, d. möglichen Grenzwerth d. Contractionscoeff. $\alpha = \frac{1}{2}$ festzustellen, wenn in allen denjenigen Stellen, wo d. Wasser nicht mit einer verschwindend kl. Geschw. vorbeistreicht, d. Normale einen spitzen od. höchstens rechten Winkel mit u bildet.
Zu dem Ende muss man bemerken, daß d. bewegte Wasser in doppelter Weise auf d. Gefäßwand wirkt, theils durch d. Normaldruck, theils durch d. Reibung an d. Wand. Jene Kraft R, womit d. ausfließende Wasser entgegengesetzt im Sinne von u auf d. Ausflußgefäß zurückwirkt, ist zu betrachten als d. Unterschied eines im entgegengesetzten Sinne von u genommenen auf d. Gefäßwand ausgeübten Normaldrucks über eine im Sinne von u wirkende Reibung d. an d. Gefäßwand entlang fließenden Wassers. Es ist also R zu betrachten als $P - R'$, wenn P bedeutet d. entgegengesetzt im Sinne von u genommenen Normaldruck, den d. Wasser normal auf d. Gefäßwand ausübt, und R' d. Kraft, womit umgekehrt d. Wasser auf d. Gefäßwand im Sinne von u wirkt. Also $R = P - R'$.
Was diesen Normaldruck P betrifft, so denken wir uns zunächst einen einfachen Normalfall, daß d. Ausflußöffnung sich in einer ebenen Gefäßwand befinde z. B. im Boden. Das Wasser fließt hier von d. verschiedenen Seiten d. Mündung zu und es würde d. Ausflußstrahl in einem gewissen Punkte contrahirt werden bis zum Querschnitt F.



Wenn d. Mündung A geschlossen wäre und d. Wasser im Gefäß in Ruhe, so würde am Theile A d. Oberfl. d. Wassers ein Normaldruck stattfinden $= A(\gamma h + p_0)$ unter p_0 d. äußeren Druck auf d. Oberfl. d. Wassers im Gefäß verstanden. D. entsprechende Theil d. Oberfl. d. im Gefäß enthaltenen Wassers im Zustande d. Bew. ist d. Fl. abba. An dieser ganzen Oberfl. herrscht d. äußere Druck p = d. Druck in d. Raum, in welchem d. Ausfluß stattfindet, so daß d. verhältnismäßige Normaldruck, d. während d. Bew. an d. Oberfl. herrscht an A u. F und zwar im Sinne von u nicht mehr $= A(\gamma h - p_0)$ sondern $= Ap$ ist. Folglich ist an diesem Theile d. Wasseroberfl. d. Unterschied d. hydrostatischen Drucks über d. hydraul. Druck = dieser Differenz, also =:

$$A(\gamma h + p_0) - Ap = \gamma A\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right) = \gamma A H$$

Um diesen Betrag wird also jedenfalls d. Druck, den d. Wasser im Sinne von u auf d. Gefäß ausübt, vermindert od. umgekehrt d. Druck, den d. Wasser auf d. Gefäß entgegengesetzt im Sinne von u vermehrt. Aber dieser ist nicht d. einzige Grund, aus welchem dieser Druck P d. ausfließenden Wassers auf d. Gefäß entgegengesetzt im Sinne von u größer wird im Zustand d. Bew. als im Zustand d. Ruhe, nämlich an denjenigen Theilen d. Gefäßwand, welche d. Mündung unmittelbar umgeben, strömt d. Wasser zum Theil längs d. Gefäßwand hin d. Mündung zu. In größerer Entfernung von d. Mündung wird diese Geschw. so klein sein, daß man davon absehen kann, aber unmittelbar an d. Mündung wird es dies nicht sein. Ist dies d. Fall, so wird an diesen Stellen d. innere Druck kleiner sein als d. hydrostatische nach einem Gesetz, d. der Geschw.-Höhe entspricht. Es ist also an diesen Stellen d. Normaldruck, den d. Wasser auf d. Gefäßwand ausübt, während d. Ausflusses kleiner als er bei geschlossener Mündung ist und deßhalb ist im Ganzen d. Größe P nicht nur $= \gamma A H$ sondern mehr od. weniger viel größer als $\gamma A H$. d. h. $P = R + R' > \gamma A H$. Um wieviel dieses größer sein würde als $\gamma A H$ hängt ab von d. Gestaltung d. Gefäßes an d. Umgebung d. Mündung A. In d. Falle, wo d. Normaldruck d. Wassers auf d. Gefäßwand an dem d. Mündung unmittelbar umgebenden Theil wirkt, muß P erheblich größer sein als $\gamma A H$ und zwar wird dieß immer d. Fall sein, an denen Theile d. Gefäßwand, welche d. Mündung unmittelbar umgibt. D. Grenzfall, in welchem $P = \gamma A H$ wird, ist d. Fall einer sogenannten inneren cylindrischen Ansatzröhre von verschwindend kl. Dicke. Es wird allerdings auch diese cylindrische Wand d. Normaldruck kleiner sein im Zustand d. Bew. als im Zustand d. Ruhe, dies hat aber auf d. Druck im Sinne von u keinen Einfluß, weil d. Normale rechtwinklig gegen u gerichtet ist. Würde d. Wasser in a senkrecht gegen d. Röhre mit einer gewissen Geschw. fließen, so wäre $P > \gamma A H$; ist aber d. Ansatzröhre genügend lang, so wird man annehmen können, daß in einiger Entfernung vom oberen Rande d. Röhre



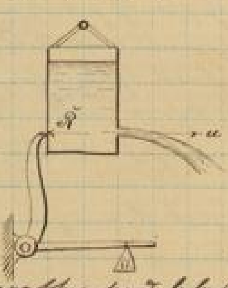
gießt d. Länge desselben d. Wasser aus einem unbedeutenden Gefäß [illegible]. Dann würde P nur wenig größer sein als $\gamma A H$, namentlich [illegible], daß d. Wand d. Ansatzröhre nur sehr dünn ist, also an d. Oberfl. nur einen sehr kl. Rand hat. Wären gar keine Widerstände vorhanden, so wäre d. Geschw.-Coeff. $\varphi = 1$. Es wäre dann d. Reactionsdruck R, welcher zu bezeichnen sei mit R_0.

$$R_0 = 2\alpha \gamma A H$$

und d. Unterschied dieses idealen Werthes von R_0 oder d. effectiven Werths d. Reactionsdrucks R'' ist d. Größe d. äußeren Reibung zwischen d. Wasser und d. Gefäßwand [illegible] normal gegen d. Mündung: $R_0 - R'' = R'$. Es ist dies allerdings nicht ganz unbedingt zutreffend, denn dieses ist nur d. Fall, wenn man [illegible] Ansatz [illegible]. Es ist also $R + R' = R_0 = 2\alpha \gamma A H$. Stellen wir nun diese 2 Reactionen zusammen ($R + R' = P$ und $P > \gamma A H$) so folgt: $2\alpha > 1$ also $\alpha > \frac{1}{2}$; d. kleinste Werth, den d. Contractionscoeff. α haben kann, ist also $\frac{1}{2}$ [illegible] d. Voraussetzung, daß an allen Stellen d. Gefäßwand bei d. Mündung d. Normale einen spitzen [illegible] Winkel mit d. Richtung von u bildet. [illegible] Winkel mit derselben, wenn d. innere Fläche sich nach außen [illegible] erweitert, so würde $P < \gamma A H$ sein also $\alpha < \frac{1}{2}$; indessen kommt ein solcher Fall fast nie vor.

Es handelt sich nun noch um d. Lage und Richtung von R. Was dieselbe betrifft so muß zurückgegangen werden auf d. verschiedenen Bestandtheile, aus welchen R besteht. Es war $R = P - R'$ wobei P d. [illegible] Druck [illegible] gegen d. Gefäßwand vorhanden sind. R' d. Reibung, womit d. fließende Wasser an d. Gefäßwand wirkt. [illegible] Druck P besteht aber selbst wieder aus 2 Theilen, [illegible] von d. Unterschied d. hydrostatischen und hydraulischen Druck auf d. Mündungsebene A selbst, [illegible] Druck auf die d. Mündungsebene A umgebenden Theile d. Gefäßwand. D. erste Bestandtheil von P war $= \gamma A H$; dieser Bestandtheil ist jedenfalls [illegible], daß d. Richtungslinie dieses Theils von P durch d. Schwerpunkt d. Mündungsebene A hindurchgeht. Was d. anderen Bestandtheil von P und d. Reibung R' betrifft, so kann man [illegible] Weise [illegible], daß sie solche Kräfte geben, deren Richtungslinien durch d. Schwerpunkt d. Mündungsebene gehen. [illegible] Fall, wenn d. Wasser ringsum d. Mündung in gleicher Art und Weise zufließt. D. Richtungslinie von R liegt sich also nur [illegible] bestimmen, wenn nicht [illegible] angenommen werden darf, daß d. Wasser ringsum d. Mündung in gleicher Weise zufließt. D. [illegible] Versuche lassen [illegible] annehmen, daß [illegible], daß man also annehmen kann, daß Wasser fließe gleichmäßig von allen Seiten d. Mündung zu. –

Die [illegible] Versuche wurden von d. Engländer Ewart ausgeführt: Es wurde ein cylindrisches Gefäß, welches unten mit einer Öffnung versehen war, vermittelst eines Gehänges auf einer horizontalen Achse aufgehängt, welche Achse rechtwinklig und [illegible] gegen d. horizontale Ausflußöffnung u gerichtet war. D. Wasserspiegel wurde immer in gleicher Höhe erhalten. Es zeigte sich dann daß d. Gefäß sich neigt. Nun wurde d. Größe d. Drucks R gemessen, indem man d. einen Arm eines Winkelhebels dort andrücken ließ, wo d. Normale d. Schwerpunkts d. Mündung d. Wand trifft, den anderen Arm entsprechend belastet und man kennt so d. Größe dieser Kraft R messen. [illegible] d. Richtungslinie d. Reactionsdrucks genau durch d. Schwerpunkt hindurch, so wäre d. gemessene Kraft auch $=$ d. Reactionsdruck, [illegible] nicht d. Fall sein wird, wenn d. Richtungslinie d. Reactionsdrucks tiefer liegt als d. Schwerpunkt d. Mündung A. Wenn also dieser so gefundene Druck $R = 2\alpha\varphi^2 \gamma A H$ eingesetzt wird, wo γ, A, H bekannte Größen sind, so ergeben sich dabei Werthe von $\alpha\varphi^2$, welche übereinstimmen mit d. auf andere Weise gefundenen Werthen d. Coeff. $\alpha\varphi^2$. Daraus kann man schließen, daß d. Richtungslinie d. Reactionsdrucks nicht merklich beim Schwerpunkt d. Mündungsebene A vorbeigeht.



Wenn man d. Versuche so einrichtet, daß man weiß, ob keine d. Strömungslinien weniger an d. Richtung von R vorbei gehen, so erkennt man, daß man bedingt dazu gelangen kann, d. Werthe von α zu bestimmen, so daß man sodann d. einen Werth finden kann, wenn man d. andern kennt.

Bei d. zuletzt entwickelten Gesetzen ist vorausgesetzt worden, daß d. Ausflußgefäß sich nicht in Bew. befinde od. höchstens eine gleichförmige Translationsbew. hätte, so daß d. freie Oberfl. eine Horizontalebene bilde. Jetzt soll noch schließlich vorausgesetzt werden, es sei d. Gefäß, aus welchem das Wasser ausfließt, in eigener Bew. begriffen, so daß d. Wasseroberfl. eine krumme Fl. sein kann. In einem solchen Fall erscheinen d. Arbeiten d. Kräfte, welche d. Bew. d. Wassertheilchen von verschiedenen Stellen d. Oberfl. aus gegen d. Mündung hin bestimmen, so von einander verschieden, daß man scheint bei d. Berechnung d. mittleren Ausflußgeschw. kaum eine mittlere Bew. zu Grunde legen zu dürfen. Es kann von vornherein möglich erscheinen, daß ein Wassertheilchen in d. Mündung A verschiedene Geschw. annimmt, je nachdem es von verschiedenen Stellen d. Oberfl. herkommt. Dieses ist jedoch nicht d. Fall.

Ist nämlich A_0A irgend ein Stück einer beliebigen von einem Wassertheilchen durchlaufenen Bahn und zwar von A_0 gegen A hin, so findet d. früheren zufolge bekanntlich folgende allgemeine Gl. statt:

$$\frac{u^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}=\frac{u_0^2}{2g}+\frac{p_0}{\gamma_0}+M+E+\int R_0\,ds$$

d. h. d. Summe aus d. Geschw.- und Druckhöhe d. Punktes A ist = d. analogen Summe für d. Punkt A_0 + d. Arbeit d. Massenkräfte, d. Expansionsarbeit u. d. Arbeit d. inneren Reibungen pr. 1 kgr von A_0 bis A.

Im vorliegenden Falle, wo es sich um d. Bew. einer tropfbaren Flüssigkeit handelt, kann von vornherein $\gamma=\gamma_0$ gesetzt werden und ferner kann auch d. Expansionsarbeit $=E=0$ gesetzt werden, weil d. spec. Volumen gleich bleibt. Wenn man ferner von d. inneren Reibung vorläufig absieht, so kann im vorliegenden Fall d. Gl. geschrieben werden: $\frac{u^2}{2g}+\frac{p-p_0}{\gamma}=M$ wo nun aber jetzt d. Massenkraft nicht nur d. Schwerkraft sondern auch d. aus d. Schwungkraft d. relativen Bew. [illegible] entspringend d. eigenen Bew. d. Gefäßes. Es könnte nun von vornherein möglich erscheinen, daß dadurch M einen verschiedenen Werth hat, je nachdem A_0 einen verschiedenen Punkt in d. freien Oberfl. [illegible] d. Flüssigkeit im Gefäß bedeutet und, daß somit sich für u verschiedene Werthe ergeben, je nachdem ein Punkt von d. verschiedenen Stellen d. Oberfl. kommt. Thatsächlich ist dies nicht d. Fall. Die Bew. d. Gefäßes kann nun bestehen in einer Rotation mit constanter Winkelgeschw. ω um eine verticale Axe verbunden mit einer gleichzeitig stattfindenden Translation mit constanter Geschw. im Sinne dieser verticalen Rotationsaxe od. es kann d. eigene Bew. d. Gefäßes bestehen in einer bloßen Translationsbew. mit d. constanten Geschw. v, die aber eine beliebige Richtung haben kann, denn nur unter diesen Bedingungen kann eine permanente Bew. statt d. Wassers im Gefäße möglich sein. Es handelt sich also nun darum, für diese beiden Fälle zu constatiren, daß auch diese Ausflußgeschw. u dieselbe ist, von welcher Stelle d. freien Oberfl. auch d. Wassertheilchen herkommen möge.

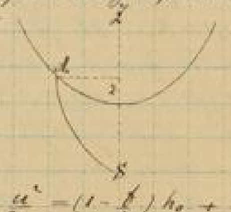
Alle von d. verschiedenen Punkten A_0 d. Oberfl. beginnenden Bahnen werden als durch d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahles hindurch gehend gedacht werden können. Wie nun auch diese Bahnen gestaltet werden können, so ist doch immer d. Geschw. u dieselbe, womit ein Wassertheilchen in S anlangt, welche Bahn nun beschrieben werden soll.

1) d. Gefäß rotire mit const. Winkelgeschw. ω um eine verticale Axe und habe außerdem eine Translation mit const. Geschw. v im Sinne d. Rotationsaxe, und zwar soll d. Geschw. v positiv genommen werden, wenn vertical nach unten gerichtet.

Wenn d. Wasser sich in relativer Ruhe gegen d. selbst rotirende Gefäß befindet, so bildet d. freie Oberfl. d. Wassers im Gefäß bekanntlich ein Rotationsparaboloid. Wenn man d. Scheitel dieses Rotations-Paraboloides als Ursprung eines Coord.-systems annimmt, d. Z Axe vertical und positiv nach oben, dann ist bekanntlich d. Gl. dieses Rotations-Paraboloides: $x^2+y^2=2\frac{g-v}{\omega^2}z$

In diesem Fall ist d. früheren zufolge d. Arbeit M d. Massenkräfte pr. 1 kgr: $M=\left(1-\frac{v}{g}\right)h+\frac{\omega^2}{2g}(r^2-r_0^2)$.

Für d. nachstehenden Ausführungen gelte d. eigene Bez. d. Gefäßes, während d. Wasser im Beharrungszustande ausströmt, wenn d. Ausdrücke für M festgestellt. Für d. Fall, daß das Gefäß um eine vertikale Achse rotirt und zugleich eine translatorische Beschl. hat, gilt für M d. letztere Ausdruck, dabei ist h d. Höhe d. Punktes A_0 also d. beliebigen Punktes d. freien Oberfl. über d. Schwerpunkt d. betreffenden Lochs, ebenso S, r und r_0



sind d. Perpendikellängen von S und A_0 auf d. Z Achse. Dabei ist, wenn wir fernerhin d. Höhe d. Scheitelpunktes über S mit h_0 bezeichnet sei:

$$h = h_0 + z$$

wo z d. Höhe d. Punktes A_0 über d. Coord.-Anfang bedeutet. Setzt man diesen Werth von h in d. Gl. für M ein und setzt dann $M = \frac{u^2}{2g} + \frac{p - p_0}{\gamma}$, so folgt:

$$\frac{u^2}{2g} = \left(1 - \frac{f}{g}\right) h_0 + \frac{p_0 - p}{\gamma} + \left(1 - \frac{f}{g}\right) z + \frac{\omega^2}{2g}\left(r^2 - r_0^2\right);$$ setzt man: $\left(1 - \frac{f}{g}\right) h_0 + \frac{p_0 - p}{\gamma} = H_0$, so wird:

$$\frac{u^2}{2g} = H_0 + \frac{(r\omega)^2}{2g} + \frac{\omega^2}{2g}\left(2\frac{g-f}{\omega^2} z - r_0^2\right)$$

Hierin ist nun r_0 d. Perpendikel von A_0 auf d. Achse Z, also $r_0^2 = x^2 + y^2$, wenn x und y d. Coord. von A_0 sind. Nun wird man mit derselben Annäherung, womit man von d. Oberfl.-Geschw. abstrahiren durfte, auch annehmen dürfen, daß d. freie Oberfl. dieselbe Form hat, welche sie haben würde, wenn d. Wasser ganz und gar in relativer Ruhe gegen d. Gefäß sich befände, denn in d. oberen Partien ist doch d. Theil d. Wassers fast ganz genau in relativer Ruhe gegen d. Gefäß. Es wird also d. Gestalt d. freien Oberfl. fast ganz genau so sein, als wenn gar kein Wasser ausflösse, somit ist also: $r_0^2 = 2\frac{g-f}{\omega^2} z$

und folglich d. Endgeschw. $u = \sqrt{2gH_0 + (r\omega)^2}$ od. bei Rücksicht auf d. gleichzeitigen Correction wegen d. Ausflußcoefficienten:

$$u = \varphi\sqrt{2gH_0 + (r\omega)^2}.$$

Dieser Ausdruck ist ganz unabhängig von d. Lage d. Punktes A_0 in d. freien Oberfl., r bedeutet d. Entfernung d. Schwerpunktes S d. kleinsten Querschnitts d. austretenden Strahls von d. Rotationsachse d. Gefäßes, also $r\omega$ d. absolute Geschw. dieses Gefäßpunktes, welcher mit d. Schwerpunkt von A zusammenfällt. Wenn d. Gefäß ringsum von atm. Luft umgeben ist, so daß man ohne großen Fehler $p = p_0$ setzen kann, so ist:

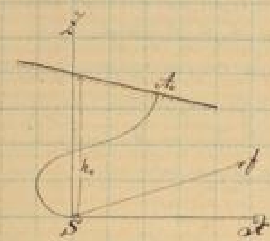
$$u = \varphi\sqrt{2(g-f)h_0 + (r\omega)^2}$$

Wäre d. Gefäß nicht in Rotation begriffen, sondern hätte dasselbe nur eine translatorische Bew. mit einer vertical gerichteten Beschl., also $\omega = 0$, so ist: $u = \varphi\sqrt{2(g-f)}$ da $h_0 = \text{const} = h$ ist.

Wenn z. B. d. Gefäß durch seine eigene Schwere frei herunter fiele und man wünschte man für diesen Fall d. relative Geschw. angeben, mit welcher d. Wasser aus einer Öffnung in d. Öffnung d. Gefäßwand ausfließe, so wäre $f = g$ und also $u = 0$ d. h. es würde gar kein Wasser ausfließen. —

2) d. Gefäß sei in einer translatorischen Bew. begriffen mit d. Beschl. f, d. constante Richtung dieser Beschl. f bilde d. Winkel ψ mit d. Horizont, gleichviel ob schräg aufwärts und abwärts. In diesem Fall kann wieder, wenn d. Gefäß hinlänglich groß ist, d. freie Oberfl. als identisch betrachtet werden mit derjenigen, welche stattfinden würde, wenn d. Wasser ganz in relativer Ruhe gegen d. Gefäß sich befände, wenn also kein Ausfluß vorhanden wäre. Für diesen Fall bildet aber d. freie Wasseroberfl. nach d. Hydrostatik eine geneigte Ebene. Mit d. Gefäß fest verbunden sei ein rechtwinkliges Axensystem angenommen, so daß d. Z Achse vertical und gerichtet nach oben sei. Ist d. Horizontalebene durch d. Ursprung nach d. X Achse so angenommen, daß d. constante Richtung d. Beschl. f d. Gefäßes parallel d. XZ Ebene ist, so bilde (meinetwegen) mit d. X Achse d. Winkel ψ. Die Y Achse projicirt sich dann in S senkrecht zur Ebene d. Figur. Für den Fall, daß d. Wasser in relativer Ruhe gegen d. Gefäß ist, bildet nun d. freie Oberfl. eine geneigte Ebene, welche parallel d. Y Achse ist; d. Gl. ist d. früheren gemäß:

$$z = -\frac{f\cos\psi}{g + f\sin\psi}\, x + h_0$$



dann bedeutet h_0 diejenige Höhe, welche von d. Z Axe durch d. freie Oberfl. abgeschnitten wird. h_0 ist natürlich auch von d. Größe d. Beschleunig. abhängig. Wenn nun aber aus einem so bewegten Gefäß aus irgend einer Stelle Wasser ausfließt, während durch entsprechenden Zufluß d. Wassermasse constant erhalten wird, so ist:

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p - p_0}{\gamma} = M$$

d. Beziehung ist angenommen im Schwerpunkt S d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls, in welchem also d. Geschw. = d. mittleren Ausflußgeschw. u zu setzen ist. Nun kommen d. verschiedenen in S ausfließenden Wassertheilchen von ganz verschiedenen Stellen d. Oberfl. her, z. B. von A_0, d. d. Weg, den d. Wassertheilchen einschlägt, ist ganz von d. Gestalt d. Gefäßes abhängig. Es kann hier zunächst etwas widersprechend erscheinen, daß d. Geschw. u verschieden ist, von welchem Punkt A_0 d. Wassertheilchen herkommt. Für diesen Fall ist d. früheren zufolge M = d. Höhe d. Punktes über S $+ \frac{f}{g} S'$ also:

$$M = z - \frac{f}{g} S'$$

wenn $- S'$ d. Projection d. Strecke $A_0 S$ auf d. Richtung von f verstanden. Die Projection $- S'$ d. d. Richtung $S A_0$ auf f ist offenbar auch = d. Projection d. gebrochenen Linie $x y z$ auf f unter $x y z$ d. Coord. von A_0 verstanden, also: $- S' = x \cos \psi + z \sin \psi$.

$$\text{also} \quad M = \frac{f}{g} (x \cos \psi + z \sin \psi) + z$$

Aus d. obigen Gl. für z ergiebt sich, wenn man sie mit $g + f \sin \psi$ multiplicirt: $f (x \cos \psi + z \sin \psi) = (g + f \sin \psi) h_0 - g z$

dieses in M eingesetzt giebt:

$$M = \left(1 + \frac{f}{g} \sin \psi\right) h_0$$

Hiermit sind nun d. Coord. von A verschwunden, M hat also denselben Werth, wo auch d. Punkt A_0 in d. freien Oberfl. liegen mag. Setzt man diesen Ausdruck in d. Gl. für $\frac{u^2}{2g} \ldots$, so ergiebt sich, wenn durch Hinzufügung eines Geschw.-Coeff. auf d. Contr.-Widerstand Rücksicht genommen wird:

$$u = \varphi \sqrt{2 g H_0} \quad \text{worin} \quad H_0 = \left(1 + \frac{f}{g} \sin \psi\right) h_0 + \frac{p_0 - p}{\gamma} \text{ ist.}$$

Hat man hiermit u gefunden, so ist schließlich d. pro Sek. ausfließende Wasservolumen: $V = \delta u = \alpha A u$. —

Nun kommt es noch darauf an, die in diesen Formeln empirisch zu bestimmenden Erfahrungscoeff. näher zu besprechen. Dieselben sind: d. Contractionscoeff. α, d. Geschw.-Coeff. φ, d. Ausflußcoeff. μ und d. Widerstandscoeff. ζ. Diese 4 stehen bekanntlich in 2 Beziehungen zu einander:

$$\mu = \alpha \varphi \quad \text{und} \quad \varphi^2 (1 + \zeta) = 1.$$

Folglich braucht man nur 2 wirklich bestimmt zu haben, so kennt man auch d. beiden anderen. Allerdings können nicht beliebig 2 bestimmt werden, sondern es muß einer d. Coeff. μ u. α in Verbindung mit einem von φ u. ζ bestimmt werden. Man wird natürlich d. dazu gehörenden Versuche so einfach wie irgend möglich einrichten. Zunächst wird man sich hierbei beschränken auf d. Fall, daß d. Gefäß sich in Ruhe befindet, daß also d. Wasser eine horizontale freie Oberfl. bildet. Ferner wird man d. Ausflußgefäß so wählen, daß d. Oberfl. d. Wassers im Gefäß sehr groß ist im Vergleich mit d. Mündungsebene, so daß man dann u_0 im Vergleich zu u vernachlässigen kann. Drittens wird man d. Versuche so einrichten, daß d. ganze Versuchsapparat ringsum von d. atm. Luft umgeben ist, so daß $p_0 = p$ gesetzt werden kann. Somit kann dann auch für d. mittlere Ausflußgeschw. u und für d. pro Sek. ausfließende Wasservolumen V d. folgenden Formeln zu Grunde gelegt werden:

$$u = \varphi \sqrt{2 g h} \quad \text{und} \quad V = \mu A \sqrt{2 g h}.$$

unter h im Falle d. Ausflusses in d. freie Luft d. Höhe d. horizontalen freien Oberfl. d. Wassers im Gefäß über d. Schwerpunkt d. Mündungsebene verstanden. — Im Falle d. Ausflusses in ein anderes Gefäß ist h die Höhendifferenz d. beiden Wasserniveaus in d. beiden Gefäßen. Genau hier sind φ und μ dann abhängig, daß möglicherweise d. Schwerpunkt d. Mündung A nicht in gleicher Höhe mit d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls liegt, ferner sind sie davon abhängig, daß d. Geschw. im kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls nicht identisch ist mit d. mittleren Geschw. d. Querschnitts δ. Geschieht d. Ausfluß unter Wasser, so

ist d. Differenz d. Höhen d. oberen u. unteren Wasserspiegels über jedem Punkt von F gleich groß, also nur wenn es sich um d. Ausfließen i. d. freie Luft handelt, gestatten es sich nicht diese Hülfsmittel.
Am einfachsten ist von diesen Coefficienten d. Ausflußcoeff. μ zu bestimmen. Dazu ist weiter nichts erforderlich, als daß man d. in einer gewissen Zeit ausgeflossene Wassermenge zu messen, indem dieselbe durch d. entsprechende Sekundenmenge dividirt erhält man V und kann mit Hilfe d. Formel $V = \mu A \sqrt{2gh}$
od. $\mu = \dfrac{V}{A\sqrt{2gh}}$ d. Ausflußcoeff. μ, da d. anderen Größen A g h bekannt sind. –

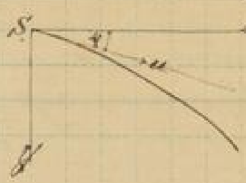
Bedeutend schwieriger ist schon d. Bestimmung d. Contractionscoeff. α. Dieser hat man für verschiedene Fälle gefunden durch directe Messungen. Es geschah dies auf d. Weise, daß man d. Strahl durch einen Ring hindurchfließen ließ, welcher mit möglichst vielen spitzen Schrauben versehen war, die alle radial gerichtet waren also von verschiedenen Seiten durch d. Ring hindurch d. Strahl entgegen schrauben

kann. Man schraubt nun alle Schrauben so lange vor, bis sie gerade d. Strahl sichern und kann so dann d. Strahlenquerschnitt sich genau bestimmen. Indem man diesen Ring verschiebt und gerade findet man allmälig d. Größe und Gestalt und Ort d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls. Es werden übrigens diese Versuche erschwert, wenn d. Mündung nicht kreisförmig ist durch d. Umstand, daß d. Querschnittsänderung d. Strahls nicht nur eine Änderung d. Größe sondern auch d. Gestalt mit in sich schließt. Der allgemeine Charakter dieser Gestaltänderung besteht in einer gewissermaßen wiederkehrenden solchen Veränderung, wobei an d. Stelle d. stärksten Krümmung d. Querschnittsumfangs d. Stelle d. schwächsten Krümmung tritt und umgekehrt. Also z. B.: wenn d. Querschnitt d. Form eines quadratischen Fläche hat, so findet man, daß in einiger Entfernung von d. Mündung dieser Querschnitt sich gerade um 90°

gedreht hat u. s. f. Wenn d. Querschnitt d. Rechteckform hat, so findet man, daß Stellen, wo d. Ecken liegen in einiger Entfernung von d. Mündungsebene abgestumpft erscheinen durch gebogene Seiten u. in noch größerer Entfernung von d. Mündungsebene hat sich d. Gestalt umgedreht. Diese periodischen Gestaltänderungen entsprechen auch periodische Zustandsänderungen bis schließlich d. ganze Wasserstrahl zerstreut ist. Diese Erscheinungen lassen erkennen,

daß d. gemeinschaftliche Lage d. Wassertheile bestimmt wird von einer trennbar stehenden oscillirenden Lage. Dieselbe nicht zunächst ohne Zweifel her von von d. seitlichen Zufluß d. Wassers innerhalb d. Gefäßes zur Mündung u. der dadurch bedingten Geschwindigkeit d. Druckes im Querschnitt. Jedenfalls spielen hierbei d. Molekularkräfte auch eine große Rolle. Bekanntlich ist d. Molekularbeschaffenheit d. Wassers im Innern eine wesentlich andere als an d. Oberfl. und zwar lassen sich d. betreffenden Molekularerscheinungen erkennen, wenn man annimmt, daß an d. Oberfl. innerhalb Richtungen eine gewisse Sp. stattfindet; wenn dieses d. Fall ist, so wird an einer solchen Stelle, wo d. Oberfl. d. Wassers nach außen convex gekrümmt ist durch diese Sp. ein einwärts gerichteter Capillardruck verursacht und zwar ist dieser am stärksten dort, wo d. Oberfl. am stärksten gekrümmt ist, und dieser hat wesentlich zur Folge, daß sich d. Querschnitt sich zusammen ziehen will. Ist an irgend einer Stelle d. Oberfl. nach außen concav gekrümmt, so ist d. Capillardruck auch nach außen gerichtet. –

Was drittens d. Bestimmung d. Geschw.-Coeff. φ betrifft, so kann dieselbe geschehen durch Vergleichung d. genommenen Ausflußgeschw. mit d. Theoretischen. Von einer direkten unmittelbaren Messung kann hier nicht d. Rede sein. Dieselbe kann nur gemessen werden, wenn man d. Richtung von u kennt. Dadurch, daß man irgend eine Reihe zusammengehöriger Coord. d. Mittellinie d. Wasserstrahls mißt od. besser, wenn man d. Richtung nicht kennt, so findet man d. Größe und Richtung von u zugleich, indem man d. Coord. für 2 Punkte d. Wasserstrahls beobachtet. Wie aus solchen Messungen d. Geschw.-Coeff. gefunden werden kann ist leicht ersichtlich. Angenommen es sei S der Punkt d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls, durch diesen Punkt S seien 2



d. rechtwinklige Axen gelegt und zwar in derjenigen Verticalebene, in welche d. Richtungslinie d. Ausflußgeschw. u liegt. d. X Axe sei horizontal, d. Y Axe sei vertical und d. Ausflußgeschw. = u, welche mit d. X Axe d. Winkel φ bilde. Die Ausflußgeschw. ist nun, daß wenn u und φ bekannt sind, dieselben selbst wiederum für einen bestimmten Fall gefunden werden.

die Mittellinie d. ausfließenden Wasserstrahls bildet eine Curve, welche in d. Nähe von S' mit genügender Annäherung als Parabel betrachtet werden kann. Angenommen es seien x u. y d. zusammengehörigen Coord. irgend eines beliebigen Punktes dieser Mittellinie und t d. Zeit in Sek., welche ein Wasserteilchen braucht, um von S' hierher zu gelangen, dann ist:

$y = u \sin\psi\, t + g\frac{t^2}{2}$ wo $u \sin\psi$ d. Vertikalcomp. d. Anfangsgeschw. in S' ist, ferner ist

$x = u \cos\psi\, t$ also $t = \frac{x}{u\cos\psi}$ und demnach $y = x\,tg\psi + \frac{g}{2u^2}\frac{x^2}{\cos^2\psi}$.

Vermittelst dieser Gl. kann man, wenn man 2 Paar zusammengehörige Werte von Coord. misst etwa $x_1 y_1$ u. $x_2 y_2$ sich so 2 Gl. bilden um u und ψ zu bestimmen. Entwickelt man aus dieser Gl. u, so hat man:

$$u = x\sqrt{\frac{g}{2}\frac{1+tg^2\psi}{y-x\,tg\psi}}$$

es seien nun $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ d. zusammengehörigen Coord. zweier Punkte d. Mittellinie, d. durch Versuche bestimmt sind, so ist weiter:

$$\frac{y_1 - x_1\,tg\psi}{y_2 - x_2\,tg\psi} = \frac{x_1^2}{x_2^2} \quad \text{also} \quad tg\psi = \frac{x_2^2 y_1 - x_1^2 y_2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)}$$

hat man nun so d. Winkel ψ gefunden, so kann man auch noch obige Gl. u berechnen. Vergleicht man diesen Wert mit d. Gl.: $u = \varphi\sqrt{2gh}$, so findet man d. Geschw.-Coeff. φ. — Richtet man sich nun noch so ein, daß $\psi = 0$ ist, so ist einfach: $u = x\sqrt{\frac{g}{2y}}$ dann braucht man nur x u. y irgend eines Punktes d. Mittellinie zu messen; indessen ist es vorzuziehen, sich auf diese Weise von ψ nicht vollständig zu verlassen, sondern lieber 2 Punkte zu messen und daraus ψ berechnen und daraus u bestimmen und somit φ. —

Alle darauf bezüglichen Werte gelten, wenn d. Gegenteil nicht ausdrücklich bemerkt ist, für d. Fall d. Ausflusses d. Wassers in d. freie Luft. —

Bei denjenigen Coeff. die sich auf d. Ausfluß aus Mündungen unmittelbar beziehen, also aus Öffnungen in d. Gefäßwand, ist ferner eine stillschweigende Annahme vorausgesetzt, welche dahin festgestellt wird, daß d. Öffnung der Gefäßwand nach außen hin divergent abgeschrägt ist z. B. wenn d. Boden eine zentimeterdicke hat, so wird d. Rand d. Mündung wie nebenstehend abgeschrägt, so daß d. Wasserstrahl nur an d. inneren Kante vorbeifließt.

d. Ausflußcoeff. $\mu = \alpha\varphi$ ist, wenn es sich um d. Ausfluß aus Mündungen im engeren Sinne handelt, bei denen vorwiegend bedingt durch d. Contractionscoeff. α und d. Geschw.-Coeff. φ fast immer d. Einheit sehr nahe kommt. Handelt es sich dagegen um d. Ausfluß aus Mundstücken, so kann d. Ausflußcoeff. μ vorwiegend durch d. Geschw.-Coeff. φ bestimmt sein, denn kann sogar $\alpha = 1$ und $\mu = \varphi$ sein, besonders im Falle eines zylindrischen Ansatzrohres. Wenn indessen in solchen Fällen d. Ausflußcoeff. merklich kleiner als 1 ist, so wird er merklich bedingt durch eine innere Contraction. Ist ein solches Mundstück ziemlich scharfkantig, so erfährt d. Wasser im Innern eine Contraction, und dadurch ist dann d. früheren Zusatz ein [illegible] Geschw.-Verlust d. h. d. Ausflußcoeff. ist dann also durch eine innere Contraction bedingt.

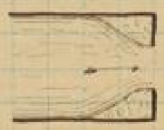
In allen Fällen ist es also ein Wesentliches d. äußeren und inneren Contraction welche d. Ausflußcoeff. so bestimmt und man pflegt gewisse Fälle zu unterscheiden. Es ist um so mehr klar, daß d. Contraction um so bedeutender ist, also α um so kleiner, je größer d. Winkel δ ist, um welchen d. am Rand d. Mündung zufließenden Wasserteilchen von ihrer Hor.-Richtung abgelenkt werden müssen, um d. kleinsten Querschnitt normal zu durchströmen. Ist z. B. d. Boden d. Gefäßes wie in Fig. I gestaltet, so wird d. Winkel, um welchen d. aus d. Nähe d. Randes ankommenden Wasserteilchen abgelenkt werden müssen ein spitzer Winkel und in Fig. II ein stumpfer Winkel. Im ersten Fall wird offenbar eine beträchtlichere Contraction stattfinden als im 2ten Fall. —

I

II

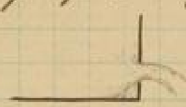
In dieser Beziehung ist derjenige Fall als ein mittlerer Normal zu betrachten, wo dieser Ablenkungswinkel $\delta = 90°$ beträgt. Für diesen Fall hält d. Contraction als

~~normale Contraction~~ d. normale Contraction bezeichnet werden. Ist umgekehrt aber β kleiner od. größer als 90° ist, soll d. Contraction eine geschwächte od. verstärkte Contraction genannt werden. Eine Änderung d. Contraction kann auch dann stattfinden, wenn d. Mündung sich in einer ebenen Wand befindet, welche nicht sehr groß ist im Vergleich mit d. Mündung selbst. Ist z. B.

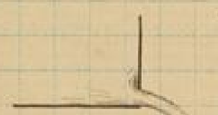


eine weite cylindrische Röhre eines Ausflußgefäßes am Ende durch eine ebene Wand abgeschlossen, in welcher sich eine Öffnung befindet, die nicht sehr klein ist im Vergleich mit d. Größe d. Abschlußwand. Dann entsteht um diese Mündung herum ein gewisser ringförmiger Raum, in welchem d. Wasser nicht Theil nimmt an d. strömenden Bew., es verhält sich dann (?) gerade so, als ob d. ganze Fl. zwischen d. strömenden und im Winkel begrenzten Wasserschichten d. Grenze d. Gefäßes wäre; also ist β kleiner als 90°. Die Contraction nennt man in diesem Falle eine unvollkommene Contraction. D. Fall d. Normalcontraction, wobei d. Mündung sich in einer verhältnißmäßig großen Wand befindet, wird als vollkommene Contraction bezeichnet. –

Bei diesen Begriffsbestimmungen bezüglich d. Charakters d. Contractionen ist vorausgesetzt, daß d. Winkel β, um den d. am Rand zufließenden Wasserfäden abgelenkt werden müssen, ringsum gleich groß sei, also nicht wesentlich verschieden sei, und welches β d. Mittelwerth aller dieser Wasserfäden ist. Es kann aber auch d. Fall sein, daß dieser Winkel β an verschiedenen Stellen d. Mündungsumfangs bedeutend verschieden ist. Es kann unter Umständen an einem Theile d. Mündungsumfangs eine normale, an einem andern Theile eine wirklich geschwächte od. verstärkte Contraction stattfinden, namentlich dann, wenn d. Mündung d. Rande d. betreffenden Wand, in d. sie sich befindet, sehr nahe liegt. Wenn z. B. in d. vertikalen Seitenwand eines Ausflußreservoirs eine rechteckige



Mündung nahe über d. Boden sich befindet, während d. Wasser senkrecht über d. oberen Rand d. Mündung steht, so ist am oberen Rand d. Mündung d. Contraction als eine vollkommene normale zu bezeichnen, am unteren Rand findet jedoch eine geschwächte Contraction statt, da in d. Nähe d. Wasser sich in winkelförmiger Lage befindet. Hierbei ist namentlich d. Fall bemerkenswerth, daß an einem Theile d. Mündungsumfangs d. Contraction ganz und gar beseitigt ist, also $\beta = 0$ ist. Dies findet dann statt, wenn d. rechteckige Mündung sich unten ganz bis zum Boden erstreckt, d. unteren Wasserfäden fließen dann gerade normal d. Mündung zu. In einem solchen Falle, wo an einem Theile d. Mündung d. Contraction gänzlich aufgehoben ist, pflegt man d. Gesammtcontraction als eine partielle zu bezeichnen. –



Ehe wir nun zur Besprechung d. einzelnen Fälle übergehen, wollen wir vorher ein Paar allgemeine Gesetze betrachten, d. sich aus d. verschiedenen Versuchen ergeben haben. Es hat sich zunächst als ein ganz allgemein gültiges Gesetz gezeigt, daß wenn μ vorwiegend durch d. äußere od. innere Contraction bedingt ist, daß dann μ um so größer wird, je kleiner d. Mündung und ~~...~~ je kleiner d. wirksame Druckhöhe ist. – Ferner hat sich fast allgemein herausgestellt, daß bei Mündungen von eckigem Umriß, (die sich also unmittelbar in d. Gefäßwand befinden, wenn sie eine längliche Form haben,) d. Ausflußcoeff. größer ist als unter übrigens gleichen Umständen d. Ausfl. für gleiche Werthe von A u. H für d. Fall solcher Mündungsformen, d. sich d. Kreisform nähern. Bei solchen länglichen Mündungen ist es gewissermaßen nur d. kleine Dimension, die den Ausflußcoeff. bedingt, denn mit dieser kleineren Dimension nimmt ja d. Ausflußcoeff. zu. Endlich hat sich aus d. allerdings verhältnißmäßig wenig zahlreichen Versuchen, d. namentlich von Weisbach für d. Ausfluß unter Wasser angestellt sind, ergeben, daß d. Ausflußcoeff. durch eine Mündung zwischen 2 Wasserreservoiren um etwas mehr als 1% größer ist, als beim Ausfluß in d. freie Luft. —

Ausfluß d. Wassers aus Mündungen im engeren Sinn.

1) Kreisförmige Mündung. Offenbar läßt d. Ausfluß d. Wassers aus einer solchen kreisförmigen Mündung am ehesten d. einfachste und deutlichste Gesetzmäßigkeit erkennen und es haben sich daher auch mit Recht diesem Fall hauptsächlich d. Versuche zugewandt.

Es sei nun zunächst d. Contraction normal, also Mündung in einer ebenen Wand und zwar an einem mittleren Theile so daß d. Wand viel größer als d. Mündung ist. Für diesen Fall ist wiederholt und übereinstimmend constatirt worden, daß d. Ausflußcoeff. um so größer ist, je kleiner d. Durchmesser d. Mündung und je kleiner d. wirksame Druckhöhe ist, entsprechend d. vorhin erwähnten allgemeinen Gesetz. Insbesondere fand Weisbach für:

	d =	0,01	0,02	0,03	0,04 metr
und $H = 0{,}25$ m	μ =	0,637	0,629	0,622	0,614
u. $H = 0{,}6$ m	μ =	0,628	0,621	0,614	0,607

ferner für $d = 0{,}01$ metr ergab sich:

für H =	0,02	0,101	0,909	13,57	103,58 metr.
μ =	0,711	0,665	0,641	0,632	0,600

Alle diese Weisbach'schen Versuchswerthe lassen sich ungefähr in d. folgenden empirischen Formel zusammenfassen, wobei freilich d. letzte Versuchswerth nicht mehr mit d. ersten übereinstimmt. d. Formel lautet:

$$\mu = 0{,}6 + \frac{0{,}06}{0{,}5 + \sqrt{H}} - 0{,}7\,d \qquad (d \text{ u. } H \text{ in metr.})$$

Diese Versuche beziehen sich nur auf d. Ausflußcoeff. μ, welcher aber wesentlich von d. beiden anderen Coeff. α u. φ abhängt. Was nun d. Contraction des aus einer solchen kreisförmigen Öffnung ausfließenden Strahls betrifft, so haben wiederholte Strahlmessungen ergeben, daß derselbe seinen kleinsten Querschnitt in einer Entfernung von d. Mündungsebene = d. Halbmesser d. Mündung hat und es ergibt sich bereits im Querschnitt dieser kleinste Durchmesser = 0,8 d. Mündungsdurchmessers d, so daß somit d. entsprechende Contractionscoeff. ist:

$$\alpha = 0{,}64.$$

Was d. Geschw.-Coeff. φ betrifft, so zeigt derselbe sich weniger different für verschiedene Fälle, namentlich für mittlere Druckhöhen und Mündungsweiten ist:

$$\varphi = 0{,}97 \text{ bis } 0{,}98$$

u. Widerstandscoeff.:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = 0{,}063 \text{ bis } 0{,}041.$$

und demgemäß d.

Es gehen also 4 bis 6 % d. lebendigen Kraft, womit d. Wasser ausfließt durch d. gewöhnlichen Widerstände verloren. Was d. Art d. größeren Veränderlichkeit dieses Coeff. φ betrifft, so hat sich diese nur so ferne umgekehrt d. Contractionsgesetz zu ergeben, als d. Geschw. μ um so größer wird, je größer H ist. Da aber d. Ausflußcoeff. μ mit wachsender Druckhöhe abnimmt, so muß man annehmen, daß d. Contractionscoeff. α mit wachsender Druckhöhe in noch stärkerem Grade abnimmt als d. Ausflußcoeff. μ. Was nun diesen Fall einer kreisförmigen Mündung d. geschwächten od. verstärkten Contraction betrifft, so sind darüber namentlich auch von Weisbach umfassende Versuche angestellt worden, bei denen d. Winkel β zwischen 0° und 180° variirt wurde; indem d. innere Wand nach außen od. nach innen mit conischen Ansätzen versehen wurde, welche jedoch nicht scharfkantig, sondern mit allmähligen Abrundungen in d. Gefäßwand übergeführt wurden, konnten hierdurch verschiedene Einflüsse abgehalten werden. Er fand gefunden für $d = 0{,}02$ m ferner für $H = 0{,}2$ bis 3 m und für $\beta = 0°$, 90° u. 180° entsprechend $\mu = 0{,}966$ 0,632 u. 0,541.

d. Werth von μ für $\delta = 90^\circ$ entspricht sehr nahe d. oben angeführten empirischen Formel, wenn man $\alpha = 0,02$ setzt, man bekommt dann genau $\mu = 0,632$ für $H = 0,9$ m. Dieses war auch d. Mittelwerth zwischen 0,3 u. 3 m, d. bei diesen Versuchen angewandt wurde. Ist d. Winkel $\delta = 0$, so findet eine Contraction nicht statt, dann ist d. Ausflusscoeff. ein bloßer Geschw.-Coeff. Nimmt man an, d. Coeff. μ sei in d. letzten 3 Fällen immer derselbe gewesen und zwar = $\mu = 0,966$, so würde für d. Fall einer inneren cylindrischen Ansatzröhre d. Contractionscoeff. $\alpha = \frac{0,541}{0,966} = 0,56$. Nach einer früheren Untersuchung hatte sich ergeben, daß wenigstens d. Contractionscoeff. $\alpha = \frac{5}{10}$ sein muß, wenn daß er sich dieser Grenze um so mehr nähert, je kleiner in einem solchen Fall d. Wanddicke ist. Dieses Resultat ist also mit d. theoretischen in ganz guter Übereinstimmung, da d. Wanddicke doch nicht unendl. klein ist und es läßt sich erwarten, daß man d. Grenze $\alpha = \frac{1}{2}$ noch näher kommen wird, wenn d. Druckhöhe größer und d. Wanddicke geringer ist. Es fand z. B. Borda für diesen Fall $\mu = 0,515$ und dementsprechend $\alpha = 0,53$. d. Geschw.-Coeff. zeigt sich übrigens abhängig von d. Druckhöhe und zwar in d. Weise, daß derselbe mit zunehmender Druckhöhe wächst. Bei d. hier erwähnten Versuchen lag d. Druckhöhe zwischen mäßigen Grenzen, zwischen welchen im Falle $\delta = 0$, μ von 0,96 bis 0,98 variirt wurde; bei sehr bedeutenden Druckhöhen fand Weisbach d. Geschw.-Coeff. wachsen bis zu 0,99.

Entspricht μ_0 d. Werth $\delta = 90^\circ$, so ist nach Zeuner zu setzen:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 0,33214 \cos^3\delta + 0,16672 \cos^4\delta.$$

Was endlich für d. Fall einer kreisförmigen Mündung d. unvollkommenen Contraction betrifft, also für d. Fall, daß d. Mündung A sich in einer nicht sehr großen ebenen Wand im Anschluss mit d. Mündung befindet, so ist auch darüber von Weisbach eine Reihe Versuche angestellt worden. Es befand sich dabei d. Mündung in einer ebenen Wand am Ende eines cylindrisch gestalteten Gefäßes; ist so $\frac{A}{F}$ d. Verhältniß d. Mündungsgröße zur Größe d. ebenen Wand = v, also $\frac{A}{F} = v$, so lassen sich d. Weisbach'schen Werthe zusammenfassen in d. Formel:

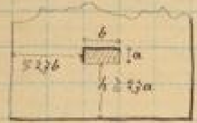
$$\mu = \mu_0 \left(1 + 0,04564 \left(14,821^{v} - 1\right)\right).$$

Bei diesen Versuchen war d. Wand, in d. sich d. kreisförmige Mündung befand, stets selbst kreisförmig und zwar befand sich d. Mündung genau in d. Mitte. Fällt d. Mündung etwas aus d. Mitte heraus, od. wenn d. Wand, in der d. Mündung sich befindet, nicht ganz kreisförmig ist, so werden d. Werthe von μ sich nicht bedeutend ändern, sofern nicht d. Mündung ganz dicht an d. Rand rückt. Über diesen besonderen Fall d. partiellen Contraction liegen auch einige Versuche vor, da dieselben aber kein weiteres Interesse haben, so soll hier auch davon abgesehen werden. —

2) Rechteckige Mündung.

Was zunächst d. Ausfluß d. Wassers aus rechteckigen Mündungen in einer ebenen verticalen Wand eines Gefäßes betrifft, daß von d. Mündungsseiten zwei horizontal und vertical sind, so sind darüber d. umfassendsten Versuche in Metz angestellt worden in d. Jahren 1828 – 29 von und Lesbros und später von 1829 – 34 von Lesbros allein. D. ursprünglichen gemeinschaftlichen Versuche bezogen sich auf d. Fundamentalfall, nämlich auf d. vollständige und Normalcontraction in d. freien Luft. Es befand sich d. rechteckige Mündung in einer vertikalen rechteckigen Seitenwand und zwar in einer mittleren Stelle, so daß also d. Fall einer vollständigen Contraction vorlag. D. Wasser floß von allen Seiten d. Mündung zu, um d. Mündungsebene normal zu passiren. Die rechteckigen Mündungen hatten durchweg eine gleiche Breite von 20 ctm und d. Höhen wurden variirt zwischen 1 bis 20 ctm. D. Überfallhöhen betrugen bis 1,8 m und zwar unter d. oberen Rand d. rechteckigen Mündung gemessen. D. später von Lesbros allein angestellten Versuche waren noch sehr viel umfangreicher und bezogen sich auch auf mehrere abweichende Fälle.

Was zunächst d. Fall d. Kontraktionsverhältnisse mit einer rechteckigen Mündung betrifft, so wurde constatirt, daß d. Contraction nicht vermindert bezw. aufgehoben werden kann, wenn nur d. Entfernung d. unteren Kante

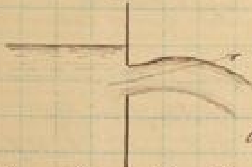


d. rechteckigen Mündung vom Boden mehr als 2,7 a unter a d. Höhe d. Mündung verstanden, und wenn auch d. Entfernung d. beiden Seitenwände d. Mündung von d. Seitenwänden d. Gefäßes mehr beträgt als 2,7 b unter b d. Breite d. Mündung verstanden. Wird dieses Gesetz erfüllt, so hat eine weitere Vergrößerung dieser Entfernungen keinen weiteren Einfluß auf d. Ausflußcoeff. zur Folge. Die Tabellen über jene befinden sich in „Grashof's theoretische Maschinenlehre". Dieselbe ist geordnet in d. einen Richtung nach d. verschiedenen Werthen von a und zwar für a = 0,01, 0,02, 0,03, 0,05, 0,1 und 0,2 metr., nach d. anderen Richtung ist sie geordnet nach d. Werthen von h_2, wo h_2 d. Höhe d. oberen Wasserspiegels über d. Oberkante d. Mündung ist. Dabei ist noch auf einen Umstand aufmerksam zu machen: Wenn d. Höhe h_2 nicht sehr groß ist, so senkt d. Wasserspiegel gegen d. betreffende Ausflußkante d. Gefäßes hin eine merkliche Senkung, es ist deshalb nicht gleichgültig, an welcher Stelle h_2 gemessen wird. In d. Tabelle ist vorausgesetzt, daß h_2 dort gemessen ist, wo d. freie Oberfl. noch nicht eine merkliche Senkung erlitten hat. Würde diese Höhe h_2 bei d. Anwendungen direkt an d. Kante gemessen und dadurch entsprechend kleiner gefunden, so müßte d. Ausflußcoeff. entsprechend vergrößert werden, denn d. Werthe von μ, um die es sich handelt, beziehen sich alle auf d. Formel: $V = \mu A \sqrt{2gh}$ unter h d. Höhe d. Wasseroberfl. über d. Schwerpunkt d. Mündung verstanden, also $h = h_2 + \frac{a}{2}$. Würde man dieses h direkt bei d. Mündung messen, so müßte μ entsprechend größer sein. Dieser Umstand macht sich bemerklich in d. Verhältnißzahlen von μ, so lange h_2 nicht größer als 0,2 m geworden ist; ist $h > 0,2$ so ist dies nicht mehr wesentlich. –

Wenn man d. Grashof'sche Tabelle näher betrachtet, so findet man im Allgemeinen bestätigt d. frühere Gesetz bestätigt, daß d. Ausflußcoeff. um so größer wird, je kleiner d. Mündung und Druckhöhe ist. Es sind in d. Tabelle in d. Horizontalreihe d. Werthe von a von links nach rechts wachsend angeordnet, h_2 von oben nach unten wachsend, d. Werthe von h_2 gehen von 0,01 m bis zu 3 m., wobei d. Werthe von 0,0 1,8 bis 3 m nicht gemessen sondern geschätzt sind. Es sollten also d. größten Werthe von μ links oben und d. kleinsten rechts unten stehen, welches auch in d. That im Allgemeinen d. Fall ist. Nur wenn man für d. größeren Werthe von a d. Verticalreihe herunter geht, so findet man keine stetige Abnahme von μ, sondern zunächst nimmt μ zu bis zu einem max. und erst nachher nimmt es stetig ab. Die Ursache liegt jedenfalls darin, daß in d. Formel $V = \mu A \sqrt{2gh}$ d. Coeff. μ eine zusammengesetzte Bedeutung hat, da in μ auch d. Einfluß d. früher besprochenen Correctionsfactors $1-f$ enthalten ist, welcher bekanntlich für eine rechteckige Mündung in einer verticalen Wand d. Bedeutung hatte:

$$1 - f = 1 - \frac{1}{96}\left(\frac{a}{h}\right)^2 \text{ also hier: } = 1 - \frac{1}{96}\left(\frac{a}{h_2 - \frac{a}{2}}\right)^2.$$

Dieser Correctionsfactor ist in μ mit hineingezogen worden und daher äußern dann auch d. obigen Abweichungen, denn es ist dieser Correctionsfactor um so mehr von d. Einheit verschieden, d. h. um so kleiner, je größer a und je kleiner h ist; es muß also namentlich bei d. größeren Werthen von a und d. kleineren von h_2 dieser Correctionsfactor mitwirken, daß sich eine entsprechend kleinere Werth von μ ergibt, als es d. Fall wäre, wenn dieser Correctionsfactor nicht mit einbezogen würde. – Es kann auch noch ein anderer Umstand dabei in Betracht kommen, wenn nämlich h sehr klein ist, so fließt d. Wasser d. rechteckigen Mündung im höheren Grade am



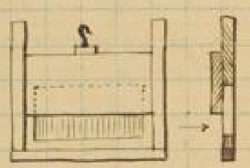
unteren Rande als am oberen zu, es findet also am unteren Rande eine geringere Ablenkung d. seitlichen Wasserstrahls als am oberen statt, d. Folge ist, daß d. ganze Wasserstrahl etwas nach oben abgelenkt wird; es kann also d. Fall sein, daß d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls etwas höher liegt, als d. Schwerpunkt d. Mündung A. In d. Ausflußformel müßte man eigentlich h gleich gesetzt werden d. Höhe d. Oberfl. über d. Schwerpunkt von S, so daß hier also d. Höhe etwas zu groß gesetzt worden ist und μ etwas zu klein gefunden werden mußte.

Nach d. Versuchen von Lesbros ist d. Ausflußcoeff. vorwiegend abhängig von d. kleineren Dimension d. rechteckigen Mündung, einerlei ob dies d. Breite od. d. Höhe ist, und zwar in d. Weise, daß bei gleichen Werthen von h und bei gleicher Größe dieser kleinen Dimension d. Mündung, d. Ausflußcoeff. sich nicht wesentlich ändert, wenn d. Verhältniß von Höhe u. Breite zwischen 1 u. 20 variirt. Mit Rücksicht auf diesen Umstand können also auch d. Zahlen d. erwähnten Tabelle, obgleich sie sich alle nur auf d. nämliche Breite d. Mündung beziehen, doch auch angewendet werden für andere Fälle, wo diese Breite erheblich größer ist, so ferne sie nur nicht mehr als d. 20fache d. Höhe beträgt. –

Was d. Geschw.-Coeff. betrifft, so ist auch dieser von Lesbros bei verschiedenen Versuchen ermittelt worden und es hat sich ergeben, daß derselbe wenig verschieden ist von d. Geschw.-Coeff. φ betreffend d. Ausfluß aus kreisförmigen Mündungen, es ergab sich nämlich:

$$\varphi = 0{,}97.$$

Bei diesen Fundamentalversuchen war immer sorgfältig d. Ausfluß in einer sogenannten dünnen Wand hergestellt, so daß d. innere Wand eine scharfe Kante bildete. Bei d. technischen Ausführungen findet man im Allgemeinen ein solcher idealer Fall nicht statt, sondern es pflegen d. betreffenden rechteckigen Mündungen rechtwinklig in d. Gefäß eingeschnitten zu sein. Unter diesen Umständen findet d. Wasserstrahl Gelegenheit, sich an diese Begrenzungsfläche d. Öffnung mehr od. weniger anzuschließen. Im Allgemeinen wird dadurch d. Widerstand zwar etwas vergrößert, also d. Geschw.-Coeff. etwas verkleinert, dagegen wird d. Contraction vermindert, also d. Contractions-Coeff. vergrößert und zwar wird erfahrungsmäßig d. Contractions-Coeff. mehr vergrößert als d. Geschw.-Coeff. verkleinert, so daß d. Product aus beiden eine Vergrößerung erfährt. Es ist dies namentlich d. Fall beim Durchfluß d. Wassers durch rechteckige Schützenöffnungen. Es pflegt ein Schutzbrett mehr od. weniger aufgezogen zu sein, so daß d. Wasser nur



durch d. rechteckige Öffnung unter d. Schutzbrette fließt. Ein solches Brett muß nun sicher geführt werden durch Führungsleisten, welche eine gewisse Einfassung für diese rechteckige Mündung bilden. Haben diese Führungsleisten etwas vorstehen, wird an d. beiden Seiten d. Contraction geschwächt; ebenso kann sich auch unten eine Leiste befinden, um d. Schutzbrett beim gänzlichen Niederlassen eine Stütze zu gewähren, so daß auch am untern Rand d. Mündung eine solche Schwächung d. Contraction stattfindet. D. verschiedenen Modificationen, wie sie für diese Fälle sind, wurden von Lesbros speciell geprüft, deren Resultate im Grashof zusammengestellt sind. –

Gehen wir nun über zu d. Fall einer unvollkommenen Contraction, so welche $n = \frac{A}{F}$ nicht sehr klein ist. Auch über diesen Fall hat Weisbach Versuche angestellt und folgende Formel gefunden:

$$\mu = \mu_0 \left[1 + 0{,}076 (9^n - 1)\right]$$

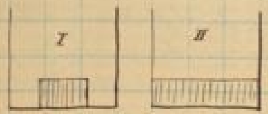
wenn μ_0 d. Ausflußcoeff. unter übrigens gleichen Umständen im Falle einer vollkommenen Contraction bedeutet.

Ferner ist bei d. Ausfluß d. Wassers aus rechteckigen Mündungen d. partielle Contraction beachtenswerth. Solche Versuche wurden von Bidone mit quadratischen Mündungen und von Weisbach mit Mündungen, d. 0,1 m hoch und 0,2 m breit waren, angestellt. Nach Weisbach:

$$\mu = \mu_0 (1 + 0{,}155\, p)$$

unter p d. verhältnißmäßige Größe desjenigen Theils d. Mündungsumfangs verstanden, in welchem keine Contraction stattfindet, zum ganzen Mündungsumfang. –

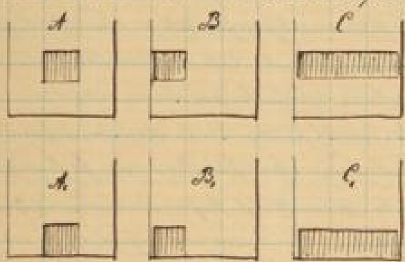
Meistens kommt d. unvollständige Contraction so vor, daß d. rechteckige Mündung nur mit d. untern Rand am Boden d. Gefäßes liegt, od. daß sie sich auch bis zu den Seitenwänden erstreckt. Im ersten Fall ist d. Contraction nur am untern Rand aufgehoben, im letzten Fall auch



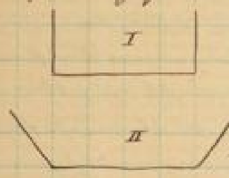
u. d. Seitenwänden. Ist also a d. Höhe und b d. Breite d. Mündung, so ist im ersten Fall: $p = \frac{b}{2(a+b)}$

im 2ten Fall $p = \frac{2a+b}{2(a+b)}$.

Es sind über diesen Fall auch Versuche von Lesbros angestellt worden, und zwar mit solchen Mündungen, welche [illegible] ... [illegible] Lesbros sind Versuche angestellt worden erstens für d. Fall d. vollständigen



Contraction, 2tens für d. Fall, daß d. Mündung auf d. einen Seite [illegible] ... [illegible] A B C [illegible] ... so daß sich A' B' C' ergab. In diesen Fällen [illegible] ...



[illegible] ... C u. C' [illegible] ... unter 45°, so daß sie gegen einander [illegible] ... B u. B' [illegible] ... Man kann also d. Formel für alle diese Fälle dahin angeben, daß man setzt:

$$\mu = \mu_0(1 + x\,p_a + y\,p_b)$$

unter p_a d. Verhältniss p verstanden, welches sich auf d. partielle Contraction an d. Seitenwänden bezieht, p_b an d. anderen [illegible]; es ist also im Falle A: $p_a = 0$ u. $p_b = 0$; im Falle A': $p_a = 0$ u. $p_b = \frac{b}{2(a+b)}$;

im Falle B: $p_a = \frac{a}{2(a+b)}$ u. $p_b = 0$; im Falle B': $p_a = \frac{a}{2(a+b)}$ u. $p_b = \frac{b}{2(a+b)}$

im Falle C: $p_a = \frac{a}{a+b}$ u. $p_b = 0$; im Falle C': $p_a = \frac{a}{a+b}$ u. $p_b = \frac{b}{2(a+b)}$;

Die Coeff. x u. y [illegible] ... Die Versuche von Lesbros liefern d. Formel:

$$\mu = \mu_0(1 + 0{,}12\,p_a + 0{,}16\,p_b)$$

Endlich ist noch d. Fall [illegible] ... [illegible] ...

[illegible] ... Ist für d. Mündung A [illegible] ... F_0 [illegible] ... u_0 [illegible]:

$$u_0 = \frac{V}{F_0}$$ [illegible]:

$$V = \mu A\sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{\mu A}{F_0}\right)^2}}$$ [illegible]

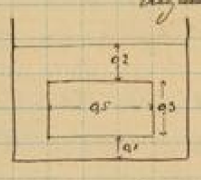
[illegible] ... Mündung A. Bezeichnet man $\frac{A}{F_0} = n$, so ist: $V = \mu A\sqrt{\frac{2gh}{1-(\mu n)^2}}$. [illegible] für d. Coeff. μ nicht einen ganz reinen Ausflusscoeff.; er enthält vielmehr noch einen anderen Einfluss in sich. Es ist nämlich auch hier vorausgesetzt, dass d. Höhe h gemessen wurde in einer solchen Entfernung von d. Ausflusswand, wo d. Wasseroberfl. noch nicht merklich sich gegen d. Wand abwärts geneigt hatte also etwa 1 m von d. Wand. Bei d. erwähnten Geschw. v_0 erfährt d. Wasser auf d. Strecke von 1 m Länge schon immer einen, nicht ganz zu vernachlässigenden Widerstand, so dass d. Höhe h auch d. Widerstandshöhe im Gerinne von dieser Strecke bis zur Wand in sich enthält, und infolgedessen kann es d. Fall sein, dass wenn man für μ d. Wert setzt, denselben hält für d. Ausfluss d. Wassers mit einer Geschw. dass man V nur zu groß findet. Es sind deshalb von Weisbach besondere Versuche angestellt worden über diesen Fall, wobei einfach gesetzt wurde:

$$V = \mu' A \sqrt{2gh}$$

wobei nun d. Coeff. μ' mit d. Versuchsergebnisse variirt. Dieser begreift demnach verschiedene Einflüsse in sich: 1) d. der Contraction 2) d. d. Geschw.-Coeff. φ 3) d. d. Umstandes, dass d. Geschw. im Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls nicht genau gleich d. mittleren Geschw. ist 4) d. des Umstandes, dass d. Schwerpunkt d. kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls in anderer Höhe liegen kann als d. Schwerpunkt d. Mündung 5) d. d. Zuflussgeschw. u. 6) d. d. Widerstandshöhe, die d. Wasser schon bei d. Lauf im Gerinne erfährt von d. Stelle an, wo h gemessen wird, bis zur Ausflusswand. Es fand, dass d. Coeff. μ' mit genügender Annäherung berechnet werden könne vermittelst folgender empirischen Formel:

$$\mu' = \mu_0 (1 + 0{,}641\, n^2)$$

, wenn gesetzt, dass d. Verhältniss $n < \frac{1}{2}$ ist u. ferner, dass d. Höhe h d. Wasseroberfl. im Gerinne über d. Mittelpunkt d. Mündung A gemessen wird in d. Entfernung von 1 m von d. Wand. Würde d. Höhe h gemessen in größerer Entfernung, so würde diese eine noch größere Widerstandshöhe in sich schließen.
Aus denselben Umstand ist es zu erklären, dass d. mit diesen Versuchen entstandenen Werte von μ' kleiner sind als diejenigen Werte, welche μ' nach d. Formel für V haben müsste; es sollte μ' d. Ableitung haben $\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{1-(\mu n)^2}}$, man findet aber im Allgemeinen μ' kleiner als dieser Wert und dies ist d. Einfluss d. Widerstandshöhe zuzuschreiben. Als Beispiel sei folgendes zu berechnen:



Angenommen es fließe d. Wasser in einem Gerinne von 0.8 m Breite, welches rechteckigen Querschnitt hat. Angenommen man wolle d. Wassermenge messen, die in diesem Gerinne im Beharrungszustand fließt. Zu d. Ende wird d. Gerinne abgeschlossen durch eine verticale Wand, in welche eine Mündung eingeschnitten wird von 0,m5 Breite und 0,m3 Höhe und zwar sei diese Mündung an einer solchen Stelle in d. Wand, dass d. untere Rand in einer Höhe 0,m1 über d. Boden liegt, während d. beiden Seitenränder gleich weit, also um 0,m15 von d. Seitenwänden d. Gerinnes abliegen. Nachdem dies geschehen ist, wird sich zunächst d. Wasserstand im Gerinne ändern und zwar ergebe sich derselbe im Beharrungszustand 0,2 m über d. oberen Rand d. Mündung und zwar gemessen in einer Entfernung = 1 m von d. Wand. Hieraus soll V berechnet werden.
Zu dem Ende ist zunächst d. Coeff. μ_0 zu berechnen, welcher Ausflusscoeff. unter übrigens gleichen Umständen bei vollkommener Contraction gelten würde für d. Ausfluss aus einer rechteckigen Mündung in einer ebenen großen Wand. In d. früheren Tabelle sind d. Werte von μ, d. hier mit μ_0 bezeichnet werden, nach Werten von a und h_1 geordnet. a = 0,3 kommt nun in jener Tabelle nicht vor; man wird also zunächst d. Wert von μ_0 entnehmen für d. demnächst kommenden Fall, also für $h_1 = 0{,}2$ und $a = 0{,}2$, wofür man findet $\mu_0 = 0{,}598$. Nun wissen wir aber, dass d. Ausflusscoeff. umso kleiner ist, je größer d. kleinere Dimension ist. Es muss also für $a = 0{,}3$ d. Coeff. μ_0 etwas kleiner sein als für $a = 0{,}2$. Es ergibt sich durch Schätzung durch d. Tabelle $\mu_0 = 0{,}595$ sein. Ferner ist nun:
$n = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}8 \cdot 0{,}6} = \frac{5}{16}$ also kleiner als $\frac{1}{2}$, so dass d. Weisbach'sche Formel angewendet werden kann. Mit Hilfe derselben ist: $\mu' = 0{,}595\left(1 + 0{,}641\left(\frac{5}{16}\right)^2\right) = 0{,}632$. und demnach d. Ausflussmenge:

$$V = \mu' A \sqrt{2gh} = 0{,}632 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}35} = 0{,}2484 \text{ cubm.}$$

[illegible] Weisbach [illegible] [illegible] $1 + y$ [illegible] $1 + x$ [illegible]

[illegible]: $\mu'' = (1+y)\,\mu'$. [illegible]

[illegible] $1 + x$. [illegible]: $\mu'' = (1+x)\,\mu_0$, [illegible] μ_0 [illegible] x [illegible]: $x = 0{,}12\,p_a + 0{,}16\,p_b$ [illegible] Lesbros. [illegible] $1+y$ [illegible] $1+x$. [illegible] $\mu' > 1$ [illegible] $\mu' = \mu_0$ [illegible] $y = x$. [illegible] $\mu'' = \left(1 + \frac{1-\mu'}{1-\mu_0}\,x\right)\mu'$

[illegible] $\mu' = \mu_0$ [illegible] $= 1 + x$, [illegible] $\mu' = 1$ [illegible] $\mu' = 1$ [illegible] $\mu'' = \mu'$. [illegible] μ'' [illegible] μ'' [illegible] V [illegible]

[illegible] $= 0{,}6^m$ [illegible] μ_0 [illegible] h_2 [illegible] $= 0{,}2$ [illegible] $= 0{,}3\,m$. [illegible] Poncelet-Lesbros [illegible] h [illegible] $\mu_0 = 0{,}595$ [illegible] μ' [illegible] $= 0{,}632$. [illegible] μ'' [illegible] x [illegible] Lesbros [illegible] $x = 0{,}16\,\frac{0{,}5}{2{,}08} = 0{,}03$, [illegible]:

$$\mu'' = \left(1 + \frac{0{,}368}{0{,}405}\,0{,}05\right)0{,}632 = 0{,}661$$

[illegible]:

$$V = \mu'' A \sqrt{2gh} = 0{,}661 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}45} = 0{,}2946 \text{ cubm.}$$

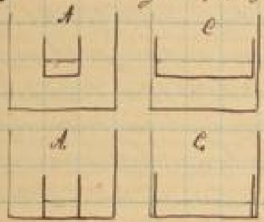
[illegible]

[illegible] V [illegible]: $V = \mu A \sqrt{2gh} = \mu a b \sqrt{2gh}$ [illegible] h [illegible] kleiner sein, als unter übrigens gleichen Umständen in d. Fall wäre, wenn d. Wasserstrahl frei niederfiele. Dieser [illegible] Einfluß d. Gerinnes beruht hauptsächlich [illegible] Vergrößerung d. Dr. [illegible] kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls. [illegible] horizontal od. [illegible] geneigt sei [illegible] Gerinne [illegible] sei. [illegible] Wasserstrahl im Gerinne [illegible] Mündung [illegible] kleinsten Querschnitts d. contrahirten Strahls d. [illegible] Dr. [illegible] kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls d. Wassertheilchen [illegible] Punkt [illegible] Strahls [illegible] größer sei als d. [illegible] $h-\frac{a}{2}$, so ist [illegible] kleiner [illegible] unter übrigens gleichen Umständen [illegible] $\sqrt{1-\frac{a}{2h}}$. [illegible] Ausfluß- [illegible] Aufschlaggerinne [illegible] Fall d. freien Ausflusses [illegible] Wassertheilchen d. kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls [illegible] Allgemeinen nicht [illegible] d. Wassers [illegible] Abflußgerinne [illegible] Abflußgerinne [illegible] geneigt, so kann [illegible] Fall sein, [illegible] Neigung [illegible] Wasser mit [illegible] Querschnitt abfließt, [illegible] Gerinne [illegible] geneigt, so kann [illegible] Wasser [illegible] Contraction [illegible] Ist dieses aber d. Fall, so [illegible] kleinsten Querschnitt d. Strahl [illegible] Wassertheilchen [illegible] $\sqrt{1-\frac{a}{2h}}$. [illegible] Aufschlaggerinne [illegible] Wasserstrahl [illegible] Contraction [illegible] Aufschlaggerinne [illegible] horizontal oder [illegible] geneigt sei [illegible] Aufschlag-gerinne [illegible] Wasser [illegible] Gerinnes [illegible] Ausfluß d. Wassers [illegible] Mündung d. Wasser [illegible] Mündung. [illegible] Fall [illegible]

$V=\mu A\sqrt{2gh}$ V zu berechnen, sondern [illegible] Formel.

$$V=\mu a b\sqrt{2g(h-h')}$$

[illegible] h' [illegible] Wasseroberfl. im Aufschlaggerinne über d. Schwerpunkt d. Mündung [illegible] Wasser [illegible] h' [illegible] $\frac{a}{2}$, [illegible] Wasseroberfl. im Aufschlaggerinne [illegible] horizontal, [illegible] Fall d. Ausflusses unter Wasser [illegible] Fall d. Ausflusses in d. freien Luft [illegible] 1%. [illegible] h' [illegible] $\frac{a}{2}$; [illegible] Umständen [illegible] Versuchen [illegible] bestimmen sei. [illegible] d. betreffenden Versuche von Lesbros zu erwähnen, [illegible] Ausfluß d. Wassers [illegible] einer rechteckigen Mündung in einer verticalen ebenen Wand und zwar in einem Ansatzgerinne, welches unterhalb horizontal, d. Gefälle bis auf $\frac{1}{10}$ abweicht geneigt ist, ein grosser besonderer Widerstand in diesem Gerinne nicht vorkommen; d. Gerinne soll eine Länge von $2^m50 - 3^m00$. Es liegt also d. Anwendung d. Formel $V = \mu\, a\, b \sqrt{2gh}$ zu Grunde. Die Versuche beziehen sich namentlich auf folgende Specialfälle: A) d. Mündung befindet sich an einer mittleren Stelle in d. verticalen Wand d. Gefässes; A') d. Mündung befindet sich an einer mittleren Stelle d. Bodens d. Gefässes; C) und C') wie Seite 59, nur mit Ansatzgerinne. Für diese Fälle sind d. Resultate im Grashof zusammengestellt. Es ist nun zu bemerken, dass d. Zahlen dieser Tabelle durchweg kleiner sind als d. Zahlenwerthe von μ bei d. früher besprochenen Lesbros'schen Versuchen, wo sich kein Ansatzgerinne an diese Mündungen anschloss. Dass aber diese Verkleinerung von μ durch d. Ansatzgerinne um so grossartiger ist, je grösser d. Druckhöhe h ist, [illegible]



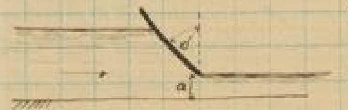
[illegible] Fall A zeigt sich, dass bei d. grösseren Wasserständen h d. Coeff. μ für d. Fall d. Ausflusses in [illegible] nicht kleiner ist, als für d. Fall d. Ausflusses in d. freien Luft. [illegible] dass im Fall A d. Ausflusscoeff. um [illegible] durch Contraction bedingt ist, wo d. Wasser von allen Seiten her d. Mündung zufliesst; diese Contraction wird aber durch d. Ansatzgerinne vermindert und [illegible] d. Ausflusscoeff. vergrössert, so dass für d. Fall [illegible], dass durch [illegible] von α d. Verkleinerung von μ vollständig aufgehoben werden kann. Unter anderen Umständen, als diejenigen, unter denen diese Lesbros'schen Versuche angestellt worden, können d. Werthe d. Lesbros'schen Tabelle [illegible] als Verhältnisszahlen benutzt werden, wie [illegible] folgendes Beispiel [illegible]:

d. Gerinne habe 0^m8 Breite, welches von [illegible] durch eine verticale Wand abgeschlossen wird. In derselben befindet sich eine rechteckige Öffnung von 0,5 m Breite und 0,3 m Höhe, welche sich bis auf d. Boden d. Gerinnes erstrecken soll, also wie in Seite 60–61. [illegible] d. Beharrungszustand [illegible] soll für d. Wasserstand, 1 m von d. Wand gemessen, [illegible] = 0,9 m über d. oberen Wand. Für diesen Fall nun, wenn d. Wasser als ein freier Strahl ausfliesst, d. Ausflusscoeff. berechnet werden $\mu = 0{,}661$. Jetzt sei vorausgesetzt, d. Wasser fliesse nicht als ein freier Strahl aus dieser Mündung aus, sondern es schliesse sich an diese Mündung ein Ansatzgerinne, wodurch d. Wasser abfliesst [illegible] Versuche hierüber [illegible] solchen Fall von Lesbros nicht angestellt worden. d. Fall, welcher hier vorliegt, liegt [illegible] zwischen A' u. C'; nun ist nach d. Lesbros'schen Tabelle in diesen beiden Fällen A' u. C' für d. Fall d. freien Ausflusses d. Ausflusscoeff. = 0,621 resp. 0,699 d. h. für d. hier vorliegenden Werthe von h und a. Für dieselben Fälle wo d. Ausfluss durch ein Ansatzgerinne erfolgt, ist d. Ausflusscoeff. nach Lesbros resp. 0,575 u. 0,599. [illegible] d. hier vorliegende Fall als zwischen A' und C' liegend angenommen werden kann, so wird man hier sagen dürfen, es wird d. Ausflusscoeff. durch d. Ansatzgerinne verkleinert ungefähr um

$$\frac{0{,}575 + 0{,}599}{0{,}621 + 0{,}699} = 0{,}9,$$ so dass d. Ausflusscoeff. wird: $\mu = 0{,}661 \cdot 0{,}9 = 0{,}595$.

Hiernach sieht man, wie d. einzelnen Zahlenwerthe auch als Verhältnisszahlen angewendet werden können. —

Von praktischem Interesse ist ferner d. Fall, dass d. rechteckige Mündung sich in einer schräg stehenden ebenen Wand befindet, welche mit einem in gleicher Breite fortlaufenden Gerinne unter einem gewissen Winkel gegen d. Verticale geneigt und oben angeschlossen ist; dieser Winkel sei = δ. Unten dieser schiefen ebenen Wand befindet sich d. rechteckige Durchflussöffnung, die sich mit d. unteren Rand bis zum Boden erstreckt. Hier findet d. Contraction im Wesentlichen nur am oberen Rand statt und auch hier nur in einem geschwächten Maasse. Dieser Fall ist namentlich von Interesse für d. Fall d. Wasserzuführung zu Wasserrädern, wobei diese schräge Wand d. Zweck hat, d. Durchflussöffnung möglichst nahe an d. Rad anzubringen. Für diesen Fall



sind von Poncelet Versuche angestellt worden und dabei hat sich d. Ausflußcoeff. $\mu = 0,7 \quad 0,74 \quad 0,8$, ergeben, je nachdem $tg\,\delta = 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$ war. Diese Werthe von μ beziehen sich auf d. Formel für $V = \mu a b \sqrt{2gh}$, wo a d. Höhe d. Ausflußöffnung bedeutet, die aber senkrecht gemessen ist zum Boden d. Kanals, b d. Breite d. Mündung und h d. Höhe d. Wasserspiegels über d. Mittelpunkt d. Mündung. D. Fall $tg\,\delta = 0$ würde dem einer verticalen Wand entsprechen, welchen Fall wir schon durchgenommen haben. Für diesen Fall ergeben sich freilich aus d. Lesbros'schen Versuchen wesentlich kleinere Werthe von μ als 0,7 nämlich 0,63 bis 0,65. Diese Differenz kann daher rühren, daß d. Poncelet'schen Mündungen erheblich breiter als d. Lesbros'schen waren. Daher d. Contraction an d. Seiten würde nur sehr schwach sein, woraus sich doch ein noch größeres [illegible] als bei d. Lesbros'schen Versuchen; außerdem strömte bei d. Poncelet'schen Versuchen d. Wasser d. Mündung mit einer merklichen Geschw. zu. Bei d. Poncelet'schen Versuchen war h gemessen dort, wo d. Wasser schon eine bedeutende Geschw. hatte, bei d. Lesbros'schen dort, wo es in Ruhe war. In solchen Fällen, wo unter übrigens gleichen Umständen μ sonst $= 0,7$ wäre, können diese Poncelet'schen Zahlen wahrscheinlich als Verhältnißzahlen benutzt werden. D. Ausflußcoeff. ~~kann man~~ [illegible] wird vergrößert um $\frac{0,75}{0,7}$, wenn d. Winkel δ vermindert wird, daß $tg\,\delta$ nicht $= 0$ sondern $= \frac{1}{2}$ ist. Für d. Fall, daß $tg\,\delta$ wenig größer als 1 ist, kann man d. Vergrößerungscoeff. allgemein gleich setzen:

$$1 + \frac{6\,tg\,\delta + 4\,tg^2\delta}{70}$$

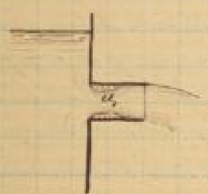
Für $tg\,\delta = \frac{1}{2}$ geht dieser Ausdruck über in $\frac{74}{70}$ und für $tg\,\delta = 1$ in $\frac{8}{7}$. — Wenn man also d. Ausflußcoeff. für einen gewissen Fall bestimmt, so wird eine Neigung d. Wand um δ denselben um diese Größe vergrößern. Für diese Schützen hat Poncelet außerdem einen Geschw. Coeff. φ ermittelt, d. durchschnittlich $= 0,93$ war. Diese Versuche beziehen sich alle auf d. Fall, daß d. Abflußgerinne horizontal od. beinahe [illegible] gewesen war. Was nun aber d. anderen Fall betrifft, in welchem d. Gerinne, welches sich an d. vorderste Mündung anschließt, in d. Höhe geneigt ist, od. wenn ein [illegible] ist, so daß dann d. Oberfl. d. im Gerinne abfließenden Wassers höher als d. Rand d. Mündung steht, so sind über diesen Fall in d. Jahren 1866 u. 67 bedeutende Versuche von Bornemann angestellt worden. Bei diesen Versuchen handelte es sich auch um ein [illegible] Gerinne, welches d. Gerinne (Ausfluß) [illegible] d. Fortsetzung d. Zuflußgerinnes war. D. rechteckige Mündung

befand sich in einer verticalen Wand und zwar [illegible] d. Wand, so daß d. untere Rand d. Mündung bis an d. Boden d. Gerinnes reichte und d. Seitenwände d. Mündung bis an d. Seiten d. Gerinnes reichten. D. Gerinne hatte eine Breite von 1,135 m. In einem [illegible] waren 2 Schützen eingesetzt, welche zwischen sich eine Ausflußöffnung frei ließen von 0,006 m Breite. Diese Schützen dienten als Widerlager für ein Schutzbrett, welches eine Dicke von 4 [illegible] hatte. D. Versuche und zwar im Ganzen 15 bezogen sich auf verschiedene Werthe d. Schützenzughöhe a und zwar für $a = 0034$ m bis 0,174 m. Bezeichnet h d. Höhe d. Oberwasserspiegels bis zur Mündungsmitte, h_1 d. Höhe d. Unterwasserspiegels über denselben Punkt, wobei wesentlich zu beachten ist, daß d. Höhe h_1 gemessen werden muß an d. Stelle, wo d. Unterwasserspiegel seine größte Höhe hat und annähernd in Ruhe ist. So umfaßten dann d. Versuche solche Werthe von $\frac{a}{h_1}$, welche zwischen d. Grenzen 0,17 – 0,85 lagen; d. Werthe von h_2 d. h. d. Höhe d. Oberwasserspiegels über d. oberen Rand d. Mündung, lagen zwischen d. Werthen 0,09 – 0,42 m. Natürlich ist es diesem Fall eine [illegible] Formel zu Grunde zu legen: $V = \mu a b \sqrt{2g(h - h_1)}$. Bornemann versuchte nun d. erhaltenen Werthe von μ, welche sich aus d. [illegible] Versuchen ergaben, durch eine empirische Formel auszudrücken. Als zweckmäßig erwies sich: $\mu = \alpha + \beta \frac{a}{h_1}$, wenn d. Coeff. α u. β bestimmt wurden mit Hilfe d. Methode d. kleinsten Quadrate: $\alpha = 0,63775$ und $\beta = 0,29995$. D. dieser Rechnung entsprechende wahrscheinliche größte Fehler ist: 0,0109. —

Ausfluß d. Wassers durch Mundstücke.

Betrachten wir zunächst d. Ausfluß aus cylindrischen Ansatzröhren.

Hierbei braucht d. Querschnitt d. cylindrischen Röhre nicht gerade ein Kreis zu sein, es ist dazu nur nothwendig, daß d. Querschn. derselbe Form hat wie d. Mündung d. Gefäßes; auch muss immer jedes d. Mündung eine abgerundete Form haben. Unter diesen Umständen fließt d. Wasser aus d. Mündung genau als ein vollkommener cylindrischer Strahl, eine äußere Contraction findet nicht statt, es ist also $\alpha = 1$ und $\mu = \varphi$.
Wenn diese Röhre so kurz ist, daß von ihrem Leitungswiderstand abgesehen werden kann u. wenn d. innere Mundst. mit einer abgerundeten Fl. stetig in d. innere Gefäßwandfl. übergeht, dann ist wahrscheinlich d. Ausflußcoeff. μ kaum verschieden von d. Geschw.-Coeff., welcher unter übrigens gleichen Umständen einer Mündung in d. dünnen Wand entsprechen würde; es liegt also dann auch d. Ausflußcoeff. μ zwischen d. Grenzen 0,96 u. 0,99 und zwar wachsend mit d. Druckhöhe.
Ist hier nun vorausgesetzt, d. cylindrische Ansatzröhre sei scharfkantig an d. Gefäßwand angesetzt. Indem dann das H_2O aus dem Gefäß in diese Ansatzröhre hineinfließt, erleidet es zunächst im Innern d. Röhre



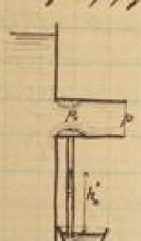
eine Contraction, dann es erweitert sich zum vollen Querschnitt d. Ansatzröhre aus dabei. Dadurch wird ein nach früheren Betrachtungen zu beurtheilender Widerstand verursacht, und es muß dadurch d. Ausflußcoeff. μ merklich kleiner werden als wenn d. cylindrische Röhre mit merklicher Abrundung in d. Gefäßwand übergeht. Bezeichnet man in einem solchen Fall d. Geschw., womit d. Wasser in diesem kleinsten Querschnitt unmittelbar nach d. Eintritt in d. Ansatzröhre mit u_1, mit u dagegen d. Geschw., womit es im vollen Querschnitt d. Ansatzröhre fließt; dann wird durch diesen plötzlichen Übergang d. größeren Geschw. u_1 in u d. früheren zufolge ein Widerstand verursacht, dessen entsprechende Widerstandshöhe od. Arbeit pr. 1 kgr. Wasser durch d. Formel ausgedrückt ist: $\frac{(u_1 - u)^2}{2g}$. Wird aber eine beliebig lange Ansatzröhre vorausgesetzt, so kommt auch ein Leitungswiderstand hinzu, der ist $= \zeta \frac{u^2}{2g}$ unter ζ d. betreffenden Widerstandscoeff. verstanden. Demnach wird d. gesammte Widerstandshöhe vom kleinsten Querschnitt bis zur Mündung sein:

$$B = \frac{(u_1 - u)^2}{2g} + \zeta \frac{u^2}{2g}.$$

Nun verhalten sich aber u_1 und u umgekehrt wie d. Querschnitte also $\frac{u_1}{u} = \frac{1}{\alpha}$ und wird also:

$$B = \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 - \zeta\right] \frac{u^2}{2g}.$$

Von d. Vollständigkeit d. hier vorausgesetzten inneren Contraction kann man sich leicht direct überzeugen durch einen Versuch, den zuerst Venturi in einiger Vollständigkeit anstellte. Wenn man an diese cylindrische Ansatzröhre nahe bei d. Einmündung in dieselben



ein kleines Röhrchen anbringt u. dieses nach unten reichen läßt in ein mit Wasser gefülltes Gefäß, so bemerkt man, daß d. Wasser in diese Röhre emporgesaugt wird bis zu einer gewissen Höhe h'; wenn nun an d. Mündung d. eigentlichen cylindrischen Ansatzröhre und in diesem kleinen Gefäß d. äußere Druck (atm. Druck) herrscht, so folgt aus diesem Aufsteigen d. Wassers, daß d. Dr. in d. cylindrischen Ansatzröhre da wo dieses Röhrchen angebracht wurde, also p_0 kleiner als p sein wird und zwar ist h' ein Maaß für d. Unterschied d. äußeren Dr. p u. d. Dr. p_0; es ist:

$$h' = \frac{p - p_0}{\gamma}$$

, vorausgesetzt, daß d. Flüssigkeiten gleiches spez. Gew. haben. Man kann einen solchen Versuch benützen, namentlich wenn d. Ansatzröhre kurz ist um d. Contractionscoeff. zu bestimmen. Zunächst soll unter d. Voraussetzung, daß d. Contractionscoeff. α bekannt ist, ein Ausdruck für h' abgeleitet werden. Selbstverständlich ist hier für irgend einen Querschnitt einer Leitung d. Summe aus Geschw.-höhe und Druckhöhe = d. ebenso gebildeten Summe für einen anderen Querschnitt + d. Arbeit d. Massenkräfte und d. Arbeit d. Leitg.-Widerstände; also z. B.: auf d. Wege von d. kleinsten

bis zur Mündung pro 1 Kgr. Flüssigkeit. Für d. Mündungsquerschnitt ist d. Summe aus Geschw.-höhe und Druckhöhe $= \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma}$ und für d. kleinsten Querschnitt $= \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma}$. Angenommen nun d. Ansatzröhre sei horizontal, dann kommt eine Arbeit von Wasserkräften gar nicht in Betracht, die Arbeit d. Lst. Widerstände ist nichts anderes als d. Widerstandshöhe und zwar ist dieselbe vom kleinsten Querschnitt bis zur Mündung, wenn sie schon mit gedrückt werden, so ist hinzukommend: $-\left[(\frac{1}{\alpha}-1)^2+\zeta\right]\frac{u^2}{2g}$.
Folgl. hat man d. Gl.:

$$\frac{u^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}=\frac{u_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}-\left[(\tfrac{1}{\alpha}-1)^2+\zeta\right]\frac{u^2}{2g}$$

Nun ist d. Saughöhe h' nichts anderes als d. Maß für d. Unterschied d. oberen Druckhöhe $\frac{p}{\gamma}$ über $\frac{p_1}{\gamma}$. Bei kleinen Ansatzröhren braucht sich nicht dort ganz genau darauf zu befinden, wo d. größte Contraction stattfindet, weil in d. ganzen Röhre, in welcher d. wirbelförmige Lst. stattfindet, d. gleiche Dr. herrscht. Es ist also

$$h'=\frac{p}{\gamma}-\frac{p_1}{\gamma}.$$

Dieses läßt sich aber aus d. obigen Gl. berechnen, es wird, da $u_1=\frac{u}{\alpha}$:

$$h'=\frac{p-p_1}{\gamma}=\left[\frac{1}{\alpha^2}-1-(\tfrac{1}{\alpha}-1)^2-\zeta\right]\frac{u^2}{2g}$$

Ist nun μ d. Ausflußcoeff. für diese Röhre, hat man also $u=\mu\sqrt{2gh}$, da $\mu=\varphi$ war, so folgt: $\frac{u^2}{2g}=\mu^2h$ und folgt:

$$h'=\left[2(\tfrac{1}{\alpha}-1)-\zeta\right]\mu^2h.$$

Hiernach kann man nun h' berechnen, wenn man μ, α u. ζ kennt, insbesondere für eine kurze cylindrische Ansatzröhre, für welche $\zeta=0$ gesetzt werden kann. Mißt man h', so kann man umgekehrt auch α finden. Wenn diese Höhe h' sich größer ergeben sollte, als d. Höhe h'' d. Ansatzröhrenendes über d. Gefäß, so würde folgen, daß d. Wasser in d. kleinen Gefäß vollständig aufgesaugt würde, dann sollte man einen solchen sich bewegenden d. Zusammenfließenden erscheinenden Flüssigkeitsstrahl zu einem einfachen gewissermaßen Strom. Will man diese Formel dazu brauchen, um α zu ermitteln mit Hilfe von, durch Versuche bestimmten Werthen von μ u. h'', so wird man sich vorläufig machen müssen um d. Leitungswiderstand ζ, also d. Mündung so kurz machen, daß man $\zeta=0$ setzen kann. Tut man dies, indem man d. Röhre höchstens 3 mal so lang als weit macht, so ergibt sich aus obiger Gl.:

$$\frac{1}{\alpha}=1+\frac{h'}{2\mu^2h}.$$

Damit übrigens, wie es hier stillschweigend vorausgesetzt wurde, ein wirklich voller Ausfluß stattfindet, also d. Strahl von d. Mündung ganz ausfülle, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein: Es darf zu dem Ende d. Ansatzröhre nicht übermäßig kurz sein u. d. Druckhöhe nicht übermäßig groß sein. Es fragt sich nun, welches sind d. Bedingungen hierfür? Jedenfalls ist dieses nur so lange möglich, als da, wo d. Dr. am kleinsten ist, sie doch einen größeren als 0 ist. Nimmt es ab, wenn aber d. Dr. d. Wassers sich auf 0 vermindert, so fehlt wenigstens keine Sicherheit mehr für d. ununterbrochenen Zusammenhang d. Wassers; eine Bedingung für d. Ausfluß ist also $p_1>0$ oder $\frac{p_1}{\gamma}>0$. Dieses ergibt sich aber aus d. Gl. für h', wo ja $h'=\frac{p-p_1}{\gamma}$ ist also $h'=b-\frac{p_1}{\gamma}$, wenn $\frac{p}{\gamma}=b$ gesetzt wird. Ist d. ausfließende Flüssigkeit Wasser und erfolgt d. Ausfluß in d. freie Luft, so ist das b d. sogenannte ~~Wasserbarometerhöhe~~ $=10{,}3$ m und es ist also:

$$\frac{p_1}{\gamma}=b-\left[2(\tfrac{1}{\alpha}-1)-\zeta\right]\mu^2h.$$

Dieser Ausdruck muß nun >0 sein, um einen vollen Ausfluß zu erlangen. Hieraus ergibt sich eine Grenze für d. höchstens zulässige Höhe h d. Oberwasserspiegels über d. Mitte d. Mündung, es muß nämlich:

$$h<\frac{b}{\left[2(\frac{1}{\alpha}-1)-\zeta\right]\mu^2}.$$

Hiernach folgt nun ummittelbar zunächst: Es wird d. volle Ausfluß umso mehr möglich, je kleiner d. wirkende Druck und je kürzer d. Röhre ist; je kleiner also b und ζ sind, desto kleiner wird auch dieser Grenzwerth h. Insbesondere für eine sogenannte kurze cylindrische Ansatzröhre, für welche man $\zeta=0$ setzen kann, ergibt sich d. Bedingung d. vollen Ausflusses:

$$h<\frac{b}{2(\frac{1}{\alpha}-1)\mu^2};$$

dies ist ein Grenzwerth, der besonders Weisbach durch zahlreiche Versuche erprobt hat. — Eine ganz sichere Bestimmung dieses Grenzwerthes ist allerdings sehr schwierig, da d. Ausfluß von [illegible] Umständen abhängt, indem d. Ausfluß [illegible] nicht voll [illegible]. Was d. [illegible] von α anbetrifft, so ist zu seiner Ermittlung nicht notwendig einen [illegible] zu Grunde zu legen, also α auf [illegible] Formel zu [illegible], [illegible], sondern man kann auch α [illegible] an dieser [illegible] ermitteln und [illegible].

Wenn man d. Gl. [illegible], ist d. Summe aus Geschw.- und Druck-Höhe für [illegible] einem Querschnitt = ist d. [illegible] Summe für einen anderen Querschnitt + d. Arbeit d. Schwerkraft + d. Arbeit d. Leit.-Widerstände f. 1 kg Flüssigkeit auf dem Wege zwischen diesen Querschnitten, [illegible] von d. Oberfl. im Ausflußgefäß bis zur Mündung in d. [illegible], dann [illegible] $p = p_0$ [illegible] sein, [illegible] d. Mündung [illegible] d. freien Oberfl. d. Ausflußgeschw. d. [illegible]. An Stelle von $\frac{u_1^2}{2g}$ tritt d. Geschw.-Höhe entsprechend u_0, ist aber d. Gefäß sehr groß, so kann man $\frac{u_0^2}{2g}$, [illegible] an Stelle von $\frac{u_1^2}{2g}$ tritt $= 0$ setzen und [illegible] $\frac{u^2}{2g}$ d. Arbeit d. Schwere auf d. Wege von d. freien Oberfl. bis zur Mündung + d. [illegible] Widerstands-höhe auf demselben Wege. d. Arbeit d. Schwere pr. 1 kg Flüssigkeit auf diesem Wege ist [illegible] h. [illegible] Widerstandshöhe [illegible] d. [illegible] α [illegible] Widerstandshöhe auf d. Wege vom kleinsten Querschnitt bis zur Mündung; auf d. Wege von d. Oberfl. bis zum kleinsten Querschnitt kommen [illegible] Widerstände vor, welche [illegible] d. Widerständen für d. Fall d. Ausflusses aus d. Mündung in d. dünnen Wand. Für diesen Fall wird d. Widerstand gemessen durch einen Geschw.-Coeff. φ und mit Hilfe desselben ist d. entsprechende Widerstandscoeff. $= \frac{1}{\varphi^2} - 1$ und also d. Widerstandshöhe $= \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{u_1^2}{2g}$. d. Widerstandshöhe für d. [illegible] vom kleinsten Querschnitt bis zur Mündung ist

$$[illegible] = \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta\right]\frac{u^2}{2g}$$ und [illegible]:

$$\frac{u^2}{2g} = h - \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{u_1^2}{2g} - \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta\right]\frac{u^2}{2g}$$ [illegible] $\frac{u_1^2}{2g} = \frac{1}{\alpha}$ ist.

$$\frac{u^2}{2g} = h - \left[\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{1}{\alpha^2} + \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta\right]\right]\frac{u^2}{2g}$$

[illegible] $u = \mu\sqrt{2gh}$ ist, so ist: $\frac{2gh}{u^2} = \frac{1}{\mu^2}$ also:

$$1 = \frac{1}{\mu^2} - \left(\frac{1}{\alpha\varphi}\right)^2 + \frac{2}{\alpha} - 1 - \zeta$$ und ferner:

$$\left(\frac{1}{\alpha\varphi}\right)^2 - 2\varphi\frac{1}{\alpha\varphi} - \frac{1}{\mu^2} + 2 + \zeta = 0$$ [illegible]:

$$\frac{1}{\alpha\varphi} = \varphi + \sqrt{\varphi^2 + \frac{1}{\mu^2} - 2 - \zeta}$$

Hat man es mit einer kurzen Röhre zu thun, für welche $\zeta = 0$ gesetzt werden kann, so kann man μ durch Messung und φ kann man denjenigen gleich setzen, welche d. [illegible] unter übrigens gleichen Umständen für d. Ausfluß aus d. freien Wand gilt. — Was d. Versuche betrifft, d. über d. Ausfluß aus kurzen Ansatzröhren angestellt wurden, so beziehen sie sich fast alle auf d. kreisförmigen Querschnitt und es soll, wenn nicht d. Gegenteil [illegible], ein solcher immer vorausgesetzt werden. Auch gelten d. Versuchswerte alle für $p_0 = p$, d. h. also d. Druck an d. Mündung = d. Druck an d. freien Oberfl. ist, doch können d. unter dieser Voraussetzung gefundenen Resultate ganz einfach auf d. allgemeinen Fall [illegible] werden, wo $h = \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist. Indem d. Ausflußcoeff. μ für einen solchen Fall [illegible] abhängt von d. Coeff. α, ist man auch [illegible]. Bei d. Ansatzröhren [illegible] Fälle [illegible], ganz ähnlich wie beim Ausfluß aus Mündungen in d. dünnen Wand. Zunächst sei d. am häufigsten [illegible] Fall [illegible], d. h. d. innere Ansatzröhre [illegible] d. Ansatzrohr [illegible] eine innere Ansatzröhre [illegible]. Ist d. innere Ansatzröhre [illegible], d. h. dieselbe normal zur Gefäßwand und ist, während sich d. Öffnung an einer mittleren Stelle befindet, d. [illegible] Gefäßwand [illegible] d. Querschnitt d. [illegible] Röhre. Für diesen Fall sind [illegible] Werte [illegible] ermittelt worden für d. Druckhöhe $h = 0{,}23$ bis $0{,}6$ m und für d. Durchmesser $d = 0{,}01$ $0{,}02$ $0{,}03$ $0{,}04$ m, während d. Röhrenlänge [illegible] d. 3fache d. Weite betrug, so daß eine volle Ausfluß [illegible] Röhre so kurz war, daß von einem Leitungswiderstand abgesehen werden konnte. Es ergab sich dann: $\mu = 0{,}843$ $0{,}832$ $0{,}821$ $0{,}810$ welche Werte in folgender [illegible] Formel zusammengefaßt werden können:

$$\mu = 0{,}854 - 1{,}1\,d.$$ Diese Resultate sind in befriedigender Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen, d. von anderen Forschern angestellt wurden. —

Vermittelst d. hier zuletzt entwickelten Formeln kann man auch in diesen Fällen d. Coeff. α d. inneren Ansatzröhre berechnen, wenn man für $\zeta = 0$ setzt und wenn man ferner für φ d. aus früher bekannten Durchschnittswerth $\varphi = 0{,}97$ setzt, wie derselbe für d. Fall d. Ausfließens mit einer kreisförmigen Öffnung in d. dünnen Wand in d. freie Luft gefunden wurde. Dementsprechend ist:

$$\alpha = 0{,}661 \quad 0{,}648 \quad 0{,}636 \quad 0{,}624$$

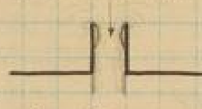
$$\text{also} \quad \alpha = 0{,}672 - 1{,}2\,d.$$

Man sieht, daß diese inneren Contraction kaum verschieden ist von d. äußeren Contraction, welche unter übrigens gleichen Umständen beim Ausfluß durch eine dünne Wand stattfindet; für kann d. Mittelwerth von $\alpha = 0{,}64$ gesetzt werden. D. Widerstandscoeff. für d. Ausfluß d. Wassers mit einer solchen ~~dünnen Wand~~ kurzen cylindrischen Ansatzröhre kann man durchschnittlich $\zeta = 0{,}5$ annehmen; derselbe ist nämlich $= \frac{1}{\mu^2} - 1$ und es wird d. Annahme $\zeta = 0{,}5$ entsprechen $\mu = 0{,}8615$. Es läßt sich hiernach beispielsweise auch folgern, wie hoch durchschnittlich d. Wasser in einem solchen Zweigröhrchen emporsteigt werden kann. Setzt man in d. Formel für h': $\zeta = 0$ und $\mu^2 = \frac{1}{1+\zeta} = \frac{2}{3}$, dann findet man, wenn $\alpha = 0{,}64$ genommen wird (ζ in d. Formel h' bezieht sich auf d. Zuleitung und ist also $= 0$): $h' = \frac{3}{4}h$; in d. Formel $\mu^2 = \frac{1}{1+\zeta}$ bedeutet ζ d. resultierenden Widerstandscoeff., welcher d. Ausflußcoeff. μ entspricht.

Was ferner d. Grenze betrifft, welche h nicht überschreiten darf, wenn ein voller Ausfluß zu Stande kommen soll, so muß sein: $h < \frac{b}{2(\frac{1}{\alpha}-1)^2\mu^2}$. Die Größe $2(\frac{1}{\alpha}-1)^2\mu^2 = \frac{3}{4}$ also $h < \frac{4}{3}b$; wenn also durchschnittlich $b = 10{,}3$ m ist, so muß $h < 13{,}6$ m sein. Ist h größer, so ist es gar nicht möglich durch eine kleine Röhre, d. Brunnen so kurz als möglich, einen vollen Ausfluß zu erzielen. Oft findet man, daß d. volle Ausfluß schon früher aufhört, dann setzt sich darauf, daß d. inneren [illegible] d. Röhre schadhaft sind. Zuweilen kann man d. vollen Ausfluß durch [illegible] herstellen [illegible]. —

Es sind von Weisbach u. Michelotti auch Versuche angestellt worden über μ für kurze zylindrische Ansatzröhren; dabei hat sich ergeben, daß d. Coeff. μ kaum merklich verschieden ist von d. Ausflußcoeff., welcher unter übrigens gleichen Umständen bei einem zylindrischen Ansatzrohre mit kreisförmigem Querschnitt stattfindet. —

Erstreckt sich eine solche Ansatzröhre nach innen hinein, so ist d. innere Contraction beträchtlich bedeutender als bei äußeren Ansatzröhren, es findet hier eine beträchtliche Zusammenziehung



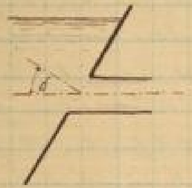
d. Wassers statt. Wenn diese Röhre lang genug ist, so läßt sich erwarten, daß d. Ausflußcoeff. μ kleiner sein wird als für eine äußere Ansatzröhre. Für diesen Fall liegen Versuche von Bidone und Weisbach, woraus sich ergeben hat: $\mu = 0{,}71$ woraus folgt, daß d. Wandstück ~~kleiner sein wird~~ als hier ist, während bei d. äußeren angesetzten Röhre $\mu = 0{,}82$ war; nimmt man wiederum an $\varphi = 0{,}97$ d. i. d. Geschw.-Coeff. d. sich auf d. Widerstände bis zum kleinsten Querschnitt bezieht, so ergibt sich aus d. Formel $\frac{1}{\alpha\varphi} = \varphi + \sqrt{\varphi^2 + \frac{1}{\mu^2} - 2 - \zeta}$ wenn man darin $\zeta = 0$ setzt für eine kurze Röhre $\alpha = 0{,}584$, also auch hier nicht sehr wenig verschieden von d. Coeff. d. äußeren Contraction in d. Fall, daß diese zylindrische innere Ansatzröhre so kurz ist, daß d. Wasser sich gar nicht wieder bis zur Berührung ausbreitet. Auch dieser Coeff. ist, wie d. Theorie es verlangt, nur wenig größer als d. Grenzwerth $\alpha = \frac{1}{2}$. Läßt man d. Wandstück einer solchen Ansatzröhre größer werden, ~~so~~ oder versieht man d. Ansatzröhre mit einem umbiegenden Rand, so nähert sie sich schnell und ist nicht merklich verschieden von d. Coeff. μ für eine äußere Ansatzröhre, wenn d. Breite sich bis zu $\frac{1}{5}$ d. Rohrweite erstreckt. Übrigens ist es schwieriger bei einer solchen inneren Ansatzröhre einen wirklich vollen Ausfluß zu erzielen, wie es auch d. Theorie auch nicht anders zu erwarten ist. Für d. Bedingung d. Möglichkeit d. vollen ~~Querschnitts~~ Ausflusses einer (inneren) zylindrischen Ansatzröhre ergibt sich: $h < \frac{b}{2(\frac{1}{\alpha}-1)\mu^2}$; setzt man hierin $\mu = 0{,}71$ und $\alpha = 0{,}534$, so findet man, daß ein voller Ausfluß nur so lange möglich ist, als $h < 1{,}146$ ist. Bei einer äußeren zylindrischen Ansatzröhre ergibt sich d. entsprechende Bedingung $h < 1{,}33b$ und damit also gezeigt, daß es im Falle einer inneren zylindrischen Ansatzröhre schwieriger ist einen vollen Ausfluß zu erzielen als im Falle einer äußeren Ansatzröhre. —

Auch in Bezug auf d. innere Contraction, welche beim Ausfluß stattfindet, kann d. [illegible] [illegible] Contraction [illegible], wenn aber d. cylindrische Ansatzröhre an eine [illegible] Wand [illegible], die aber nicht viel größer ist als d. Querschnitt d. Ansatzröhre; sie [illegible] eine [illegible] Contraction statt, es ist also [illegible] d. Contractionscoeff. größer als bei d. [illegible] innere Contraction und es [illegible] ist auch d. Ausflußcoeff. größer. Nach Versuchen von Weisbach über diesen Fall kann man, wenn A d. Querschnitt d. Ansatzröhre, S d. [illegible] d. Wand, in welcher d. Ansatzröhre eingesetzt ist und wenn man $n = \frac{A}{S}$ setzt, setzen:

$$\mu = \mu_0 \left(1 + 0{,}102\, n + 0{,}067\, n^2 + 0{,}046\, n^3\right)$$

wenn μ_0 d. Ausflußcoeff. unter übrigens gleichen Umständen bei [illegible] innerer Contraction für $n = 0$ bedeutet, also S bedeutend größer als A ist. —

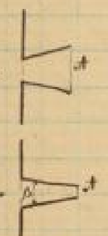
Bezüglich einer besonderen Anordnung solcher cylindrischer Ansatzröhren ist noch ein Fall bemerkenswerth, d. bei d. Ausfluß mit einer [illegible] Anordnung seines Anwendung nicht hat, nämlich, daß d. cylindrische Ansatzröhre an einer ebenen Gefäßwand so eingesetzt ist, daß d. Axe d. Röhre einen spitzen Winkel δ mit d. Normalen d. Gefäßwand bildet. In diesem Fall ist d. Ausflußcoeff. μ kleiner als unter sonst gleichen Umständen für $\delta = 0$. Ist aber μ kleiner, so ist d. Widerstandscoeff. $\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1$ größer als für $\delta = 0$. Von Weisbach ist d. Werth von ζ ermittelt worden bei verschiedenen Werthen δ. Die Werthe, d. sich ergeben, lassen sich durch folgende empirische Formel wiedergeben:



$$\zeta = \zeta_0 + 0{,}303 \sin\delta + 0{,}226 \sin^2\delta$$

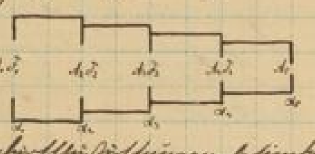
wenn ζ_0 d. Widerstandscoeff. für $\delta = 0$ bedeutet. Übrigens [illegible], um in solchem Fall einen vollen Ausfluß zu erzielen, bei d. größeren Werthen von δ d. Länge d. Röhre beträchtlich größer als 3 mal d. Weite gemacht werden. Es wurden deshalb von Weisbach d. betreffenden Versuche mit beträchtlich längeren, schräg eingesetzten Röhren ausgeführt. Von d. [illegible] Widerstandscoeff. ζ würde dann d. Widerstand abzuziehen, d. sich auf den Leitungswiderstand d. Röhre bezogen, und d. Rest ergibt dann d. Widerstandscoeff. d. sich nur auf d. Eintritt in d. Röhre bezog. — Übrigens ist es bei d. [illegible] Anwendungen meist d. Fall, daß d. Röhren, welche eingesetzt sind, nicht sehr kurz sind, sondern eine größere Länge haben. D. bisher [illegible] [illegible] Werthe von ζ beziehen sich dann immer nur auf d. Widerstand, d. durch d. Einfließen d. Wassers in d. Röhre verursacht wird, oder nur auf d. Strecke, deren Länge = 3 facher Röhrweite ist. Zu diesem Widerstand müssen dann d. Widerstände hinzugefügt werden, d. sich auf d. weiteren Verlauf d. Wassers in d. Röhre beziehen. —

Außer solchen cylindrischen Ansatzröhren sind auch noch ~~conische~~ [illegible] Ansatzröhren von Interesse. Dabei können 2 Fälle unterschieden werden, solche, d. nach außen divergent und solche, d. nach außen convergent sind. Wenn man in allen Fällen unter A d. Inhalt d. äußersten Querschnitts d. conischen Ansatzröhre versteht und somit d. Ausflußcoeff. bezieht auf d. Formel: $V = \mu A \sqrt{2gh}$, dann ist im ersten Fall für eine divergente Ansatzröhre d. Ausflußcoeff. μ unter allen Umständen kleiner als unter sonst gleichen Umständen für eine cylindrische Ansatzröhre; für d. 2t. Fall einer nach außen convergenten Röhre aber ist bis zu einer gewissen Grenze d. Convergenzwinkels β d. Ausflußcoeff. μ größer als für d. Ausfluß einer cylindrischen Ansatzröhre und nur wenn d. Winkel über diese Grenze wächst, wird μ kleiner als für eine cylindrische Ansatzröhre. Dabei ist vorausgesetzt, daß in allen Fällen d. Röhre sich [illegible] an d. Gefäßwand ansetze und daß d. Röhrenaxe normal gegen d. ebene Gefäßwand sei. Wenn man freilich ein und d. nämliche Röhre einmal als divergente und einmal als convergente Röhre benutzt, so fließt durch diese nämliche Röhre, wenn sie nach außen divergent [illegible] wird eine größere Wassermenge als [illegible], aber bei [illegible] nicht in d. Verhältniß d. äußeren Querschnitts. Solche nach außen divergente Röhren haben indessen kein [illegible] technisches Interesse, sondern nur d. anderen. Ueber d. Ausfluß aus solchen convergenten conischen Ansatzröhren sind ausführliche Versuche gemacht von d'Aubuisson u. Castel. Die ausführlichsten dieser Versuchsreihen bezieht sich auf Röhren



[illegible] $= 0{,}0155\,m$. [illegible] $0{,}04^{m}$ [illegible] $H = h = 3^{m}$ [illegible] β [illegible] 0 [illegible] 45° [illegible] φ [illegible] [Tabelle] [illegible] μ [illegible] φ [illegible] max. [illegible] $\beta = 0$: $\mu = 0{,}829$. [illegible] β [illegible] μ [illegible] max [illegible] $\beta = 13^{\circ}$. [illegible] max [illegible] $\mu = 0{,}945$; [illegible] $\beta = 45^{\circ}$ [illegible] $\mu = 0{,}857$. [illegible] $\beta = 55^{\circ}$ [illegible] $\beta = 0$ [illegible] $\beta = 180^{\circ}$ [illegible] $\mu = 0{,}62$ [illegible] μ [illegible] $\beta = 0$: $\alpha = 1$, [illegible] β [illegible] α [illegible] $\beta = 180^{\circ}$ [illegible] α [illegible] $0{,}64$. [illegible] φ [illegible] β [illegible] 0 [illegible] φ [illegible] $\alpha\,\varphi$ [illegible] α [illegible] φ; [illegible] α [illegible] φ [illegible] α. —

[illegible] n [illegible] $\delta_1\ \delta_2 \ldots \delta_n$



[illegible] $A_1\ A_2 \ldots\ A_n\ A$. [illegible] A_1 [illegible] δ_1 [illegible] A_1 [illegible] α_1 [illegible] $A_1\,\alpha_1$ [illegible] $A_1\,A_2$; [illegible] $\alpha_2\ \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n\ \alpha$. [illegible] A_1 [illegible] δ_1 [illegible] V [illegible] $\frac{V}{\alpha_1 A_1}$ [illegible] $\frac{V}{\delta_1}$ [illegible] $1\,kg$ [illegible]
$= \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_1 A_1} - \frac{V}{\delta_1}\right)^2$; [illegible] $\alpha_2 A_2$ [illegible] δ_2 [illegible] $\frac{V}{\alpha_2 A_2}$ [illegible] $\frac{V}{\delta_2}$ [illegible]
$= \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_2 A_2} - \frac{V}{\delta_2}\right)^2$ [illegible] $\mathfrak{B}$ [illegible]:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_1 A_1} - \frac{V}{\delta_1}\right)^2 + \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_2 A_2} - \frac{V}{\delta_2}\right)^2 + \cdots\cdots \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha_n A_n} - \frac{V}{\delta_n}\right)^2$$

$$\mathfrak{B} = \frac{V^2}{2g} \sum_{n=1}^{n=n} \left(\frac{1}{\alpha_n A_n} - \frac{1}{\delta_n}\right)^2$$

[illegible] [Widerstand] [illegible] $1\,kg$ [illegible] ζ = [illegible]

[illegible] $= \frac{V}{\alpha A}$ [illegible] $= \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha A}\right)^2$

$$\zeta = \frac{B}{\frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha A}\right)^2} = \sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{\alpha A}{\alpha_m A_m} - \frac{\alpha A}{F_m}\right)^2.$$

[illegible] ζ [illegible] φ [illegible]

$$u = \mu\sqrt{2gH} \quad \text{und} \quad V = \mu A\sqrt{2gH}:$$

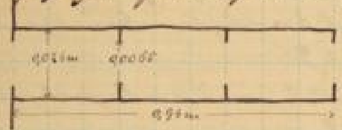
$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} \quad \text{und} \quad \mu = \alpha\varphi.$$

[illegible] $= F$ [illegible]

$$F_1 = F_2 = F_3 = \dots\dots F_n = F.$$

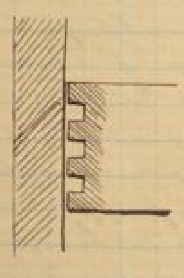
[illegible]
$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots\dots A_n = A$$
und
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots\dots \alpha_n = \alpha$$

[illegible] $\zeta = n\left(1 - \frac{\alpha A}{F}\right)^2$. [illegible] 0,94 m [illegible]



[illegible] 0,026 m [illegible] 0,0065 m; [illegible] $\mu = 0{,}331$ [illegible] ζ: [illegible] $n = 3$ [illegible] $\frac{A}{F} = \frac{1}{16}$. [illegible] 0,64 [illegible] $\zeta = 3\left(1 - \frac{0{,}64}{16}\right)^2 = 2{,}7648$ [illegible] $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} = 0{,}5155$. [illegible] $\mu = \alpha\varphi = 0{,}64 \cdot 0{,}5155 = 0{,}330$, [illegible] μ, [illegible] $\frac{A}{F}$ [illegible]. —

[illegible]



[illegible] $F_1 = F_3 = F_5 = \dots\dots F_{2n+1}$ [illegible] $F_2 = F_4 = \dots\dots F_{2n}$. [illegible] $n+1$ [illegible] F_1 [illegible] F_2; [illegible] es sind also alle d. in unsrer Formel mit A. bezeichneten Größen = F_1 und d. mit F bezeichneten = F_2. Was d. Contractionscoeff. betrifft, so sind sie für Verhältnisse = 1, Verhältnisse = 1 verschieden. Eine Contraction findet nur statt dort, wo d. Flüssigkeit in d. engeren Querschnitte einströmt, es ist also $\alpha_1 = \alpha_3 = \ldots\ldots \alpha_{2n+1}$, und diese selben als mit α_1 bezeichnet werden; im Übrigen jedoch ist: $\alpha_2 = \alpha_4 = \ldots \alpha_{2n} = 1$ und ebenso d. Coeff. α d. äußeren Contraction. In d. allgemeinen Formel besteht nun ζ aus $2n+1$ Summanden. Von diesen sind $n+1$ unter sich gleich und d. übrigen n auch. D. ersteren erhält man, wenn man d. Zeiger d. Reihe nach d. Werthe $1, 3, 5 \ldots 2n+1$ beilegt, von denen jeder $= \frac{1}{\alpha_1} - 1$ sein wird, also $(n+1)(\frac{1}{\alpha_1}-1)^2$. D. übrigen n Summanden sind auch unter sich gleich und zwar da $\alpha_m = 1$, $A_m = F$, $F_m = F_2$ ist, $= 1 - \frac{F_1}{F_2}$, also erhält man: $n(1-\frac{F_1}{F_2})^2$ und folgt:

$$\zeta = (n+1)\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)^2 + n\left(1-\frac{F_1}{F_2}\right)^2$$

Was d. Coeff. α_1 betrifft, so muß man berücksichtigen, daß d. Contraction überall dort, wo d. Flüssigkeit in einen engeren Querschnitt eintritt, nur eine partielle Contraction ist, dagegen ist d. weitere Flüssigkeit verhältnißmäßig geräumiger, es ist für d. Verhältnis d. Contraction ungefähr $= \frac{1}{2}$. Man kann also d. Contractionscoeff. α_1 = demjenigen setzen, welcher unter sonst gleichen Umständen bei vollständiger Contraction stattfindet, multiplicirt mit $(1+0{,}155\cdot\frac{1}{2})$. D. Contractionscoeff., welcher unter sonst gleichen Umständen bei vollständiger Contraction stattfindet, kann auch hier wieder $= 0{,}64$ gesetzt werden, also:

$$\alpha_1 = 0{,}64(1+0{,}155\cdot\tfrac{1}{2}) = 0{,}6896.$$

mit diesem Werth wird $(\frac{1}{\alpha}-1)^2 = 0{,}2025$ also abgerundet $= 0{,}2$, und somit ergibt sich:

$$\zeta = \left[0{,}2 + \left(1-\frac{F_1}{F_2}\right)^2\right]n + 0{,}2$$

D. Verhältniß $\frac{F_1}{F_2}$ ist immer sehr klein, so daß es gegen 1 vernachlässigt werden kann; dann ist: $\zeta = 1{,}2n + 0{,}2$ und zwar

für	$n =$	2	4	6	8
ist	$\zeta =$	2,6	5	7,4	9,8
	$\mu = \varphi =$	0,527	0,408	0,345	0,304

und somit nach d. Formel $\mu = \varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$

und endlich: $V = \mu A\sqrt{2gH}$ wenn A sehr klein ist. —

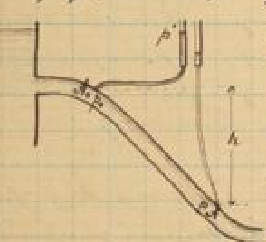
Bewegung des Wassers in längeren Röhren.

Es fließe jetzt d. Wasser in einer geraden od. nur schwach gekrümmten längeren cylindrischen Röhre; d. Länge derselben, $= l$, sei so groß, daß d. Leitungswiderstand derselben einen wesentlichen und in manchen Fällen d. hauptsächlichsten Bestandtheil d. Gesammtwiderstandes ausmacht. Dieser Leitungswiderstand, welcher von d. innern und äußeren Reibungen abhängt, ist erfahrungsgemäß nahezu von d. Dr. ganz unabhängig und unterscheidet sich dadurch wesentlich von d. Reibung 2 fester Körper. Es ist dadurch nachgewiesen, daß man d. äußeren Druck an d. Oberfl. d. Wassers und an d. Mündung d. Röhre um beliebig vergrößerte und zwar um mehr als 1 Atm., es fand sich dadurch nicht im Geringsten eine Änderung im Leitungs-Widerstand. Es unterscheidet sich aber d. Zustand d. Wassers in verschiedenen Querschnitten d. Röhre durch nichts wesentlich, da sich d. Druck ... Da d. Druck keinen Einfluß hat auf d. Leitungswiderstand d. Röhre, so ist d. Leitungswiderstand einfach proportional d. Länge, also d. Leitungswiderstand p. Längeneinheit in allen Stellen d. Röhre gleich, es kann also derselbe $= l\,B_1$ gesetzt werden, wo B_1 d. Leitungswiderstand pr. Mtr. Länge bedeutet, wobei es ganz gleichgültig ist, ob in d. ersten Längeneinheit ein grösserer Druck herrscht, als in d. letzteren. Außer diesem Leitungswiderstand können auch noch besondere Widerstände vorkommen, von früher besprochener Art, wie besonderer Einlaufswiderstand; es seien diese $\zeta\frac{u^2}{2g}$ d. übrigen sonstige Widerstandshöhe, dann ist: $B = \zeta\frac{u^2}{2g} + B_1 l$. — Gesamtwiderstandshöhe für d. Lst. in d. Röhre, wo u d. mittlere Wassergeschw. bedeutet. —

Es handelt sich nun zunächst darum, durch Versuche d. Grösse B_1 zu ermitteln, also d. Leitungswiderstand von B_1 = spez. Leitungswiderstandshöhe. Es kann dies auf verschiedene Weise geschehen. Erinnern wir uns d. Fundamentalform: $\frac{u^2-u_0^2}{2g} = H - B$, welche Formel sich bezieht auf d. Lst. von einem beliebigen Querschnitt d. Rohrleitung bis zu einem anderen, u d. mittlere Geschw. im Endquerschnitt und u_0 d. im Anfangsquerschnitt, H d. wirksame Druckhöhe für d. ganze Rohrstrecke und B d. Widerstandshöhe. — Bezieht man nun diese Gl. auf d. Lst. von d. Oberfl. d. Wassers im Gefäss bis zur Mündung d. ganzen Röhre, so ist $u_0 = 0$ und $B = \zeta\frac{u^2}{2g} + lB_1$ also:

$$H = (1+\zeta)\frac{u^2}{2g} + lB_1.$$

wo H in diesem Falle $= h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist, worin p_0 d. äusseren Druck an d. freien Oberfl. d. Wassers im Ausflussgefäss und p an d. Mündung, während h d. Höhe d. freien Wasseroberfl. im Ausflussgefäss über d. Schwerpunkt d. Mündung od. dem Unterwasserspiegel bedeutet. Diese Gl. in Verbindung mit $u = \frac{V}{F}$ kann dazu dienen, d. Grösse B_1 zu ermitteln, wenn d. Grössen l, d. wirksame Druckhöhe H und d. Rohrquerschnitt F bekannt sind und wenn man ferner durch Versuche d. pro Sek. ausfliessende Wasservolumen V mißt und d. Coeff. ζ kennt. Natürlich wird man d. Versuche so anstellen, daß derartige besondere Widerstände nicht viel vorkommen. Dann kann man B_1 in jedem Fall ermitteln und thut man dies für möglichst viele verschiedene Fälle, so wird sich ein empirisches Gesetz ergeben, wie B_1 von d. verschiedenen Umständen abhängig ist. — Dieses Verfahren ist indessen dadurch etwas unsicher, indem man dieses zunächst abhängig ist von d. Fehlern d. d. B_1 und V u. ζ ... d. Versuche sind nun so angestellt worden, daß man von diesen Mängeln möglichst unabhängig war.



Es wird eine beliebig lange Röhre genommen, A_0 u. A seien 2 Querschnitte derselben, und deren Länge A_0 in einer Höhe h über A. Es werden nun mit dieser Leitungsröhre 2 beliebig enge Zweigröhren ~~verbunden~~ und einen bestimmten Querschnitt haben, verbunden und diese werden an d. andern Enden 2 oben offenen Glasröhren gebildet, d. unten einander stehen. So wird dann d. Wasser in diesen Glasröhren verschieden hoch stehen. Nun besteht eine ganz einfache Beziehung zwischen d. Differenz dieser Wasserhöhen und d. gesamten Widerstandshöhe für d. Rohrstrecke $A_0 A$. Es sei p_0 d. Dr. in A_0 und p d. in A; p' sei d. äussere atm. Druck, an d. Glasröhren sich befinden. Dann ist d. Höhe d. Wasserspiegels in d. ersten Glasröhre über A_0 einfach ein Maß für d. Ueberdruck d. Druck p_0 über p' od. es ist d. Höhe d. Wassers in d. Glasröhre über $A_0 = \frac{p_0 - p'}{\gamma}$, folglich ist d. Höhe d. Wasserspiegels in d. ersten Glasröhre über d. ersten Querschnitt d. Leitungsröhre um h grösser als $\frac{p_0-p'}{\gamma}$. Andererseits ist d. Höhe d. Wasserspiegels in d. 2ten Glasröhre über A ein Maß für d. Ueberdruck d. Druck p über p' oder $= \frac{p-p'}{\gamma}$. Zieht man d. Höhe d. Wasserspiegels in d. 2ten Glasröhre über A ab von d. ersten über A, so erhält man d. Höhendifferenz: $h + \frac{p_0-p'}{\gamma} - \frac{p-p'}{\gamma} = h + \frac{p_0-p}{\gamma} = H$ d. h. = d. wirksamen Druckhöhe für d. Rohrstrecke $A_0 A$; die mittlere Geschw. u_0 ist $= u$, also ist $H = B$. Wählt man d. Stellen A_0 u. A so, daß d. Strecke $A_0 A$ geradlinig ist, also keine besonderen Widerstände vorkommen, so ist $B = lB_1$, also $B_1 = \frac{H}{l}$ und man wird B_1 um so genauer finden, je grösser H ist. —

Diese Versuche zur Bestimmung von B_1 sind hauptsächlich mit gusseisernen Röhren von kreisförmigem Querschnitt angestellt worden, jedoch sind auch Versuche mit gezogenen schmiedeeisernen Röhren, ferner mit Messing-, Zink-, Blei-, Asphalt-, Glas- und Holzröhren angestellt worden, welche Versuche erkennen lassen, daß bei äußerlicher Gestalt und Beschaffenheit d. Röhren, d. Material nicht viel auf d. Leitungswiderstand einwirkt; sind jedoch d. Röhren rauher, so ist d. Leitungswiderstand größer z. B. bei rauhen Holzröhren ist d. Leitungswiderstand $1\frac{3}{4}$ mal so groß, wie bei guten Eisenröhren. Sind d. Röhren

[illegible]

[illegible] $\mathfrak{B}_1 = \frac{R'U}{F}$. [illegible] $U = \pi d$ und $F = \frac{\pi d^2}{4}$ also $\mathfrak{B}_1 = \frac{R'}{r}\cdot\frac{4}{d}$.

[illegible] d [illegible] $\frac{R'}{r}$ [illegible]

[illegible] Couplet 26 von Bossut u. 18 von Dubuat [illegible] $d = 0{,}027$ bis $0{,}49$ m [illegible] $u \leqq 2$ m. [illegible] $\frac{R'}{r}$ [illegible] Wasserbaumeister Woltmann aus Hamburg; derselbe legt d. Formel zu Grunde:

$$\frac{R'}{r} = a u^n$$

[illegible] $n = \frac{7}{4}$; einige Jahre später 1796 [illegible] Eytelwein [illegible] $n = \frac{35}{18}$ [illegible] St. Venant zu Grunde [illegible]

$$\frac{R'}{r} = 0{,}00029556\, u^{\frac{7}{4}} \quad (\text{Längeneinheit} = \text{m}).$$

Später im Jahre 1802 legte zuerst Prony eine andere Formel zu Grunde u. setzte

$$\frac{R'}{r} = au^2 + bu$$

worin zu setzen ist: $a = 0{,}000348$ und $b = 0{,}0000173$.

Auch Eytelwein [illegible] $a = 0{,}000280$ und $b = 0{,}0000224$.

d'Aubuisson [illegible] 51 [illegible] $a = 0{,}000343$ und $b = 0{,}0000188$.

Weisbach [illegible]

$$\mathfrak{B}' = \zeta \frac{u^2}{2g}$$

, worin ζ d. [illegible]

[illegible] d [illegible]

$$\mathfrak{B}' = \frac{\lambda}{d}\frac{u^2}{2g}$$

[illegible] λ [illegible]

Setzt d. Vergleich man d. beiden Ausdrücke für $\mathfrak{R}$ mit einander, so folgt:

$$\lambda = \frac{2g}{u^2}\,\frac{4\mathfrak{R}'}{d} = \frac{8g}{u^2}\,\frac{\mathfrak{R}'}{r}.$$

Wenn also wie nach Prony $\frac{\mathfrak{R}'}{r} = au^2 + bu$ gesetzt wird, so ist $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{u}$, wo $\alpha = 8ga$ und $\beta = 8gb$ ist. Nachdem nun Weisbach außer diesen 51 Versuchsreihen noch 12 andere Versuche mit hinzuzog, von denen 11 von ihm selbst und einer von Gueymard in Grenoble angestellt sind, wobei d. Mittelgeschw. des Wassers erheblich größer war als früher, nämlich bis zu 4,6 m p. Sek., so daß nun ein weiteres Zahlenmaterial schätzbar vorhanden war. Damit bestimmte Weisbach ein genaueres Gesetz auf Grund dieser 63 Versuche. Er erkannte, daß eine bessere Übereinstimmung der Ergebnisse d. Versuche erzielt werden könnte, wenn d. Coeff. λ nicht $= \alpha + \frac{\beta}{u}$ gesetzt würde, sondern $= \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{u}}$; indem für d. Coeff. α u. β auf Grund dieser 63 Versuche mit Hilfe d. Methode d. kleinsten Quadrate ihr wahrscheinlichster Wert bestimmt wurde, fand sich:

$$\lambda = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{u}}.$$

Später sind von Weisbach Versuche angestellt worden mit Glas-, Messing- und Zinkröhren, welche eine Geschw. umfaßten von 0,1 – 2,2 m p. Sek. Obgleich diese neuen Versuche ganz genügende Übereinstimmung mit dieser Formel zeigte, ließ sich aus diesen Versuchen noch ein weiterer Einfluß erkennen; sie zeigten sich, daß λ nicht nur v. Geschwind. abhängig sei, sondern in demselben Sinne wie von u, d. h. es ist λ um so größer, je kleiner u u. d sind, wenn auch d. Einfluß d. Durchmessers nicht in so hohem Grade stattfindet, wie d. von u. —

Die ausgedehntesten Versuchsreihen sind von d. französischen Ingenieur Darcy an d. Wasserleitung Chaillot in Paris angestellt worden. Es wurden dabei im Ganzen 22 verschiedene Röhrenleitungen benutzt, welche theils aus Gußeisen, theils aus gezogenem Schmiedeeisen, theils aus Glas- u. Asphalt-Röhren bestanden. Alle diese Röhren waren ~~neu~~ u. durchweg gereinigt mit Ausnahme von 3 gußeisernen Röhrensträngen, d. schon lange im Gebrauch waren. Da diese Versuche in d. Folge am meisten benutzt werden sollen, so sollen d. Umstände zunächst charakterisiert werden, unter denen sie angestellt wurden. D. bei d. Versuchen benutzten Asphaltröhren waren von solcher Art, wie sie in Frankreich vielfach benutzt werden: sie sind aus Eisenblech zusammengebogen, am Rande vernietet, dann mit Zinn überzogen, und schließlich innen und außen mit Asphalt versehen. Die einzelnen Röhrenstücke wurden in einander eingeschoben; d. eisernen gezogenen und d. Glasröhren waren durch übergeschobene Muffen mit einander verbunden und d. Bleiröhren durch Lötung. D. Röhrenstränge, an denen d. Versuche vorgenommen wurden, waren meistens etwas über 100 m lang, nur d. Glas- und Bleiröhren waren etwa halb so lang. D. Durchmesser der einzelnen Leitungen lagen zwischen $d = 0{,}012$ bis $d = 0{,}5$ m; d. mittlere Geschw. d. Wassers lag zwischen d. Grenzen $u = 0{,}16$ m bis 5 m p. Sek. Es liegen also betreffs d. Durchmesser wie d. Geschw. zwischen ziemlich weiten Grenzen. Darcy erkannte aus seinen Versuchen nun zunächst, daß d. Leitungswiderstand in höherem Grade vom Material und vom Oberflächenzustand abhängig sei, als bisher angenommen wurde und daß d. Einfluß d. Materials mehr und mehr schwindet, je länger d. Röhren im Gebrauch sind und durch solche Verunreinigung, wie sie immer in mehr oder höherem Grade nach längerer Zeit vorkommt, soll d. Widerstandshöhe auf größer als im doppelten Grade wachsen. Diese Verunreinigung hängt jedoch von so vielen verschiedenen Umständen ab, so daß man von d. Grad d. Verunreinigung keine Vorausschätzung machen kann; überhaupt kam es Darcy nicht so sehr darauf an, d. Gesetz d. Leitungswiderstandes selbst näher zu bestimmen, als es ihm nur darauf ankam, praktisch verwendbare Regeln aufzustellen, nach welchen d. Leitungswiderstand im ursprünglichen Zustand und nach längerer Zeit Gebrauch berechnet werden kann. In diesem Sinne empfiehlt Darcy zu setzen:

$$\frac{\mathfrak{R}'}{r} = \left(0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{d}\right)u^2.$$

Diese Formel bezieht sich auf Leitungsröhren, d. schon längere Zeit in Gebrauch waren; es ist vorausgesetzt, daß hierbei $u > 0{,}2$ m sei. Es wird nach dieser Formel $\frac{\mathfrak{R}'}{r}$ ungefähr doppelt so groß gefunden, als bei neuen gußeisernen Röhren.

Mit Rücksicht auf d. Beziehung zwischen λ und $\frac{\mathfrak{R}'}{r}$, wird also hiernach λ von d. Form $\alpha + \frac{\beta}{d}$, während also, wie man früher annahm, λ nur mit abnehmender Geschw. wächst. Während nach d.

Weisbach'schen Versuchen λ mit abnehmendem u u. d wachsen würde, würde nach Darcy λ einzig und allein mit abnehmender Rauheit wachsen, wie auch von Weisbach d. Gesetz d. Abhängigkeit nicht bestimmt. Es sind nun diese Darcy'schen Versuche später von Andern benützt worden, um es zu versuchen, d. Gesetz d. Widerstandes noch zuverlässiger zu bestimmen. Zunächst ist ein solcher Versuch von Gauckler gemacht worden. Er gelangte mit d. Darcy'schen Versuchen, daß sich für $\mathfrak{B}_1$ folgende empirische Formel ergibt:

$$\mathfrak{B}_1 = \left(\frac{u^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{4}u^{\frac{1}{4}}}{\alpha\, d^{\frac{1}{3}}}\right)^4.$$

wenn u d. mittlere Geschw., d d. Rohrweite bedeutet, während α ein Coeff. ist, welcher für verschiedenartige Röhren und verschiedenen Zuständen derselben verschieden ist, und zwar bestimmt Gauckler für Asphalt- und Bleiröhren $\alpha = 7{,}0$; für Glas $\alpha = 6{,}7$; für neue Gusseisenröhren $\alpha = 6{,}6$; für gezogenes Schmiedeeisen $\alpha = 6{,}4$; für unreine Gusseisenröhren $\alpha = 5{,}5$. Demnach wäre d. ungünstigste Verhältnis d. Widerstandshöhe $\mathfrak{B}_1$ für gusseiserne Röhren in unreinem Zustande über d. gereinigten: $= \left(\frac{6{,}6}{5{,}5}\right)^4 = 2{,}07$. Vergleicht man diesen Ausdruck für d. spez. Leitungswiderstandshöhe mit d. Ausdruck für $\mathfrak{B}_1 = \frac{\lambda}{d}\frac{u^2}{2g}$, dessen wir uns bis jetzt vorzugsweise bedienen wollen, so folgt daraus:

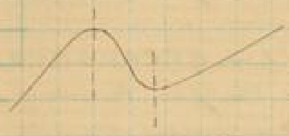
$$\lambda = \frac{2g}{\alpha^4}\,\frac{\left(1 + \frac{\alpha}{4u^{\frac{1}{4}}}\right)^4}{d^{\frac{1}{3}}}.$$

Demgemäß würde d. Coeff. λ in Übereinstimmung mit d. früher besprochenen Erfahrungen durchaus um so größer sein, je kleiner u ist; was aber d. Abhängigkeit von d betrifft, so ist sie eine zusammengesetzte; d. Zähler und d. Nenner wächst mit d, es zeigt sich jedoch, daß es für jede Geschw. einen bestimmten d gibt, für welchen λ ein Min. wird. Wenn man bei gegebenem Werth von u diesen Ausdruck als eine Funktion von d betrachtet und untersucht, für welchen Werth von d dieser Ausdruck ein Min. wird, so findet man $d = \frac{4}{11}u^{\frac{1}{4}}$. Es würde also, was kaum anzunehmen ist, nach dieser Formel für jede mittlere Geschw. ein besonderer Röhrendurchmesser resultieren, für welchen d. Geschw. am vortheilhaftesten wäre,

also für:	$d =$	0,346	0,364	0,432	0,514 m
für:	$u =$	0,5	1	2	4

Diese Formel erscheint auch kaum empfehlenswerth für d. Gebrauch, wenngleich kann sie als d. [illegible] Abhängigkeitsgesetz d. Widerstandshöhe betrachtet werden. Auch ist zu beachten, daß d. Coeff. α, welche für d. verschiedenen Rohrarten verschieden sind, nicht nur in sich begreifen d. Einfluß d. verschiedenen Materials und d. verschiedenen Oberfl.-Beschaffenheit, sondern auch d. bei diesen verschiedenen Arten vorkommenden Abweichungen von d. cylindrischen Form, welche mehr oder weniger zufällig sind. Zur Bestimmung von α sind von Gauckler durchaus nicht d. Versuche mitgetheilt worden, welche von keinem theoretischen Werth sind, namentlich d. Versuche an Glasröhren sind nicht gut zu brauchen, da dieselben immer nicht [illegible] sind, so daß d. Durchmesser zwischen 53 u. 44 mm schwankte, womit also unbedingt [illegible] Querschnittsänderungen verbunden sind. Ebenso verhält es sich mit d. Asphaltröhren; diese konnten kaum mit Sicherheit benützt werden, um d. Abhängigkeitsgesetz von $\mathfrak{B}_1$ zu ermitteln, weil d. Asphalt nur anfangs in geschlossenem Zustand aufgetragen wurde und nicht immer [illegible] wurde. Auch d. Versuche mit d. gezogenen Röhren haben kaum verwendet werden dürfen, weil d. Schweißnähte schon einen merklichen Einfluß ausüben konnten. D. Formel ist demnach als theoretisch nicht gut verwendbar. —

D. Leitungswiderstandshöhe $\mathfrak{B}_1$ kann auch von anderen Umständen abhängig sein. Daß zunächst d. Adhäsionsfähigkeit [illegible] dazu beiträgt, ist klar; jedoch wollen wir uns hier nur auf d. Versuche mit Wasser beziehen. D. Größe $\mathfrak{B}_1$ kann auch von d. Wärmezustande abhängen, welcher wiederum von d. Temperatur abhängt. Daß d. Temp. keine merkliche Änderung ausübt, ist schon gesagt, d. [illegible] also nur eine Änderung von $\mathfrak{B}_1$ durch d. Temperatur denkbar. Es wurde auf diesen Umstand schon im Jahre 1800 von Gerstner hingedeutet, wie zum Beweis [illegible], daß d. Menge d. durch eine enge Röhre abfließenden Wassers unter sonst gleichen Umständen sich verdoppeln kann, wenn d. Temperatur um 30° C. wächst. Dieser merkliche Einfluß d. Temperatur ist später von Oberbaurath Hagen in Berlin beobachtet worden, freilich auch nur mit Röhren von geringen Weiten [illegible] in d. Versuchsanordnung [illegible] und für wichtige Geschw. Er benützte bei seinen hauptsächlichen Versuchen 3 verschiedene Röhren; sie waren alle aus Messingblech zusammengelötet und über Walzen möglichst cylindrisch ausgezogen. Diese 3 sehr cylindrischen, innerlich glatten Röhren hatten einen Durchmesser von 2,8, 4 u. 6 mm, d. engste war 0,5 m lang, d. beiden anderen über 1 m. d. Geschw. u bewegten sich in d. Grenzen 0,07 – 0,88 m und d. Temperatur d. Wassers wurde variirt über 67° R. Es zeigte sich nun ein überraschendes Verhalten: Wenn unter sonst gleichen Umständen d. Temperatur d. durchfließenden Wassers successive höher wurde, so nahm zuerst d. [illegible] durchfließende Wassermenge, also u, bis zu einem gewissen max. zu; wurde dann ferner d. Temperatur d. Wassers weiter erhöht, unter sonst gleich bleibenden Umständen, so nahm d. Wassermenge und mithin u ab und zwar verhältnismäßig schnell [illegible], bis zu einem gewissen min. Wurde ferner [illegible] d. Wassermenge wieder [illegible], so ist d. Geschw.-Curve, deren Abscissen d. Temperaturen und deren Ordinaten d. Geschw. u sind, ungefähr von beistehender Gestalt. Bei d. beiden



Temperaturen, die d. max. u. min. von u entsprechen, liegen 10° bis 20° auseinander. d. Lage dieser Temperaturen ist aber wesentlich abhängig von d. Röhren, auch von d. mittleren Geschw. Je größer u u. d waren, desto tiefer lagen diese Temperaturen; wachsen u u. d über gewisse Grenzen, so kann es vorkommen, daß diese Temperaturen bis unter d. Gefrierpunkt sinken, so daß dann überhaupt nur d. zweite Abschnitt dieser Geschw.-Curve zu Tage tritt. Dies ist nun unter solchen Umständen, d. in d. Praxis vorkommen, fast immer d. Fall. Es würden diese beiden Temperaturen unter d. Nullpunkt fallen, sobald nur $ud > 0{,}00375$ ist, und dies wird bei d. Verhältnissen d. technischen Anwendungen fast immer d. Fall sein. Für diesen sogenannten 2. Abschnitt d. Geschw.-Curve [illegible] d. ersten Abschnitt, d. h. d. [illegible] Abschnitt. – Es zeigt sich nach d. Hagen'schen Versuchen, [illegible] sie ergeben werden mit d. Formel:

$$B_1 = \frac{k}{d}\frac{u^2}{g};\qquad k = \frac{0{,}000496\,(22{,}6 - \sqrt{t})}{\sqrt{ud}},$$

wenn t d. Temperatur d. Wassers in Reaumur'schen Graden bedeutet. Es würde daraus d. einfachere Formel: $k = \frac{0{,}01}{\sqrt{u}}$ entsprechen für $t = 6°$ R. Außerdem ist nach diesen Hagen'schen Versuchen d. Geschw. von u u. d abhängig; für d. ersten Abschnitt d. Geschw.-Curve, also für solche Temperaturen, d. kleiner sind als d. dem max. von u entsprechenden [illegible] Leitungswiderstand entsprechen, ergab sich ein anderes Gesetz dieses Widerstandes. Hagen stellt d. Widerstandshöhe für diesen Fall in Grenzen mit verschiedenen Gliedern fest, von denen aber eins von bedeutend überwiegender Größe ist, nämlich: $B_1 = b\frac{u}{d^2}$ unter b einen von d. Temperatur abhängigen Coeff. verstanden, wonach also: $k = \frac{\beta}{ud}$ ist; d. Coeff. b u. β sind daher in anderer Weise von d. Temp. abhängig als d. Ziffer von k für d. 2. Abschnitt [illegible], und zwar ergab sich für d. 1. Abschnitt:

$$\beta = \beta_0(\sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{t}). -$$

Man hat also nun [illegible] eine [illegible] Widerstandsformeln, und es fragt sich, welcher Formel man d. Vorzug geben soll, wenn man d. beiden [illegible]: [illegible] und [illegible] mit einander verbinden kann, so ist dies natürlich am besten. Dies hat Hagen gethan, nämlich d. Darcy'schen Versuche zu benutzen, um daraus d. Abhängigkeitsgesetz d. Widerstandes in wissenschaftlicher Weise aufzuklären und doch eine Formel zu erlangen, d. für d. praktischen Gebrauch geeignet ist. Hagen ging von d. Ansicht aus, daß d. Zweifel, welche bis jetzt bezüglich auf d. Leitungswiderstand [illegible] bestanden, daher [illegible], daß man bei d. praktischen Versuchen nicht sorgfältig genug alle d. Umstände mit gemessen hat, d. nicht zum Gebrauch geeignet waren. Hagen hat nun alle diejenigen von d. Darcy'schen Versuchen ausgeschieden, welche nicht d. volle Genauigkeit hatten, er wurde zunächst ausgeschieden d. Glasröhren, d. Asphaltröhren und endlich auch d. gezogenen Röhren [illegible] Röhren; es blieben also nur d. Versuche übrig mit d. [illegible] Röhren, ferner mit 3 [illegible] und mit einer gezogenen eisernen Röhre von größerem Durchmesser, im Ganzen 8 [illegible] Leitungsröhren, eine [illegible] und eine gezogene Röhre. Mit diesen verschiedenen Röhren lagen nun 87 brauchbare Beobachtungen vor, um einen Ausdruck für d. Leitungswiderstandshöhe zu gewinnen. Bei diesen Versuchen lag d. mittlere Geschw. zwischen d. Grenzen

$u = 0{,}16$ bis $5\,m$ p. Sek. und d. Durchmesser zwischen $d = 0{,}014$ bis $0{,}5\,m$. Unter verschiedenen empirischen Formeln zur Darstellung d. [illegible] d. Größe B_1 zeigte sich am brauchbarsten folgende:

$$B_1 = a\frac{u^2}{d} + b\frac{u}{d^2}$$

wenn mit d. 87 Versuchen sich ergaben:

$$a = 0{,}0011193 \quad \text{und} \quad b = 0{,}0000005336.$$

[illegible] Hagen diesen unmittelbar aus d. [illegible] Darcy'schen [illegible] abgeleiteten Werth von a u. b [illegible], um sie mit seinen eigenen Beobachtungen [illegible] in Übereinstimmung zu bringen. [illegible] Formel für B_1, [illegible] d. Reihe ist, [illegible] d. 2te Glied [illegible] ist; [illegible] bei solchen Versuchen, [illegible] Röhren [illegible] wurden, B_1 genau bestimmt werden kann. [illegible] d. Versuchen von Hagen [illegible] d. Röhrenweiten nur einige mm. und [illegible] Hagen [illegible] d. Temp. t abhängigen Coeff. b:

$$b = 0{,}000005871 - 0{,}000000267\,t + 0{,}000000000735\,t^2$$

unter t d. Temp. in Reaumur'schen Graden verstanden. [illegible] Werth von b, d. aus d. Hagen'schen Versuchen abgeleitet wird, [illegible] Werthe von b aus Darcy [illegible], so müßte $t = 2{,}11°$ R. sein; [illegible] d. Darcy'schen Versuche, welche mit d. [illegible] Röhrenleitungen angestellt sind [illegible] auf b [illegible] angestellt wurden in d. Monaten October u. Mai; [illegible] d. Temp. [illegible] höher hat als $2{,}11°$ R., setzt man aber in d. Hagen'schen Versuchen $t = 10°$, so ergibt sich d. wahrscheinlich richtigen Werth:

$$b = 0{,}000003936.$$

[illegible] Werth von b setzt nun Hagen [illegible] in d. Formel für B_1 ein, wonach folgt: $a = 0{,}0012017$. [illegible] Werth von b ist [illegible] d. Unterschied [illegible] d. Werth von $b = 0{,}0000014$ [illegible] $= 0{,}0000010$. [illegible]

[illegible] B_1 d. [illegible], während $a = 0{,}0012017$ ist und b von d. Temp. abhängt, während für $t = 10°$ R. $b = 0{,}000003936$ ist.

[illegible] d. Formel: $B_1 = \frac{\lambda}{d}\frac{u^2}{2g}$ [illegible], dann ist:

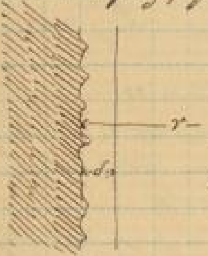
$$\lambda = 2g\left(a + \frac{b}{ud}\right) \quad \text{oder} \quad = \alpha + \frac{\beta}{ud} \quad \text{wenn:}$$

$$\alpha = 0{,}023577 \quad \text{und} \quad \beta = 0{,}00011519 - 0{,}000004191\,t + 0{,}00000009229\,t^2.$$

[illegible] t in Celsius'schen Graden [illegible] mittlere Temp. [illegible] $= 10°$ C. [illegible] mittleren Werth von β: $\beta = 0{,}0000251$.

[illegible] Formel mit d. Darcy'schen u. d. Hagen'schen Versuchen [illegible] d. Röhren [illegible] Werth von λ [illegible]. Man muß also diesen Werth λ etwa um 20% vergrößern. [illegible]

[illegible] d. Ausdruck von B_1, also $a\frac{u^2}{d} + b\frac{u}{d^2}$ und also auch d. [illegible] Ausdruck $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{ud}$ [illegible] d. Ausdruck mit einem einfachen und wahrscheinlichen Darstellung von d. [illegible] d. Leitungswiderstandes im Zusammenhang gebracht werden kann. d. Widerstand [illegible] betrachtet werden, indem derselbe herrührt teils von d. äußeren Reibung, teils von d. inneren Reibung d. Wassers; demgemäß möge nun gesetzt werden $B_1 = E_1 + J_1$, wo E_1 denjenigen Bestandteil von B_1 bedeutet, d. von d. äußeren Reibung herrührt und J_1 d. von d. inneren Reibung herrührenden Bestandteil von B_1. D. äußere Reibung, welche d. Bestandteil E_1 entspricht, ist, insofern sie von d. inneren Reibung unabhängig ist, zurückzuführen auf gewisse niemals ganz fehlende Hervorragungen und Vertiefungen; im stark vergrößerten Maßstabe wird



d. Röhrenwand etwa wie nebenstehend aussehen. Wenn nun d. Wasser an d. Röhrenwand entlang fließt, so wird durch diese Hervorragungen eine plötzliche Änderung d. Geschw.-Größe also auch d. Geschw.-Richtung stattfinden; stößt d. Wasser gegen eine solche Hervorragung, so wird es gewissermaßen reflektiert gegen d. Innere hin. Wenn genauer aufzufassen kann sich kompliziertere Vorgänge. Da dieser tatsächliche Vorgang unmöglich näher untersucht werden kann, so kann man sich dadurch helfen, daß man d. Einfluß dieser äußeren Reibung zunächst als sich erstreckend betrachtet auf eine innerliche Wasserschicht von sehr kleiner Dicke. Denken wir uns um d. Axe d. Röhre herum eine zylindrische Fl. beschrieben mit einem Radius, d. etwas kleiner ist als d. innere Radius d. Röhre, so daß zwischen dieser eine sehr dünne Wasserschicht übrig bleibt. Es fließe hier d. Wasser mit einer mittleren Geschw. w', d. Dicke dieser Schicht sei δ. Diese Dicke ist aber nicht konstant, sie schwankt zwischen einem min u. max und es sei d. durchschnittliche min $= \delta_1$ u. max $= \delta_2$. An d. Stelle, wo d. Dicke dieser Schicht am kleinsten $= \delta_1$ ist, wird d. Geschw. d. Wassers am größten $= w_1$ sein und dort wo d. Dicke am größten $= \delta_2$ ist, wird d. Geschw. am kleinsten $= w_2$ sein. So oft nun d. max.-Geschw. w_1 plötzlich in d. min. Geschw. w_2 übergeht wird ein Widerstand entstehen, welcher gemessen wird durch d. Widerstandshöhe $\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$. Bezeichnet man nun d. Widerstandscoeff. bezogen auf d. mittlere Geschw. w' mit ζ' so kann man setzen:

$$\zeta' \frac{w'^2}{2g} = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$$ so ist also $$\zeta' = \left(\frac{w_1}{w'} - \frac{w_2}{w'}\right)^2$$ ist.

od. da d. Geschw. sich umgekehrt wie d. Dicken d. Wasserschicht verhalten:

$$\zeta' = \left(\frac{\delta}{\delta_1} - \frac{\delta}{\delta_2}\right)^2.$$

Angenommen es kommen auf d. Längeneinheit für irgend einen Wasserfaden, d. durch d. Röhre hinfließt, eine plötzliche Querschnittsänderung n mal vor, so wird also d. Widerstandshöhe pr. Meter Länge $= n \zeta' \frac{w'^2}{2g}$ sein, wo sich d. Faktor von n auf eine einmalige plötzliche Geschw.-Änderung bezieht. Dieselbe stellt d. durchschnittlichen Verlust an Arbeit pr. 1 Kgr. d. an d. Oberfl. hinfließenden Wassers. Dieser Arbeitsverlust bleibt aber nicht beschränkt auf d. an d. Oberfl. fließende Wasser, sondern es findet ein beständiger Austausch zwischen d. innern und äußern Wasser statt. Um nun diesen Verlust pr. 1 Kgr. d. ganzen in d. Röhre fließenden Wassers zu erhalten, muß dieser Arbeitsverlust multipliziert werden mit d. Verhältnis derjenigen Wassermengen, welche gleichzeitig in dieser Oberfl.-Schicht und in d. ganzen Röhre sich strömend bewegen. Es ist aber d. Wasservolumen, welches durch einen Querschnitt an dieser äußeren Oberfl.-Schicht hinfließt $= 2\pi r \delta w'$, wenn r d. Radius d. Röhre ist. Dagegen ist d. dasjenige Wasservolumen, welches pr. Sek. durch jeden einen Querschnitt d. ganzen Röhre hindurchfließt = d. Produkt aus πr^2 und d. mittl. Geschw. u; es ist also d. Verlust an lebendiger Kraft pr. 1 Kgr. d. ganzen in d. Röhre strömenden Wassers $= n \zeta' \frac{w'}{2g} \frac{2\pi r \delta w'^2}{\pi r^2 u}$ insoweit er von d. äußeren Reibung abhängt, also

$$E_1 = \frac{n \delta \zeta'}{g} \frac{w'^3}{r u}$$ od. wenn $\frac{w'}{u} = \varepsilon$ gesetzt wird und $r = \frac{d}{2}$

so folgt dieser Verlust: $$E_1 = \frac{2 n \delta \varepsilon^3 \zeta'}{g} \cdot \frac{u^2}{d}$$

Dieses ist ein Ausdruck von d. Form $a\frac{u^2}{d}$ also übereinstimmend mit d. ersten Ausdruck in d. Hagen'schen Formel, wenn

$$a = \frac{2 n \delta \varepsilon^3}{g} \left(\frac{\delta}{\delta_1} - \frac{\delta}{\delta_2}\right)^2$$ gesetzt wird. Aus einer Berechnung von a kann natürlich keine

Null sein, dasselbe läßt sich nur durch Versuche ermitteln. – Was d. 2te Bestandteil dieser Größe B. betrifft, so gestattet diese eine noch einfachere theoretische Deutung. Zu dem Ende nehmen wir nach an d. Fundamentalgleich. für d. Untersuchung [illegible] Beweg. in Bewegungszustande befindlichen Wassers. Diese Fundamentalgleich. waren 3, die sich beziehen auf d. Beschl. nach d. Bewegungsgesetz d. Fl. im Sinne d. Achse und im Sinne d. Querschnitts nach d. Richtung d. Krümmungs- und d. Normalebene. D. erste von diesen 3 war, wenn ich hier an Stelle d. Buchstabens, womit früher eine beliebige Geschw. bezeichnet war, jetzt d. Buchstaben w setzen werde, wo w also eine beliebige Geschw. ist:

$$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{dp}{ds}\right) = w\frac{dw}{ds} \qquad \text{(Seite 22)}$$

Hierin bedeutet K_s d. Comp. d. beschleunigenden Massenkraft im Sinne d. Achse, R_s d. Comp. d. inneren Reibung pr. Volumeneinheit in demselben Sinne und ds ein Längenelement d. Achse, p d. Pr. und μ d. spez. Masse. Von d. äußeren Massenkraft wollen wir jetzt absehen, also eine horizontale Röhre voraussetzen, dann ist also $K_s = 0$. Hat es sich ferner hier gehandelt um d. Best. in einer zylindrischen Röhre, so wird w nur von Punkt zu Punkt eines Querschnitts sich ändern, längs d. Achse aber nicht, so daß $\frac{dw}{ds} = 0$ ist. Hieraus folgt dann:

$$R_s = \frac{dp}{ds}.$$

Die Achsen sind hier alle gerade parallele Linien, d. Querschnitte also ∥ Ebenen, es ist also d. Pr. von Punkt zu Punkt eines Querschnitts nur insofern veränderlich, als d. äußere Massenkraft diese Veränderlichkeit bedingt; wenn hier aber von d. Wirkung d. Schwere abgesehen wird, wie namentlich dann, wenn d. Querschnitt verhältnismäßig klein im Vergleich zur Druckhöhe ist, so wird p eine Größe nur von s sein, also:

$$R_s = \frac{dp}{ds}.$$

Für diesen Differentialquotienten kann man auch schreiben $\gamma\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds}$; nun ist $\frac{p}{\gamma}$ d. Druckhöhe in d. betreffenden Querschnitt, also $\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds}$ d. Zunahme d. Druckhöhe pr. Längeneinheit, $\div\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds}$ also d. Abnahme d. Druckhöhe in d. Röhre pr. Längeneinheit in so weit sie abhängt von d. inneren Reibung. Dieser ist aber d. 2te Bestandteil in B, also J. folglich:

$$R_s = +\gamma\frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds} = \div\gamma J.$$

Nun ist aber für R_s früher ein allgemeiner Ausdruck entwickelt worden, d. eine einfache Form für d. vorliegenden Fall angenommen hatte, nämlich:

$$R_s = \frac{R}{y}\frac{d}{dy}\left(y\frac{dw}{dy}\right) \qquad \text{(Seite 25)}$$

wenn R d. Const. d. inneren Reibung, w d. Geschw. in d. Entfernung y von d. Röhrenachse bedeutet. Hieraus folgt also:

$$\frac{d}{dy}\left(y\frac{dw}{dy}\right) = \div\gamma\frac{J}{R}y$$

und durch Integration:

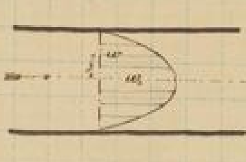
$$y\frac{dw}{dy} = \div\gamma\frac{J}{R}\frac{y^2}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{dw}{dy} = -\gamma\frac{J}{R}\frac{y}{2}$$

D. Integrationskonstante ist hier $= 0$, weil für $y = 0$ auch $\frac{dw}{dy} = 0$ sein muß, da in d. Röhrenachse d. Geschw. ein max ist. Durch nochmalige Integration folgt:

$$w = \div\gamma\frac{J}{4R}y^2 + Const.$$

Die Integrationskonstante ist offenbar nichts anders als d. Geschw. für $y = 0$, also d. Geschw. in d. Röhrenachse, welche mit w_0 bezeichnet sei. So ist dann einfach:

$$w = w_0 - \gamma\frac{J}{4R}y^2 \quad (+)$$



Daraus erkennt man zunächst, daß wenn man sich in allen Punkten eines Querschnitts auf gerade Linien ∥ d. Röhrenachse gezogen denkt und darauf Strecken abträgt, d. proportional d. Geschw. w sind, so daß d. Endpunkte dieser Strecken in einem Umdrehungsparaboloid liegen, entsprechend d. Gl.: $w_0 - w = \gamma\frac{J}{4R}y^2$. Demnach ist $(w_0 - w)$ proportional y^2. Die [illegible] mit w' bezeichnete Geschw. am Rand ist:

$$w' = w_0 - \gamma\frac{J}{4R}r^2$$

und daraus ergibt sich:

$$w - w' = \gamma\frac{J}{4R}(r^2 - y^2). —$$

Es kommt nun aber auf eine Beziehung zwischen w und d. mittleren Geschw. u an. Letztere wird gefunden werden wenn [man] d. Querschnitt in Elemente zerlegt denkt, d. eine ringförmige Gestalt haben, deren jedes mit seiner Geschw. w multipliziert und d. Summe dieser Produkte durch d. ganzen Querschnitt dividirt, also:

$$u = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi y\, dy\, w.$$

Nimmt man d. Constanten heraus und setzt für w seinen Ausdruck, so folgt:

$$u = \frac{2}{r^2}\int_0^r \left[w' + \gamma\frac{J_1}{4R}(r^2-y^2)\right] y\,dy$$

dieses Integral ausgeführt, liefert:

$$u = \frac{2}{r^2}\left[w'\frac{r^2}{2} + \gamma\frac{J_1}{4R}\left(r^2\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\right] = w' + \gamma\frac{J_1}{8R}r^2 = w' + \frac{\gamma J_1}{32R}d^2$$

$$\text{also}\quad J_1 = \frac{32R}{\gamma}\cdot\frac{u-w'}{d^2} = \frac{32R(1-\varepsilon)}{\gamma}\,\frac{u}{d^2} = b\frac{u}{d^2}$$

wenn man wieder $\frac{w'}{u} = \varepsilon$ setzt und wenn $b = \frac{32R(1-\varepsilon)}{\gamma}$ bedeutet, genau so wie es d. [illegible] d. [illegible] Formel verlangt. [illegible] d. Werte [illegible] eine [illegible] Berechnung d. Coeff. b, denn sowohl R als auch ε [illegible] sich für einen [illegible] Bestimmung, so ist b nur durch Versuche bestimmt werden kann. b ist [illegible] von d. Temperatur [illegible] abhängig, da d. spez. Gew. γ von d. Temp. abhängig ist. –

In d. Praxis soll immer d. spez. Leitungswiderstandshöhe unter d. Form:

$$B_1 = \lambda\frac{1}{d}\frac{u^2}{2g}$$

gebraucht werden, so ist $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{d}$ und d. [illegible] zwischen [illegible] $u \cdot d$ innerhalb d. gewöhnlichen Grenzen liegen, d. Werth von λ nur wenig veränderlich, gewöhnlich pflegt u zwischen d. Grenzen 0,5 – 2 m zu liegen und d. Röhrenweite d zwischen 0,05 – 0,5 m, so ist also $u\,d$ etwa zwischen d. Grenzen $\frac{1}{40}$ – 1 liegt. Berechnet man zwischen diesen Grenzen d. Werthe von λ, indem man für β diejenigen Werthe setzt, d. einer durchschnittlichen Temp. von 10° C. entsprechen, so bekommt man:

λ zwischen 0,027 – 0,024.

so ist man [illegible] für viele Anwendungen damit [illegible], einen constanten Mittelwerth von λ zu brauchen, [illegible] d. Sicherheit wegen bei d. [illegible] Gebrauch λ um einige Procente größer nehmen muß. Wenn man aber durchschnittlich λ um 20 % größer annimmt [illegible] dieser [illegible] Formel, so kann man durchschnittlich $\lambda = 0,03$ setzen.

[illegible] zu [illegible] Wasserleitungen, wie sie bei [illegible] d. ~~[illegible]~~ [illegible] Werke [illegible] [illegible] gelangen. [illegible] d. Abweichung von d. cylindrischen Form [illegible]. [illegible] Umstand [illegible] zu legen ist es angemessen ϑ größer zu setzen, als es in d. ersten Zeit d. Anlage nöthig wäre. –

Unter Umständen kommt es vor, [daß] d. Röhre einen rechteckigen Querschnitt hat. Für diesen Fall liegen [illegible] Erfahrungen bezüglich d. Leitungswiderstandes nicht vor und es ist [illegible] anzunehmen, d. Leitungswiderstand einer solchen [illegible] Röhre gleich zu setzen d. einer cylindrischen Röhre, deren Durchmesser = d. mittleren Durchmesser d. [illegible] Röhre ist. ~~[illegible]~~ [illegible] also dieser mittlere Durchmesser ist bekanntlich: $\quad d = \frac{4F}{U}$, wenn F = Inhalt d. Querschnitts und U d. Umfang ist. –

Was nun d. Fundamentalformel betrifft, welche bei d. [illegible] d. [illegible] d. Wassers in Röhren [illegible] Aufgaben benutzt wird, so war dieselbe:

$$\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - B.$$

wo u d. Geschw. am Ende, u_0 d. mittlere Geschw. am Anfange [illegible] einer Rohrstrecke bedeutet, H = wirksame Druckhöhe und B = gesammte Widerstandshöhe für diese Rohrstrecke. [illegible] d. [illegible] bis zum Ende d. Abflußröhre, so kann $u_0 = 0$ gesetzt werden. Ferner besteht d. Widerstandshöhe B aus derjenigen Widerstandshöhe, die [illegible], an gewissen Stellen [illegible] auftretenden besonderen Widerständen entspricht, und durch

d. Leitungswiderstandshöhe. Ist ζ d. Widerstandscoeff. für die besonderen Stellen auftretenden Widerstände, so ist:

$$B = \zeta\frac{u^2}{2g} + \lambda\frac{l}{d}\frac{u^2}{2g}$$

setzt man dieses ein, so erscheint d. Fundamentalgl. in d. Form:

$$\left(1+\zeta+\lambda\frac{l}{d}\right)\frac{u^2}{2g} = H$$

wenn d. wirksame Druckhöhe d. Leitung hat: $H = h + \frac{p_0-p}{\gamma}$, wenn wiederum p_0 d. äußerliche Druck an d. freien Oberfl. p d. an d. Mündung ist, während h d. Höhe d. Wasserstandes im Ausflußgefäß über d. Mittelpunkt d. Mündung od. über d. Unterwasserspiegel bedeutet.—

Wird d. ganze Gefäß in Betr. gezogen, so können wir einen Summanden K hinzu, wenn [illegible] werden soll. Bei dieser Form ist vorausgesetzt, daß d. Wasser mit d. vollen Querschnitt d. cylindrischen Röhre abfließe. Unter Umständen kann es d. Fall sein, daß d. Wasser nicht mit einem vollen Querschnitt abfließt, sondern daß d. Röhre mit einem Mundstück versehen ist, dessen Größe dann mit A bezeichnet werden soll, während F d. vollen Querschnitt d. Röhre bedeutet. Ist dies d. Fall, so sei α d. Contractions-Coeff., d. sich unter d. vorliegenden Umständen auf d. Ausfluß bezieht, ferner φ d. Geschw.-Coeff. herrührend v. d. durch diese Mündung selbst eingeschalteten Widerstand, also $\mu = \alpha\varphi$ = Ausflußcoeff. und $\frac{1}{\varphi^2} - 1$ = Widerstandscoeff., welcher dieser Mündung an und für sich entspricht, denn es ist leicht einzusehen, wie in einem solchen Fall diese Fundamentalgl. zu modificieren ist. D. Gl. drückt aus, daß d. wirksame Druckhöhe aus 2 Theilen besteht, nämlich aus $\frac{u^2}{2g}$ als Ausflußgeschw.-Höhe, $\zeta\frac{u^2}{2g}$ Widerstandshöhe, welche d. besonderen Widerständen entspricht und aus $\lambda\frac{l}{d}\frac{u^2}{2g}$ Leitungswiderstandshöhe für d. ganze Röhrenlänge l.—

Ist d. Röhre nun ferner mit einem engen Mundstück versehen, so ist d. wirksame Druckhöhe zu verwenden, um nicht nur d. Geschw. in d. Röhre zu erzeugen, sondern um d. größere Geschw., womit sie durch d. kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls hindurchfließt; dieser Querschnitt ist αA und es ist also d. Geschw. in d. kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls im Verhältniß $\frac{F}{\alpha A}$ größer als u, d.h. um d. Geschw.-Höhe $\frac{1}{2g}\left(\frac{F}{\alpha A}\right)^2 u^2$ zu erzeugen. Außerdem kann durch d. Mundstückung ein besonderer Widerstand verursacht werden entsprechend d. Widerstandscoeff. φ. Dieser Widerstandscoeff. ist dann $= \frac{1}{\varphi^2} - 1$, es ist somit dann d. wirksame Druckhöhe H im Ganzen jetzt dazu zu verwenden, um außer diesen Widerstandshöhen auch zu erzeugen diese Ausflußgeschw.-Höhe und d. Widerstandshöhe $\frac{1}{\varphi^2} - 1$, mal d. Ausflußgeschw.-Höhe. Dieser Ausdruck tritt an d. Stelle von $1\cdot\frac{u^2}{2g}$ also:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{F}{\alpha A}\right)^2 u^2\left[1+\left(\frac{1}{\varphi^2}-1\right)\right] = \left(\frac{F}{\alpha\varphi A}\right)^2\frac{u^2}{2g} = \left(\frac{F}{\mu A}\right)^2\frac{u^2}{2g}$$

demnach ist nun d. allgemeine Fundamentalgl.:

$$H = \left[\left(\frac{F}{\mu A}\right)^2 + \zeta + \lambda\frac{l}{d}\right]\frac{u^2}{2g}.$$

Wenn $A = F$, so wird auch $\mu = 1$ und d. Gl. geht dann wieder in d. frühere Form über.—

Bevor nun diese Fundamentalformel zur Lösung einiger Aufgaben benutzt werden, sollen zunächst d. in solchen längeren Röhrenleitungen vorzugsweise auftretenden besonderen Widerstände besprochen werden, auf welche sich d. Summand ζ in d. Fundamentalgl. bezieht. Solche Widerstände werden verursacht durch plötzliche Richtungsänderung und plötzliche Querschnittsänderung.

Derartige Richtungsänderungen werden namentlich verursacht durch Kniestücke und Krümmungen. Unter einem Kniestück pflegt man solches in einer Röhrenleitung eingeschaltetes Röhrenstück verstanden zu werden, in welchem d. Wasser eine Ablenkung durch einen scharfen Winkel erleidet. Es ist leicht begreiflich, daß dieser Widerstand nur durch Versuche ermittelt werden kann. In Betreff eines solchen Kniestückes hat namentlich Weißbach Versuche angestellt, wobei d. Winkel α verschiedene Werthe gegeben wurden. D. Resultate lassen sich in folgender Formel zusammenfassen:

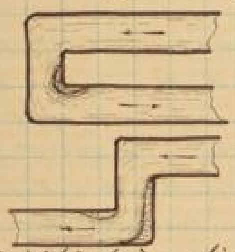
$$\zeta = 0{,}9457 \sin^2\frac{\alpha}{2} + 2{,}047 \sin^4\frac{\alpha}{2}.$$

wonach z.B. für:

für: α =	20°	40°	60°	80°	90°
sich ergiebt: ζ =	0,046	0,139	0,346	0,740	0,984

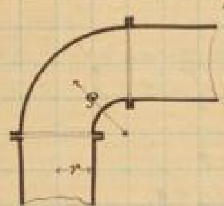
Es ist indessen wesentlich zu bemerken, daß diese Versuche sich bezogen auf $d = 0{,}03\,m$, da d. Weite d. Röhre einen wesentlichen Einfluß ausübt. Bei größeren Weiten liegen indessen Versuche nicht vor, aber mit Röhren von $d = 0{,}01\,m$ ergab sich, daß ζ unter gleichen Verhältnissen wie d ungefähr $1\frac{1}{2}$ mal so groß war. Es läßt sich also vermuten, daß mit wachsender Weite d. Widerstandscoeff. kleiner wird als in diesem Fall; jedenfalls kann man ziemlich aber sicher sein, daß man d. Widerstand nicht zu klein annimmt, wenn man diese Formel für weitere Röhren verwendet.

Bemerkenswerte Resultate ergaben sich für doppelte Knie. Hierfür stellte Weisbach Versuche an, wenn d. Gesamtablenkung 90° beträgt; dann zeigte sich, daß d. resultierende Widerstandscoeff.



für diese doppelten Knie nicht merklich größer war, als für ein einfaches Knie; wenn dagegen diese Richtungsänderung im entgegengesetzten Sinne stattfand, dann ergab sich d. resultierende Widerstandscoeff. ungefähr doppelt so groß wie für jedes einzelne Knie für sich. Wurden d. Mittellinien senkrecht zu einander, so ergab sich d. resultierende Widerstandscoeff. d. $1\frac{1}{2}$ fachen wie für jedes einzelne Knie. Es ist schon früher hervorgehoben worden, daß dieser Widerstand wahrscheinlich zurückgeführt werden muß auf eine plötzliche Querschnittsänderung. Diese Vermutung zu Grunde gelegt, läßt sich aus d. beiden ersteren Erscheinungen schließen, daß d. Querschnittsverengung durch d. 2te Knie im ersten Fall nicht merklich vergrößert wird, so daß d. Weite d. Wasserstrahls an beiden Knien gleich ist, während es sich im 2ten Fall anders verhält. Bei diesen Versuchen waren d. Widerstandscoeff. d. einzelnen Knie einander gleich. Sind aber d. Widerstandscoeff. im ersten Knie $= \zeta_1$, im 2ten $= \zeta_2$, so läßt sich vermuten, daß im ersten Fall $\zeta = \zeta_1$ ist, wenn ζ_1 d. größere d. beiden ist, im 2ten Fall ist $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ und im Falle d. rechtwinkligen Knies $\zeta = \zeta_1 + \frac{1}{2}\zeta_2$. Es bleibt noch fest zu stellen, wie lang d. Zwischenstück zwischen diesen beiden Röhren sein muß, da d. Länge desselben eine gewisse Grenze nicht überschreiten darf, denn sonst würden sich d. Knie ganz unabhängig von einander verhalten. —

Ein kleinerer Widerstand als durch eine solche Kniebiegung wird verursacht durch sogenannte Bogenröhren, d. h. durch in d. Röhren eingeschaltete Zwischenstücke von stetiger Krümmung, wodurch 2 gerade Rohrstrecken mit einander verbunden werden. Gewöhnlich ist bekanntlich d. Centriwinkel eines solchen Bogenrohres ein Kreisbogen von 90°. Für solche Krümmer, wobei also d. Mittellinie ein Kreisbogen ist, hat Weisbach aus seinen eigenen Versuchen und aus Versuchen von Dubuat folgende Formel hergeleitet:



$$\zeta = 0{,}131 + 1{,}847\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{7}{2}}$$

wo r d. Radius d. Querschnitts und ρ d. Krümmungsradius d. Mittellinie d. Krümmers bedeutet. —

Weisbach hat auch Versuche angestellt bei Röhren mit rechteckigem Querschnitt. Wenn dabei mit r d. Breite d. Rechtecks bezeichnet wird, d. senkrecht zu d. Ebene d. Mittellinie d. Krümmers gestellt ist, so war für diesen Fall zu setzen:

$$\zeta = 0{,}124 + 3{,}104\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{7}{2}}.$$

Für d. ersten Fall d. Kreisquerschnitts ergab sich z. B.:

für $\frac{r}{\rho}$ =	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
ζ =	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440.

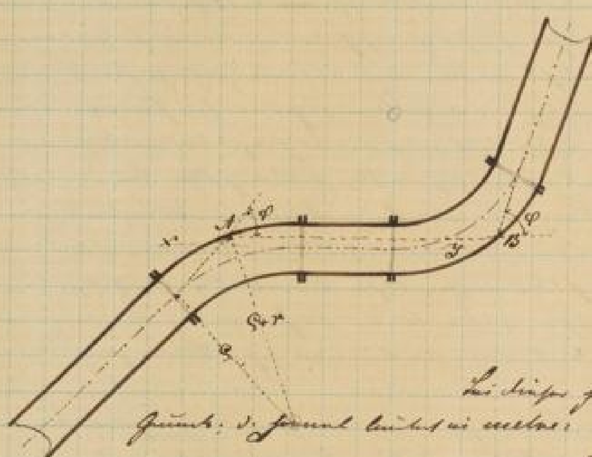
Eine große Zuverlässigkeit ist übrigens diesen Zahlen nicht zuzuschreiben, weil eine Untersuchung d. Versuchsresultate noch zu wünschen übrig läßt. Ist d. Mittellinie d. Krümmers ein kleinerer Bogen als von 90°, so läßt sich annehmen, daß ζ kleiner sein wird; im entgegengesetzten Verhältnis ist jedenfalls noch unbekannt, daß wahrscheinlich d. Widerstandscoeff. d. Centriwinkel nicht einfach proportional gesetzt werden kann, weil es sich gezeigt hat, daß wenn d. Centriwinkel = 180° gemacht wurde, d. Widerstands-Coeff. nicht merklich größer war wie für einen Winkel von 90°; dagegen wenn 2 solche Krümmer im entgegengesetzten Sinne sich anschließen, so wird d. Widerstandscoeff. ungefähr doppelt so groß. Bei praktischen Ausführungen findet man gewöhnlich diese Krümmer mit einem solchen Radius gekrümmt, so daß wenn man d. Mittellinien d. beiden geraden Strecken verlängert, dieselben sich in d. Oberfl. d. Krümmungsscheitels schneiden. Wird eine solche Krümmung zu Grunde gelegt, so ist:

$r = \rho(\sqrt{2}-1)$ also $\frac{r}{\rho} = 0,4142.$ Setzt man diesen Werth in d. Weisbach'sche Formel ein, so folgt:

$$\zeta = 0,215. —$$

Außer solchen Richtungsänderungen einer Röhre, die sich auf kurze Röhrenstrecken concentriren, kommt es auch vor, daß ein Leitungsrohr auf einer größeren Strecke bogenförmig fortgeführt wird, wie z.B. ein spiralförmig gewundenes Rohr eines Kühlapparates etc.; diese Fälle können nicht mit d. Weisbach'schen Formel berechnet werden, denn es würde dann für $\frac{r}{\rho} = 0$ $\zeta = 0,131$ werden; für diesen Fall hat man Dubois'sche Formel:

Ist so eine Leitungsröhre in irgend einer Weise gekrümmt und an beiden Enden schließen sich gerade Strecken an, denkt man sich d. Mittellinie d. geraden Rohrstrecke an einem Ende verlängert bis sie d. Rohrwand trifft, zieht von diesem Punkte eine Tangente an d. Mittellinie bis sie abermals d. Rohrwand trifft bis d. letzte Punkt wieder in d. anderen Rohrmittellinie fällt, so erhält man eine Reihe von Ablenkungswinkel φ. Nimmt man bei dieser Zeichnung an einem Punkt A, wo anfangs nur ... gezeichnet ..., wie man d. Tangente zieht, so zieht man d. Tangente xy an d. Stelle d. Mittellinie, wo d. Krümmungsradius $= \infty$ ist und zieht dann $AB \parallel xy$. Werden diese Winkel φ bestimmt so ergibt sich:



$$B = \frac{\Sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{3000}\, u^2$$ für ...

Bei dieser Formel von Dubois liegt indessen d. Pariser Zoll zu Grunde. d. Formel lautet in Metern:

$$B = 0,0123\, u^2\, \Sigma(\sin^2 \tfrac{\varphi}{2})$$

Setzt man diese Widerstandshöhe $= \zeta \frac{u^2}{2g}$, so folgt:

$$\zeta = 0,2413\, \Sigma(\sin^2 \tfrac{\varphi}{2}).$$

Ist d. Krümmungshalbmesser constant $= \rho$, dann ist $\Sigma \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2}$, wenn α d. gesammte Ablenkungswinkel ist, also $\frac{\alpha}{\varphi}$ d. Zahl d. Ablenkungswinkel. Außerdem ergibt sich $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\rho}{\rho+r}$ aus d. Zeichnung. Wenn z.B.:

$\frac{r}{\rho} =$	0,05	0,1	0,15	0,2	
so ist $\zeta =$	0,0632	0,0850	0,0994	0,1099	mal $\frac{\alpha}{100}$
und für $\alpha = 90°$: $\zeta =$	0,057	0,076	0,089	0,099.	

für $\alpha = 90°$ kann man diese Werthe vergleichen mit denen, die sich aus d. Weisbach'schen Formel $\zeta = 0,131 + 1,847\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{7}{2}}$ ergeben sollten, denn dann für $\frac{r}{\rho} = 0,2$ .. $\zeta = 0,138.$

Nun wird man für alle Fälle sicher gehen, wenn man erst von d. ... $\frac{r}{\rho} = 0,2$ sich d. Weisbach'schen Formel bedient und für kleinere Werthe von $\frac{r}{\rho}$ d. Dubois'schen, wenn nicht man dann d. Coeff. von ζ so ..., daß man mit d. Weisbach'schen Formel für $\alpha = 90°$: $\frac{r}{\rho} = 0,2$ entspricht; das ist d. Fall, wenn man setzt:

$$\zeta = 0,337 \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

dann wurde d. Coeff. von ζ größer und d. letzte $= 0,138$. Entsprechend für einen anderen Krümmungswinkel ist dann zu schreiben: $\zeta = 0,337\,\frac{\alpha}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2}$ wenn $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\rho}{\rho+r}$.

Hiernach ist z.B. für:

$\frac{r}{\rho} =$	0,05	0,1	0,15	0,2	
$\zeta =$	0,0882	0,1188	0,1389	0,1534	mal $\frac{\alpha}{100}$.
und für $\alpha = 90°$ $\zeta =$	0,079	0,107	0,125	0,138	

Ist das Verhältnis von $\frac{r}{\rho}$ sehr klein, so kann man sich auch eine einfache Formel für ζ entwickeln, namentlich [illegible] der Krümmungswiderstand ζ unmittelbar als Funktion dieses Verhältnisses $\frac{r}{\rho}$ entwickelt wird. Setzt man dieses sehr kleine Verhältnis $\frac{r}{\rho} = x$, so ist $\cos\frac{\varphi}{2} = (1+x)^{-1}$

$$\text{also } \sin^2\frac{\varphi}{2} = 1-(1+x)^{-2} = 2x\left(1-\tfrac{3}{2}x+\dots\right) \quad \text{also } \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2x}\left(1-\tfrac{3}{4}x+\dots\right)$$

$$\text{und demnach } \frac{\varphi}{2} = \arcsin\sqrt{2x}\left(1-\tfrac{3}{4}x+\dots\right) = \sqrt{2x}\left(1-\tfrac{5}{12}x+\dots\right)$$

$$\text{demnach } \frac{1}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{2x}{2\sqrt{2x}}\cdot\frac{1-\frac{3}{2}x+\dots}{1-\frac{5}{12}x+\dots} = \sqrt{\frac{x}{2}}\left(1-\tfrac{13}{12}x+\dots\right)$$

Wenn man nun die hier stehende Größe einfach [illegible], dass man statt $-\frac{13}{12}x$ einfach x setzt, so ist:

$$\frac{1}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2} = (1-x)\sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$\text{also } \zeta = \frac{0{,}337}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{180}\cdot\alpha(1-x)\sqrt{x} = 0{,}00416\,\alpha\left(1-\frac{r}{\rho}\right)\sqrt{\frac{r}{\rho}}.$$

Hierin erscheint α in Graden, und [illegible] auf $\frac{\pi}{180}$ [illegible]. Diese Formel gilt für $\frac{r}{\rho} < \frac{1}{20}$, wenn [illegible]

Ist $\frac{r}{\rho}$ sehr klein und α von mäßiger Größe, so wird dieser Widerstand so klein sein, dass man ihn kaum zu berücksichtigen braucht. Es kann aber sein, dass α bei kleinem $\frac{r}{\rho}$ sehr groß ist, wie namentlich bei [illegible]. —

Außer den genannten Ablenkungswiderständen kommen [illegible] Widerstände vor, wie eine sehr plötzliche Änderung des Wasserquerschnitts [illegible]

[illegible]

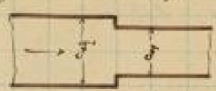
$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2$ [illegible] αA bis F [illegible]

[illegible]

Es ist indessen wünschenswert, zunächst die Werte von α zu kennen für einen Fundamentalfall, [illegible] A, F [illegible] und $\frac{A}{F} = n$. Es ist dann der Wert von ζ von Weisbach [illegible] bestimmt worden und damit dann auch der Wert von α, so ergibt sich:

für n =	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
ζ =	0	0,06	0,29	0,80	1,80	3,75	7,80	17,5	47,8	226
α =	1	0,892	0,813	0,755	0,712	0,681	0,659	0,643	0,632	0,624

Je kleiner n, desto vollkommener ist d. innere Contraction, desto kleiner also auch α. Wenn α lediglich d. Coeff. einer inneren Contraction bedeutet, so wäre α für sehr kleine Werthe von n = d. früher bestimmten durchschnittlichen Coeff. 0,64. Thatsächlich sinkt hier α noch mehr niedriger, weil dieser Coeff. hier eine innere Contractionsursache bedeutet, einzuschließen aber auch d. Werth ein sich enthält, d. durch d. gewaltsame Zusammenziehung d. Querschnitts durch d. kleine Öffnung bedingt ist. Wenn d. centrale Durchflußöffnung A nicht d. Scheidewand, in welcher sie sich befindet nicht in einer mit d. gleichen Querschnitt fortlaufenden Röhre eingesetzt ist, sondern wenn an d. Stelle dieser Scheidewand 2 Röhren von verschiedenen Weiten mit gemeinsamer Axe in einander übergehen, so muß man berücksichtigen, daß in dieser Formel für ζ =: F d. Querschnitt d. Röhre hinter dieser Durchflußöffnung bedeutet, während d. Coeff. α abhängt von d. Verhältniß d. Durchflußöffnung A zum Querschnitt F' der weiteren Röhrenstrecke. Man hat also, wenn man d. Werth von α mit dieser Formel anwenden will, $n = \frac{A}{F'}$ zu setzen.

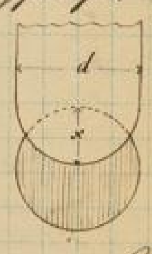


Hierbei sind folgende Fälle bemerkenswerth:

1) Wenn $F' > F$ und $A = F$ sein; dann ist: $\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$ wobei d. Coeff. α gemäß d. Verhältniß $n = \frac{F}{F'}$ mit d. vorangegangenen Tabelle entnommen werden kann.

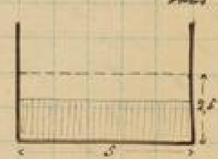
2) $F' < F$ und $A = F'$, daß also einfach an einer gewissen Stelle d. Querschnitt sich plötzlich erweitert; dann findet eine innere Contraction nicht statt, also $\alpha = 1$ und demnach: $\zeta = \left(\frac{F}{F'} - 1\right)^2$. —

Was nun d. Durchfluß d. Wassers durch Schieberöffnungen betrifft, so sind von Weisbach Versuche angestellt worden über d. 2 Fälle, daß d. Röhre entweder einen kreisförmigen od. einen rechteckigen Querschnitt hat. Wenn eine solche Röhre von kreisförmigem Querschnitt mit einem inneren



Regulierungsschieber versehen ist, so bildet sich eine sichelförmige Durchflußöffnung. Wenn d. Schieber um d. Stück x eingeschoben ist, und d. Röhrendurchmesser = d ist, so wird d. Widerstandscoeff. abhängig sein von $\frac{x}{d}$; je größer $\frac{x}{d}$ desto größer ζ. Bei diesen Versuchen hatte d. Röhre einen Durchmesser d = 4 ctm und es ergab sich hier:

$\frac{x}{d}$ =	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
ζ =	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,00	97,8.



Was d. Versuche mit d. rechteckigen Röhren betrifft, so wurde d. Schieber von d. größeren Seite eingeschoben; d. Querschnitt hatte d. Dimensionen 5 ctm und 2,5 ctm. Auch hier wurde für verschiedene Werthe von $\frac{A}{F}$, welches Verhältniß hier einfach = d. Verhältniß d. Höhe d. Durchflußöffnung zur Höhe d. Öffnung d. Röhre ist, d. Werthe von ζ bestimmt, und finden sich in *Weisbach's Mechanik*. Wenn man diese Werthe von ζ vergleicht mit denjenigen Werthen ζ aus d. allgemeinen Formel $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2$ für gleiche Werthe von $\frac{A}{F}$, so findet man, daß bei d. größeren Werthen von $\frac{A}{F}$ d. Widerstandscoeff. etwas größer sind, als im Kreisquerschnittfall, dagegen für d. kleineren Werthe von $\frac{A}{F}$ etwas kleiner als im Kreisquerschnittfall. Dieses läßt sich leicht erklären: es ist nämlich ein doppelter Grund vorhanden, weshalb d. Werthe von α in dieser allgemeinen Formel hier etwas abweichende Werthe von denen von α im Kreisquerschnittfall haben: d. Umstand, daß d. vorliegende Durchflußöffnung A nicht eine centrale Lage und nicht eine gleiche Gestalt hat. d. Querschnittsänderung bedingt natürlich eine Vergrößerung d. Widerstandes, also eine Verkleinerung von α, denn es ist mit d. Querschnittsänderung zugleich eine Richtungsänderung verbunden. Insofern wird aber durch diese seitliche Lage d. Durchflußöffnung verursacht, daß d. innere Contraction nicht vollständig, sondern nur partiell ist; sie findet nur an einem Theile statt. Diese Contraction vergrößert α. Es sind also 2 Einflüsse vorhanden: d. eine verkleinert α und d. andere vergrößert α. Dieser letzte Einfluß wird sich namentlich in d. Fällen besonders geltend machen, wo $\frac{A}{F}$ klein ist.

Beispiel: Angenommen man eine cylindrische Abflußröhre von $d = 0,1\,m$, welche mit einem solchen Regulirungsschieber versehen ist, liefere bei vollständig zurückgezogenem Schieber, also für $x=0$, bei einer wirksamen Druckhöhe $H = 1,15\,m$, eine Wassermenge $V = 0,015$ cubm. pr. Sek.

Also $d = 0,1\,m$ $H = 1,15\,m$ und für $x=0$: $V = 0,015$.

Außer dem besonderen Widerstand, d. durch diesen Regulirungsschieber herbeigeführt werden kann, sei nur außerdem ein Widerstand vorhanden, als für d. Einfluß d. Wassers in d. Röhre $\zeta = \frac{1}{2}$ gesetzt werden kann; d. Röhre sei also scharfkantig angesetzt. Am Ende sei kein besonderer Widerstand vorhanden. Es muß nun für einen andern Grad d. Regulirungsschieber so weit vorgeschoben werden, daß d. Röhre nur halb so viel Wasser giebt. Wie weit muß d. Schieber vorgeschoben werden oder wie muß man x annehmen, damit $V' = \frac{V}{2}$ Wassermenge abfließt?

Zunächst ist nun: $\sqrt{2gH} = \sqrt{2.9,81.1,15} = 4,75$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = 0,007854$$

Also d. Geschw. u für $x=0$: $u = \frac{V}{F} = 1,91\,m$ pr. Sek.

Bezeichnet man nun mit φ d. vollständigen Widerstandscoeff., so ist: $u = \varphi\sqrt{2gH}$ also: $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{2gH}}{u} = \frac{4,75}{1,91} = 2,487$.

Und demnach d. vollständige Widerstandscoeff. für $x=0$:

$$\frac{1}{\varphi^2} - 1 = 5,185.$$

Von diesem vollständigen Widerstandscoeff. ist $\zeta = 0,5$ abzuziehen, um denjenigen Bestandtheil zu finden, d. auf Rechnung d. Leitungswiderstandes kommt; also d. Leitungswiderstandscoeff.:

$$\lambda \frac{l}{d} = 4,685.$$

Soll nun nur d. halbe Wasser ausfließen, so muß d. entsprechende Geschw. u' nur halb so groß als u sein, es muß also auch φ' nur $\frac{1}{2}$ so groß als φ sein, d. h.: $\varphi' = \frac{\varphi}{2}$ sein, und somit:

$$\frac{1}{\varphi'^2} - 1 = \frac{4}{\varphi^2} - 1 = 4.6,185 - 1 = 23,74.$$

Zieht man hiervon ab erstens denjenigen Widerstand, welcher durch d. Einlauf bedingt wird $= 0,5$, ferner d. Leitungswiderstand $\lambda' \frac{l}{d}$, so ist d. verbleibende Rest d. Widerstandscoeff. d. durch d. Schieber bedingt wird, also:

$$\zeta = 23,24 - \frac{\lambda'}{\lambda}\, 4,685$$

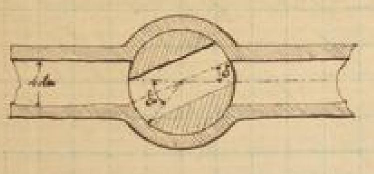
Nun ist aber $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{ud}$ und für $x=0$: $\frac{1}{ud} = 5,2$ also: $\lambda = 0,0240$.

ferner in unserem Zustand $\frac{1}{u'd} = 2 \cdot \frac{1}{ud} = 10,4$ also $\lambda' = 0,0244$. $\Big\}$ also $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{61}{60}$.

demnach $\zeta = 18,48$.

Für $\zeta = 17$ findet sich in d. Tabelle $\frac{x}{d} = \frac{6}{8}$, so daß $\zeta = 18,5$ einem Werthe von x entspricht, d. wenig größer als $0,075\,m$ ist. — Eine solche Rechnung wird man sich erlauben können, wenn man davon abgesehen daß $\lambda' > \lambda$ ist, ohne dabei wesentliche Fehler zu begehen. ——

Was nun d. Widerstand beim Absperren durch Drehschieber betrifft, so ist auch dieser von Weisbach geprüft worden und zwar so, daß d. Hahn sich in einer cylindrischen od. parallelepipedischen Röhre befand. Für d. ersteren Fall war d. Weite d. Durchfl. eine $d = 4$ cm. δ sei d. Winkel, welchen d. Axe d. Hahnbohrung mit d. Axe d. Röhre bildet. Es muß dann zur vollständigen Absperrung d. Hahns gedreht sein, bei welchem Winkel δ d. Absperrung vollkommen ist, dieser Winkel sei $= \delta'$; bei d. Weisbach'schen Versuchen war $\delta' = 82°$. Offenbar ist dieser Winkel bedingt durch d u. D, wenn D d. Durchmesser d. Hahnkükens ist und zwar ist:



$$\sin\frac{\delta'}{2} = \frac{d}{D}.$$

Unter diesen Umständen ergab sich nun für:

$\delta =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°
$\zeta =$	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68	17,3	31,2	52,6	106	206	486

Für alle ferneren wird ζ schon so groß, daß d. Versuche nicht weiter geführt wurden und nicht ... werden.

Es fragt sich nun, wie man mit Hilfe dieser Versuche d. Coeff. ζ berechnen kann für irgend einen anderen Schieber, für welchen d. Absperrungswinkel δ' einen anderen Werth hat als d. d. Versuchsschiebers. Zu dem Ende kann man bemerken, daß jener d. resultierende Widerstand aus 2 Theilen besteht, nämlich einer plötzlichen Querschnittsänderung und einer plötzlichen Richtungsänderung; erstere wird abhängig sein vom Verhältniß $\frac{\delta}{\delta'}$, letztere hängt jedoch nicht von d. verhältnißmäßigen Werthe von $\frac{\delta}{\delta'}$ ab, sondern von d. absoluten Werth von δ. Mit Rücksicht auf diese Erwägungen wird ein ζ nur mit Hilfe dieser Zahlen auch für einen anderen Schieber, für welchen δ' einen anderen Werth hat, berechnet werden können. Zu dem Ende haben wir Tabelle nach d. Werthen von ζ_0 beigefügt, daß diejenigen Bestandtheile von ζ, d. nur von d. ersten Umstand herrühren; dieselben können nämlich berechnet werden aus d. Formel $\zeta_0 = \left(\frac{\delta}{\alpha A} - 1\right)^2$, wenn man für d. entsprechenden Stellwinkel d. Versuchsschiebers d. Werth von $\frac{A}{\delta}$ berechnet, mit diesem Werthe d. Werth von α bestimmt aus dem Contractionsverhältniß und dann ζ_0 berechnet. Es folgt für:

$\delta =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°
$\zeta_0 =$	0,02	0,15	0,39	0,85	1,62	2,89	5,05	8,72	15,4	27,9	53,9	113	276.

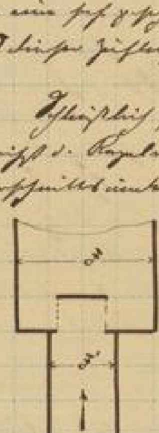
Wenn es nun d. Aufgabe wäre, für einen Schieber in einem zylindrischen Rohre, dessen Absperrungswinkel $\delta' = 75°$ ist, d. Widerstandscoeff. ζ zu bestimmen, welcher d. Winkel $\delta = 50°$ entspricht, so kann man folgendermaßen schließen:

Es ist $\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$. Bei d. Weisbach'schen Versuchsschieber würde diesem Verhältniß $\frac{2}{3}$ ein Werth δ entsprechen von $54\frac{2}{3}°$ und hierfür ist $\zeta_0 = 52$. D. andere Bestandtheil hängt nun nicht von d. Verhältniß $\frac{\delta}{\delta_1}$ ab, sondern von dem absoluten Werthe von δ; für $\delta = 50°$ ist also $\zeta - \zeta_0 = 52,6 - 27,9 = 25$ und somit kann für d. vorliegenden Schieber, welcher bei $\delta_1 = 75°$ vollkommen absperrt, entsprechend einem Stellwinkel von 50°: $\zeta = 52 + 25 = 77$ gesetzt werden. —

Es sind ferner von Weisbach Versuche angestellt worden über d. Widerstandscoeff. von Drosselklappen und zwar auch für ein zylindrisches und ein parallelepipedisches Rohr. Es wird auch hier d. Widerstand abhängig sein von d. Winkel δ, den d. Richtung d. Drosselklappe mit d. Rohrmittellinie bildet.

Vergleicht man d. hier gefundenen Werthe mit denjenigen, welche d. Contractionsverhältniß bei jenen Werthen von $\frac{A}{\delta}$ entsprechen, so zeigt sich, daß für d. kleineren Werthe von α d. Widerstandscoeff. größer sind als d. aus Contractionsverhältniß einer einfachen Ausflußöffnung in einer ebenen Wand, daß dagegen bei größeren Werthen von α d. Werthe kleiner werden als aus Contractionsverhältniß. Daß bei d. kleineren Werthen von δ d. Widerstandscoeff. größer ist, wird daher kommen, daß schon diese Drosselklappe an und für sich einen gewissen Widerstand verursacht, wenn auch $\delta = 0$ ist; wenn dagegen δ wächst, so muß sich d. Umstand geltend machen, daß für d. Contraction nur eine sehr geringe ist, da an einzelnen Punkt gar keine seitliche Übergangsfläche stattfindet und diese Zuflüsse [illegible] von d. [illegible] Dicke nicht [illegible]. —

Schließlich sind von Weisbach auch Versuche mit Ventilen angestellt. Betrachten wir zunächst d. Kegelventil: d. Öffnung d. Ventils befindet sich an einer solchen Stelle, wo zugleich eine Querschnittsänderung stattfindet, wie d. Figur bei einem Pumpenzylinder. Es sei F_1 d. Querschnitt d. ankommenden Wassers, also d. Rohres vor d. Ventil und F_2 d. Querschnitt d. abfließenden Wassers, also [illegible] hinter d. Ventil; dann sind 3 verschiedene Querschnitte zu unterscheiden: 1) der d. Ventilöffnung A_1, 2) d. ringförmige Querschnitt um d. Ventil herum $= A_2$,



3) d. zylindrische Ausgangsquerschnitt zwischen d. Ventil und seinem Sitze $= A_3$, also d. seitliche Öffnung. Bei einem gegebenen Ventil sind nun A_1 und A_2 gegeben, dagegen A_3 von d. Hubhöhe d. Ventils abhängig. D. resultierende Widerstandscoeff. ζ ist nun abhängig von d. Verhältniß zwischen A_1, A_2, A_3

und d. Querschnitt F. Ist d. Hubhöhe h sehr klein, dann wird d. verhältnismäßig Widerstandscoeff. vorzugsweise von A_2 abhängig sein; wird d. Hubhöhe h und damit A_2 vergrößert, so nimmt d. Einfluß d. Hubhöhe h auf ζ mehr und mehr ab, bis zu einer Grenze, wo d. weitere Vergrößerung von h keinen Einfluß mehr auf ζ ausübt. Man wird annehmen dürfen, daß dieser Einfluß d. Durchflußöffnung A_2 auf ζ aufhöre ~~muß~~ merklich zu sein, sobald d. Querschnitt d. Wasserstroms beim Durchgang durch A_2 nicht mehr kleiner als d. Öffnung A_1 im Ventilsitze ist. Wenn d. Hubhöhe h = d. Radius r d. Öffnung A_1 geworden ist so ist $A_2 = 2\pi r \cdot r = 2\pi r^2 = 2A_1$, woraus man schließen kann, daß in diesem Zustand d. mittlere Winkel, unter dem d. Wasserfäden diese Fl. A_2 schneiden, ungef. 30° beträgt, denn dann ist d. Projection von A_2 auf eine Ebene senkrecht zu d. Letzteren = d. Hälfte von A_2; also für h = r fällt d. Einfluß von A_2 heraus und es wird nun ζ hauptsächlich nur abhängig sein von d. Verhältniß d. Querschnitte A_1 A_2 zum Querschnitt F, so daß man setzen kann:

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2$$

wenn hier wieder unter A verstanden wird d. kleinere d. beiden Querschnitte A_1 und A_2 und wenn man sich vorbehält, d. Coeff. α durch besondere Versuche zu bestimmen. Dieser Coeff. α bedeutet hier nicht nur einen bloßen Coeff. d. inneren Contraction, sondern er wird mit bestimmt sein durch d. anderweitige Richtungsänderung, d. das Wasser erleidet und zum Theil von d. Eigenthümlichkeit d. Zertheilung u. Wiedervereinigung d. Wasserstroms, außerdem von d. Verhältniß $\frac{A_1}{F}$ sowie von allen übrigen Umständen, welche d. Grad d. inneren Contraction beeinflussen, also von d. Concavität d. Ventilsitzes etc. —; indessen scheint sich auf d. Einfluß dieser Umstände d. bearbeiteten Versuche nicht erstreckt, da es wahrscheinlich ist, daß diese letzteren Einflüsse auf d. Grad d. Contraction nicht bedeutend sein werden. — Es ist nun vortheilhafter A_2 etwas größer als A_1 zu machen, so daß erst d. contrahirte Querschnitt nach d. Durchgang durch A_2 etwas größer als A_1 wird.

Bei Weisbach's eigenen Versuchen mit einem Ventil, wo $F' = F$, waren

$$\frac{A_1}{F} = 0{,}356 \quad \text{und} \quad \frac{A_2}{F} = 0{,}406.$$

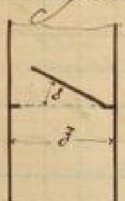
Unter diesen Umständen und während h mindestens = r war, ergab sich: $\zeta = 11$. — Setzt man diesen Werth in d. obige Gl. und unterscheidet: $\frac{A}{F} = \frac{A_1}{F}$, so findet man: $\frac{1}{\alpha} = 1{,}537$ bzw. $\alpha = 0{,}651$. Letzterer Werth ist fast derselbe, wie für d. Contractionscoeff. einer einfachen kreisförmigen, centrirten Öffnung in einer ebenen Wand. Für andere Verhältnisse und solcher Teller- od. Kegelventile wird man bis auf Weiteres d. Widerstandscoeff. demnach setzen können:

$$\zeta = \left(1{,}537 \frac{F}{A} - 1\right)^2,$$

wo unter A d. kleinere d. beiden Querschnitte A_1 u. A_2 zu verstehen ist, wobei vom vortheilhaftesten d. Verhältnisse so zu wählen sind, daß A_1 d. kleinere ist. Weisbach selbst stellte eine etwas andere Formel auf; er legt auch diese Formel zu Grunde, versteht aber unter A d. arithmetische Mittel von A_1 und A_2 und findet demnach:

Für d. zusammengesetzten Ventile liegen besondere Beobachtungen nicht vor, es bleibt also nichts anderes übrig als ζ nach Analogie zu ermessen.

Ferner hat Weisbach Versuche angestellt mit einem Klappenventil; dasselbe war auch in einer mit gleicher Weite fortlaufenden Röhre eingeschaltet und bestand aus einer Lederscheibe. D. Winkel, welchen d. geöffnete Klappe mit d. Ebene d. Ventilsitzes bildet, sei δ, ferner sei A d. Größe d. kreisförmigen Öffnung im Ventilsitz und F d. Querschnitt d. Rohrs. Bei d. Versuchsventil war $\frac{A}{F} = 0{,}535$. Die Größe von ζ ist wesentlich von diesem Verhältniß und von δ abhängig. Für verschiedene Werthe von δ wurden dann d. Widerstandscoeff.



betrachtet. Setzt man nun für: $\zeta = (x\frac{\delta}{d} - 1)^2$, so lassen sich aus den durch d. Versuch zusammengehörigen Werte von x berechnen, also:

für δ =	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
x =	5,61	4,75	4,00	3,47	2,93	2,54	2,18	1,91	1,68	1,49	1,35	1,23

d. Coeff. x ist also in bedeutendem Grade von δ abhängig und zwar nicht nur, weil durch δ d. Grad d. plötzlichen seitlichen Ablenkung d. Wasserstroms bedingt wird, sondern auch d. kleinste Querschnitt d. Wasserstroms bedingt wird, wenigstens bis δ eine gewisse Größe nicht erreicht. Betrachtet man x als eine Function eines Werts von δ, so kann man auch dieser Formel auch ζ für ein anderes Rohrverhältnis berechnen. Z. B.: es soll ζ berechnet werden für d. Durchgang d. Wassers durch ein solches Ventil, wofür $\frac{d}{\delta} = 0,64$ ist und $\delta = 50°$ ist. Aus d. Tabelle ist dann $x = 1,91$ und somit:

$$\zeta = \left(\frac{1,91}{0,64} - 1\right)^2 = 4.$$

Beispiele als Anwendungen d. vorgeführten Gesetze.

Aus einem Behälter, in welchem d. Wasserstand durch entsprechenden Zufluss auf constanter Höhe erhalten wird, werde d. Wasser unter gleich bleibenden Umständen abgeleitet durch eine Röhre von d. Länge l und d. gleichförmigen Weite = d, wobei diese Röhre etwa durch Seitenöffnungen oder abgezweigte kleine Seitenröhren einen anderen Zufluss oder Abfluss vom Anfang und Ende erhält. Unter diesen Umständen fliesst also durch jeden Querschnitt d. Röhre d. gleiche Wasservolumen V mit d. mittleren Geschw. u entsprechend d. Continuitätsgl.: 1) $V = \frac{\pi d^2}{4} u$

Ist ferner ζ d. resultirende Coeff. etwaiger besonderer Widerstände, welche außer dem allgemeinen Leitungswiderstand in d. Röhre vorkommen können, so hat man d. folgenden Zusatz: 2) $\left(1+\zeta+\lambda\frac{l}{d}\right)\frac{u^2}{2g} = H$ (Seite 82)

wenn $H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ ist (Seite

wenn p_0 d. äußere Druck an d. Oberfl. d. Wassers im Ausflussgefäß und p d. an d. Mündung, wenn d. Ausfluss in d. freie Luft, oder p d. Druck auf d. Oberfl. in d. Gefäß, in welches d. Wasser hineinfliesst; h bedeutet im ersten Fall d. Höhe über d. Schwerpunkt d. Mündung, im anderen Fall Höhenunterschied beider Gefäßwasserspiegel. Man kann d. Fall, daß d. Wasser aus einem Gefäß in ein anderes fliesst als d. allgemeinen Fall annehmen. Gewöhnlich ist nun $p_0 = p$ und damit $H = h$; im Allgemeinen gilt jedoch obige Beziehung. Wenn man zwischen obigen beiden Gl. d. mittlere Geschw. u eliminirt, so erhält man eine Beziehung zwischen l, d, H u. V, durch welche Beziehung eine dieser Größen bestimmt werden kann, wenn d. anderen gegeben sind. Wenn es sich für einen solchen Fall nur um d. Ableitung d. Wassers handelt, und also nicht darum, d. lebendige Kraft d. Wassers zu verwerten, so kommt d. mittlere Geschw. nur insofern in Betracht, als von d. mittleren Geschw. und d. Röhrenweite d. Größe λ abhängt, indem:

$\lambda = m\left(\alpha + \frac{\beta}{ud}\right)$ ist, wo α u. β für verschiedene Werte von u u. d bekannt sind und wo m ein Sicherheitscoeff. bedeutet, d. durchschnittlich = 1,2 gesetzt werden kann. Durch diesen Umstand, daß λ von u u. d abhängt, können d. verschiedenen hierauf sich beziehenden Aufgaben erschwert werden. Dabei ist jedoch zu bemerken, daß d. Veränderlichkeit von λ mit u u. d innerhalb d. Grenzen, zwischen denen u u. d gewöhnlich liegen, nur eine mäßige ist, so daß es meistens genügt, entweder endgültig mit einem constanten Mittelwerth λ d. Rechnung durchzuführen oder mit Hilfe eines vorläufigen Werthes von λ zu rechnen. — Im Allgemeinen können sich 4 verschiedene Aufgaben darbieten indem jede d. 4 Größen gesucht sein kann, wenn d. anderen gegeben sind; jedoch pflegt gewöhnlich l gegeben zu sein, so daß nur noch 3 Aufgaben übrig bleiben, die dann folgendermaßen behandelt werden:

1) Gegeben d u. V.

Es wird also gesucht H d.h. d. Höhe, bei welcher eine gegebene Röhre ein gegebenes Wasservolumen p. Sek. liefert. Diese Aufgabe läßt sich direkt ohne Näherung lösen:
Zunächst findet man u mit d. Gl. 1); zu diesem u und d. gegebenen d findet man λ und mit diesem Coeff. λ und d. gegebenen Werthen l d u. ζ findet man H mit Gl. 2).

2) Gegeben d u. H; es wird also gesucht dasjenige Wasservolumen V, welches eine gegebene Röhre bei gegebener wirksamer Druckhöhe liefert. Hier muß man schon durch successive Näherung zu Werke gehen. Mit einem vorläufigen Näherungswerthe λ etwa $\lambda = 0{,}03$ findet man einen entsprechenden Näherungswerth von u mit Gl. 2); zu diesem Näherungswerthe von u und d. gegebenen Rohrweite d findet man dann einen corrigirten Werth von λ und mit diesem mit Gl. 2) einen corrigirten Werth von u und daraus V mit Gl. 1).

3) Gegeben V u. H. Es wird gesucht diejenige Rohrweite d, welche einer Röhre gegeben werden muß, damit sie bei gegebener Länge und Druckhöhe ein gegebenes Wasservolumen p. Sek. liefert. Dieses ist die am häufigsten vorkommende Aufgabe. Hier hat man nun beliebig zwischen Gl. 1) u. 2) u zu eliminiren, multiplicirt man zu diesem Zweck Gl. 2) mit $2g$ und setzt für u seinen Werth aus Gl. 1, so folgt:

$$\left(1+\zeta+\lambda\frac{l}{d}\right)\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{d^4} = 2gH.$$

also
$$d = \sqrt[5]{\frac{(1+\zeta)d+\lambda l}{2gH}\cdot\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2}$$

Setzt man nun vorläufig d auf d. rechten Seite d. Gl. $= 0$ setzt und $\lambda = 0{,}03$, so findet man vermittelst dieses Ausdrucks einen Näherungswerth von d, zu diesem Näherungswerth von d findet man auch einen Näherungswerth von $u d = \frac{4V}{\pi d}$ und hierzu einen corrigirten Werth von λ und wenn man dann diesen corrigirten Werth von λ und d. Näherungswerth von d einsetzt, endlich einen corrigirten Werth von d.

Beispiel: Es sei d. erforderliche Weite einer Röhre zu bestimmen, die bei $l = 50$m und bei $H = 1{,}5$m und unter d. Voraussetzung, daß sonst keine besonderen Widerstände in d. Röhre vorkommen als d. Eintrittscoeff. $\zeta = 0{,}5$, p. Sek. $V = 0{,}03$ cbm. Wasser zu liefern hat.

Setzt man zu dem Ende in d. Formel für d auf d. rechten Seite $d = 0$ und $\lambda = 0{,}03$, so folgt:

$$d = \sqrt[5]{\frac{0{,}03\cdot 50}{2\cdot 9{,}81\cdot 1{,}5}\left(\frac{0{,}12}{\pi}\right)^2} = 0{,}149$$

daraus ist
$$\frac{1}{ud} = \frac{0{,}149\,\pi}{0{,}12} = 3{,}9 \quad \text{also} \quad \alpha + \frac{\beta}{ud} = 0{,}0239 \quad (m = 1{,}2 \text{ gesetzt}) \text{ folgt:}$$

$$\lambda = 0{,}0287.$$

Mit diesem corrigirten Werth und d. Näherungswerth von d findet man nun:

$$d = \sqrt[5]{\frac{1{,}5\cdot 0{,}149 + 0{,}0287\cdot 50}{2\cdot 9{,}81\cdot 1{,}5}\cdot\left(\frac{0{,}12}{\pi}\right)^2} = 0{,}152,$$ ~~m~~, welcher Werth genau genug ist um weiter keiner Correction zu bedürfen.

Unter Umständen kann es auch nöthig sein, d. Pressung, d. in gewissen Querschnitten d. Röhre stattfindet, zu ermitteln. Die Kenntniß dieser Pr. ist namentlich insofern von Interesse, indem von derselben d. Wandstärke abhängt und indem sich in keinem Querschnitt d. Pr. d. Grenze 0 nähern darf. Gewöhnlich ist es schon nicht, wenn irgendwo d. Pr. kleiner wird als d. äußere atm. Druck, indem dann äußere atm. Luft in d. Leitung eindringen kann od. sich d. immer im Wasser enthaltene atm. Luft hier ausscheiden kann, diesem Umstande kann vorgebeugt werden durch besondere Windkästen d. mit einem Hahn versehen sind, od. mit selbstthätigen Ventilen, um dieselben die angesammelten Luftblasen zu entnehmen. —

Um d. Druckhöhen in d. Rohrleitung zu bestimmen, welche für ein Punkt, entsprechend d. Länge S, d. Mittellinie gemessen vom Anfang d. Röhre entfernt, ~~unter~~ d in d. Höhe z über d. Unterwasserspiegel d. Sp. mit p_s bezeichnen, aber z auch negativ sein kann. ζ_s sei d. Coeff. etwaiger besonderer Widerstände für d. ganze Rohrstrecke von d. Länge S und Z d. wirksame Druckhöhe, also:

$$Z = z + \frac{p_0 - p_s}{\gamma} \qquad \text{also} \qquad \frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - Z.$$

Für d. wirksame Druckhöhe Z gilt nun ein ganz analoger Ausdruck wie für H (Seite 82)

also: $\frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - \left(1 + \zeta_s + \lambda \frac{s}{d}\right) \frac{u^2}{2g}$ oder wenn für $\frac{u^2}{2g}$ d. Wert aus Gl. 2 Seite 90 gesetzt wird:

$$\frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - \frac{(1+\zeta_s)d + \lambda s}{(1+\zeta)d + \lambda l}\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)$$

Gewöhnlich wird nun d. äußere Druck sowohl am Ob., wie am Unterwasserspiegel = d. atm. Luftdruck sein, also $p_0 = p$, u. so nun $\frac{p_0}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} = b$ = Wassersäulenhöhe, welche ungefähr = 10m ist, so folgt nun:

$$\frac{p_s}{\gamma} = b + z - \frac{(1+\zeta_s)d + \lambda s}{(1+\zeta)d + \lambda l}\, h.$$

Diese Druckhöhe soll größer sein als 0, widrigenfalls sich sonst d. Wasser von d. Rohrwand trennt. Daraus ergibt sich d. Bedingung für d. zulässige Erhebung einer Rohrstrecke über d. Unterwasserspiegel, also d. Größe $\div z$, ~~wobei~~ es muß nämlich sein:

$$\div z < b - \frac{(1+\zeta_s)d + \lambda s}{(1+\zeta)d + \lambda l}\, h.$$

Diese Erhebung über d. Unterwasserspiegel hiernach ist eine Function von S, so daß sich d. Röhrenleitung an verschiedenen Stellen verschieden hoch erheben darf. Ist d. Leitungsröhre sehr lang und sind besondere Widerstände nicht vorhanden, so wird sowohl im Zähler wie im Nenner d. Bruchs d. 2te Glied vorherrschend d. erst., so daß man näherungsweise erhält:

$$\div z < b - \frac{s}{l}\, h.$$

Daraus ergeben sich d. Umstände, unter denen es möglich ist, durch eine heberartige Röhre d. Wasser über eine Anhöhe zu leiten. Jedenfalls muß diese Erhebung kleiner sein als b also kleiner als 10 Meter; ferner erkennt man, daß am Anfang d. Rohrleitung dieselbe sich höher erheben darf als gegen d. Ende hin. Auch ist diese höchstens zulässige Höhe abhängig von h; überschreitet diese Druckhöhe h eine gewisse Grenze, so kann es unter Umständen unmöglich werden, d. Röhre höher als d. Unterwasserspiegel zu legen, sobald nur $h > \frac{l}{s} b$ ist.

Hier ist eine cylindrische Röhre vorausgesetzt, wo auch d. durch 2 Querschnitte hindurchfließende Wassermenge d. gleich ist. d. allgemeinste Fall würde nun d. sein, daß d. Weite d. Röhre nach irgend einem Gesetz veränderlich ist, und daß dann auch d. Wasservolumen V vom Anfang bis zum Ende d. Röhre sich stetig ändert. Letzteres wird streng genommen kaum jemals d. Fall sein, jedoch näherungsweise wie z. B. bei einer städtischen Wasserleitung, welcher sich oft durch kleinen Zweigleitungen Wasser entzogen wird, so man also annehmen kann, dieselben entziehen stetig d. Wasser d. Hauptleitungsröhre. Es sei also sowohl d. Weite d. Röhre stetig veränderlich als auch d. Volumen V. In einem solchen Fall wird nun d. Leitungswiderstandshöhe p. Längeneinheit für verschiedenen Stellen natürlich verschieden sein Es: wenn wir sie für d. Längenelement ds mit $\mathfrak{B}_1 ds$ bezeichnen, so wird $\mathfrak{B}_1$ eine Function von s sein. d. variable Weite d. Röhre sei $= y$ und d. mittlere Geschw. an dieser Stelle $= u$. Man wird dann gerade so wie bei einer cylindrischen Röhre, auch hier d. allgemeine Formel bezüglich $\mathfrak{B}_1$ zu Grunde legen dürfen, sobald nur d. Veränderlichkeit von V ziemlich langsam vor sich geht.

$$\text{also} \quad \mathfrak{B}_1 = a\frac{u^2}{y} + b\frac{u}{y^2} = \frac{\lambda}{y}\frac{u^2}{2g} \qquad \text{(Seite 78)}$$

$$\text{also} \quad \lambda = \alpha + \frac{\beta}{uy}$$

Nun ist es fraglich ob a u. b usw. d. h. ob dieselben Werte haben werden wie bei d. Lst. in einer zylindrischen Röhre, da d. Verhältnisse nun d. Messungen zu abweichend sind. Hier wird d. Strömung nicht in allen Punkten gleich sein, da d. Querschnitte nicht eben sind; ferner enthalten d. Coeff. a u. b d. Verhältnis $\zeta = \frac{w'}{u}$ in sich, wo w' d. Minderung an d. Wand (Seite 78) und u d. mittlere Geschw. ist. Dieses Verhältnis nun durch jene Untersuchungen ganz unbestimmt und es frägt sich, ob dieses Verhältnis ebenso groß sein wird für eine weitere Röhre. Da jedoch hierüber keine Versuche vorliegen, so bleibt nichts anderes übrig als für a u. b d. früheren Werte zu nehmen. — Wird nun mit $\mathfrak{B}$ d. Leitungswiderstandshöhe für d. ganze Röhre bezeichnet, so ergibt sich:

$$\mathfrak{B} = \int_0^l \mathfrak{B}_1 \, ds = \frac{1}{2g} \int_0^l \frac{\lambda}{y} u^2 \, ds.$$

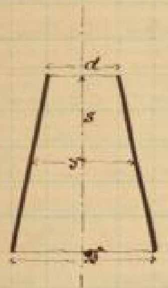
Hier wird es zulässig sein, d. Coeff. λ einen angenäherten Mittelwert zu geben, so daß derselbe vor d. Integral herausfällt, also:

$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g} \int_0^l \frac{u^2}{y} \, ds.$$

In diesem allgemeinsten Ausdruck ist nun $u = \frac{4V}{\pi y^2}$, wo im Allgemeinen sowohl y als auch V Funktionen von s sein können. Von besonderem Interesse sind indessen nur 2 einfache Spezialfälle, nämlich:

1) daß V constant und nur y veränderlich ist und zwar gleichförmig veränderlich und 2) daß y constant und V veränderlich ist.

Ist zunächst V constant, so folgt:
$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g} \left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \int_0^l \frac{ds}{y^5}$$



Ist hier nun d d. Weite am engeren und D d. am weiteren Ende und y d. an einer beliebigen Stelle in d. Entfernung s vom engeren Ende, dann ist

$$\frac{y-d}{D-d} = \frac{s}{l} \quad \text{also} \quad ds = \frac{l}{D-d} dy \text{ und damit:}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g} \left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \frac{l}{D-d} \, \frac{1}{4} \left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4}\right)$$

oder
$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g} \left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2 \frac{l}{4} \frac{D^4 - d^4}{(D-d) D^4} = \frac{\lambda}{2g} \left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2 \frac{1}{4} \frac{l}{D} \left(1 + \frac{d}{D}\right)\left(1 + \frac{d^2}{D^2}\right).$$

Setzt man diese Leitungswiderstandshöhe $= \zeta \left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2 \frac{1}{2g}$, so bedeutet ζ nichts anderes als d. Widerstandscoeff. bezogen auf d. kleinsten Querschnitt, es wird also:

$$\zeta = \frac{\lambda}{4} \frac{l}{D} \left(1 + \frac{d}{D}\right)\left(1 + \frac{d^2}{D^2}\right). —$$

D. andere Spezialfall, daß d. Röhrweite y constant $= d$ ist, d. Wassermenge V aber stetig veränderlich ist, hat Interesse insbesondere f. d. einzelnen Leitungen einer städtischen Wasserleitung. Tatsächlich findet d. Abnahme d. Wassers nicht stetig längs d. Röhre statt, auch würde sich d. Wasserverbrauch d. Häuser, welche Verhältnisse jedoch nicht berücksichtigt werden sollen. — Setzt man nun in d. allgemeine Formel für d. Leitungswiderstandshöhe $u = \frac{4V}{\pi d^2}$ ein, so folgt:

$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{1}{d^5} \int_0^l V^2 ds.$$

Ist nun V_0 das am Anfang einströmende Wasser und V_1 d. am Ende ausströmende Wasser, nun V d. durch d. in d. Entfernung s vom Anfang liegenden Querschnitt hindurchfließende Wasser, so ist offenbar:

$$\frac{V_0 - V}{V_0 - V_1} = \frac{s}{l} \quad \text{od. wenn } \frac{V_1}{V_0} = \alpha \text{ gesetzt wird: } \frac{V}{V_0} = 1 - \frac{1-\alpha}{l} s$$

und damit
$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g} \left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2 \frac{1}{d} \int_0^l \left[1 - 2\frac{1-\alpha}{l} s + \frac{(1-\alpha)^2}{l^2} s^2\right] ds.$$

Das Integral ergibt sich nun:
$$\int \ldots ds = l - (1-\alpha) l + \frac{1 - 2\alpha + \alpha^2}{3} l = \frac{l}{3}(3 - 3 + 3\alpha + 1 - 2\alpha + \alpha^2) = \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{3} l$$

also
$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda}{2g} \left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2 \frac{l}{d} \, \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{3};$$
$\frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2$ wäre bekanntlich d. Widerstandshöhe wenn d. Wassermenge constant bliebe und zwar vom Anfang bis zum Ende d. Röhre.

Beispiel: Eine zusammengesetzte Wasserleitung soll berechnet werden von einem gemeinsamen Hochreservoir aus soll d. Leitungssystem d. Wasser zunächst in ein geschlossenes Gebiet und von hier aus geht ein einziger Röhrenstrang, d. sich nach und nach verzweigt. Die erste gemeinschaftliche Hauptröhre sei bezeichnet mit $A_0 A_1$, wo A_0 d. Anfangsquerschnitt d. ganzen Leitung ist, A_1 d. Endquerschnitt, wo zuerst eine Abzweigung stattfindet. Die Länge dieser Strecke $A_0 A_1$ sei $= l_1$. Dem vorhandenen Bedürfnisse gemäß sind d. Wassermengen gegeben, die von d. ersten Verzweigungsstelle A_1 in d. verschiedenen Röhrensträngen hindurchfließen sollen. Man kann also unter d. verschiedenen Zweigen, d. von A_1 abzweigen, diejenige betrachten, durch welche d. größte Wassermenge hindurchfließt; diese Strecke sei $A_1 A_2$ mit d. Länge l_2; an d. Stelle A_2 findet eine abermalige Verzweigung statt, es soll dann wieder d. Strecke betrachtet werden, d. d. größte Wassermenge durchläuft, nämlich $A_2 A_3$ von d. Länge l_3 u. s. w. — bis zur Strecke $A_{n-1} A_n$ von d. Länge l_n. — Von jedem d. Knotenpunkte aus kann man nun wieder d. abgezweigten Röhren in ähnlicher Weise verfolgen, worauf jedoch nicht weiter eingegangen werden soll. — D. Längen $l_1 \; l_2 \ldots l_n$ sind natürlich als gegeben zu betrachten. Diese einzelnen Strecken sollen mit constanten Durchmessern d. betreffenden Röhren ausgeführt werden, an jeder Knotenstelle kann jedoch eine Änderung d. Röhrenweite eintreten und es seien d. Durchmesser d. n Strecken d. Hauptstranges resp. $y_1 \; y_2 \; y_3 \ldots y_n$. Diese Größen sind also nicht gegeben. D. Widerstandshöhe d. Wassers in d. ersten Strecke sei bezeichnet mit B_1, die d. folgenden mit $B_2 \; B_3 \ldots B_n$. Diese Größen sind auch nicht gegeben, da sie wesentlich von d. betreffenden Durchmessern abhängen. An d. Stellen $A_0 \; A_1 \; A_2 \ldots A_n$ seien d. Druckhöhen im Innern d. Röhren $b_0 \; b_1 \; b_2 \ldots b_n$, welche also kürzere Bezeichnungen für $\frac{p_0}{\gamma}$ sind. Von diesen Druckhöhen sind d. erste und d. letzte gegeben und zwar b_0 durch d. Höhe d. Hochreservoirs und b_n dadurch, daß selbst am Ende d. Wasserleitung noch eine genügende Druckhöhe übrig bleiben soll, um d. Wasser in d. höchsten Stockwerke hinauf zu treiben; d. übrigen dazwischen liegenden Druckhöhen sind jedoch vorläufig noch nicht bekannt. — Was d. ganze Anordnung d. Röhrennetzes betrifft, so sind d. Bedingungen nach nicht nur d. einzelnen Längen d. verschiedenen Röhrenstränge gegeben, sondern auch d. Höhenlage d. einzelnen Knotenpunkte durch Nivellement d. Terrains. Es sei demnach h_1 d. Höhe von A_0 über A_1, h_2 d. von A_0 über A_2 .... h_n d. von A_0 über A_n. Analog d. früheren Bezeichnungen sei nun H_1 d. wirksame Druckhöhe für d. ganze Röhrenstrecke $A_0 A_1$, H_2 d. für d. Strecke $A_1 A_2$, H_n d. von A_0 bis A_n. Diese wirksamen Druckhöhen sind natürlich von d. vorhergehenden Größen abhängig, nämlich: $H_m = h_m + b_0 - b_m$. —

D. Wasservolumen, welches p. Sek. in d. Röhrenstrecke $A_0 A_1$ hineinfließt sei V_1; V_2 sei d. Wasservolumen, welches in d. folgende Strecke $A_1 A_2$ hineinfließt, während W_1 d. Wasservolumen ist, welches durch d. sämtlichen hier in A_1 abzweigenden Röhrenstränge abfließt. D. Größe V_1 kann schon unterwegs während d. Strecke $A_0 A_1$ kleine Abzweigungen erleiden durch kleinere Hausleitungen, so daß d. bei A_1 herausfließende Wasser $= \alpha_1 V_1$ geworden ist. Dieses Wasservolumen $\alpha_1 V_1$ verzweigt sich nun an d. Stelle A_1 in d. Volumen V_2 und in W_1; das durch d. Strecke $A_1 A_2$ hindurchfließende Wasservolumen sei $= \alpha_2 V_2$; von diesem geht d. Wasservol. V_3 in d. 3te Strecke $A_2 A_3$, während W_2 in d. übrigen in A_2 sich abzweigenden Leitungen geht. u. s. w. — schließlich ist V_n d. Wasservolumen, welches in d. $n$te Strecke hineinfließt, W_n sei dasjenige Wasservolumen welches am Ende d. $n$ten Strecke noch übrig bleibt zu irgend einer späteren [illegible] Verwendung. V_n geht bis gegen d. Ende d. Strecke l_n über in $\alpha_n V_n$. D. Größen α stehen natürl. in Beziehung zu d. gegebenen Größen V u. W, denn es ist: $\alpha_1 V_1 = W_1 + V_2$

$$\text{also} \quad \alpha_1 = \frac{W_1 + V_2}{V_1} \qquad \alpha_2 = \frac{W_2 + V_3}{V_2} \quad \ldots\ldots \quad \alpha_n = \frac{W_n}{V_n}$$

Es sind also:

	$A_0 A_1$	$A_1 A_2$	$A_2 A_3$	.... $A_{n-1} A_n$	d. Strecken d. Hauptstränge
	l_1	l_2	l_3	.... l_n	d. Längen derselben.
	y_1	y_2	y_3	.... y_n	d. entsprechenden Durchmesser
	B_1	B_2	B_3	.... B_n	d. Widerstandshöhen
A_0	A_1	A_2	A_3	.... A_n	d. Knotenpunkte
b_0	b_1	b_2	b_3	.... b_n	d. Druckhöhen daselbst
	h_1	h_2	h_3	.... h_n	d. Höhenlagen über A_0
	H_1	H_2	H_3	.... H_n	d. verfügbaren Druckhöhen für $A_0 A_n$
V_1	V_2	V_3		.... V_n	d. in $A_{n-1} A_n$ einfließende Wasserquant.
	W_1	W_2	W_3	.... W_{n-1}	W_n das in A_n abgegebene Wasserquant.
$\alpha_1 V_1$	$\alpha_2 V_2$	$\alpha_3 V_3$		.... $\alpha_n V_n$	das durch $A_{n-1} A_n$ durchfließende Wasserquant.

Unbekannt(?) sollen nur d. Durchmesser y bestimmt werden und zwar so, daß d. Anlagekosten ein Minim. werden, wobei untergeordnete Widerstände unberücksichtigt bleiben sollen, also nur d. Leitungswiderstand betrachtet werden soll, indem man sich vorbehalten kann, d. Coeff. λ etwas größer zu veranschlagen. Es sind bei einer solchen Leitung in d. That andere Leitungswiderstände von sehr untergeordneter Art, so daß man dies wohl thun kann. Die Anlagekosten sind nun vorzugsweise bedingt durch d. Ankaufspreis d. ganzen Röhrenleitung und dieser wird ungefähr d. Gew. proportional sein. Für eine Strecke von d. Länge l, Weite y und Wandstärke δ ist d. Volumen proportional $l y \delta$ also d. Gew. d. ganzen Röhrenstrangs proportional $\Sigma\, l y \delta$. D. Wandstärke einer solchen Röhre wird gewöhnlich nach einer empirischen Formel bestimmt: $\delta = \alpha + \beta y$, wo α constant ist, β aber mit d. Pressung wächst. Im vorliegenden Fall sind d. Pressungen in d. einzelnen Theilen an d. verschiedenen Stellen d. ganzen Röhrenstrangs wenig genug verschieden, so daß auch β als Constante betrachtet werden kann, da auch am Ende d. ganzen Leitung d. Pressung noch so groß sein muß, daß d. Wasser in d. obersten Stockwerke hinaufsteigt. Damit sind d. Anlagekosten proportional: $\Sigma\, l y (\alpha + \beta y)$. Behufs einer ersten Annäherung soll zunächst so gerechnet werden, als ob $\beta = 0$ wäre, indem d. Kosten nicht nur bedingt sind durch d. Kosten d. Röhrenstrecke selbst sondern auch durch d. Verlegungskosten, welche ein umgekehrtes Abhängigkeitsverhältniß haben könnten. Jedenfalls ist β nur sehr klein, es sei also behufs einer ersten Näherung gesetzt: $\Sigma\, l y = \text{minim.}$ Soll dieses ein Minim. bezüglich d. Veränderlichen y sein, so muß d. erste Differentialquotient $= 0$ sein, also:

$$\Sigma\, l\, dy = 0 .$$

d. n verschiedenen Differentiale $dy_1\ dy_2\ dy_3 \ldots$ stehen in einer gewissen Beziehung zu einander. Da keine anderen Widerstände als d. Leitungswiderstand berücksichtigt sind und auch diese Leitungswiderstandshöhe viel größer als d. Geschw.-Höhe d. an irgend einer Stelle fließenden Wassers ist, so ist wegen d. Gl.: $\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - B$, wo man d. Geschw.-Höhe links gegen d. viel größere Höhe B vernachlässigen kann:

$$H = B .$$

Nach Seite 93 ist dann d. Widerstandshöhe irgend einer dieser n Strecken:

$$B = \frac{l P}{y^5} \quad \text{wenn} \quad P = \frac{\lambda}{2g} \left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{3} \quad \text{ist.}$$

Dieses P hat für jede d. n Strecken einen besonderen Werth, der sich aber von vornherein berechnen läßt, wenn für λ vorläufig ein angenäherter Mittelwerth, etwa 0,03, gesetzt wird, man hat nur zu setzen in d. allgemeinen Formel: $V = V_1$, $\alpha = \alpha_1$, so findet man $P_1 =$ d. Werth von P für diese erste Röhrenstrecke, dann ist $B_1 = \frac{l_1 P_1}{y_1^5}$ u. s. w. —

Nun ist aber d. Summe d. Widerstandshöhen aller n Strecken zusammengenommen $= B = \Sigma \frac{l P}{y^5}$ eine gegebene größe, denn es muss dies $= H_n$ sein; wenn nun auch d. verschiedenen H_n unbekannt sind so ist doch H_n bekannt, nämlich:

$$H_n = h_n + b_0 - b_n .$$

Es sind also d. n Differentiale von d. Bedingung gebunden, daß $\Sigma \frac{lP}{y^5} = const = H_n$ sein muß; d. Bedingung ist also:

$$\Sigma B = \Sigma \frac{lP}{y^5} = H_n = h_n + b_0 - b_n .$$

differentiirt giebt diese Gl.: $\Sigma \frac{lP}{y^6} dy = 0$.

Zwischen dieser Gl. und d. Gl. $\Sigma l dy = 0$ könnte man nun von d. n Differentialen $dy_1, dy_2 \ldots dy_n$ eins eliminiren, so daß eine Gl. entstünde, d. nur d. übrigen $n-1$ Differentiale enthielte; da diese $n-1$ übrig bleibenden Werthe von dy ganz unabhängig von einander sind, so müßte d. entstehende Gl. identisch erfüllt sein für alle Werthe von y, es müßte also d. Coeff. d. einzelnen y gleich sein. Dieses würde $n-1$ Gln. ergeben, welche zusammen mit d. Gl. für P d. erforderliche Zahl von n Gln. geben, woraus d. verschiedenen Durchmesser zu finden sind. Es ist aber zweckmäßiger dieses Eliminationsverfahren mit einem gewissen Coeff. auszuführen; zu dem Ende multipliciren wir d. Gl. mit μ^6 und addiren sie zu $\Sigma l dy = 0$, so erhalten wir d. Gl.:

$$\Sigma l \left(1 - \mu^6 \frac{P}{y^6}\right) dy = 0$$

Nun kann man μ so bestimmen, daß diese n Glieder d. Summe einzeln jedes für sich $= 0$ wird, also d. Gl. in n Theilgleichungen zerlegen, wobei nur μ passend bestimmt werden muß. Nennt man d. Coeff. μ, d. dieser Bedingung entspricht, so ergiebt sich $y = \mu P^{\frac{1}{6}}$. Man braucht dann nun noch d. Wurzel $\mu P^{\frac{1}{6}}$ zu bilden, um d. verschiedenen n Durchmesser y zu finden. D. n verschiedenen Werthe von P sind aber bekannt für einen Mittelwerth von λ, so daß es sich nur um d. Bestimmung von μ handelt; dieses kann aber geschehen vermittelst d. Bedingung: $\Sigma \frac{lP}{y^5} = H_n$, dieses aber eingesetzt liefert:

$$\Sigma \frac{lP}{\mu P^{\frac{5}{6}}} = H_n$$

Hierin sind l u. P für d. verschiedenen einzelnen Glieder verschieden, μ war aber ein für alle Glieder gemeinschaftlicher Coeff. so daß $\frac{1}{\mu^5}$ herausgeschrieben werden kann, also:

$$\mu = \left(\frac{\Sigma l P^{\frac{1}{6}}}{H_n}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Dieser Werth von μ ist dann nur zu multipliciren mit $P^{\frac{1}{6}}$, um y zu finden.

Jetzt kann man eine Correctionsrechnung in doppelter Richtung anstellen, einmal insofern, als λ nicht immer $= 0{,}03$ ist und dann in so fern, als es nicht ganz d. Aufgabe entspricht, d. Summe d. Producte ly zu einem min. zu machen, sondern daß

$$\Sigma ly(\alpha + \beta y)$$ zu einem min. gemacht werden soll.

Was zunächst λ betrifft, so kann man, da jetzt d. Durchmesser angenähert bestimmt sind, sowie auch d. Wassermengen, d. durch d. einzelnen Rohrstrecken hindurchfließen, so kennt man auch d. mittl. Geschw. in diesen Rohrstrecken, also kennt man auch u_y und es ist nun im Allgemeinen: $u_y = \frac{4V}{\pi y}$; V ist aber am Anfang $= V$ und am Ende αV, so daß man setzen kann statt $4V$: $2V(1+\alpha)$ also:

$$u_y = \frac{2V(1+\alpha)}{\pi y}$$

Setzt man hierin d. Werthe $V = V_1 V_2 \ldots$ $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ $y = y_1 y_2 \ldots$, so kann man d. mittl. Werthe von u_y für d. einzelnen Strecken berechnen, damit findet man nun entsprechend d. corrigirten Werth von λ. War ehedem λ' d. vorläufig angenommene Mittelwerth von λ, so braucht man nur d. früher berechneten Werthe von P zu multipliciren mit $\frac{\lambda}{\lambda'}$ um d. corrigirten Werthe von P zu erhalten. Angenommen dieses sei geschehen, so daß nun unter P d. corrigirte Werth von P verstanden werde, dann soll d. Einfachheit wegen gesetzt werden: $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m}{2}$

Die Aufgabe ist dann: $\sum l y \left(1+\frac{my}{2}\right)$ = min zu machen. Zu dem Ende muss d. Differential bezüglich d. unabhängigen $y = 0$ sein, also:

$$\sum l(1+my)\,dy = 0.$$

Wenn man wieder d. Bedingungsgl. $\sum \frac{lP}{y^6}\,dy = 0$ mit d. Coeff. μ^6 multiplicirt und d. Gl. von dieser subtrahirt wird, so ergibt sich:

$$\sum l\left(1+my-\mu^6\frac{P}{y^6}\right)dy = 0.$$

Hier kann nun wieder μ so bestimmt werden, dass diese Gl. in n einzelne Gln. zerfällt. Wäre d. Coeff. μ so bestimmt, so würden sich d. n einzelnen Werthe von y ergeben aus dieser Gl. Dieses würde aber sehr zeitraubend sein, da diese Gln. durch Probiren aufzulösen sind, welches bei n Gln. vom 6ten Grad nicht so einfach ist. Wenn es sich aber nur wie hier um eine Correctionsrechnung handelt und m immer sehr klein ist, so kann man in my dem y d. vorher schon bestimmten Näherungswerth beilegen, welcher aber mit y' bezeichnet sei, also y' = Näherungswerth für d. Rohrdurchmesser. Dann ergibt sich, wenn μ bestimmt ist:

$$y = \mu\left(\frac{P}{1+my'}\right)^{\frac{1}{6}}$$

d. Werthe von $\frac{P}{1+my'}$ kann für d. n Rohrstrecken berechnet werden, da d. n Werthe von P bekannt sind. Es handelt sich also nur noch um d. Bestimmung von μ. Dieser Coeff. ergibt sich aus: $\sum \frac{lP}{y^5} = H_n$; setzt man y ein, so folgt:

$$\sum \frac{lP}{\mu^5\left(\frac{P}{1+my'}\right)^{\frac{5}{6}}} = H_n$$

und daraus μ:

$$\mu = \left(\frac{\sum\left[l\left(\frac{P}{1+my'}\right)^{\frac{1}{6}}(1+my')^{\frac{5}{6}}\right]}{H_n}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Nachdem man nun so d. einzelnen corrigirten Weiten d. Strecken d. Hauptleitungen gefunden hat, kann zu d. Nebensträngen geschritten werden, d. sich an d. Knotenpunkten abzweigen. Um diese Nebenstränge nun genau so weiter behandeln zu können, ist weiter nichts nöthig, als zunächst d. Druckhöhen $b_1\, b_2 \dots$ für d. n Knotenstellen zu berechnen, denn dann treten diese bezüglich d. Nebenstränge an Stelle von b_0 in d. Formel für d. Hauptstrang und kann dann genau so wie vorhin verfahren. Die Größen $b_1, b_2 \dots\dots b_{n-1}$ können nun leicht gefunden werden, b_0 und b_n waren bekannt, b_1 bis b_{n-1} müssen berechnet werden. Es kann nun aber, nachdem d. Durchmesser y für d. sämtlichen n Strecken d. Hauptstranges bekannt sind, d. Größe B für d. n Strecken berechnet werden:

$$B_1 = \frac{l_1P_1}{y_1^5} \quad \dots\dots \quad B_n = \frac{l_nP_n}{y_n^5}.$$

Es ist dann [illegible], ist d. Druckhöhe H_1 für A_0 bis $A_1 = B_1$, ferner $H_2 = B_1 + B_2$, $H_3 = B_1 + B_2 + B_3$ etc. — es ist aber $H_1 = h_1 + b_0 - b_1$ und hieraus also b_1, da H_1 und b_0 bekannt sind. Ferner ist $H_2 = h_2 + b_0 - b_2$ woraus wiederum b_2 gefunden werden kann u. s. w. —

Nachdem nun also d. Druckhöhen an d. n Knotenpunkten bekannt sind, kann man d. Nebenstränge ebenso wie d. Hauptstrang berechnen. —

[illegible]

Permanente strömende Bewegung der Luft oder eines Gases in Gefäßen oder Röhren.

Um zunächst gewisse Fundamentalgln. für diesen Fall aufzustellen, muß zunächst erinnert werden an d. früher aufgestellten allgemeinen Gln. für d. permanent strömende Bew. einer beliebigen Flüssigkeit. D. Fundamentalgln., bei denen gar nichts bezüglich d. Art d. strömenden Flüssigkeit vorausgesetzt, waren folgende:

1.) d. Continuitätsgl.:

$$Fu = Gv$$

worin F = Querschnitt d. Flüssigkeitsstromes an einer gewissen Stelle, u mittlere Geschw. in F, G = Flüssigkeitsgew., welches pr. Sek. durch F fließt und v = Volumen d. Gewichtseinheit. —

2) d. Gl. d. lebendigen Kraft:

$$\frac{u\,du}{g} + v\,dp = dM - dB$$

diese Gl. ist bezogen auf ein Längenelement ds d. Röhre und auf 1 kgr. d. Flüssigkeit; ferner bedeutet g d. Beschl. d. Schwere, p d. mittl. Pressung in F, dM d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte pr. 1 kgr. strömender Flüssigkeit auf d. Wege ds und dB d. Arbeitsverlust durch d. Bew.-Widerstände pr. 1 kgr. Flüssigkeit auf d. Wege ds.

3.) d. Wärmegleichung:

$$dU + p\,dv = W\,d\Theta + dB.$$

Darin bedeutet U d. ges. innere Arbeitsvermögen d. Flüssigkeit pr. 1 kgr., dU d. Änderung desselben auf d. Wege ds, $d\Theta$ bedeutet d. Wärme, welche pr. 1 kgr. strömender Flüssigkeit durch d. Wand d. Röhrenelements von d. Länge ds von außen nach innen zugeführt wird, W d. Arbeitswerth d. Wärmeeinheit, also d. Zahl 424 wenn 1 kgrm. d. Arbeitseinheit ist, vermittelst welcher d. Temperatur von 1 kgr. Wasser um 1° C. erhöht wird. Aus 2 und 3 ergibt sich d. Gl. d. inneren Arbeitsvermögens:

4.) . . . . $$\frac{u\,du}{g} + dU + d(pv) = dM + W\,d\Theta.$$

Zur näheren Bestimmung von dM, dB und $d\Theta$ ist zu bemerken, daß dM, also d. Arbeit d. äußeren Massenkräfte, wenn diese Kräfte bestehen aus d. Schwerkraft und d. Trägheitskräften d. rel. Bew., folgende Gl. gibt:

$$dM = \left(\cos\psi - \frac{f}{g}\cos\varrho\right)ds\ ;$$

hierin ist ψ d. Winkel, den an d. betreffenden Stelle d. Mittellinie d. Röhre d. Richtung d. Schwere mit d. Tangente an d. Mittellinie d. Röhre im Sinne d. Bew. bildet, also $0 < \psi < 180°$; f bedeutet hier, für d. Fall d. eigenen Bew. d. Systems, d. Beschl. d. Mittellinie d. Röhre an d. betreffenden

Stelle und φ d. Winkel zwischen d. Richtung von f mit d. Richtung d. Tangente an d. Mittellinie. —

Was d. Größe dB betrifft, so können auch hier d. Lst-Widerstände zweierlei Art sein, theils Leitungswiderstände längs d. ganzen Rohre theils besondere Widerstände, [illegible] durch Richtungs- und Querschnittsänderungen. In dieser differentiellen [illegible] aber nur d. Leitg auf d. ganzen Länge vertheilten Leitungswiderstände [illegible], da diese diff-Gl. nur im Ganzen behandelt werden können, nicht für einzelne Stücke ds. Etwaige sonstige Widerstände können erst nach d. Integration berücksichtigt werden, wobei es nöthig ist, wenn an irgend einer Stelle ein besonderer Widerstand stattfindet, bis dahin zu integriren und dann von hier wieder weiter u. s. w. — Für d. Leitungswiderstand kann man dieselbe Gl. zu Grunde legen wie beim Wasser, also:

$$dB = \lambda \frac{ds}{\delta} \frac{u^2}{2g}$$

wenn sich nur verhielt λ durch Versuche zu bestimmen. Schließlich ist:

$$g\,dQ = k(T'-T)\,dF'$$

wenn bedeutet T d. absolute Temperatur im Innern d. Rohre an d. betrachteten Stelle, T' d. Temperatur d. Mediums an d. entsprechenden äußeren Stelle und dF' d. Wandfl. d. Rohre entsprechend d. Längenelement ds; k ist d. betreffende Wärmeübergangscoeff., also d. Wärmemenge, d. durch eine Wandfl. F' in d. Zeiteinheit für jeden Grad d. innern und äußeren Temp.-differenz hindurchfließt. —

Zu diesen 3 Gln. müssen jedoch noch 2 hinzukommen, da 5 Unbekannte zu bestimmen. Diese 2 Gln. sind von d. Art d. Flüssigkeit abhängig; zunächst d. Zustandsgl.:

$$pv = RT \qquad 4.$$

Die letzte Gl. endlich bezieht sich auf d. innere Arbeitsvermögen eines Gases. Aus d. Principien d. Wärmetheorie ist bekannt, daß d. ∞ kleine Änderung d. Energieinhalts, also d. Wärmemenge einer unendl. kl. Änderung d. Arbeitsvermögens $A\,dU$ einfach proportional ist d. Temperaturänderung. [illegible] innere Arbeit ist beim Gas $= 0$, eine Änderung d. Energie ist nur bedingt durch eine Änderung d. inneren lebendigen Kraft nicht bezüglich d. Bewegung, es ist also:

$$A\,dU = c\,dT. \qquad \text{wenn } c \text{ d.}$$

spec. Wärme bei constantem Volumen bedeutet. Nun ist bekanntlich: $AR = c_p - c$ wo c_p d. spec. Wärme eines Gases bei constantem Druck ist. Wird nun $c_p - c = c(n-1)$ gesetzt, wo bekanntlich für atm. Luft $n = 1{,}41$ ist, so ist: $\frac{c}{A} = \frac{R}{n-1}$ also:

$$dU = \frac{R}{n-1}\,dT \qquad 5)$$

Jetzt haben wir 5 Beziehungen, wenn auch nur in Form von diff-Gln., womit nun d. 5 Unbekannten gefunden werden können als Functionen von s, wenn nur d. Anfangs- und Endzustand, also d. Grenzbedingungen in d. erforderlichen Zahl gegeben sind zur Bestimmung d. Constanten.

Um [illegible] sollen diese Versuche jedoch [illegible] werden, daß von diesen 5 Größen 2 eliminirt werden und zwar d. spec. Volumen und d. innere Arbeitsvermögen, so daß nur 3 Gln. bleiben zwischen Dr. Temp. und Geschw.

Zunächst läßt sich Gl. 1 mit Gl. 4 so combiniren, daß v herausfällt, man bekommt nämlich:

$$\frac{\delta u}{g} = \frac{RT}{p} \qquad \text{ferner ist mit} \qquad \mathrm{I}$$

Rücksicht auf Gl. 4 u. Gl. 5:

$$dU + d(pv) = \frac{R}{n-1}\,dT + R\,dT = \frac{n}{n-1}\,R\,dT.$$

[illegible]

$$dM = \cos\psi \; ds$$

[illegible]:

II $$\frac{u\,du}{g} + \frac{n}{n-1}\,\mathcal{R}\,d\mathcal{T} = \cos\psi\; ds + W\,dQ$$

[illegible] Gl. 3 [illegible]: $$p\,dv = pv\,\frac{dv}{v} - \mathcal{R}\mathcal{T}\,\frac{dv}{v} - \mathcal{R}\mathcal{T}\,\frac{dv}{\mathcal{G}v}\,\mathcal{G} - \mathcal{R}\mathcal{T}\,\frac{d(\mathcal{G}u)}{\mathcal{G}u}$$

III [illegible]: $$\frac{\mathcal{R}}{n-1}\,d\mathcal{T} + \mathcal{R}\mathcal{T}\,\frac{d(\mathcal{G}u)}{\mathcal{G}u} = W\,dQ + \lambda\,\frac{ds}{\gamma}\,\frac{u^2}{2g}$$

[illegible] II − III:

IV $$\frac{u\,du}{g} + \mathcal{R}\,d\mathcal{T} - \mathcal{R}\mathcal{T}\,\frac{d(\mathcal{G}u)}{\mathcal{G}u} = \cos\psi\; ds - \lambda\,\frac{ds}{\gamma}\,\frac{u^2}{2g}$$

[illegible] p $\mathcal{T}$ [illegible] u [illegible] s [illegible] s [illegible]

[illegible] $W\,dQ$, $\cos\psi$ [illegible] λ. [illegible] Gl. II:

$$\frac{u\,du}{g} = +\,\frac{n}{n-1}\,\mathcal{R}\,d\mathcal{T}$$

[illegible]: $$\frac{u^2 - u_1^2}{2g} = \frac{n}{n-1}\,\mathcal{R}\,(\mathcal{T}_1 - \mathcal{T})\,,$$ [illegible] $\mathcal{T}_1$ u. u_1 [illegible]

[illegible]

Gl III [illegible] $\frac{\mathcal{T}\mathcal{R}}{n-1}$ [illegible]: $$\frac{d\mathcal{T}}{\mathcal{T}} = +(n-1)\,\frac{d(\mathcal{G}u)}{\mathcal{G}u}$$

[illegible] λ [illegible]

[illegible] $\mathcal{G}u$ [illegible]:

$$\frac{d\mathcal{T}}{\mathcal{T}} = +(n-1)\,\frac{dv}{v}$$

[illegible]:

$$\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1}$$

[illegible] $\mathcal{G}v = p\mathcal{T}$, [illegible]:

$$\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

[illegible] $\mathcal{T}$ [illegible]:

$$\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_1} \gtreqless \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1} \quad \gtreqless \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

[illegible] Gl. [illegible] $\frac{u^2 - u_1^2}{2g}$ [illegible]: $$u = \sqrt{u_1^2 + \frac{n}{n-1}\,2g\,\mathcal{R}\mathcal{T}_1\left(1 - \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_1}\right)}$$

[illegible] $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_1}$ [illegible] $\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, [illegible] $1 - \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}_1} < 1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$. [illegible]

Ausdruck zu groß, wenn man $\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ an Stelle von $\frac{T}{T_1}$ setzt. Es muß also, um diesen Unterschied auszugleichen, d. ganze Ausdruck mit einem echten Bruch φ multiplicirt werden, wo φ ein Correctionscoeff. ist: also:

$$u = \varphi \sqrt{u_1^2 + \frac{n}{n-1}\, 2gRT_1 \left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

Demnach bedeutet φ weiter nichts als d. Geschw.-Coeff., wie bei d. Ausfl. d. Wassers, denn d. Wurzelgröße ist derjenige Werth von u, welcher stattfinden würde, wenn keine Ausfl.-Widerstände vorhanden wären. Aus d. vorigen Gl. folgt ferner:

$$T = T_1 - \frac{n-1}{n}\,\frac{u^2-u_1^2}{2g}$$

Nimmt man d. letzten 2 Gl. für u und T zusammen mit Gl. I, so hat man 3 Gln., vermittelst welcher in diesem Falle d. unbekannten Größen gefunden werden können und zwar sind diese Bedingungen jetzt aber in endlicher Form vorhanden. Wenn es sich also handelt um d. Ausfl. eines Gases aus einer weiten Röhre, [illegible] d. Wärmeleitung, d. Schwerkräfte und d. Bewegungswiderstände vernachlässigt werden können, so bestehen diese 3 Bedingungen.
In diesen Gln. ist d. Größe $1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, welche mit $f(p)$ bezeichnet werden soll, recht unbequem, weshalb dieselben zunächst tabellarisch aufgezeichnet sind. Für atm. Luft mit $n = 1{,}41$ ist $\frac{n-1}{n} = 0{,}2908$ und hierfür finden sich d. Werthe von $f(p)$ für $\frac{p}{p_1} = 0{,}95$ bis $0{,}1$ in Redtenbacher's Resultate Seite 530. In d. meisten Fällen ist jedoch $\frac{p}{p_1}$ wenig von d. Einheit verschieden, d. h., wenn man $\frac{p}{p_1} = 1-\delta$ setzt, δ ein kleiner Bruch wird. In einem solchen Fall kann man dann $f(p)$ nach Potenzen von δ in eine Reihe entwickeln, von welcher es genügt wenige Glieder zu nehmen. Also:

$$f(p) = 1-\left[1-\frac{n-1}{n}\delta + \frac{\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}-1\right)}{1\cdot 2}\delta^2\right] = \frac{n-1}{n}\delta + \frac{n-1}{2n^2}\delta^2 = \frac{n-1}{n}\delta\left(1+\frac{\delta}{2n}\right)$$

Insbesondere für atm. Luft ist:

$$f(p) = 0{,}2908\,\delta\,(1+0{,}355\,\delta).$$

Diese Formeln finden eine hauptsächliche Anwendung bei d. Berechnung d. Ausflusses eines Gases aus einer Mündung in einer Gefäßwand. In einem solchen Fall pflegen gegeben zu sein d. Pr. p_1 und d. Temp. T_1 im Innern d. Gefäßes, ferner d. Pr. p, welche im äußeren Raume stattfindet, in welchen hinein d. Ausfluß d. Gases stattfindet, also im kleinsten Querschnitt d. contrahirten Strahls. Ferner ist gegeben d. Größe d. Mündung $= A$; d. Contraction ist hier ähnlich wie beim Wasser, α sei d. Contractions-Coeff., also αA d. kleinste Querschnitt d. contrahirten Strahls. Außerdem kann hier noch ein besonderer Widerstand in Betracht kommen und es sei d. darauf bezügliche Geschw.-Coeff. $= \varphi$, und ζ = Widerstandscoeff. und $\mu = \alpha\varphi$ = Ausflußcoeff. Wenn nun d. Ausflußgefäß einigermaßen groß ist, so kann man d. Geschw. d. Gases im Innern d. Gefäßes vernachlässigt werden, also $u_1 = 0$ gesetzt werden, man hat dann:

$$u = \varphi \sqrt{\frac{n}{n-1}\, 2gRT_1\, f(p)}$$

Ist φ nun durch Versuche bestimmt, so ist nach dieser Gl. u vollkommen bestimmt.
Bei diesem Ausfluß kann unter Umständen eine bedeutende Temp.-Änderung stattfinden und zwar eine Erniedrigung. Wenn man z. B. Luft, d. unter 2 Atm. Pr. aus einem cylindrischen metallenen Gefäße ausströmen läßt, so findet man, daß d. Röhre so kalt wird, daß darauf gespritztes Wasser zu Eis erstarrt. —
Setzt man in d. Gl. für T diesen Werth von u und $u_1 = 0$, so folgt:

$$T = T_1\left[1-\varphi^2 f(p)\right].$$

Außer d. Ausflußgeschw. und d. Temp. d. ausströmenden Luft ist ferner noch von Interesse d. Ausflußmenge, welche aber hier besser d. Gew. nach und nicht d. Volumen nach zu bestimmen ist und zwar, um Verwechslungen zu vermeiden, soll noch angegeben werden, unter welchen Umständen dies gemessen ist. G sei d. p. Sek. ausströmende Luftgew., dann ist, wenn d. Gl. auf d. Hauptquerschnitt bezogen wird:

$$F = A\alpha \quad \text{und} \quad G = \alpha A u \frac{p}{RT}.$$

Setzt man hierfür u seinen Ausdruck und $RT = RT_1\left(1-\varphi^2 f(p)\right)$ und $\alpha\varphi = \mu$, so ist:

$$G = \mu A p \frac{\sqrt{\frac{n}{n-1}\frac{2g}{R J_1} f(p)}}{1-\varphi^2 f(p)}$$ — z. Vol. ausströmender Luft.

In welchem Grade d. ausströmende Luft eine Temp.-Erniedrigung erfahren kann, mag an einem Beispiel erläutert werden: Ist z.B. etwa $\frac{p}{p_1} = \frac{1}{2}$, dann ist $f(p) = 0{,}1825$ (d.h. wenn d. Dr. im Gefäß 2 mal so groß als äußere ist). Ist ferner d. Luft aus einer kurzen cyldr. Ansatzröhre, dann ist erfahrungsmäßig für $\frac{p}{p_1} = \frac{1}{2}$, d. Geschw.-Coeff. = Ausfluß-Coeff. $\varphi = 0{,}9$ also $\varphi^2 = 0{,}81$ und $\varphi^2 f(p) = 0{,}81 \cdot 0{,}1825$. Ist ferner d. Temp. d. Luft im Innern d. Gefäßes = 27°C, so daß d. absolute Temperatur = 300° ist, dann ist $J = 300(1-0{,}81 \cdot 0{,}1825) = 255{,}7$.
und d. entsprechende Thermometer Temp.: $t = J - 273 = -17{,}3°C$. Lufttheile d. Ansatzröhre mit Metall, so kann d. auf diese Weise gezogene Wasser gefrieren.—

Man kann d. Formel für d. atm. Luft auf eine einfachere Form bringen, indem man $n = 1{,}41$, $R = 29{,}3$ und $g = 9{,}81$ setzt; dann ist:

$$u = 44{,}46\varphi\sqrt{J_1 f(p)} \quad \text{und} \quad G = 1{,}517 \mu A p \frac{\sqrt{\frac{f(p)}{J_1}}}{1-\varphi^2 f(p)}$$

Was d. hier zu brauchenden Geschwindigkeitscoeff. betrifft, so liegen über d. Größe d. Contractions-coeff. eigentlich zuverlässige Erfahrungen nicht vor. D. Ausflußcoeff. μ, d. in manchen Fällen ziemlich mit d. Geschw.-Coeff. φ ist, ist allerdings häufiger gesucht worden, indessen nicht so häufig wie beim Wasser. Es ergibt sich hier im Gegensatz zum Wasser, daß μ in hohem Grade abhängt von $\frac{p}{p_1}$ und zwar in d. Weise, daß mit wachsendem Unterschied, also mit abnehmendem Verhältniß $\frac{p}{p_1}$ d. Ausflußcoeff. zunimmt. Dieser Unterschied $\frac{p_1}{p}$ ist aber im Verhältniß zu so größer, je kleiner $\frac{p}{p_1}$ ist. D. Werthe von μ finden sich in Redtenbachers Resultate Seite 532.—

Eine Anwendung dieser Formel kann namentlich gemacht werden für d. Ausfluß d. Luft z.B. bei d. erforderlichen Düsenöffnung eines Gebläses. Dazu dient d. Gl. für G. Allerdings setzt sie d. Dr. p_1 an einer solchen Stelle an d. Windleitung unmittelbar vor d. Düse gemessen zu werden, welche d. Geschw. d. Luft nicht = 0 ist. Mißt man also p_1 unmittelbar vor d. Düse, aus welcher d. Luft herausströmt, so darf eigentlich nicht ohne Weiteres $u_1 = 0$ gesetzt werden, da hier eine Geschw. bis zu 20 mtr p. Sec. vorkommen kann. Jedoch liegt eine Ausnahme, daß wenn d. Geschw. dort, wo p_1 gemessen wird auch 20 mtr beträgt, dieselbe dadurch ausgeglichen werden kann, indem dieselbe daraus eine Vergrößerung d. Düsenöffnung um 2% ausmacht. Man findet d. Ausflußgeschw. etwas zu klein, also ergibt sich demgemäß bei gegebener Luftmenge d. Düsenöffnung zu groß. Dieses hat um so weniger zu sagen, als durch unvermeidliche Ansätze an d. Düse d. reine Düsenöffnung etwas größer sein muß als sie beim Gebläse durchschnittlich bleiben müßte. Wenn man jedoch diese Formel zu Grunde legt, so fragt es sich ferner, welche Zahlenwerthe man d. Größen μ u. φ beilegen muß. Solche Düsen sind conische Ansatzröhren mit schwacher Convergenz. Man kann erfahrungsmäßig setzen, wenn man ihr d. Düsenweite etwas zu klein als zu groß nimmt: $\mu = 0{,}95$. Zwar wird man ferner wenig irren, wenn man annimmt, daß dieser Werth zu gleichen Theilen von α und φ herrührt. Eine geringe äußere Contraction findet statt, und auch rührt dieselbe zum Theil von d. Luft-Widerständen her. Angenommen es rühre dies zu gleichen Theilen von α und φ her, so ist also auch dieser Werth $= \varphi^2$ gesetzt werden kann; ferner sei vorausgesetzt, daß p, also d. Dr. gemessen ist in Klgr. p. □m. Für d. äußeren normalen Atm.-Dr. ist $p = 10333$ oder wenn man unter b d. Verhältniß d. mittleren Barometerstandes d. Aufstellungsortes zum Normalstand bezeichnet, ist d. allgemein zu setzen $p = 10333 b$. Strömt d. Luft in d. Hochofen ein, so kann man allerdings nicht berücksichtigen, daß hier in d. Hochofen d. Atm.-Druck herrscht; diesem Umstand ist jedoch schon Rechnung getragen, indem μ und φ kleiner gesetzt sind, als sie streng genommen sein sollten.

Setzt man diese Zahlenwerthe in G ein, so findet man:

$$\frac{G}{bA} = \frac{13324}{1-0{,}85\, f(p)}\sqrt{\frac{f(p)}{T_1}}$$

wobei dann d. Werth von $f(p)$ entweder d. vorstehenden Tabelle entnommen werden, od. man kann ihn auch mit genügender Annäherung berechnen aus d. Formel $f(p) = 0{,}291\,\delta(1+0{,}355\,\delta)$ und zwar mit Rücksicht darauf, daß δ hier niemals größer als 0,2 zu sein pflegt, wo $\delta = \frac{p_1-p}{p_1}$. Unter solchen Umständen kommt es wenig darauf an, daß man [illegible] Glieder nimmt, da d. [illegible] sehr klein werden.

Es sei z. B.: eine Gebläseanlage für einen Cupolofen zu berechnen, welchem p. Min. 2,5 Klg. Luft zugeführt werden soll, also $G = 2{,}5$. Am Ort d. Aufstellung entsprechend sei $b = 0{,}74$ ~~[illegible]~~, dann ist: $\frac{1}{b} = \frac{76}{74} = 1{,}027$. Angenommen es solle in d. Windkammer vor d. Düsen eine Luftpressung herrschen, welche gemessen wird durch eine Quecksilbersäule von 88 Ctm Höhe, so daß also d. Überdruck durch einen Unterschied $88-74 = 14$ Ctm Quecksilbersäule zu messen ist, dann ist: $\delta = \frac{88-74}{88} = 0{,}159$.
Vorausgesetzt, d. Gebläse solle durch kalten Wind gespeist werden, so daß d. absolute Temp. in runder Zahl etwa $= 300$ gesetzt werden mag. Hierfür findet man:

$f(p) = 0{,}04888$ und damit d. erforderliche Größe sämmtlicher Düsenöffnungen:

$$A = 1{,}027 \cdot 2{,}5\,\frac{1-0{,}85\cdot 0{,}04888}{13324}\sqrt{\frac{300}{0{,}0488}} = 0{,}01447 \text{ □m.}$$

Bewegung der Luft in längeren Röhren.

Hierfür gelten zunächst d. schon bekannten Gln:

$$\frac{Fu}{g} = \frac{RT}{p}$$

$$\frac{u\,du}{g} + \frac{n}{n-1}R\,dT = ds\cos\psi + W\,dQ$$

$$\frac{R}{n-1}\,dT + RT\,\frac{d(Fu)}{Fu} = W\,dQ + \lambda\frac{ds}{\delta}\frac{u^2}{2g}$$

$$\frac{u\,du}{g} + R\,dT - RT\,\frac{d(Fu)}{Fu} = ds.\cos\psi - \lambda\frac{ds}{\delta}\frac{u^2}{2g}.$$

Es sei nun vorausgesetzt, d. Leit. [illegible] sei in einer Reihe von constanten Querschnitt, ferner sei dieselbe [illegible] horizontal, [illegible] d. Einfluß d. Schwere [illegible] werden kann, und endlich sei vorausgesetzt, daß d. Wärmeübertragung durch d. Rohrwand so gering sei, daß sie [illegible] werden kann, es ist also zu setzen: $dQ = 0$ und $\cos\psi = 0$.
Für d. Anfangszustand sei d. Pr. $= p_1$, d. absolute Temp. $= T_1$ und d. Geschw. $= u_1$, es sollen dieselben Größen nun in d. Entfernung s gefunden werden.
Zur Abkürzung sei $\frac{u^2}{2g} = h$ und $\frac{u_1^2}{2g} = h_1$; dann folgt aus d. 2ten Gl.:

$dT = -\frac{n-1}{n}\frac{dh}{R}$ und hieraus durch Integration: $T = T_1 - \frac{n-1}{n}\frac{h-h_1}{R}$.
Hiermit ist d. Temp. in d. Entfernung s gefunden, wenn man d. Geschw.-Höhe h kennt.
Zunächst ist zu bemerken, daß weil d. Querschnitt constant ist: $\frac{d(Fu)}{Fu} = \frac{du}{u} = \frac{u\frac{du}{g}}{\frac{u^2}{g}} = \frac{dh}{2h}$ ist und somit lautet Gl. 3 wenn man für dT seinen Werth und $\psi = 0$ setzt:

$$-\frac{dh}{n} + RT\frac{dh}{2h} = -\lambda\frac{ds}{\delta}h.$$

Setzt man hier d. Ausdruck für T ein, so läßt sich d. Gl. auf folgende Form bringen:

$$\left(\mathfrak{R}T_1 + \frac{n-1}{n}h_1\right)\frac{dh}{h^2} - \frac{n+1}{n}\frac{dh}{h} = 2\lambda\frac{ds}{d}$$

[illegible] $\frac{dh}{h^2} = d\left(-\frac{1}{h}\right)$ und $\frac{dh}{h} = d[\ln h]$.

also:

$$\left(\mathfrak{R}\frac{T_1}{h_1} - \frac{n-1}{n}\right)\left(1 - \frac{h_1}{h}\right) - \frac{n+1}{n}\ln\frac{h}{h_1} = 2\lambda\frac{s}{d}.$$

[illegible] 20 [illegible] $\lambda = 0{,}025$. Weisbach [illegible] 150 [illegible]:

$$\lambda = \frac{0{,}12}{\sqrt{u}},$$

für $u = 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36$

$\lambda = 0{,}04 \quad 0{,}03 \quad 0{,}024 \quad 0{,}02.$

Weil [illegible] Weisbach'schen Versuche [illegible] 25 m [illegible] 9 m [illegible] λ [illegible] 0,04 [illegible] $u_1 = 16$ m. [illegible] $u = 20$ m, [illegible] $u_1 = 16$ [illegible] 0,03 [illegible] $T_1 = 300$, also ist:

$\frac{u_1}{u} = 0{,}8$ und folgl.: $\frac{h_1}{h} = 0{,}64$. [illegible]:

$$\left(\frac{29{,}3 \cdot 300}{\frac{1}{2\cdot 9{,}81}\cdot 256} + \frac{41}{141}\right)0{,}36 - \frac{241}{141}\ln\frac{1}{0{,}64} = 0{,}06\,\frac{s}{d}$$

und also $\frac{s}{d} = 4031.$

ferner bekommt man:

$$T_1 - T = \frac{41}{141}\,\frac{h}{\mathfrak{R}}\left(1 - \frac{h_1}{h}\right) = \frac{41}{141}\,\frac{400}{2\cdot 9{,}81\cdot 29{,}3}\,0{,}36 = 0{,}073°.$$

[illegible] $\frac{1}{10}°$ [illegible]

$$dT = 0 \quad \text{und} \quad d\mathfrak{T} = 0$$

[illegible] $\frac{u\,du}{g} = dh$ und $\frac{\mathfrak{R}\,T u}{T u} = \frac{dh}{2h}$ [illegible]:

$$dh - \mathfrak{R}T\frac{dh}{2h} = ds\cos\psi - \lambda\frac{ds}{d}h$$

od. $$\left(\frac{\mathfrak{R}T}{2h} - 1\right)dh = \left(\lambda\frac{h}{d} - \cos\psi\right)ds.$$

[illegible]: $$\frac{T u}{g} = \frac{\mathfrak{R}T}{p}.$$ [illegible] $\frac{\mathfrak{R}T}{2h}$ [illegible] $\frac{\mathfrak{R}T}{2h}$ [illegible] $\frac{\mathfrak{R}T}{2h} \geq 100$ [illegible] 1% [illegible].

Ist $\frac{RT}{2h} > 100$ wenn $h < \frac{RT}{200}$ oder T mit d. Durchschnittswerth 300 angenommen und mit $R = 29{,}8$: wenn $h < \frac{29{,}8 \cdot 300}{200}$ also wenn $h < 43{,}95$ oder demnach wenn $u < \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 43{,}95}$ also wenn $u < 29{,}4$ ist. u ist aber in d. Regel selten größer als dieser Werth, so daß man 1 gegen $\frac{RT}{2h}$ vernachlässigen kann. Will man dies, so kann man d. Gl. integriren unter d. Voraussetzung, daß ψ eine Constante ist, d. h. daß d. Röhre constant steigt od. fällt oder wenn ψ ein constanter Mittelwerth; dann folgt, da

$$ds = \frac{\frac{RT}{2h}\,dh}{\lambda\frac{h}{d} - \cos\psi} \quad \text{oder} \quad \frac{2\cos\psi}{RT}\,ds = \frac{dh}{\left(\frac{\lambda}{d\cos\psi}h - 1\right)h}$$

$$\frac{2\cos\psi}{RT}\,ds = \left(\frac{\frac{\lambda}{d\cos\psi}}{\frac{\lambda}{d\cos\psi}h - 1} - \frac{1}{h}\right)dh = \left(\frac{1}{h - \frac{d\cos\psi}{\lambda}} - \frac{1}{h}\right)dh$$

dieses integrirt von 0 bis s gibt:

$$\frac{2\cos\psi}{RT}\,s = \ln\frac{h - \frac{d\cos\psi}{\lambda}}{h_1 - \frac{d\cos\psi}{\lambda}} - \ln\frac{h}{h_1} = \ln\frac{1 - \frac{d\cos\psi}{\lambda h}}{1 - \frac{d\cos\psi}{\lambda h_1}}$$

Für d. Specialfall, daß d. Röhre horizontal ist, also $\psi = 90°$ würde diese Gl. eine identische Gl. liefern; man muß dann auf d. ursprüngl. Diff.-Gl. zurückgehen; diese lautet für $\psi = 90°$:

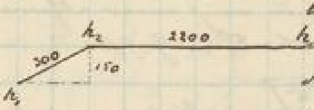
$$ds = \frac{RT}{2h}\,\frac{d}{\lambda h}\,dh$$

und hieraus durch Integration:

da $\frac{dh}{h^2} = -d\frac{1}{h}$ ist: $\lambda\frac{s}{d} = \frac{RT}{2}\left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{h_1}\right)$

oder $\frac{RT}{2}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h}\right) = \lambda\frac{s}{d}$. In dem einen wie in dem andern Fall ist nun d. Geschw.-Höhe h und damit d. Geschw. selbst bestimmt und durch d. Continuitätsgl. auch d. Pressung. —

Beispiel. Größere Leitungen von Luft kommen unter Anderem bei Tunnelarbeiten vor, wo es darauf ankommt Luft fortzuleiten zum Betrieb d. Bohrmaschinen, wozu d. ... Luft sich besonders gut eignet indem dieselbe nach d. Gebrauch noch zur Ventilation verwendet werden kann. Angenommen, es sei d. Bohrung eines größeren Tunnels fortgeschritten bis auf eine solche Strecke, daß d. Luftleitungsröhre eine Länge von 2500 m hat. Diese Röhre habe einen Durchmesser $d = 0{,}2$ m und es werde durchschnittlich 1 kgr gepreßte Luft p. Sek. verbraucht also $G = 1$. Angenommen nun d. Trace d. Röhrenleitung sei wie nebenstehend (M. Cenis-Tunnel) daß d. Compressionsmaschinen stehen im Thale und d. Röhre auf 300 m Länge und 150 m in d. Höhe steigen, als sie d. Tunnelanfang erreicht, wo nachher sie nun in einer Strecke von 2200 m horizontal weiter läuft. D. Compressionsmaschinen spannen d. Luft auf 5 Atm und es fragt sich, mit welcher Pr. d. Luft am andern Ende d. Röhre anlangt. Zu dem Ende fragt sich zunächst wie groß unter diesen Umständen d. Anfangsgeschw. u_1 ist. Ein Cubm. Luft wiegt nun bekanntlich bei d. Temp. 0 und bei normalem Atm.-Druck 1,293 kgr. umgekehrt hat also unter denselben Bedingungen 1 kgr Luft ein Volumen $= \frac{1}{1{,}293}$ Cubm. Es soll hier aber d. Luft mit einer Pr. von 5 Atm einströmen, so ist also d. Volumen nun nur $\frac{1}{5}$ so groß; ferner sei d. constante Temp. $= 27°C$ so ist d. absolute Temp. $= 300$ anzunehmen und. Dann ist d. Volumen von diesem kgr Luft von 5 Atm Pr. mit Rücksicht auf diese etwas höhere Temp.: $= \frac{1}{1{,}293} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{300}{273} = 0{,}170$ Cbm.



D. Rohrquerschnitt ist: $= \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}0314$ cubm.

und demnach d. Anfangsgeschw.: $u_1 = \frac{0{,}17}{0{,}0314} = 7{,}33$ m. Demnach kann d. Coeff. λ in runder Zahl $= 0{,}04$ angenommen werden.

Ferner ist d. Geschw.-Höhe $h_1 = 1{,}49$.

Es fragt sich nun, in welchem Grade nimmt d. Geschw.-Höhe ab bis zu d. Stelle, wo d. Rohrleitung in d. Tunnel hineingeht, also h_2. Hierzu dient d. Gl. von ψ nicht $= 90°$ ...

ist nämlich im vorliegenden Fall $\cos\psi = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}$. Multipliziert man nun noch d. Gl. mit d. Modulus d. brigg'schen Logarithmen-Systems 0,4343, so lautet dieselbe

$$\log \frac{1+\frac{0,1}{0,4\,h_2}}{1+\frac{0,1}{0,4\cdot 1,49}} = -\,0,4343\,\frac{300}{29,3\cdot 300}$$

$$\text{Also: } \frac{1+\frac{2,5}{h_2}}{2,678} = 0,9664 \text{ und somit } h_2 = 1,574$$

Um nun d. Geschw.-Höhe h zu finden, muß d. Gl. für $\psi = 90°$ benutzt werden, also:

$$\frac{29,3\cdot 300}{2\cdot 1,574}\left(1-\frac{h_2}{h}\right) = 0,04\,\frac{2200}{92}$$

$$\text{somit } \frac{h_2}{h} = 0,843 \text{ also } \frac{h_1}{h} = 0,843\,\frac{h_1}{h_2} = 0,843\cdot\frac{1,49}{1,574} = 0,798$$

Durch dieses Verhältnis ist nun auch d. Pressungsverhältnis bestimmt nach Gl.: $\frac{Fu}{G} = \frac{RT}{p}$. In unserem Falle ist auch Fu constant und folgt

$$\frac{p}{p_1} = \frac{u_1}{u} = \sqrt{\frac{h_1}{h}} = 0,894$$

und folgt d. Pr. p am Ende d. Röhre:

$$p = 0,894\cdot p_1 = 0,894\cdot 5 = 4,47 \text{ Atm.}$$

es geht also etwas mehr als eine halbe Atm. verloren. —

Wenn bei einer solchen langen Röhrenleitung ein besonderer Widerstand vorkommen soll, d. im Allgemeinen mit einer Querschnittsänderung verbunden sein kann, so kann man auch hier von d. Temp.-Änderung absehen und es handelt sich nur darum, näherungsweise d. Pr.-Änderung zu untersuchen. Jedenfalls nimmt an einer solchen Stelle, wo besondere Widerstände vorkommen, d. Pr. ab, jedoch nur in einem solchen Grade, daß man sich mit einer näherungsweisen Rechnung begnügen kann.

Es sei aber an einer solchen Stelle, unmittelbar vor derselben d. Pr. = p_1 d. Geschw. = u_1, und unmittelbar hinter d. fraglichen Stelle d. Pr. = p_2 und d. Geschw. = u_2; vor d. fraglichen Stelle sei d. Röhrenquerschnitt = F_1 und hinter derselben = F_2. Außer diesen plötzlichen Querschnittsänderungen kann auch noch ein besonderer Widerstand vorkommen, d. gemessen werden soll durch d. Widerstandscoeff. ζ. Setzt man $p_2 = p_1(1-\delta)$ so darf dieses δ nur als ein sehr kleiner Bruch betrachtet werden. Geht man nun noch einer allgemeinen Formel, d. sich bezog auf d. bes. d. Luft in irgend einem bezügl. Punkte d. Geschw.:

$$u = \varphi\sqrt{u_1^2+\frac{n}{n-1}\,2gRT_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

Dieses war d. Formel für d. Ausflußgeschw. aus einer Öffnung in d. Gefäßwand; dieselbe war unter solchen Umständen abgeleitet, daß nur d. Wärmeleitung durch d. Wand absorbiert war, ferner nur d. Einfluß d. Schwere und endlich nur T_1, also nur Leitungswiderstand d. Röhre. Diese Abstraktionen kann man auch hier machen für d. betrachtete mehr od. weniger kurze Strecke nur muß u_2 statt u, p_2 statt p und T_1 statt T gesetzt werden. Dividiert man dann d. Gl. durch φ, quadriert dieselbe und setzt schließlich $\frac{1}{\varphi^2} = 1+\zeta$, so ergibt sich:

$$\frac{n}{n-1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{(1+\zeta)u_2^2-u_1^2}{2gRT} = \frac{h_1}{RT}\left[(1+\zeta)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2-1\right]$$

Setzt man $p_2 = p_1(1-\delta)$ wo δ nur klein ist, so ist: $1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{n-1}{n}\,\delta$ und es wird

$$\delta = \frac{h_1}{RT}\left[(1+\zeta)\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2-1\right]$$

da $\frac{u_2}{u_1}$ von d. Pr. und d. Querschnitten abhängt, wenn Abhängigkeit aber sehr gering ist.

Nun kann p_2 und p_1 berechnet werden.

Bewegung des Leuchtgases in einer Stadtleitung.

Hierbei kann man sich noch weitere Vereinfachungen erlauben, weil es sich hier um einen Fall handelt, wobei d. Pr. sich nur äußerst wenig ändert. Selbst für d. ganze Strecke d. Leitung soll d. Druck, unter welchem d. Gas steht nur etwa abnehmen um einen solchen Betrag, d. gemessen wird durch eine Wassersäule von 30 mm. Da d. Atm.-Druck einer Wassersäule von 10 m entspricht, so ist dieses = 0,003 Atm., es handelt sich also um einen Fall, wo d. Pressungsänderung sehr gering ist, es können deshalb d. Formeln vereinfacht werden. Ist p d. Pr. in d. Entfernung s vom Anfang, p_1 d. Pr. im Anfangsquerschnitt, so ist $\frac{p}{p_1} = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$ gemäß d. Gl.: $\frac{\vartheta u}{g} = \frac{R\vartheta}{p}$, wo R ϑ g u. ϑ unverändert sind, wobei also d. Rohr immer gleichen Durchmesser hat. Bei Vernachlässigung einer ungleich horizontalen Lage d. Röhrenleitung ist dann:

$$\frac{R\vartheta}{2h}\left(1-\frac{h_1}{h}\right) = \lambda \frac{s}{d}$$

Bestimmt man hieraus d. Wert von h u. substituiert denselben in $\frac{p}{p_1}$, so folgt:

$$\frac{p}{p_1} = \sqrt{1-\lambda\frac{s}{d}\frac{2h_1}{R\vartheta}}$$

und da $\frac{p}{p_1}$ nur wenig von d. Einheit verschieden ist, kann man setzen:

$$\frac{p}{p_1} = 1-\lambda\frac{s}{d}\frac{u_1^2}{2gR\vartheta}$$

also:

$$1-\frac{p}{p_1} = \frac{p_1-p}{p_1} = \lambda\frac{s}{d}\frac{u_1^2}{2gR\vartheta}$$

Ist hier nun mit V d. Gasvolumen bezeichnet, welches p. Sek. durch d. fragliche Gasleitungsröhre hindurchströmen soll und zwar gemessen bei d. Druck, welcher zu Anfang d. Leitungsröhre stattfindet, also im Zustand p_1 ϑ_1, dann ist:

$$u_1 = \frac{4V}{\pi d^2}$$

diesen Ausdruck in d. letzte Gl. gesetzt, gibt:

$$d^5 = \lambda s \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{V^2}{2gR\vartheta}\frac{p_1}{p_1-p}$$

Setzt man hier $g = 9{,}81$ und bezeichnet ferner mit ς d. Dichtigkeit d. Gases verglichen mit d. atm. Luft bei gleicher Temp. u. Pr. (für gewöhnl. Steinkohlengas $\varsigma = 0{,}4 - 0{,}45$), dann ist: $R = \frac{29{,}27}{\varsigma}$. Nimmt man ferner d. durchschnittl. Temp. in d. Röhre = 12° C. an, also $\vartheta = 285$, so folgt:

$$d^5 = \frac{\lambda\varsigma}{100960}\, s\, V^2 \frac{p_1}{p_1-p}.$$

d. Pr. d. Gases pflegen, da es sich nur um kl. Unterschiede handelt, gewöhnl. durch eine Wassersäule gemessen zu werden. Angenommen es sei h diejenige Wassersäule ausgedrückt in mm, welche diese Pr.-Abnahme $p_1 - p$ gemessen wird, so ist: $\frac{p_1}{p_1-p} = \frac{10096}{h}$, da p_1 ungefähr = d. atm. Druck ist, so können setzen kann 10096. Setzt man dies ein, so erhält man:

$$d^5 = 0{,}1\,\lambda\varsigma\frac{sV^2}{h}.$$

Längs d. ganzen Röhrenleitung findet auch hier eine stetige Gasentziehung statt, nimmt man an, daß auch für dieselbe gleichförmig sei u. ist V d. Volumen, welches in d. Zeiteinheit durch d. Anfangsquerschnitt strömt, während d. Volumen, welches im Endquerschnitt ausströmt $= \alpha V$ ist, dann wird dasjenige Gasvolumen, welches durch einen Querschnitt in d. Entfernung s vom Anfang d. Rohrstrecke hindurchströmt, bestimmt sein durch:

$$\frac{V-\Phi}{(1-\alpha)V} = \frac{s}{l}$$

wenn nämlich Φ d. Gasvolumen ist, welches p. Sek. durch d. Querschnitt in d. Entfernung s hindurchströmt. Es ist dann $V-\Phi$ d. Verlust auf dieser Länge, $(1-\alpha)V$ d. Verlust auf d. ganzen Strecke, also:

$$\Phi = V\left(1-\frac{(1-\alpha)}{l}s\right).$$

Bezeichnet nun dh d. Druckverlust in Folge d. Reibungswiderstandes für ein unendl. kl. Längenelement ds d. Röhre, dann erhält wenn dh mit d. Gl. für d^5, wo aber für V jetzt geschrieben werden muß $V(1-\frac{1-\alpha}{l}s)$ also:

$$dh = 0{,}1\lambda\varrho \frac{ds}{d^5} V^2\left(1 - 2\frac{1-\alpha}{l}s + \frac{1-2\alpha+\alpha^2}{l^2}s^2\right)$$

Integrirt man diese Gl. von $s=0$ bis $s=l$, so erhält man d. ganzen Druckverlust für d. Strecke l:

$$h = 0{,}1\lambda\varrho \frac{V^2}{d^5}\left[l-(1-\alpha)l + \frac{1-2\alpha+\alpha^2}{3}l\right]$$

od. $$h = 0{,}1\lambda\varrho \frac{lV^2}{d^5}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Es ergibt sich hier genau so, wie bei d. Wasserleitung, nur daß V^2 d. Factor $\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$ bekommen hat. Es ist also nun d. ergänzte Formel, welche d. stetig längs d. ganzen Länge l erfolgten Gasabgabe Rechnung trägt:

$$d^5 = 0{,}1\lambda\varrho \frac{lV^2}{h}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Es müsste in dieser Formel d. Druckverlust h gemessen sein durch eine in mm ausgedrückte Wassersäule. Man könnte nun streng genommen in derselben Weise verfahren, wie bei d. Wasserleitung, daß also d. Anlagekosten ein Minimum werden; jedoch würde dies eine sehr umständliche Rechnung liefern, indem einmal für λ nicht genau bekannt und ferner ϱ eine ziemlich veränderliche Größe ist, und schließlich kommen für d. Herstellungskosten nicht in demselben Grade in Betracht wie bei d. Wasserleitung, da hier d. Röhren viel weniger weit sind; es wird also zulässig sein eine einfachere Annahme zu machen. Es hat sich nun erfahrungsmäßig herausgestellt, daß man d. wohlfeilsten Anlage ziemlich nahe kommt, wenn man d. Röhrenweite so annimmt, daß sich d. Druck ziemlich gleichförmig von einem bis zum andern Ende vertheilt; ist also L d. ganze Länge d. zunächst zu berechnenden Hauptstrangs d. Röhrenleitung und H d. gesammte zulässige Druckverlust von einem bis zum andern Ende in Folge d. Leitungswiderstands, dann wird d. Forderung eines gleichförmigen Druckverlustes d. Proportion aufgestellt:

$$\frac{l}{h} = \frac{L}{H}$$

Dabei sind L u. H gegebene Größen, H pflegt = 20 höchstens = 30 mm Wassersäule angenommen zu werden; setzt man dies ein, so folgt:

$$d^5 = 0{,}1\lambda\varrho \frac{L}{H} V^2\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Es sind nun V u. α gegebene Größen für jede Strecke d. Hauptstrangs u. man kann also ferner d. erforderlichen Durchmesser dieses Hauptstrangs berechnen zwischen je zwei Abzweigstellen. Gewöhnlich wird man jedoch nicht an jeder Abzweigstelle einen andern Durchmesser wählen, um so mehr als d. Preislisten d. Durchmesser nur in endlichen Abstufungen u. nicht genau d. Rechnung gemäß angenommen werden können. – Es fragt sich nun, was man für λ u. ϱ einzusetzen hat. Zunächst sollen zu d. Zweck d. Formeln umgestaltet werden mit Rücksicht auf d. hier zu Grunde liegenden Einheiten. In d. Formel ist vorausgesetzt, daß d. m zu Grunde liegt mit Ausnahme von H, welches in mm ausgedrückt ist. V bedeutet d. Gasvolumen in Cubm. p. Sek.; es pflegt jedoch gewöhnl. d. Gasverbrauch in Cubm. p. Stunde ausgedrückt zu werden und außerdem pflegt d. Durchmesser in Ctm ausgedrückt zu werden; dann ist:

$$\frac{d^5}{10^{10}} = 0{,}1\lambda\varrho \frac{L}{H}\,\frac{V^2}{3600}\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$$

Also $$d^5 = \frac{\lambda\varrho}{0{,}01296}\,\frac{L}{H}\,V^2\,\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}.$$

Was $\frac{\lambda\varrho}{0{,}01296}$ betrifft, so ist derselbe durchschnittlich = 2 also: $d^5 = 2\frac{L}{H}V^2\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$. { Und nun d. Werth d in Ctm, L in m, H in mm, V in Cbm p. Stunde.

Und nämlich λ betrifft, so liegen darüber specielle Versuche von Blochmann vor, wonach sich für d. Leuchtgas ergab: $\lambda = 0{,}009 + \frac{0{,}0653}{\sqrt{u}}$ also in hohem Grade abhängig von d. Geschw. letztere ist nun in einer städtischen Röhrenleitung im Allgemeinen nur gering; setzt man $\frac{\lambda\varrho}{0{,}01296} = 2$, so würde dies entsprechen $\lambda\varrho = 0{,}02592$ u. wenn man durchschnittl. d. Dichtigkeit

d. Leuchtgases als $\rho = 0{,}42$ setzt, so würde dieser Annahme entsprechen: $\lambda = 0{,}062$ und dies stimmt mit d. Blochmann'schen Versuchen in Uebereinstimmung, wenn d. durchschnittl. Geschw. = 1 m p. Sek. war. Wenn man also ein für allemal d. Coeff. $\frac{L}{H}$ u. für d. einzelnen Strecken zwischen 2 Verzweigungsstellen d. Werthe von $\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}$ berechnet, so findet man d. Durchmesser d. einzelnen Rohrstrecken in Ctm. Findet man, daß d. Durchmesser von einer Strecke sich zur Anderen nur wenig ändert, so wird man dieselbe Rohrweite beibehalten. —

Nun ist es auch leicht, zu d. abgezweigten Rohrstrecken überzugehen, es seien etwa d. Hauptstrangs bezeichnet mit $A_0\, A_1\, A_2 \ldots\ldots A_n$. Geht man nun von d. ersten Verzweigungsstelle A_1 aus und verfolgt man d. weiteren d. abgezweigten Leitungen und nimmt man vorläufig an, daß H d. zulässige Druckverlust von d. Gasometer bis zu d. äußersten Punkten sei, so wird man für d. hier ins Auge gefaßten Seitenstränge dieselbe Formel brauchen können, wenn nur an Stelle von L gesetzt wird $A_0A_1 + L_1$, unter L_1 d. Länge d. abgezweigten Seitenleitung verstanden; ist L_2 d. Länge d. von A_2 ausgehenden Zweigleitung, so wird man auch sie hier ansetzen können, wenn man nur statt L setzt $A_0A_2 + L_2$. —

Es fragt sich weiter, einen wie großen Ueberdruck man im Gasometer d. Gasanstalt erhalten muß. In d. Hinsicht muß verlangt werden, daß an allen Stellen d. ganzen Leitung ein genügender Ueberdruck d. Gases bestehen bleibt, um d. Widerstand zu überwinden, d. d. Gasmesser in d. Häusern hervorrufen und um d. Gas in d. Brennern herauszutreiben; mit Rücksicht auf diese Widerstände pflegt man gewöhnlich einen Ueberdruck von 20 mm Wassersäule zu verlangen. Wird nun zunächst angenommen, es sei d. ganze Leitung horizontal, dann muß d. manometrische Ueberdruck d. Gases im Gasometer = H + 20 mm sein; nimmt man also H auch = 20 m, so muß im Gasometer 40 mm Ueberdruck sein. Ist d. Terrain bedeutend hügelig, so kann es sich in dieser Beziehung wesentlich anders verhalten. Angenommen es liege eine Stelle x in d. Entfernung x vom Gasometer um y m höher als d. Gasfabrik. Es sei nun G_0 d. absolute Gasdruck im Gasometer, derselbe nimmt dann in Folge d. Leit.-Widerstände bis zu dieser Stelle ab um $\frac{x}{L}H$. Wenn nun aber d. Gasleitung vom Gasometer bis zu d. betrachteten Stelle ansteigt, so nimmt in Folge d. eigenen Schwere d. Gases auch aus diesem Grunde d. absolute Druck bis zu diesem Punkte ab. In d. atm. Luft selbst beträgt d. Druckabnahme bei d. Erhebung um 1 m so viel, daß d. Druckhöhe gemessen wird mit einer Wassersäule von 1,24, indem ein cbm Luft bei 12–15° C = 1,24 kg wiegt; wenn man sich in d. unteren Regionen d. Atm. um 1 m empor hebt, so nimmt d. Druck auf 1 qm Grundfl. um 1,24 kg ab, eine Wasserschicht von 1 mm Höhe entspricht auf 1 qm Druckfläche Grundfl. mit 1 kg; also eine Druckabnahme von 1,24 kg entspricht einer Wassersäule von 1,24 mm Höhe. Ist d. Dichtigkeit d. Leuchtgases nur ρ kleiner als d. d. Luft, wenn man also in einer Leuchtgasmenge sich um 1 m erhebt, so wird dadurch d. Druck um weniger als 1,24 mm Wassersäule abnehmen, nämlich um 1,24 ρ mm. Wenn man sich also um y m erhebt, so ist d. Druckabnahme $1{,}24\rho y$. Es ist also d. absolute Druck gemessen in mm Wassersäule an d. fraglichen Stelle, welche um x m von d. Gasometer entfernt liegt und y m höher liegt, ausgedrückt durch:

$$G = G_0 - \frac{x}{L}H \mp 1{,}24\rho y$$

Liegt d. Stelle um y m tiefer, so gilt d. + Zeichen und umgekehrt. Bezeichnet L_0 d. absoluten, ebenfalls in mm Wassersäule gemessenen Luftdruck und zwar an d. Gasfabrik, so ist d. Luftdruck L an d. hier betrachteten Stelle:

$$L = L_0 \mp 1{,}24y$$

da $\rho = 1$ ist.

Hat man nun unmittelbar mit d. Manometer misst, ist d. Unterschied d. Gasdrucks über d. Luftdruck, derselbe sei mit M bezeichnet $= G - L$; an d. betrachteten Stelle wird dieser Unterschied $= M_0$ sein und:

$$M = M_0 - \frac{x}{L}H \pm 1{,}24(1-\rho)y$$

oder für $\rho = 0{,}42$:

$$M = M_0 - \frac{x}{L}H \pm 0{,}7y.$$

Es ist nun d. erforderliche

[illegible] = 20 [illegible]

$$\min\left(M_\cdot - \frac{x}{y}H \pm 0{,}7\gamma\right) = 20.$$

[illegible] = 20 mm [illegible] $+$ [illegible] $-\frac{x}{y}H$ [illegible] $+0{,}7\gamma$ [illegible]:

$$\frac{y}{x} = \frac{H}{0{,}7\gamma}$$

[illegible] $= 20$ [illegible] $= 20.$ [illegible] H [illegible] $= 21$ [illegible]:

$$\frac{y}{x} = \frac{30}{L}$$

[illegible] L [illegible] $= 1000$, [illegible] $= 10$ [illegible]

$$\frac{y}{x} = 0{,}003.$$

[illegible] 3 : 1000, [illegible] = 20 mm. [illegible]. —

Bewegung eines Gases in einer Röhre, deren Wand eine wesentliche Wärmeübertragung nach Aussen hin oder von Aussen her vermittelt.

[illegible] p, T [illegible] u [illegible] s [illegible]:

[illegible]:
$$\frac{Fu}{G} = \frac{RT}{p}$$

[illegible]:
$$\frac{u\,du}{g} + \frac{\kappa}{\kappa-1}R\,dT = ds\cos\psi + W\,dQ$$

[illegible]:
$$\frac{u\,du}{g} + R\,dT - RT\frac{d(Fu)}{Fu} = ds\cos\psi - \lambda\frac{ds}{d}\frac{u^2}{2g}$$

[illegible] $= F$, [illegible] $= U$ [illegible] ψ [illegible]:

$$d = \frac{4F}{U}$$

[illegible] dQ [illegible]:

$$g\,dQ = k(\vartheta' - \vartheta)\,d\sigma'$$

wo ϑ' d. äußerliche Temp., ϑ d. innere absolute Temp. ist, $d\sigma'$ d. Umfangstheil, an welchem Wärmeaustausch stattfindet. Es kann hier im Allgemeinen d. Fall sein, daß d. Wärmeableitung nur durch einen Theil d. Umfangs hindurchgeht, wie dies d. Fall ist, wo d. Heizkanal nur den d. Röhre berührt, so findet d. Wärmeaustausch nur durch d. Theil d. Umfangs statt, welcher durch d. Rohrwand gebildet ist, während durch d., vom Mauerwerk begrenzten Theil nur wenig übergeht. Bezeichnet man σ' d. Theil d. Umfangs σ, an d. d. Wärmeaustausch stattfindet, so ist:

$$d\sigma' = \sigma'\,ds, \text{ also: } \quad g\,dQ = k\sigma'(\vartheta' - \vartheta)\,ds.$$

zwischen $W = \frac{1}{A}$ u. R besteht nun d. Beziehung:

$$AR = c_1 - c$$

worin c d. spec. Wärme bei constantem Volumen und c_1 d. spec. Wärme bei constantem Dr. bedeutet u. A d. Wärme, welche d. Arbeitseinheit, also W d. Arbeitswerth d. Wärmeeinheit bedeutet, also:

$$AR = c_1\left(1 - \frac{1}{n}\right) = c_1\,\frac{n-1}{n} \quad \text{worin } n = \frac{c_1}{c} \text{ ist.}$$

$$\text{und } W = \frac{1}{A} = \frac{n}{n-1}\,\frac{R}{c_1}$$

Aus d. Gl. für $W\,dQ$ folgt nun:

$$W\,dQ = \frac{n}{n-1}\,\frac{Rk\sigma'}{gc_1}(\vartheta' - \vartheta)\,ds$$

Ist ferner hier k u. σ' constant für d. ganze Länge d. betreffenden Rohrstrecke, dann ist, wenn zur Abkürzung d. Const. $\frac{gc_1}{k\sigma'} = a$ gesetzt wird:

$$W\,dQ = -\frac{n}{n-1}(\vartheta - \vartheta')\,\frac{ds}{a}$$

Setzt man diesen Ausdruck in d. 2te u. 3te d. 3 Hauptgl. ein, u. setzt man ferner wieder $\frac{u^2}{2g} = h$ so folgt: $\frac{u\,du}{g} = dh$ u. $\frac{du}{u} = \frac{dh}{2h}$ also:

$$2)\quad dh + \frac{n}{n-1}\,R\,d\vartheta + \frac{n}{n-1}\,R(\vartheta - \vartheta')\,\frac{ds}{a} = ds\cos\psi$$

$$\text{und } 3)\quad dh + R\,d\vartheta - R\vartheta\,\frac{dh}{2h} + 2\,\frac{ds}{\delta}\,h = ds\cdot\cos\psi.$$

Es sind also nun zur Verfügung d. Gl. 1. 2. 3., in d. Gln 2 u. 3 kommen von d. 3 Größen, d. als Functionen von s bestimmt werden sollen nur d. Temp. und d. Geschw. vor, so daß dieselben 2 simultane, partielle Differentialgl. erster Ordnung zwischen d. unabhängig Veränderl. s u. d. abhängig Veränderl. h u. ϑ bilden. Um diese Gln. zu integriren, würde d. allgemeine Verfahren darin bestehen, daß man eine d. abhängig Veränderl. eliminirt und dann eine Gl. erhält, in d. nur eine abhängige Variable vorkommt; es könnte dies geschehen, indem man jede d. Gln. noch einmal bezüglich s differentiirt, dadurch würde man 2 neue differential Gl., d. von d. 2te Ordnung wären; man erhalte dann im Ganzen 4 Diff-Gl. mit d. Größen $h\ h'\ h''\ \vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$, wo d. Striche d. betreffenden Differentialquotienten bedeuten. Zwischen diesen Gln. könnte man dann d. 3 Größen $\vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$ eliminiren und man erhält eine Gl. zwischen $h\ h'\ h''$ u. s, also eine Diff-Gl. 2ter Ordnung von h als Function von s, oder man könnte d. umgekehrte Verfahren anwenden mit h u. erhält $\vartheta\ \vartheta'\ \vartheta''$ u. s. Auf alle Fälle würde dies Verfahren zu ganz außerordentlichen Weitläufigkeiten führen, d. zu d. hier überhaupt erreichbaren Genauigkeit in keinem Verhältniß stünden; es wird sich also darum handeln, d. Aufgabe zu vereinfachen, um zu praktisch brauchbaren Formeln zu gelangen. d. Gl. 2 ist diejenige, welche d. Wärmeleitung d. Rohrwand allein berücksichtigt, dieselbe ist bedingt durch $\vartheta - \vartheta'$; von dieser Wärmeleitung d. Rohrwand hängt in erster Reihe d. Temp.-Änderung d. Luftstroms von Querschnitt zu Querschnitt ab. Im Vergleich mit d. 2 hauptsächlichsten Gliedern dieser Gl. ist d. Glied dh u. d. Glied $ds\cos\psi$ so klein, daß dieselben vernachlässigt werden können; dies kommt daraus hervor, daß d. Temp. d. Stroms nur in ganz untergeordnetem Grade von d. Geschw. u. von d. Schwere abhängt. Daß dies richtig ist, ist implicite schon früher dadurch berücksichtigt worden, daß im Allgemeinen [illegible] Temp. d. Gases [illegible] Einfluss d. Schwere betrifft, [illegible] Erhebung von mehr als 100 m erst 1° C. [illegible] Höhe [illegible] Arbeit = 1. H [illegible] Wärmewerth dieser Arbeit ist A H Wärmeeinheiten; [illegible] Arbeit [illegible] Wärmemenge [illegible] Wärmewerth A H dieser zur Erhebung d. Gases [illegible] Arbeit = d. Product aus spec. Wärme d. Gases und d. entsprechenden Temp.-Erniedrigung:

$$A H = C_p$$

diejenige Erhebung, d. in Folge d. Einflusses d. Schwere auf eine Temp.-Erniedrigung um 1° bedingen würde, [illegible] atm. Luft, wo $C_p = 0{,}2375$:

$$H = 0{,}2375 \cdot 424 = 100{,}7\ m.$$

Also erst bei einer Höhendifferenz von 100,7 m würde eine Temp.-Erniedrigung von 1° bedingt werden; [illegible] Temp.-Änderung durch d. Wärmeleitung, [illegible] d. Glied $ds \cos\psi$ vernachlässigt werden kann. [illegible] Glied dh, [illegible] Δh [illegible] Änderung Δh d. Geschw.-Höhe, [illegible] Temp. Änderung von 1° C [illegible] entsprechen:

$$A \cdot \Delta h = C_p$$

[illegible] $\Delta h = 100{,}7\ m$ [illegible] entsprechend $\Delta(u^2) = 1976$; [illegible] Änderung um 1° [illegible] 20 m [illegible] Wärme [illegible] Temp.-Änderung um 1° [illegible] Geschw.-Zunahme um $\sqrt{400 + 1976}$ [illegible] von 20 m bis auf 48,7 m [illegible] Gl.:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta'} = -\frac{ds}{a}$$

d. Temp. ϑ', [illegible] ϑ' [illegible] s [illegible] ϑ, [illegible] Wärmeentziehung [illegible] mittlere Temp. ϑ' annehmen darf, [illegible] Gl., wenn ϑ_1 d. absolute Temp. im Anfangsquerschnitt bedeutet, durch Integration:

$$l\left(\frac{\vartheta - \vartheta'}{\vartheta_1 - \vartheta'}\right) = -\frac{s}{a}$$

[illegible] absolute Temp. d. Gasstroms in d. Entfernung s vom Anfang d. Röhre:

$$\vartheta = \vartheta' + (\vartheta_1 - \vartheta')e^{-\frac{s}{a}}$$

[illegible] ϑ_1 u. ϑ' gegeben, [illegible] ϑ für jeden Querschnitt gefunden werden kann. [illegible] Gl. 3 [illegible] Gasstroms als Function von s zu finden, [illegible] Function von s u. ϑ zu entwickeln:

Zunächst kann d. 2te u. 3te Glied zusammengefasst werden. Aus d. Continuitätsgl., in welcher ϑ_1 [illegible] ϑ [illegible] folgt:

$$\vartheta = \text{const.}\ p u, \quad l(\vartheta) = \text{Const} + lp + lu$$

[illegible] folgt:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{dp}{p} + \frac{du}{u} \quad \text{wo} \quad \frac{du}{u} = \frac{dh}{2h} \text{ ist., also:}$$

$$R\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{\vartheta} - \frac{dh}{2h}\right) = R\vartheta \frac{dp}{p}.$$

[illegible] Gl. durch h dividirt, [illegible] 0 gebracht, so folgt:

$$\frac{dh}{h} + \frac{R\vartheta}{h}\frac{dp}{p} + \left(\frac{2}{\delta} - \frac{\cos\psi}{h}\right)ds = 0$$

[illegible]:

$$\frac{dh}{h} = 2\left(\frac{d\vartheta}{\vartheta} - \frac{dp}{p}\right) \text{ s. ferner } ds = -a\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta'}, \text{ so folgt:}$$

$$2\frac{d\vartheta}{\vartheta} + \left(\frac{R\vartheta}{h} - 2\right)\frac{dp}{p} - \left(2\frac{a}{\delta} - \frac{a}{h}\cos\psi\right)\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta'} = 0$$

[illegible] Wärmeleitung [illegible] $\frac{R\vartheta}{2h}$ [illegible] 1 vernachlässigen kann.

es zeigt sich, daß dieser Coeff. größer als 100 mm, wenn $u > 30$ m pr. [illegible]; im vorliegenden Falle wird diese Vernachlässigung noch kleiner; [illegible] größer wegen d. [illegible] durch d. [illegible] u. es wird durch d. Vernachlässigung von 1 gegen $\frac{\mathfrak{R}\vartheta}{2h}$ dasselbe erreicht, wie durch $\frac{\mathfrak{R}\vartheta}{h}$ gegen 2. Theilt man dies und multiplicirt d. ganze Gl. mit ϑ, so folgt:

$$2\,d\vartheta + \frac{\mathfrak{R}\vartheta^2}{h}\frac{dp}{p} - \left(\lambda\frac{a}{\partial} - \frac{a}{h}\cos\psi\right)\frac{\vartheta\,d\vartheta}{\vartheta-\vartheta'} = 0$$

[illegible] man $\frac{\vartheta}{\vartheta-\vartheta'} = 1 + \frac{\vartheta'}{\vartheta-\vartheta'}$, so folgt:

$$-\frac{\mathfrak{R}\vartheta^2}{h}\frac{dp}{p} = \left(2-\lambda\frac{a}{\partial}\right)d\vartheta - \lambda\frac{a}{\partial}\frac{\vartheta'\,d\vartheta}{\vartheta-\vartheta'} + \frac{a}{h}\cos\psi\frac{\vartheta\,d\vartheta}{\vartheta-\vartheta'}$$

u. wenn im dritten Glied $\frac{d\vartheta}{\vartheta-\vartheta'} = \div\frac{ds}{a}$ gesetzt wird: $-\frac{\mathfrak{R}\vartheta^2}{h}\frac{dp}{p} = \lambda\frac{ds}{\partial}\vartheta' - \left(\lambda\frac{a}{\partial}-2\right)d\vartheta + \frac{a}{h}\cos\psi\frac{\vartheta\,d\vartheta}{\vartheta-\vartheta'}$

ferner ist $\frac{\mathfrak{R}\vartheta^2}{h} = 2g\,\mathfrak{R}\left(\frac{\vartheta}{u}\right)^2$, [illegible] $\frac{\vartheta}{u}$ proportional d. [illegible] p, wenn also d. Werthe von ϑ, u u. p im Anfangszustand mit ϑ_1, u_1 u. p_1 bezeichnet werden, so ist: $2g\,\mathfrak{R}\left(\frac{\vartheta}{u}\right)^2 = 2g\,\mathfrak{R}\left(\frac{\vartheta_1}{u_1}\right)^2\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = \alpha\vartheta'\left(\frac{p}{p_1}\right)^2$ wenn $\alpha = \frac{2g\,\mathfrak{R}}{\vartheta'}\left(\frac{\vartheta_1}{u_1}\right)^2$ ist.

Setzt man dies ein, so folgt:

$$-\alpha\vartheta'\frac{p\,dp}{p_1^2} = \lambda\frac{ds}{\partial}\vartheta' - \left(\lambda\frac{a}{\partial}-2\right)d\vartheta + \frac{\alpha}{\mathfrak{R}}\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 a\cos\psi\frac{\vartheta'\,d\vartheta}{(\vartheta-\vartheta')\vartheta}$$

Was d. letzte Größe betrifft, so ist: $\frac{\vartheta'\,d\vartheta}{\vartheta(\vartheta-\vartheta')} = \left(\frac{1}{\vartheta-\vartheta'} - \frac{1}{\vartheta}\right)d\vartheta = \div\frac{ds}{a} - d\,l(\vartheta)$.

Dies eingesetzt u. d. ganze Gl. durch $\alpha\vartheta'$ dividirt, liefert:

$$-\frac{1}{2}\,d\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = \frac{1}{\alpha}\left\{\lambda\frac{ds}{\partial} - \left(\lambda\frac{a}{\partial}-2\right)\frac{d\vartheta}{\vartheta'}\right\} - \frac{\cos\psi}{\mathfrak{R}\vartheta'}\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\left(ds + a\,d\,l(\vartheta)\right).$$

Bei d. Integration macht nun d. Factor $\frac{p}{p_1}$ einige Schwierigkeit, [illegible] eine [illegible] gemacht werden soll; es soll im letzten Glied statt d. [illegible] Factors $\frac{p}{p_1}$ ein constanter Mittelwerth gesetzt werden. [illegible] man nun unter p d. [illegible] in d. [illegible] s vom Anfang d. [illegible], so ist d. Mittelwerth von $\left(\frac{p}{p_1}\right)^2$ für d. ganze [illegible] $s = \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]$, denn für d. Anfang ist $\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = 0$ und am Ende $= \left(\frac{p}{p_1}\right)^2$. Dies eingesetzt, so erhält man durch Integration:

$$\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] = \frac{1}{\alpha}\left[\lambda\frac{s}{\partial} + \left(\lambda\frac{a}{\partial}-2\right)\frac{\vartheta_1-\vartheta}{\vartheta'}\right] - \frac{1}{2}\frac{\cos\psi}{\mathfrak{R}\vartheta'}\left[1+\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]\left(s + a\,l\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_1}\right)\right).$$

Setzt man nun: $1+\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = 2 - \left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]$, so folgt durch Umformung:

$$\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] = \frac{\frac{1}{\alpha}\left[\lambda\frac{s}{\partial} + \left(\lambda\frac{a}{\partial}-2\right)\frac{\vartheta_1-\vartheta}{\vartheta'}\right] - \cos\psi\left(s + a\,l\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_1}\right)\right)}{1 - \frac{\cos\psi}{\mathfrak{R}\vartheta'}\left(s + a\,l\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_1}\right)\right)}.$$

[illegible] kann man nun, da ϑ als Function von s bereits gefunden, auch für jeden Werth von s d. Größe [illegible], wodurch dann auch d. Werth von p gefunden ist. [illegible] d. Regel wird [illegible] d. Aenderung d. [illegible] nur von mäßiger Größe sein wie z. B.: wenn es sich handelt um d. [illegible] d. [illegible] in d. [illegible] einer [illegible], so kann d. [illegible] vom [illegible] d. [illegible] bis zum [illegible] sich nur wenig ändern, sie kann nur verschieden sein durch d. Aenderung d. [illegible] an d. verschiedenen Stellen. Unter solchen Umständen kann

$$p = p_1(1-\delta)$$

gesetzt werden, wo δ ein sehr kleiner Bruch ist, von welchem d. höheren Potenzen vernachlässigt werden können, so daß also:

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 = 1-2\delta \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] = \delta.$$

Ebenso kann im Nenner d. kleine Glied mit $\cos\psi$ gegen 1 vernachlässigt werden. Später werden wir diesen Ausdruck [illegible] zu behandeln haben, nämlich bei d. Theorie d. [illegible]; [illegible], sofern es sich um d. [illegible] d. [illegible] im [illegible] d. [illegible] selbst handelt, auch d. [illegible] Glied im Zähler fortzulassen sein, indem dieses [illegible] in einer [illegible] sich befindet, also $\cos\psi = 0$. Handelt es sich um d. [illegible] d. [illegible] im [illegible], so ist $\psi = 180°$ und [illegible] $\cos\psi = \div 1$ zu setzen. –

Ist nun auf diese Weise d. Dr. bekannt, so findet man auch d. Continuitäts-Gl. d. Geschw., denn es sind d. Geschw. direct proportional d. absoluten Temp. u. umgekehrt proportional d. Dr.; sind also für d. Anfangsquerschnitt u_1, T_1 u. p_1, so ist:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{T}{T_1}\,\frac{p_1}{p}.$$

Was diese Berechnung d. Aenderungsgesetzes d. äusseren u. inneren Zustandes von Querschnitt zu Querschnitt betrifft, so war nur d. allgemeine Leitungswiderstand berücksichtigt worden; es können aber auch hier besondere Widerstände in Betracht kommen, wie z. B.: bei d. Lst. eines Gasgemisches einer Leitung an d. Ende d. Rohres, wo d. Strom eine plötzliche Richtungsänderung erfährt, sowie auch eine Querschnittsänderung; in solchen Fällen ist es in d. Regel notwendig, d. ganze Strecke, auf welche d. Gasmenge sich strömend bewegt, in einzelne Theile zu theilen, die durch diese Stellen, wo Aenderungen eintreten, getrennt sind, u. es muss dann d. Aenderung d. Gas-Zustandes für jede Strecke für sich betrachtet werden. Was d. Zustandsänderung betrifft, d. durch einen besonderen Widerstand hervorgebracht wird, so genügt es, d. Druckänderung zu betrachten, denn auf einer solchen kurzen Strecke wird keine wesentliche Wärmeleitung als stattfindend betrachtet werden können; es kann also ganz dieselbe Widerstandsformel benutzt werden, wie bei d. Lst. d. Gasbewegung durch einen Canal, wo keine Wärmeleitung stattfand. d. Formel war folgende:
Geht an einer solchen Stelle d. Dr. von p_1 zu p_2 über und wenn ferner gleichzeitig eine Querschnittsänderung von σ_1 zu σ_2 erkennbar u. wenn man d. Dr. p_2 an d. folgenden Stelle setzt:

$$p_2 = p_1(1-\delta)$$

so kann man setzen:

$$\delta = \frac{k}{RT}\left[(1+\zeta)\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2-1\right]. —$$

Was d. Lst. d. Dämpfe betrifft, so soll nur eine Formel über d. Ausflussgeschw. u. Ausflussmenge angegeben werden; es können hier ganz analoge Formeln benutzt werden, wie beim Ausfluss d. Gase. Es war bekanntlich d. Ausflussgeschw. eines Gases beim Ausströmen aus einer Mündung:

$$u = \varphi\sqrt{2g\frac{n}{n-1}RT_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

wo p_1 d. Dr. im Innern u. p d. im Äusseren d. Gefässes bedeutet. T_1 d. absolute Temp. im Innern d. Gefässes, n d. Verhältniss d. spec. Wärme bei constantem Dr. zur spec. Wärme bei constantem Volumen, φ d. Geschw.-Coeff. Es war d. Formel auf d. Weise erhalten worden, dass man u_0 berechnete wie es sein würde, wenn keine Widerstände stattfinden u. d. Zustandsänderung nach d. adiabatischen Curve stattfindet und dieser Ausdruck wurde dann mit φ multiplicirt. Bei einer solchen Zustandsänderung d. Gases stehen bekanntlich d. Dr. u. d. spec. Vol. in d. Beziehung zu einander, dass: $pv^n = p_1v_1^n$ ist.
Nun gilt näherungsweise dieselbe Beziehung für d. Zustandsänderung von Dämpfen ohne Mittheilung u. Entziehung von Wärme, nur dass n eine andere Bedeutung hat. Wenn es sich zunächst um überhitzte Dämpfe handelt, so folgt aus d. Versuchen von Hirn u. Cazin, dass, wenn d. Wasserdampf ohne Mittheilung od. Entziehung von Wärme seinen Zustand ändert, wenigstens auch eine solche Beziehung stattfindet u. zwar ergiebt sich für Wasserdampf $n = \frac{4}{3}$. Für gesättigte Dämpfe hatte sich gezeigt, dass man auch hier d. Gesetz zu Grunde legen darf, dass d. Dr. sich proportional ändert einer gewissen Potenz d. spec. Vol., nur hat d. Potenz wieder einen anderen Werth, sie war nämlich abhängig von d. Mischungsverhältniss. Wenn im Anfangszustand in 1 Kgr. d. Gemenges y_1 Kgr. Dampf enthalten ist, so konnte gesetzt werden:

$$n = 1{,}035 + 0{,}1y.$$

Es werden also d. betreffenden Formeln einfach übertragen werden können, so fern nur in d. Formel p u. v vorkommen u. nicht d. Temp. weil letztere bedeutend anders ist.

Es läßt sich nun d. Formel für d. Ausflußgeschw. d. Gase so umgestalten, daß d. Temp. nicht mehr darin vorkommt, da $R_1 T_1 = p_1 v_1$ ist, also:

$$u = \varphi\sqrt{2g\frac{n}{n-1}\,p_1 v_1\left[1-\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

Was nun d. pro Sek. ausströmende Gasmenge betrifft, so sei A wie früher d. Flächeninhalt d. Ausflußöffnung; indem aber hier ebenso, wie bei tropfbaren Flüssigkeiten im Allgemeinen auch eine Contraction stattfinden kann, so wird d. kleinste Querschnitt d. contrahierten Strahls auch hier $= \alpha A$ sein und hindurch strömt nun d. Gas mit d. Geschw. u, es ist also d. hindurchströmende Gasvolumen $= \alpha A u$. Multipliziert man dies mit d. Gew. d. Volumeneinheit od. dividiert man durch d. Volumen d. Gewichtseinheit, so erhält man d. pro Sek. ausfließende Gasgewicht. Dasselbe ergiebt sich streng genommen nicht aus dieser Gl., in Wirklichkeit findet d. Zustandsänderung nicht ohne Mitteilung von Wärme statt, sondern man überzeugt sich ein Gas-Zustand aufstellt, so hat dieselbe zur Folge, daß eine gewisse Arbeit sich in Wärme umsetzt u. diese wird d. ausströmenden Gase zurückgeführt. Es ist also streng genommen d. vorliegende Aufgabe die, diejenige Änderung d. spez. Vol. zu ermitteln, welche stattfindet mit Rücksicht auf d. Ergänzung in d. Wärmemitteilung; jedoch würde es sich kaum verlohnen, hierauf näher einzugehen, man kann einfach setzen: $G = \alpha A u$, dividiert durch d. Vol. u. d. Fehler auf α übertragen, welches dann nicht berechnet werden kann, sondern nur durch Versuche zu bestimmen ist; d. Vol. ist aber, da $p v^n = p_1 v_1^n$ ist, $v = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}} v_1$, also:

$$G = \alpha A u \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{v_1}.$$

Nun hat α jetzt einen zusammengesetzten Wert; setzt man für u seinen Ausdruck und setzt $\alpha\varphi = \mu$, so folgt:

$$G = \mu A \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}}\sqrt{2g\frac{n}{n-1}\,\frac{p_1}{v_1}\left[1-\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}.$$

Nicht permanente Bewegung des Wassers.

Es sollen für d. nicht permanente Bew. einige Fälle behandelt werden, nämlich solche, die sich beziehen auf d. Ausfluß d. Wassers aus Gefäßen, d. keinen Zufluß erhalten od. wenigstens einen solchen, d. nicht = d. gleichzeitigen Abfluß ist, so daß also d. Wasserhöhe im Gefäß variabel ist.

Es sei wieder A d. Größe d. Ausflußöffnung, d. horizontale Querschnitt d. Gefäßes in d. Höhe h über d. Schwerpunkt dieser Mündung sei $= F$, wobei im Allgemeinen F irgend eine gegebene Funktion von h sein kann. Anfangs liege d. freie Wasseroberfl. in d. Höhe h_0 über d. Schwerpunkt d. Mündung und in dieser Höhe sei d. horizontale Querschnitt d. Gefäßes $= F_0$. Gewöhnlich handelt es sich nun hier um d. Aufgabe, diejenige Zeit t Sek. zu berechnen, welche unter gegebenem Gesetz d. Wasserzuflusses verstreicht von d. Augenblick an, wo d. Wasserstand $= h_0$ ist bis zu d. Augenblick wo d. Wasserstand sich bis zu h_1 vermindert hat. Wenn d. Mündung A einigermaßen klein ist im Vergleich mit d. horizontalen Querschnitt F an einer beliebigen Stelle, so kann man sich durch eine spezielle Untersuchung davon überzeugen, daß man nur einen kleinen Fehler begeht, wenn man d. Ausflußgeschw. in jedem einzelnen Augenblick gleich derjenigen setzt, wenn d. Wasserhöhe constant bliebe; es würde also dann:

$u = \varphi\sqrt{2gh}$ sein. Im vorliegenden Fall, wo h nur einen unveränderten, vorübergehenden Wert hat, wird streng genommen dies nicht d. Fall sein, indessen zeigt eine spezielle Untersuchung, daß man, falls nur d. Öffnung ziemlich klein ist im Vergleich mit d. Querschnitt σ und natürlich $p_0 = p$ ist, einen geringen Fehler begeht. –

Es soll nun zunächst vorausgesetzt werden, d. Gefäß erhalte keinen Zufluß, es muß dann während d. Abfließens d. Wassers d. Oberfl. desselben sich senken. Ist in irgend einem Augenblick h d. Wasserstand im Gefäß, so ändert sich derselbe im nächstfolgenden Zeitelement dt um dh und zwar ist dann dh eine negative Größe und folgt $-dh$ d. absolute Senkung d. Wasserspiegels und d. verschwindende Wasservolumen $= -\sigma\,dh$. Dieses Volumen kann aber auch gleich gesetzt werden $= \mu A\sqrt{2gh}\,dt$ und folgt:

$$dt = -\frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\,\frac{\sigma\,dh}{\sqrt{h}}$$

und folgt hieraus durch Integration d. Zeit, in welcher d. Wasserstand von h_0 auf h herabsinkt:

$$t = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_h^{h_0}\frac{\sigma\,dh}{\sqrt{h}}$$

Wird ein Gefäß von konstantem Horizontalschnitt vorausgesetzt, so folgt:

$$t = \frac{2\sigma}{\mu A\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0}-\sqrt{h}\right) = \frac{\sigma}{\mu A}\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}}-\sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

Es ist also d. Zeit, d. d. Wasser braucht, um bis zur vollen Höhe d. Mündung abzufließen:

$$T = \frac{\sigma}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Erfolgt d. Ausfluß mit einer kürzeren Ausflußröhre, so ist h d. Höhe d. Wasserspiegels über d. Mündung d. Röhre u. so sollte dann d. Widerstände in dieser Röhre mit zu berücksichtigen. Natürlich bemerkt dann, besonders wenn d. Ausflußröhre geneigt ist, d. Wasserspiegel im Gefäß nicht bis $h = 0$ herabsinken.

Hat d. Ausflußgefäß eine beliebige Gestalt, so kann in d. meisten Fällen gesetzt werden:

$$\sigma = p + qh + rh^2$$

Hierzu gehören alle cylindrischen Gefäße ohne Grundes und alle prismatischen Gefäße; zu d. ersteren gehören alle Gefäße, deren Wände Umdrehungsflächen sind. Unter einem Obeliskoid ist ein Körper verstanden zu werden, d. nach folgender Art entstanden zu denken ist: Hat man irgend ein ebenes Netz und legt durch d. Seiten desselben gerade Linien und denkt sich nun d. Netz fortbewegt, daß seine Ebene beständig parallel bleibt und seine Eckpunkte beständig auf diesen geraden Linien bleiben, so beschreibt dieses Netz ein Obeliskoid. –

Setzt man letzteren Ausdruck für σ in d. Gl. für T, so folgt:

$$T = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_0^h\left(pz^{-\frac12}+qz^{\frac12}+rz^{\frac32}\right)dz$$

$$= \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\left(\frac{ph^{\frac12}}{\frac12}+\frac{qh^{\frac32}}{\frac32}+\frac{rh^{\frac52}}{\frac52}\right)$$

$$T = \frac{1}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(p+\frac13 qh+\frac15 rh^2\right)$$

Hier können d. Coeff. p, q u. r auch ersetzt werden durch 3 an gewissen Stellen bekannte Horizontalschnitte d. Gefäßes, dazu eignet sich namentlich d. Horizontalschnitt in d. Höhe h über d. Mündung, in d. Höhe $\frac{h}{2}$ und in d. Höhe 0. Bezeichnet man diese Schnitte mit σ, G u. H, so hat man nun:

$$\sigma = p + qh + rh^2 \qquad G = p + \tfrac12 qh + \tfrac14 rh^2 \quad \text{und} \quad H = p.$$

und demnach ergiebt sich:

$$T = \frac{1}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left\{H + \tfrac{1}{3}(-T + 4G - 3H) + \tfrac{2}{5}(T - 2G + H)\right\}$$

$$T = \frac{T + 8G + 6H}{15\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Soll d. Zeit t gefunden werden, binnen welcher d. Anfangswasserstand h_0 sich verändert auf h, so ist

$$t = T_0 - T = \frac{1}{\mu A}\left\{\frac{T_0 + 8G_0 + 6H_0}{15}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \frac{T + 8G + 6H}{15}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right\}$$

Wenn d. Gestalt d. Gefässes noch näher bestimmt ist, so wird man einen dieser 3 Horizontalschnitte durch d. Dimensionen d. beiden andern ausdrücken können, so daß dann, um d. Zeit für d. Niedersinken d. Wasserspiegels zu bestimmen nur d. Kenntniß von 2 resp. 3 verschiedenen Horizontalschnitten nöthig ist.

Hätte z. B. d. Ausflußbehälter eine obeliskenförmige Gestalt, also ein Prisma mit parallelen Seiten, d. aber im Allgemeinen nicht einander ähnlich sind; es sei:

$$T = ab \text{ u. } H = a'b'$$

dann ist für d. mittleren Querschnitt: $\quad G = \frac{a+a'}{2}\cdot\frac{b+b'}{2}$

und folgt: $\quad T + 8G + 6H = 3ab + 8a'b' + 2(ab' + a'b)$

so daß man nur d. Dimensionen von T u. H zu kennen braucht, um T zu berechnen; um t zu bestimmen müßte man noch d. Dimensionen von T_0 kennen. –

Wenn d. Gefäß pyramidal, so würde auch irgend eine Dimension d. Querschnitts d. arithmetische Mittel d. parallelen Dimensionen d. Querschnitte T u. H sein; in einem solchen Falle würden aber auch d. parallelen Dimensionen proportional d. Wurzel aus d. Inhalt d. Querschnitts; wenn also irgend eine Dimension d. Querschnitts G d. arithmetische Mittel d. analogen Dimensionen von T u. H ist, so ist entsprechend d. Wurzel aus d. mittleren Querschnitt G d. arithmetische Mittel aus d. Wurzel von T und H, also: $\quad \sqrt{G} = \frac{\sqrt{T} + \sqrt{H}}{2}$

und folgt: $\quad T + 8G + 6H = 3T + 8H + 4\sqrt{TH}$

Es wird mit Rücksicht auf derartige ~~praktische~~ Aufgaben nicht selten vorkommen, daß d. Gestalt d. Ausflußbehälters so complicirt ist, daß man sich mit einer angenäherten Berechnung dieses Zeitpunktes behelfen muß. Behufs einer ersten Annäherung kann dazu d. Voraussetzung dienen, es seien d. Querschnitte ganz proportional dem Quadrat ihres Abstandes von irgend einer Horizontalebene. Wenn es sich also um d. Ausfluß aus einem Teich handelt, so wird in d. Regel d. Gestalt dieses Behälters so complicirt, daß man sich mit einem solchen Näherungsverfahren behelfen muß, dabei kann es d. Fall sein, daß man von d. Teiche weiter nichts kennt, als d. Oberfl. u. allenfalls d. größte Tiefe desselben. In einem solchen Falle wird man d. Wahrheit ziemlich nahe kommen, wenn man annimmt, daß d. Horizontalschnitte eines solchen Teichs d. Höhen bis zum tiefsten Punkt proportional wären, wie es d. Fall wäre, wenn d. Boden d. Teiches nach einem Umdrehungsparaboloid gestaltet wäre. Wenn eine gewöhnliche Parabel sich um d. vertical liegende Axe dreht, so beschreibt dieselbe einen Körper, d. d. Eigenschaft hat, daß irgend ein Horizontalschnitt proportional d. Abstande bis zum tiefsten Punkte ist. Kennt man also vom Teich nur d. Größe d. Oberfl. und d. größte Tiefe, so wird man meistens am wenigsten fehl greifen, wenn man annimmt, es sei d. Grundfl. d. Teiches nach einem Umdrehungsparaboloid gestaltet. Auf Grund dieser Voraussetzung würde man dann folgende Formel herstellen können, um d. Zeit = t zu berechnen binnen welcher ein ursprünglicher Wasserstand in einen kleinern übergeht; es sei d. ursprünglich vorhandene Wasseroberfl. = T_0 und d. Höhe derselben über d. Schwerpunkt d. Ausflußmündung = h_0. diese Ausflußmündung liege noch um a höher als d. tiefste Punkt d. Teiches, so daß also d. größte Wassertiefe = $h_0 + a$ ist; es handelt sich nun um d. Größe $T + 8G + 6H$. Zu dem Ende ist:

$$F_0 : G_0 : H = (a+h_0) : (a+\tfrac{1}{2}h_0) : a$$

also $G = \dfrac{a+\frac{1}{2}h_0}{a+h_0} F_0$ und $H = \dfrac{a}{a+h_0} F_0$.

demnach $$F_0 + 8G_0 + 6H = \frac{15a+5h_0}{a+h_0} F_0$$

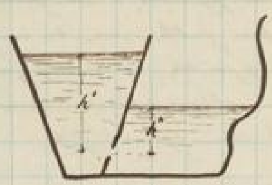
ebenso $$F + 8G + 6H = \frac{15a+5h}{a+h} F = \frac{15a+5h}{a+h_0} F_0$$

also $$t = \frac{F_0}{\mu A}\left(\frac{a+\frac{1}{3}h_0}{a+h_0}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \frac{a+\frac{1}{3}h}{a+h}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

Erfolgt d. Abfluß durch eine Röhre, so muß bei d. Wahl von μ natürlich auf d. Widerstand bei d. Abflußröhre mit Rücksicht genommen werden, es bedeutet dann μ einen resultierenden Ausfluß-Coeff.; ist ζ d. resultierende Widerstandscoeff. so ist:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{\mu^2} - 1 \text{ also: } \frac{1}{\mu} = \sqrt{1+\zeta}. —$$

Es war bei allen diesen Aufgaben vorausgesetzt worden, daß d. Ausfluß aus d. Behälter einfach in d. freie Luft erfolge. Ein anderer Fall, d. auch von Wichtigkeit ist, betrifft d. Ausfluß d. Wassers aus einem Gefäß in ein anderes, welche mit einander communicieren durch eine Oeffnung in ihrer gemeinschaftlichen Scheidewand; statt dieser Oeffnung kann jedoch auch eine Communicationsröhre vorhanden sein. Werde d. eine resp. andere Gefäß stets unterworfen sei einem Zufluß od. Abfluß, so daß ein gegenseitiger Austausch stattfindet.



Anfänglich stehe in d. ersten Gefäß d. Wasser in d. Höhe h' über d. Schwerpunkt d. Communicationsmündung, im zweiten in d. Höhe h''; d. Differenz dieser beiden Höhen sei h; es fragt sich nun, binnen welcher Zeit wird diese ursprüngliche Niveaudifferenz übergehen in 0. Es sei irgend ein Horizontalschnitt d. ersten Gefäßes bezeichnet mit F', derselbe ist eine gegebene Function d. Höhe z' dieses Schnittes über d. Schwerpunkt d. Mündung. Es sei ebenso irgend ein Horizontalschnitt d. 2ten Gefäßes in d. Höhe z'' über d. Schwerpunkt d. Mündung mit F'' bezeichnet, so F'' gleichfalls eine gegebene Function von z'' ist. Irgend eine beliebige Niveaudifferenz d. beiden Wasserspiegel sei mit z bezeichnet; ist während d. Abflusses d. Wassers d. Niveaudifferenz in irgend einem Augenblick $= z$ geworden, dann würde, wenn dieses z eine Zeit lang unverändert bliebe, d. ausfließende Wasservolumen $= \mu A\sqrt{2gz}$ sein; diesen Zustand kann man wenigstens für ein unendl. kleines Zeitelement dt hinlänglich constant setzen, dann ist dieses Volumen $= A\mu\sqrt{2gz}\,dt$. Dieses Volumen kann aber auch auf eine 2te Weise ausgedrückt werden, wenn nämlich in diesem Augenblick d. Höhe d. Wasserspiegels über d. Schwerpunkt d. Mündung $= z'$ geworden ist, so wird im nächstfolgenden Zeitelement dt d. Wasservolumen, welches aus diesem Gefäß herausfließt, $= -F'dz'$ sein, also:

$$\mu A\sqrt{2gz}\,dt = -F'dz'$$

Aus d. Gl. $z' - z'' = z$, wo z' u. z'' veränderliche Höhen sind, folgt: $dz' - dz'' = dz$. Andererseits kann durch z' u. z'' d. Wasservolumen ausgedrückt werden, welches in einem Zeitelement überfließt; wie schon gezeigt ist dieses Wasservol. $= -F'dz'$; es ist aber auch $= +F''dz''$, also: $$F'dz' + F''dz'' = 0.$$

Multipliziert man d. vorletzte Gl. mit F'' und addirt sie zur letzteren, so folgt:

$$(F' + F'')\,dz' = F''dz$$

also $$F'dz' = \frac{F'F''}{F'+F''}\,dz$$

und daraus: $$\mu A\sqrt{2gz}\,dt = -\frac{F'F''}{F'+F''}\,dz.$$

Wenn man hieraus dt entwickelt, so ist nun, um diejenige Zeit zu erhalten, binnen welcher

d. anfängliche Höhe h übergeht in 0, d. Integration zu erstrecken links von $t = 0$ bis $t = T$ und rechts von $z = 0$ bis $z = h$, dann findet man:

$$T = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{\sigma' \cdot \sigma''}{\sigma' + \sigma''} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

Bevor d. Integration ausgeführt werden kann, müssen σ' u. σ'' als Funktionen von z ausgedrückt werden. Dazu dienen d. Gl.:

$$z' - z'' = z \quad \text{und} \quad \int_{h'}^{z'} \sigma' dz' + \int_{h''}^{z''} \sigma'' dz'' = 0.$$

mit denen z' u. z'' durch z, h' u. h'' ausgedrückt werden können. d. Integration obiger Gl. wird aber gewöhnlich so umständlich, daß man sich mit einem Näherungswerth begnügen muß. nur wenn d. Querschnitte constant sind, wie bei Schleusenkammern, kann man d. Factor $\frac{\sigma'\sigma''}{\sigma'+\sigma''}$ herausnehmen und erhält dann:

$$T = \frac{2}{\mu A\sqrt{2g}} \frac{\sigma'\sigma''}{\sigma'+\sigma''}\sqrt{h} = \frac{1}{\mu A}\frac{\sigma'\sigma''}{\sigma'+\sigma''}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

dieser Ausdruck unterscheidet sich von d. Formel für d. Ausflußzeit d. Wassers aus einfachen prismatischen Gefäßen nur dadurch, daß an Stelle d. constanten Horizontalschnitts für d. selbe harmonische Mittel d. constanten Querschnitte beider Gefäße getreten ist. Unter d. harmonischen Mittel verschiedener Größen versteht man nämlich d. Größe, deren reciproker Werth = d. arithmetischen Mittel aus d. reciproken Werthen aller einzelnen Größen ist, also z. B.:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots\dots \frac{1}{a_n}\right).$$

Es ist also d. harmonische Mittel aus 2 Größen a_1 u. a_2 folgendermaßen zu bestimmen.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \quad \text{also} \quad a = 2\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$

Soll wieder d. Zeit t berechnet werden, binnen welcher d. anfängliche Niveaudifferenz h_0 übergeht in h, so hat man $t = T_0 - T$ zu setzen also:

$$t = \frac{1}{\mu A}\frac{\sigma'\sigma''}{\sigma'+\sigma''}\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$$

diese Formel u. namentlich d. von T findet vorzugsweise ihre Anwendung bei d. Füllen und Leeren von Schleusenkammern; hierbei können dreierlei Fragen vorkommen, wenn ein Schiffsweg eine doppelte Schleuse gegeben ist mit 2 Kammern.

nämlich 1) wenn d. obere Schleusenkammer gegen d. Oberwasser abgesperrt ist und d. untere gegen d. Unterwasser, dann dient diese Formel zur Berechnung d. Zeit, binnen welcher d. Höhendifferenz in beiden Kammern = 0 ist.

2) wenn d. untere Kammer gegen d. obere abgesperrt ist, hier aber d. Wasserhöhe steht als d. Unterwasserspiegel u. wie d. Schützen am unteren geöffnet werden, so handelt es sich um d. Berechnung d. Zeit, in welcher sich d. Wasserstand in d. untersten Kammer bis zum Unterwasserstand vermindert hat; letzterer ist aber constant, so daß $\sigma'' = \infty$ gesetzt werden kann und demnach ist: $T = \frac{\sigma'}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

3) kann es d. Fall sein, daß d. Zeit berechnet werden soll, binnen welcher d. obere Schleusenkammer, wenn sie gegen d. untere abgesperrt ist, sich bis zum Oberwasserspiegel füllen wird; zu d. Zweck hat man $\sigma' = \infty$ zu setzen u. es wird dann: $T = \frac{\sigma''}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}$, es tritt also nur σ'' an Stelle von σ'.

Es kann nun ein verwickelter Fall vorkommen, wo es sich um ein Gefäß, durch welches Wasser abfließt, zum einen ganz geringen Zufluß hat, d. aber nicht beständig = d. Abfluß an d. Mündung ist. Es sei ein Gefäß gegeben, welches einen constanten Wasserzufluß hat und zwar fließe pr. Sekunde ein Wasservolumen V ein. Es fließt andererseits durch eine Öffnung Wasser aus d. Gefäße ab. Anfangs sei d. Wasserstand im Gefäß = h_0

und es fragt sich, in welcher Zeit wird sich diese anfängliche Höhe h_0 ändern in h. Sei irgend einem Augenblick bei z d. Höhe d. Wasserspiegels im Gefäß über d. Schwerpunkt d. Mündung oder über d. Unterwasserspiegel. Bliebe diese Höhe z eine bestimmte Zeit lang unverändert, so würde ein Wasservolumen ausfließen $= \mu A\sqrt{2gz}$; weil aber gleichzeitig d. Wasservolumen V in d. Gefäß hineinfließt, so wird d. Wasserverlust $= \mu A\sqrt{2gz} - V$ sein; ein negativer Wert dieses Verhältnisses würde einem Zuwachs entsprechen. Wenn diese Annahme auch thatsächlich nie eintrifft, so kann man doch annehmen, es bliebe dieser Zustand während eines Zeitelements dt constant, dann erhalten wir als Wasserverlust in diesem Zeitelement: $(\mu A\sqrt{2gz} - V)\,dt$. Ist nun δ d. Flächeninhalt d. Querschnitts d. Gefäßes in d. Höhe z, so ist d. entsprechende Wasservolumen auch hier $= \div\,\delta\,dz$, also:

$$(\mu A\sqrt{2gz} - V)\,dt = \div\,\delta\,dz.$$

Entwickelt man hieraus dt, so müssen, um d. Zeit t zu erhalten, binnen welcher sich z von h_0 bis h ändert, d. Ausdruck rechts integrieren von h_0 bis h; statt dessen kann man wieder wie früher integrieren von h bis h_0 u. d. $\div$ Zeichen in $+$ verwandeln.

also:

$$t = \int_h^{h_0}\frac{\delta\,dz}{\mu A\sqrt{2gz} - V} = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}}\int_h^{h_0}\frac{\delta\,dz}{\sqrt{z}-\sqrt{k}}$$

wenn $\sqrt{k} = \dfrac{V}{\mu A\sqrt{2g}}$ ist; also $k = \dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{V}{\mu A}\right)^2$.

Folglich ist k d. Druck-Höhe, welche d. mittleren Geschw. entspricht, vermöge welcher V durch d. Querschnitt μA hindurchfließen würde; es also k eine Constante.

Ist δ constant, so ist:

$$t = \frac{\delta}{\mu A}\sqrt{\frac{2}{g}}\int_h^{h_0}\frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}-\sqrt{k}}$$

Nun ist:

$$\frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}-\sqrt{k}} = \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}} + \sqrt{k}\,\frac{\frac{1}{2}dz\sqrt{z}}{\sqrt{z}-\sqrt{k}} = d\sqrt{z} + \sqrt{k}\,d\left[l(\sqrt{z}-\sqrt{k})\right]$$

also:

$$t = \frac{\delta}{\mu A}\sqrt{\frac{2}{g}}\left\{\sqrt{h_0}-\sqrt{h} + \sqrt{k}\;l\left(\frac{\sqrt{h_0}-\sqrt{h}}{\sqrt{h}-\sqrt{k}}\right)\right.\,.$$

Wäre $h = k$, so müßte $t = \infty$ sein d. h.: es nähert sich d. Höhe d. Wasserspiegels asymptotisch d. Größe k. Diese Annäherung kann mit steigendem od. mit sinkendem Wasserspiegel hergestellt werden; je mehr diese Grenze erreicht wird, desto mehr nähert sich d. ganze Zustand d. Wassers einem permanenten Lauf. Setzt man $V = 0$, so muß man wieder auf eine bekannte Formel kommen, dies ist auch thatsächlich d. Fall, denn für $V = 0$ ist auch $k = 0$, also d. ganze letzte Glied $= 0$.