Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

Achtzehntes Buch. Anwendung der Algebra auf Geometrie

Achtzehntes Buch.

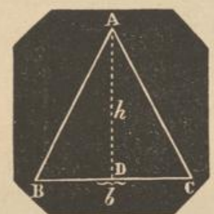
Anwendung der Algebra auf Geometrie.

190.

Unter Anwendung der Algebra auf Geometrie versteht man die Verbindung beider Wissenschaften mit einander, wodurch sie befähigt werden, Probleme zu lösen, welche die Kräfte jeder einzelnen übersteigen. Einige solcher Verbindungen sind im Vorhergehenden bereits schon vorgekommen; wir erinnern nur an die Aufgabe: die Inhalte räumlicher Gröſsen, z. B. des Kreises, Kegels, der Kugel etc. zu bestimmen, welches offenbar der Geometrie allein nicht möglich ist, aber auch der Arithmetik allein nicht, weil diese die Kenntnis geometrischer Gesetze voraussetzt, worauf sie ihre Rechnungen gründet. Kurz, beide muſsten mit einander verbunden werden, wie denn überhaupt fast die ganze praktische Geometrie nur aus einer solchen Verbindung hervorgeht. Deshalb ist auch die Arithmetik für die Praxis höchst wichtig und der eigentliche Lebensnerv der praktischen Geometrie, wie dies besonders ein eigener und wichtiger Teil der Mathematik, die Trigonometrie, zeigt.

Durch Hilfe der Arithmetik können ferner manche Beweise ungemein vereinfacht und abgekürzt werden. Manche geometrische Sätze lassen sich nur auf arithmetischem Wege finden und beweisen. Man merke sich hier folgendes: Sind von einer räumlichen Gröſse solche Stücke in Zahlen gegeben, wodurch andere damit in Verbindung stehende Stücke der Gröſse nach vollkommen bestimmt sind und durch Zeichnung gefunden werden könnten, wie z. B. durch die drei Seiten eines Dreiecks der Radius des um- oder eingeschriebenen Kreises etc., so mufs es auch allemal zwischen solchen von einander abhängigen räumlichen Gröfsen eine arithmetische Beziehung geben, und somit eine allgemeine Gleichung existieren, welche den Zusammenhang dieser Gröfsen enthält. Und diese Gleichung aufzufinden, d. i. die geometrische Beziehung unter den fraglichen Gröfsen in die arithmetische Sprache zu übersetzen, ist eine der Hauptanwendungen der Arithmetik auf Geometrie. Hat man solche Gleichungen (Formeln) einmal gefunden, so zeigen sie, abgesehen von ihrer oft merkwürdigen Form, manchmal noch mehr, als man suchte, ganz ungeahnte merkwürdige Verhältnisse, so dafs in diesem Sinne die Arithmetik ein wichtiges Entdeckungsmittel ist. — Einige Gewandtheit in der Algebra, schnelle Erinnerung geometrischer Lehrsätze, sind aber hierzu erforderlich, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

191.



Aufgabe. Es ist die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks $BC = b$ gegeben, sowie die Schenkel $AB = AC = a$. Man sucht die Höhe $AD = h$ und den Inhalt F.

Auflösung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC folgt sogleich:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

$$F = \tfrac{1}{2} b . \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4} b^2} = \frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2}.$$

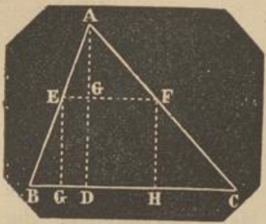
Wäre $b = a$, also das Dreieck ein gleichseitiges, so wäre

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

$$F = \left(\frac{a}{2}\right)^2 . \sqrt{3}.$$

192.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und Höhe eines Dreiecks gegeben, $BC = a$, $AD = h$. Man sucht die Seite x eines darin



gezeichneten Quadrats, von welchem eine Seite auf der Grundlinie liegt.

Auflösung. Weil $\triangle$ AEF $\sim$ $\triangle$ ABC, und AG $= h - x$, so hat man:

$$(h - x) : h = x : a$$

$$\text{hieraus: } x = \frac{ah}{a + h}$$

193.

Aufgabe. Es ist der Radius eines Kreises CA $= r$ gegeben. Wie findet man hieraus die Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Vierecks AB $= x$, und des Dreiecks BE $= y$?

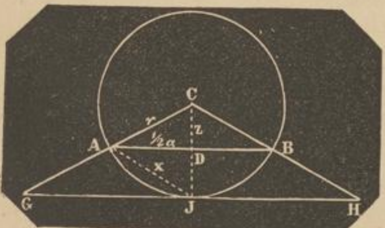
Auflösung. Für die Seite des Vierecks ist: $x^2 = 2r^2$, also:

$$x = r\sqrt{2}.$$

Ist BD $=$ DE $= r$, so ist CG $= \frac{1}{2}r$ (§ 46), und folglich $(\frac{1}{2}y)^2 = r^2 - (\frac{1}{2}r)^2$, hieraus:

$$y = r\sqrt{3}.$$

194.



Aufgabe. Aus dem Radius eines Kreises AC $= r$, und der Seite eines beliebigen eingeschriebenen regelmäſsigen Vielecks AB$=a$, die Seite des umgeschriebenen regelmäſsigen Vielecks GH $= u$, und die Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Vielecks von doppelt so vielen Seiten AJ $= x$ zu finden.

Auflösung. Setzt man vorläufig das Perpendikel CD $= z$, so hat man zuerst $z^2 = r^2 - (\frac{1}{2}a)^2$, also: $z = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}$.

Dann ist CD : CJ = AB : GH oder $z : r = a : u$, hieraus: $u = \frac{ar}{z}$, oder: statt z seinen Wert gesetzt,

$$u = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Weil nun DJ $= r - z$, so ist: $x^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (r - z)^2$, oder: $x^2 = \frac{1}{4}a^2 + r^2 - 2rz + z^2$, oder, statt z und z^2 ihre Werte gesetzt:

$$x = \sqrt{2r(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2})} \ldots\ldots (2)$$

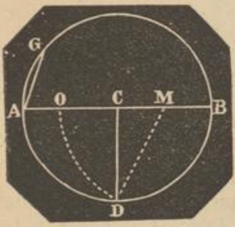
Setzt man in beiden Formeln $r = 1$, so hat man:

$$u = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Wäre a die Seite des eingeschriebenen regelmäfsigen Vierecks $= \sqrt{2}$ (§ 193), so findet man nach Formel (4) die Seite x des eingeschriebenen Achtecks, und wenn man darin diesen gefundenen Wert wieder statt a setzt, nach derselben Formel die Seite des eingeschriebenen 16-Ecks etc. Auf diese mühsame Weise sind die Zahlen § 139 berechnet worden.

195.



*) **Aufgabe.** Aus dem Radius AC $= r$ die Seite des regelmäfsigen Zehnecks zu berechnen.

Auflösung. Wird der Radius in O nach stetiger Proportion geteilt, so ist (§ 135) OC die Seite des Zehnecks. Setzt man OC $= x$, mithin AO $= r - x$, so hat man (Algebra § 227):

$$r - x : x = x : r$$

$$x^2 + rx = r^2$$

$$x^2 + rx + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}$$

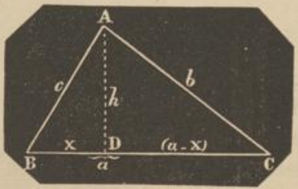
$$x + \frac{1}{2}r = \pm\sqrt{\frac{5r^2}{4}}$$

$$x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Anmerkung. Hieraus folgt noch eine leichtere Konstruktion für die Seite des Zehnecks. Man halbiere nämlich den Radius BC in M, errichte CD senkrecht auf AB, nehme MO = MD, so ist CO die Seite des Zehnecks (und zugleich die Gerade DO die des Fünfecks).

Beweis. Es ist $\overline{\mathrm{MO}}^2 = \overline{\mathrm{MD}}^2 = r^2 + \frac{1}{4}r^2 = \frac{5r^2}{4}$, also $\mathrm{MO} = \frac{1}{2}r\sqrt{5}$, folglich $\mathrm{CO} = \frac{1}{2}r\sqrt{5} - \frac{1}{2}r = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, wie vorhin.

196.



Aufgabe. Es sind die drei Seiten a, b, c eines Dreiecks gegeben, auf die Seite BC $= a$ ist das Perpendikel AD gefällt, man sucht den Abstand desselben von B (die Projektion von c auf a).

Auflösung. Setzt man den fraglichen Abstand BD $= x$, mithin DC $= a - x$, und AD $= h$, so ist: $h^2 = c^2 - x^2$, und auch $h^2 = b^2 - (a-x)^2$, folglich:

$$b^2 - (a-x)^2 = c^2 - x^2$$

$$b^2 - a^2 + 2ax - x^2 = c^2 - x^2$$

und hieraus: $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ *)

197.

Aufgabe. Eine Formel abzuleiten, nach welcher man aus den drei gegebenen Seiten a, b, c eines Dreiecks den Inhalt F berechnen kann.

Auflösung. Es kommt nur darauf an, die Höhe h zu finden. Setzen wir deshalb (s. Figur § 196) in den Ausdruck

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c+x)(c-x)$$

---

*) Man vergleiche wegen des negativen Resultats, welches diese Formel geben kann, Algebra § 126.

statt x den dafür gefundenen Wert, so ist:

$$h^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$h^2 = \left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right)$$

$$h^2 = \frac{\{(a+c)^2 - b^2\}\ \{b^2 - (a-c)^2\}}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(a+c+b)\,(a+c-b)\,(b+a-c)\,(b-a+c)}{4a^2}$$

$$h = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

Multipliziert man die gefundene Höhe mit $\frac{a}{2}$, so ist:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}\,^{*})$$

Diese Formel, welche besonders für die Feldmeſskunst von groſser Wichtigkeit ist, läſst sich noch auf eine für die numerische Rechnung bequemere Form bringen. Setzen wir nämlich die Summe der drei gegebenen Seiten:

$$a + b + c = s = 2.\tfrac{1}{2}s$$

so ist: $a + b - c = 2.\tfrac{1}{2}s - 2c = 2(\tfrac{1}{2}s - c)$

$$a + c - b = 2.\tfrac{1}{2}s - 2b = 2(\tfrac{1}{2}s - b)$$

$$b + c - a = 2(\tfrac{1}{2}s - a).$$

Dies in vorstehende Formel substituiert, kommt, nach gehöriger Reduktion:

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}s.(\tfrac{1}{2}s - a)\,(\tfrac{1}{2}s - b)\,(\tfrac{1}{2}s - c)}$$

in Worten: man subtrahiere von der halben Summe der drei Seiten jede derselben, multipliziere die drei Reste und die

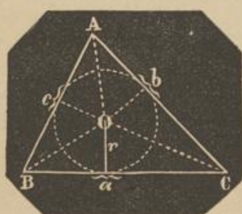
---

*) Diese Formel, sagt Playfair, zu Euklids Zeiten wahrscheinlich unbekannt, findet sich, jedoch ohne Beweis, in den Schriften Heros des Jüngern, eines Ingenieurs, welcher um das achte Jahrhundert gelebt zu haben scheint. Sie war jedoch schon viel früher in Hindostan bekannt, wie aus einem Werke des Bramegupta hervorgeht. Der Italiener Tartaglia aber, der im sechzehnten Jahrhundert lebte, machte zuerst darauf aufmerksam.

halbe Summe mit einander, und ziehe aus dem Produkt die Quadratwurzeln, was mittelst Logarithmentafeln sich leicht thun läſst. Sei z. B. gegeben:

$$\begin{array}{lrl}
 & \tfrac{1}{2}s = 331{,}4 \ldots\ldots & 2{,}5203525 \\
a = 256{,}7\,\text{m} & \tfrac{1}{2}s - a = 74{,}7 \ldots\ldots & 1{,}8733206 \\
b = 198{,}6\,\text{m} & \tfrac{1}{2}s - b = 132{,}8 \ldots\ldots & 2{,}1231981 \\
c = \underline{207{,}5}\,\text{m} & \tfrac{1}{2}s - c = 123{,}9 \ldots\ldots & \underline{2{,}0930713} \\
s = 662{,}8\,\text{m} & & \underline{8{,}6099425} \\
 & \lg \mathrm{F} = & 4{,}3049712 \\
 & \mathrm{F} = & 20182{,}33 \text{ qm.}
\end{array}$$

198.

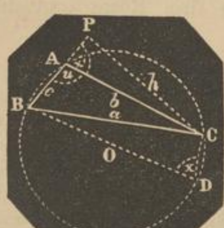


Aufgabe. Aus den drei Seiten eines Dreiecks a, b, c den Radius r des eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

Auflösung. Nach dem vorhergehenden § kann man den durch die Seiten bestimmten Inhalt F des Dreiecks als bekannt ansehen; da nun der Mittelpunkt O des eingeschriebenen Kreises von allen drei Seiten gleich weit entfernt ist (§ 76), so hat man: $\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \mathrm{F}$, und hieraus:

$$r = \frac{2\mathrm{F}}{a+b+c}$$

199.



Aufgabe. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks den Radius R des umgeschriebenen Kreises zu finden.

Auflösung. Setzt man den als bekannt anzusehenden Inhalt $=$ F, und das von C auf AB gefällte Perpendikel CP $= h$, so ist erstlich:

$$\frac{ch}{2} = \mathrm{F}, \text{ also: } h = \frac{2\mathrm{F}}{c}$$

Verbindet man den Endpunkt D des Durchmessers mit C, so ist $\angle$ BCD $=$ P $= 90^0$ (§ 81), ferner: $x + u = x' + u = 180^0$ (§ 90), also $x = x'$, mithin $\triangle$ CAP $\sim$ $\triangle$ BDC, daher: $b : 2\mathrm{R} = h : a$, oder $b : 2\mathrm{R} = \frac{2\mathrm{F}}{c} : a$, und hieraus:

$$\mathrm{R} = \frac{abc}{4\mathrm{F}}.$$

200.

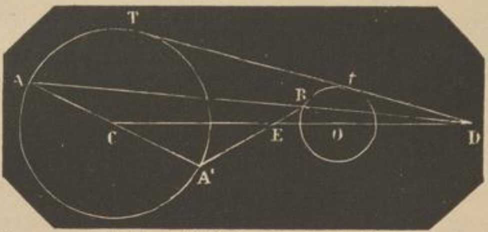
Aufgabe. Es soll ein Quadrat, dessen Seite $= a$, mit gleichen Kreisen möglichst angefüllt werden. Mit wie viel Kreisen kann dies geschehen und wie viel beträgt die Flächensumme der leer bleibenden Zwischenräume?

Auflösung. Denkt man sich die Seiten des Quadrats in n gleiche Teile geteilt, so zerfällt das Quadrat in n^2 kleinere gleiche Quadrate. In jedes kann ein Kreis beschrieben werden, dessen Inhalt $= \pi \left(\frac{a}{2n}\right)^2$. Der Inhalt aller Kreise ist $= n^2 . \pi \left(\frac{a}{2n}\right)^2 = \pi . \frac{a^2}{4}$; folglich ist, wie grofs auch n angenommen werden möge, die Summe aller Kreisflächen doch jedesmal gerade so grofs, als ein einziger eingeschriebener Kreis; die fragliche Summe der leeren Zwischenräume ist folglich $= a^2 - \pi . \frac{a^2}{4} = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$, und das Quadrat kann mit 1, 4, 9, 16, 25... gleichen Kreisen ausgefüllt werden.

Eben so ist leicht einzusehen, dafs ein Kubus, dessen Seite $= a$, mit 1, 8, 27, 64...n^3 gleichen Kugeln ausgefüllt werden kann und dafs die Summe der leeren Zwischenräume stets $= a^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$.

201.

Aufgabe. Es sind die Gröfsen zweier Kreise und ihr Abstand gegeben: CA $=$ R, OB $= r$, CO $= e$. Man ziehe zwei parallele Radien, sowohl nach derselben, als auch nach entgegengesetzten Richtungen OB $\parallel$ CA und OB $\parallel$ CA′, verbinde ihre Endpunkte durch gerade Linien und bestimme dann deren Durchschnittspunkte D und E in der Centrallinie von O, nämlich OD $= x$, und OE $= y$.



Auflösung. Weil $\triangle BOD \sim \triangle ACD$, so hat man:

$$x : x + e = r : R, \text{ hieraus:}$$

$$x = \frac{re}{R - r}$$

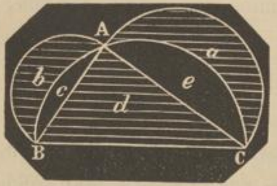
Ferner ist $\triangle OEB \sim \triangle ECA'$, daher:

$$y : e - y = r : R, \text{ hieraus:}$$

$$y = \frac{re}{R + r}$$

Anmerkung. Weil die gefundenen Werte x, y von der Lage der parallelen Radien nicht abhängen, und dieselben bleiben, wenn die Verbindungslinie auf dem einen Radius, mithin auch auf dem andern senkrecht steht, so ist es leicht, an zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Berührungslinie zu ziehen, indem man erst die Punkte D und E bestimmt und dann nach § 83 verfährt. Denkt man sich statt der Kreise Kugeln, und die kleinere von der gröſsern beleuchtet, so ist die Länge des sogenannten Kernschattens durch den für x gefundenen Ausdruck gegeben.

202.



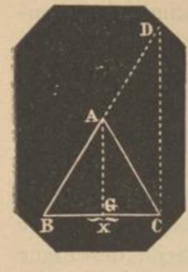
Aufgabe. Über die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, ABC, sind Halbkreise beschrieben; man soll beweisen, daſs die Flächensumme der beiden mondförmigen Stücke a und b, welche nach ihrem Entdecker die Hippokratischen Möndchen genannt werden, so groſs ist, als die Fläche des Dreiecks ABC.

Auflösung. Die Fläche des gröſsern Halbkreises ist $= \frac{1}{8} . \pi BC^2$, die der beiden kleinern $= \frac{1}{8}\pi . \overline{AB}^2 + \frac{1}{8}\pi . \overline{AC}^2 = \frac{1}{8}\pi(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) = \frac{1}{8}\pi . \overline{BC}^2$, folglich ist

$$c + d + e = a + e + b + c,$$

hieraus: $a + b = d$. Wäre das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig, so wäre jedes der beiden Möndchen gleich der Hälfte des Dreiecks ABC.

203.



Aufgabe. Wie grofs mufs die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sein, wenn der Inhalt desselben F = 48 qm, und die gleichen Schenkel AB = AC = a = 10 m sein sollen.

Auflösung. Es sei die gesuchte Grundlinie BC$=x$, also das darauf gefällte Perpendikel AG $= \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}x)^2}$, so hat man:

$$F = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}x^2}$$

$$F^2 = \frac{x^2}{4}\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{a^2x^2}{4} - \frac{x^4}{16}$$

$$x^4 - 4a^2x^2 = -16F^2 \text{ (Algebra § 231)}$$

$$x^4 - 4a^2x^2 + (2a^2)^2 = 4a^4 - 16F^2$$

$$x^2 - 2a^2 = \pm\sqrt{4a^4 - 16F^2}$$

$$x = \sqrt{2a^2 \pm \sqrt{4a^4 - 16F^2}}$$

Je nachdem man das obere oder untere Vorzeichen nimmt, hat man $x = 16$, und auch $x = 12$. Dafs hier wirklich zwei verschiedene Grundlinien möglich sind, worauf die Algebra aufmerksam macht, ist leicht einzusehen, wenn man AB um sich selbst nach D verlängert, und DC zieht; dann ist $\triangle$ABC = $\triangle$ADC (§ 97, Zusatz). Ist also BC = 12, so ist DC = 16.

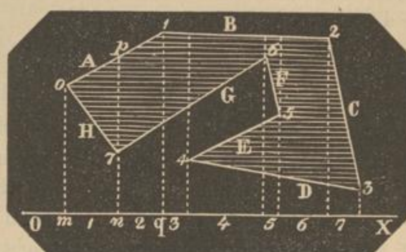
204.

*) Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir noch eine uns von Gaufs mitgeteilte, für die praktische Geometrie wichtige Methode erläutern, nach welcher man den Flächeninhalt einer aufs Papier getragenen Figur (z. B. einer Karte) leichter, als nach der gewöhnlichen Methode berechnen kann.

Nach der gewöhnlichen Methode zerlegt man die Figur in lauter Dreiecke (in Rechtecke ist selten möglich), mifst nach demselben verjüngten Mafsstab, nach welchem die Figur aufgetragen worden, in jedem Dreieck Grundlinie und Höhe, und berechnet hieraus den fraglichen Inhalt. Diese Methode ist aber nicht allein der Karte sehr nachteilig, sondern auch noch andern Übelständen und Unbequemlichkeiten ausgesetzt, denen wir auf folgende Weise ausweichen können.

Des leichtern Verständnisses halber wollen wir als Beispiel zuerst eine geradlinig begrenzte Figur von bestimmter Seitenzahl annehmen.

Wir ziehen nun neben dieser Figur in beliebiger Richtung eine Linie, OX (Abscissenachse), und fällen darauf von jedem Eckpunkt ein Perpendikel (Ordinate), welches wir uns aufwärts durch die Figur hindurch verlängert denken, so ist dadurch die Abscissenlinie in $n - 1$ Teile geteilt,*) wenn die Figur n Seiten hat, und es ist klar, daſs jeder dieser Teile der Abscissenlinie mit zwei Ordinaten und einer Seite der Figur oder mit einem Stück von der Seite, ein Trapez bildet; kurz, die ganze Figur (bis an die Abscissenachse gerechnet) ist in lauter Trapeze zerlegt, die teils positiv, teils negativ sind. —



Bezeichnen wir die ganzen Seiten der Figur einfach mit A, B, C..., und Stücke davon mit denselben, jedoch numerierten Buchstaben, so können wir den Flächeninhalt der Figur folgendermaſsen erst kurz andeuten:

$$\begin{array}{llllllll}
1\,A_1 & -1\,H & -2\,G_1 & +3\,B_1 & +4\,E_1 & -4\,D_1 & -5\,F & +7\,C \\
2\,A_2 & & -3\,G_2 & +4\,B_2 & +5\,E_2 & -5\,D_2 & & \\
 & & -4\,G_3 & +5\,B_3 & & -6\,D_3 & & \\
 & & & +6\,B_4 & & -7\,D_4 & & \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{Fläche} = (A)+(B)+(C)+(-D)+(E)+(-F)+(-G)+(-H)$$

*) Eins oder mehrere dieser Teile kann $= 0$ sein, wenn eine oder mehrere Seiten der Figur mit der Ordinatenrichtung parallel laufen.

wobei also $1\,A_1$ das Trapez $opnm$ und $1\,H$ das davon zu subtrahierende Trapez $o\,7\,n\,m$, ferner $2\,A_2$ das Trapez $p\,1\,q\,n$, und $(A) = 1\,A_1 + 2\,A_2$ das Trapez $o\,1\,q\,m$ bedeutet etc.

Man sieht also, daſs die algebraische Summe der Trapeze, welche die Seiten mit den aus ihren Endpunkten gefällten Ordinaten und den dazwischen liegenden Stücken der Abscissenlinie bilden, den Flächeninhalt der Figur auf sehr einfache Weise darstellt. Was die Vorzeichen betrifft, unter denen offenbar ein enger Zusammenhang stattfindet, so lassen sich dieselben auf folgende Weise erklären:

Wir können den Umfang einer Figur auf zweierlei Weise umgehen; einmal, indem wir die Figur selbst immer zur Rechten, dann auch, indem wir sie immer zur Linken haben. Geht man vom Endpunkt einer der beiden äuſsersten Ordinaten, z. B. von o aus, und zwar steigend von o nach 1, von 1 nach 2 etc., so unterscheiden sich die Seiten ganz einfach durch + und —, je nachdem sie vorwärts oder rückwärts laufen, d. h. je nachdem sie von der ersten Ordinate weiter ab zu den folgenden oder wieder zurückführen. Hiernach müssen also notwendig A, B, C positiv, D aber negativ, E wieder positiv sein etc.

Bezeichnet man demnach die Eckpunkte der Figur, von einer der äuſsersten Ordinaten ausgehend, mit 0, 1, 2..., die von einem beliebig genommenen Punkt, O, abgemessenen Abscissen derselben mit x_0, x_1, $x_2 \ldots$, und die zugehörigen Ordinaten mit y_0, y_1, $y_2 \ldots$ (wobei also $x_0 = Om$, $x_1 = Oq \ldots$; $y_0 = om$, $y_1 = 1q \ldots$; $x_1 - x_0 = mq$; $\frac{y_0 + y_1}{2} = \frac{om + 1q}{2}$ etc.), so kann man die vorhergehende Formel, wenn man die Trapeze (A), (B)... durch Koordinaten ausdrückt, auch so schreiben:

$$F = (x_1 - x_0) \cdot \frac{y_0 + y_1}{2} + (x_2 - x_1)\frac{y_1 + y_2}{2} + (x_3 - x_2)\frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots (1)$$

Wir können auf diese Weise allen Trapezen der Gleichförmigkeit halber das *plus*-Zeichen geben, denn ist eins derselben negativ, so ist die dazu gehörige Seite rückläufig, mithin auch die Abscisse des vorhergehenden Punktes gröſser, als die des folgenden, und deshalb liegt das Negative schon in dem Faktor, welcher die Höhe des Trapezes ausdrückt; so ist z. B. in $(-D) = (x_4 - x_3)\frac{y_3 + y_4}{2}$ der Faktor $x_4 - x_3$ wirklich negativ.

Aus obiger Formel folgt:

$$F = \frac{1}{2} \begin{cases} (x_1 - x_0)(y_0 + y_1) \\ (x_2 - x_1)(y_1 + y_2) \\ (x_3 - x_2)(y_2 + y_3) \\ (x_4 - x_3)(y_3 + y_4) \\ (x_5 - x_4)(y_4 + y_5) \\ (x_6 - x_5)(y_5 + y_6) \\ (x_7 - x_6)(y_6 + y_7) \\ (x_0 - x_7)(y_7 + y_0) \end{cases}$$

Ohne die angedeuteten Multiplikationen wirklich auszuführen, sieht man leicht, daſs je zwei auf einander folgende Produkte, nämlich das erste und zweite, das zweite und dritte, das letzte und erste, immer zwei gleiche und entgegengesetzte Teile enthalten, z. B. das erste $+ x_1 y_1$, das zweite $- x_1 y_1$ etc., läſst man diese aus, so ist:

$$F = \frac{1}{2}[x_0(y_7 - y_1) + x_1(y_0 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_4) + \dots + x_6(y_5 - y_7) + x_7(y_6 - y_0)].$$

Diese höchst einfache schöne Formel*) (in welcher man auch die Koordinaten x, y mit einander verwechseln könnte) würde in Worten lauten: Man multipliziere jede Abscisse mit der Differenz der nächst vorhergehenden und nächstfolgenden Ordinate und nehme von der algebraischen Summe dieser Produkte die Hälfte.

Es ist klar, daſs diese Formel allgemein gilt, die Anzahl der Punkte möge noch so groſs sein. Hat die Figur auch krummlinige Grenzen, so findet man das Resultat desto genauer, je mehr Punkte man annimmt. Findet man es bequemer, die Abscissenlinie durch die Figur gehen zu lassen, so kann dies die Gestalt der Formel nicht ändern, weil diese Verlegung der Abscissenlinie erstlich die Abscissen-Differenzen $(x_1 - x_0)$. ., selbst nicht ändert, und was die Ordinaten y_0, y_1 . . betrifft, so ist, wenn auch jede um $\mp a$ geändert wird, doch immer $(y_m \mp a) - (y_p \mp a) = y_m - y_p$.

Was das bequeme Messen der Koordinaten betrifft, so braucht man dazu zwei rechtwinklig verbundene Maſsstäbe, wovon der eine, an der Abscissenlinie fortgleitende Schenkel die Abscissen, und der andere zugleich die Ordinaten abliest.

*) Nach einer brieflichen Mitteilung hat Gauſs diese Formel schon 1790 gefunden. Sie wird seitdem oftmals wieder aufs neue gefunden, d. h. von verschiedenen Schriftstellern ohne Angabe der Quelle mitgeteilt.