Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

Siebzehntes Buch. Ergänzungen

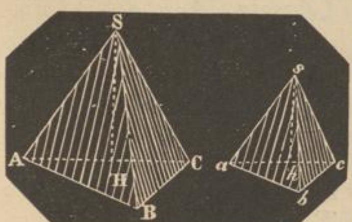
Siebzehntes Buch.

Ergänzungen.

179.

Erklärung. Zwei Körper heifsen ähnlich, wenn die körperlichen Winkel wechselweise gleich sind, und je zwei ähnlich liegende Kanten dasselbe Verhältnis zu einander haben; alsdann sind offenbar auch die Seitenflächen ähnlich, und beide Körper an Form vollkommen gleich, und nur an Gröfse verschieden.

180.



Lehrsatz. Die Inhalte ähnlicher Körper verhalten sich wie die Kuben ähnlich liegender Seiten.

Beweis. Man braucht nur zu zeigen, dafs der Satz für ähnliche Pyramiden gilt, weil ähnliche Körper in solche zerlegt werden können.

Sei demnach Pyramide SABC $\sim$ Pyramide $sabc$. Weil alle ähnlich liegende Seiten einerlei Verhältnis zu einander haben, und die Winkel wechselweise gleich sind, so sind erstens die Grundflächen ähnlich und verhalten sich, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten (§ 125); wie diese Seiten, so verhalten sich aber auch die Höhen der Pyramiden, nämlich $sh : SH = ab : AB$, also auch $\frac{1}{3}\,sh : \frac{1}{3}\,SH = ab : AB$. Man hat also:

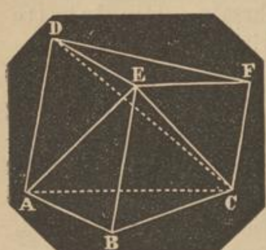
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \dfrac{AB^2}{ab^2} \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{3} SH}{\frac{1}{3} sh} = \dfrac{AB}{ab} \end{array}\right\}$$

Beide Gleichungen mit einander multipliziert, kommt $\frac{\frac{1}{3} SH . \triangle ABC}{\frac{1}{3} sh . \triangle abc} = \frac{AB^3}{ab^3}$

d. h. der Inhalt der kleinern Pyramide ($\frac{1}{3} sh . \triangle abc$) ist so oft in dem Inhalt der gröſsern ($\frac{1}{3} SH . \triangle ABC$) enthalten, als der Kubus einer Seite der kleinern Pyramide in dem Kubus der ähnlich liegenden Seite der gröſsern. Wäre z. B. AB zweimal so groſs als *ab*, so wäre der Kubikinhalt der gröſsern Pyramide $2^2 = 8$mal so groſs, als der der kleinern. Denkt man sich nun zwei ähnliche Körper in ähnliche Pyramiden zerlegt, so verhalten sich je zwei ähnliche Pyramiden, also auch die Summe der Pyramiden in dem einen Körper zur Summe in dem andern und mithin die beiden ähnlichen Körper selbst, wie die Kuben zweier ähnlich liegenden Seiten.

Soll ein Körper konstruiert werden, dessen Inhalt m mal so groſs ist, als der eines ähnlichen Körpers, so müssen die ähnlich liegenden Seiten sich wie 1 zu $\sqrt[3]{m}$ verhalten. Für Kugeln, Kegel und Cylinder folgt der Lehrsatz von selbst aus den Formeln.

181.



*) **Lehrsatz.** Ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma ist so groſs, als drei Pyramiden, welche die Grundfläche des Prismas ABC zu Grundflächen und die drei gegenüber liegenden Ecken E, D, F zu Spitzen haben.

Beweis. Legt man zuerst durch die drei Punkte EAC eine Ebene, so schneidet diese eine Pyramide EABC ab. Es bleibt nun noch eine vierseitige Pyramide übrig, welche E zur Spitze und das Trapez DACF zur Grundfläche hat. Diese wird durch eine durch D, E, C gelegte Ebene in zwei dreiseitige zerlegt, EDAC und EDFC. Denkt man sich nun die Spitze E der links liegenden Pyramide EDAC parallel mit der Grundfläche DAC (also in gleich bleibender Höhe) nach B verschoben, so ist dadurch die Pyramide EDAC in die gleich grofse BDAC verwandelt (§ 167). In letzterer kann man nun aber auch D als Spitze und ABC als Grundfläche betrachten. Die dritte Pyramide EDFC endlich, kann man erst in die Pyramide EAFC*) verwandelt denken, indem die Grundflächen DFC und AFC, als Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe, gleich grofs sind. Denkt man sich nun bei dieser Pyramide EAFC die Spitze E in gleich bleibender Höhe nach B verlegt, so ist sie in die Pyramide BAFC verwandelt, bei welcher man aber auch F als Spitze und ABC als Grundfläche betrachten kann.

Bezeichnen also h, h', h'' die drei von den Ecken E, D, F auf die Grundfläche ABC = F, gefällten Perpendikel, und V den Inhalt des schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas, so ist:

$$V = \frac{h + h' + h''}{3} . F.$$

182.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man den Inhalt V eines abgekürzten Kegels aus den beiden parallelen Radien R, r und der Höhe h = OC berechnen kann.

Auflösung. Setzt man die unbekannte Höhe des Ergänzungskegels vorläufig = x, so ist nach § 170:**)

$$V = \frac{\pi R^2 (h + x)}{3} - \frac{\pi r^2 x}{3}$$

$$\text{oder } V = \frac{\pi R^2 h}{3} + \frac{\pi (R^2 - r^2) x}{3} \ldots\ldots (1)$$

Zur Bestimmung der unbekannten Höhe x hat man:

$$x : h + x = r : R \text{ und hieraus } x = \frac{hr}{R - r}$$

*) Man denke die Linie AF gezogen.

**) Bei diesen Anwendungen der Algebra auf Geometrie mufs die Kenntnis der erstern Wissenschaft vorausgesetzt werden.

Diesen Wert von x in die Gleichung (1) substituiert, kommt:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} + \frac{\pi (R^2 - r^2) r h}{3 (R - r)}.$$

und hieraus nach gehöriger Reduktion die verlangte Formel: *)

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

Beispiel. Sei $R = 80$ cm, $r = 54$ cm, $h = 95$ cm, so ist $V = 1{,}3571$ cbm.

183.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man den Inhalt V einer abgekürzten Pyramide aus deren beiden parallelen Grundflächen F, f, und der Höhe h berechnen kann.

Auflösung. Die Höhe der Ergänzungspyramide sei $= x$, so ist:

$$V = \frac{h + x}{3} . F - \frac{x}{3} f$$

$$\text{oder } V = \tfrac{1}{3} h F + \tfrac{1}{3} x (F - f) \ldots\ldots\ldots (1)$$

Ferner ist (§ 166):

$$\frac{x^2}{(h + x)^2} = \frac{f}{F} \text{ also } \frac{x}{h + x} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{F}} \text{ und hieraus: } x = \frac{h \sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}}$$

Diesen für x gefundenen Ausdruck in die Gleichung (1) substituiert, kommt:

$$V = \tfrac{1}{3} h F + \frac{\tfrac{1}{3} h \sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} (F - f)$$

$$\text{oder } V = \tfrac{1}{3} h F + \tfrac{1}{3} h \sqrt{f} (\sqrt{F} + \sqrt{f}) \, {}^{**})$$

und hieraus nach gehöriger Reduktion die verlangte Formel:

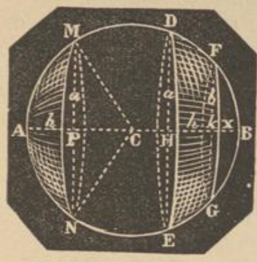
$$V = \frac{h}{3} (F + \sqrt{Ff} + f)$$

---

*) Es ist nämlich $\frac{R^2 - r^2}{R - r} = R + r$. (Algebra § 143.)

**) Weil $\frac{F - f}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} = \frac{(\sqrt{F})^2 - (\sqrt{f})^2}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} = \sqrt{F} + \sqrt{f}$. (Algebra § 143 und § 215, 4.)

184.



Aufgabe. Eine Formel abzuleiten, nach welcher man den Kubikinhalt eines Kugelausschnitts, CMAN, berechnen kann, wenn der Radius r der Kugel und die Höhe der Haube, welche der Ausschnitt zur Grundfläche hat, $AP = h$ gegeben ist.

Auflösung. Was von der ganzen Kugel, als eine Summe von kleinen Pyramiden (Kegeln) gilt, gilt offenbar auch von einem Ausschnitt. Er ist nämlich gleich einem Kegel, dessen Höhe gleich dem Radius, und dessen Grundfläche die Haube ist. Letztere ist (§ 178) $= 2\pi r h$, folglich der Inhalt des Ausschnitts:

$$V = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h.$$

185.

Aufgabe. Den Inhalt eines Haubenabschnitts, MAN, aus der Höhe $AP = h$ und dem Radius der Kugel zu berechnen.

Auflösung. Man muſs den Kegel CMN vom Ausschnitt CMAN subtrahieren. Der Inhalt des Kegels ist $= \pi . \frac{CP}{3} . MP^2$, oder weil $CP = r - h$ und $\overline{MP}^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2$ und der Inhalt des Ausschnitts (nach § 184) $= \frac{2}{3}\pi r^2 h$, so ist der Abschnitt $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \pi . \frac{r-h}{3} . (2rh - h^2)$, oder die Klammern aufgelöst und gehörig reduziert:

$$V = \pi h^2 (r - \tfrac{1}{3}h) \ldots\ldots\ (1)$$

Zusatz. Ist statt des Radius r der Kugel der bequemer zu messende Radius des Grundkreises des Abschnitts, $MP = a$ gegeben, so folgt aus § 126: $h : a = a : 2r - h$; hieraus: $r = \frac{a^2 + h^2}{2h}$. Dies statt r in obige Formel (1) substituiert, ist auch:

$$V = \frac{\pi h}{6}(3a^2 + h^2) \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

186.

Aufgabe. Den Inhalt V eines Zonen-Abschnitts, DEGF, zu berechnen, wenn die Höhe HK $= h$ und die Radien der beiden Grundflächen DH $= a$ und FK $= b$ gegeben sind.

Auflösung. Man setze KB $= x$ und subtrahiere den Abschnitt FBG vom Abschnitt DBE, so hat man den Zonen-Abschnitt (§ 185, Formel 2):

$$\mathrm{V} = \pi . \frac{3a^2 + (h+x)^2}{6} . (h+x) - \frac{\pi x}{6} . (3b^2 + x^2).$$

$$\text{oder } \frac{6\,\mathrm{V}}{\pi} = 3\,a^2h + 3\,a^2x + h^3 + 3\,h^2x + 3\,hx^2 - 3\,b^2x$$

$$\frac{6\,\mathrm{V}}{\pi} = 3\,a^2h + h^3 + 3\,(hx^2 + a^2x + h^2x - b^2x).$$

Um x zu eliminieren, hat man, den Radius der Kugel $= r$ gesetzt (§ 126):

$$x : b = b : 2r - x, \quad \text{hieraus: } 2r = \frac{b^2}{x} + x$$

$$\mathrm{h} + x : a = a : 2r - (x + h), \quad \text{hieraus: } 2r = \frac{a^2}{h+x} + x + h.$$

Mithin ist $\frac{b^2}{x} = \frac{a^2}{h+x} + h$ und hieraus folgt:

$$hx^2 + a^2x + h^2x - b^2x = b^2h,$$

folglich nach Substitution und gehöriger Reduktion:

$$\mathrm{V} = \frac{\pi h}{2}\,(a^2 + b^2 + \tfrac{1}{3}h^2).$$

187.

Um den Inhalt ganz unregelmäſsiger Körper zu finden, muſs man sie in Prismen oder Pyramiden zerlegen und die einzelnen Stücke berechnen. Geht dies nicht an, so muſs man sich auf folgende Weise zu helfen suchen:

1) Hat man den Inhalt eines Hohlgefäſses zu bestimmen, so kann man es mit Wasser füllen, dieses dann in einen senkrechten Cylinder oder ein Parallelepipedon von bekannter Grundfläche gieſsen, die Höhe, bis zu welcher das Wasser ihn anfüllt, messen, und hat dann diese nur mit der Grundfläche zu multiplizieren. Ist der Cylinder (Parallelepiped) im voraus, zu einem kubischen Maſsstab dienend, gehörig

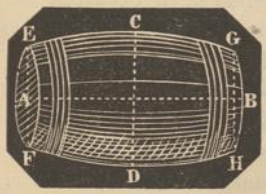
graduiert, so kann man das Volumen, welches das Wasser in ihm einnimmt, unmittelbar ablesen.

2) 1 Liter (Kubikdecimeter) Wasser wiegt 1 kg oder 2 ℔, folglich kann man auch aus dem Gewichte des Wassers, welches ein Hohlgefäſs enthält, seinen Inhalt berechnen.

3) Ist der Inhalt eines nicht hohlen unregelmäſsigen Körpers zu bestimmen, so kann man ihn in einen hohlen Cylinder (Prisma) von bekannter Grundfläche legen, den leer bleibenden Raum so weit mit Wasser (Sand) ausfüllen, bis der Körper ganz bedeckt ist. Man nimmt dann den Körper wieder heraus und miſst, um wieviel das Wasser im Cylinder jetzt niedriger steht, und multipliziert diese Senkung mit der Grundfläche.

4) Man umgebe den Körper — er sei z. B. ein groſser auf dem Felde liegender Stein — mit einem prismatischen Körper (Parallelepipedon), dessen Inhalt man berechnen kann, fülle den leer bleibenden Raum mit Sand (Erde) aus, berechne jetzt den ganzen prismatischen Körper und subtrahiere den Kubikinhalt des zur Ausfüllung gebrauchten Sandes.

188.



*) Den kubischen Inhalt leerer Fässer berechnet man annäherungsweise nach einer der beiden folgenden Formeln, worin D = CD den gröſsten durchs Spund gemessenen Durchmesser, d = EF = GH den Durchmesser der parallelen Böden und h = AB die Länge des Fasses, V den Inhalt bedeutet, und $\pi = 3\frac{1}{7}$ ist.

$$V = \frac{\pi h}{9} (D + \tfrac{1}{2} d)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$V = 0{,}04909\, h\, (10\, D^2 + 5\, d^2 + D d) \ldots\ldots (2)$$

Die zweite Formel (von Rich. Schurig) giebt das Volumen genauer. — Wäre z. B. D = 100 cm, d = 60 cm, h = 110 cm, so giebt die erste Formel: V = 649,17 Liter, die zweite Formel: V = 661,15 Liter.

Sind die beiden Böden von verschiedenen Durchmessern, so nimmt man für d das arithmetische Mittel derselben.

189.

Regelmäſsige Körper. Regelmäſsige Vielecke, d. h. solche, deren Winkel und Seiten einander gleich sind, kann man von jeder beliebigen Seitenzahl, mithin unendlich viele verschiedene denken. Übertragen wir aber diesen Begriff von Regelmäſsigkeit auch auf Körper, und nennen nur solche Körper regelmäſsige, deren Ecken (körperliche Winkel) einander gleich, und deren Seitenflächen kongruente und zugleich regelmäſsige Vielecke sind, so ergiebt sich, als eine notwendige Folge und merkwürdiges Resultat unserer Denkgesetze, daſs es solcher regelmäſsigen Körper nicht mehr, als fünf verschiedene geben kann.

Der Grund liegt nämlich darin: daſs 1) zur Bildung eines körperlichen Winkels (Ecke) wenigstens drei Ebenen erforderlich sind, und daſs, wie ebenfalls leicht einzusehen, 2) alle Kantenwinkel (Linienwinkel), welche eine Ecke bilden (z. B. um die Spitze einer Pyramide herum liegen), zusammen allemal weniger, als vier rechte Winkel betragen.

Hieraus folgt nun sogleich, daſs es keinen regelmäſsigen Körper geben kann, dessen Seitenflächen kongruente regelmäſsige Sechsecke und viel weniger noch regelmäſsige 7, 8, 9...Ecke wären; denn schon im regelmäſsigen Sechseck beträgt jeder Winkel 120°. Drei solche Winkel können also nicht (weil 4 Rechte betragend) zur Bildung einer Ecke zusammengestellt werden, und wir haben es deshalb nur noch mit den regelmäſsigen 3, 4 und 5 Ecken zu versuchen.

Im regelmäſsigen Dreieck ist jeder Winkel = 60°. Drei, vier und auch fünf solche Winkel betragen weniger, als vier rechte und können also eine Ecke bilden. Im regelmäſsigen Viereck ist jeder Winkel = 90°, und im regelmäſsigen Fünfeck = 108°. Von jedem dieser Winkel können also nur drei eine Ecke bilden. Die gehörige Zusammenstellung giebt nun folgende fünf regelmäſsige Körper.

1. *Tetraeder*, dessen Seitenflächen regelmäſsige Dreiecke sind. — Man denke sich auf der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks, ABC, im Mittelpunkt O ein Perpendikel errichtet und schneide dieses mit einer Seite, AB, aus einem Punkt, A, in einem Punkt, P, so giebt dieser Punkt P mit A, B, C verbunden noch drei regelmäſsige, dem ABC kongruente Dreiecke, und es ist

leicht einzusehen, dafs in der entstandenen Pyramide PABC auch die vier körperlichen Winkel (Ecken) einander gleich sind, weil jeder durch drei Kantenwinkel von je 60⁰ gebildet. Zeichnet man, um das Netz des *Tetraeders* zu erhalten, über jede Seite des regelmäfsigen Dreiecks ABC wieder regelmäfsige Dreiecke, ABS etc., so kann man die ganze Figur aus dem Papier schneiden, und die äufsern Dreiecke dachförmig gegen das innere aufschlagen.

2. *Hexaeder*, dessen sechs gleiche Seitenflächen Quadrate sind, wovon je drei eine Ecke bilden. Dieser Körper ist der schon bekannte Würfel oder Kubus, und dessen Netz leicht zu konstruieren.

3. *Oktaeder*, dessen acht gleiche Seitenflächen regelmäfsige Dreiecke sind, wovon je vier eine Ecke bilden. Man denke sich auf der Ebene eines Quadrats, ABCD, im Mittelpunkt O ein Perpendikel errichtet, und dieses durch die Ebene hindurch verlängert. Schneidet man dieses Perpendikel mit einer Seite, AB, aus A auf beiden Seiten des Quadrats in den Punkten P und P′, und verbindet diese mit A, B, C, D, so hat man über der Grundfläche ABCD zwei gleiche entgegengesetzte Pyramiden gezeichnet, welche das *Oktaeder* bilden.

4. *Dodekaeder*, dessen zwölf gleiche Seitenflächen regelmäfsige Fünfecke sind, und wovon jede der zwanzig Ecken aus drei Kantenwinkeln von je 108⁰ gebildet ist.

5. *Ikosaeder*, dessen zwanzig gleiche Seitenflächen wiederum regelmäfsige Dreiecke sind, und wovon jede seiner 12 Ecken durch 5 Kantenwinkel von je 60⁰ gebildet wird.

Die genauere Beschreibung und Netzzeichnung der drei letzten regelmäfsigen Körper, sowie die Berechnung derselben würde zu viel Raum einnehmen, und da die vollständige Theorie dieser Körper doch nur rein wissenschaftliches Interesse hat, so müssen wir uns darauf beschränken, den merkwürdigen Umstand, dafs es nur f ü n f verschiedene Arten regelmäfsige Körper geben kann, kurz angedeutet zu haben. Hat man jedoch diese Körper zur Hand, so ist auch die Möglichkeit ihrer Konstruktion leicht einzusehen.