Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

Sechzehntes Buch. Von der Kugel

urn:nbn:de:bsz:31-264714

Sechzehntes Buch.

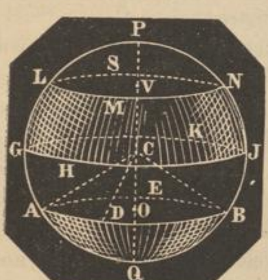
Von der Kugel.

173.

Erklärungen. Die Kugel ist ein Körper von einer einzigen krummen Fläche dergestalt begrenzt, dafs alle Punkte derselben von einem innerhalb liegenden Punkt, Mittelpunkt oder Centrum, gleich weit entfernt sind.

Jede vom Mittelpunkt bis an die Oberfläche gehende Linie heifst Radius oder Halbmesser, und jede durch den Mittelpunkt nach beiden Seiten bis an die Oberfläche gehende Linie heifst Durchmesser oder Diameter.

174.



Lehrsatz. Jeder ebene Durchschnitt einer Kugel ist ein Kreis.

Beweis. Verbindet man beliebige Grenzpunkte, A, D, B, E, des Durchschnitts ADBE mit dem Mittelpunkt C, so sind diese Verbindungslinien CA, CD, CB . ., als Radien der Kugel einander gleich, mithin ist nach § 151 die krumme Linie ADBEA auf der Kugel ein vollkommener Kreis, dessen Mittelpunkt der Fufspunkt O des von C auf die Ebene des Kreises (Durchschnitts) gefällten Perpendikels ist.

Zusatz. Errichtet man auf der Ebene eines Kugelkreises, ADBE, im Mittelpunkt O ein Perpendikel, so mufs dies durch den Mittelpunkt der Kugel gehen.

175a.

Erklärungen. Jeder Kreis, dessen Ebene nicht durch den Mittelpunkt geht, wie ADBE, heifst ein Kugelkreis, jeder Kreis aber, dessen Ebene durch den Mittelpunkt geht, wie GHJK, heifst ein gröfster Kreis (Normalkreis).

Es ist klar, daſs alle gröſsten Kreise einander gleich sind, daſs jeder die Kugel halbiert, und daſs auch je zwei gröſste Kreise sich halbieren, weil ihre Radien dem der Kugel gleich sind (vgl. § 19).

2. Die Endpunkte P, Q eines Durchmessers, der durch den Mittelpunkt O eines Kugelkreises, ADBE, geht und auf dessen Ebene senkrecht steht,*) heiſsen die Pole des Kreises.

3. Alle Kreise auf der Kugel, deren Ebenen parallel sind, heiſsen Parallelkreise. Parallelkreise, wie ADBE, GHJK, haben also gemeinschaftliche Pole..

4. Das körperliche Stück einer Kugel, welches, wie AQB, von der Ebene eines Kreises und einer krummen Fläche begrenzt wird, heiſst Kugelabschnitt oder Kugelsegment, die den Kugelabschnitt mit begrenzende krumme Fläche heiſst Kugelhaube (Calotte, Kugelmütze, Kugelkappe), und das auf dem Grundkreise im Mittelpunkt errichtete Perpendikel OQ heiſst die Höhe (oder Pfeil, Sagitte) des Abschnitts und der Haube. Ein von einem gröſsten Kreis begrenzter Abschnitt heiſst Halbkugel oder Hemisphäre.

5. Ein Streifen von der Kugeloberfläche, welcher, wie LJ, von zwei Parallelkreisen, GHJK und LMNS, begrenzt wird, heiſst eine Zone (Gürtel), und das von der Zone und den Ebenen der beiden Parallelkreise begrenzte körperliche Stück der Kugel heiſst Zonenabschnitt (Zonenkörper). Der Abstand der beiden parallelen Kreisebenen, nämlich CV, heiſst die Höhe der Zone und des Zonenabschnitts.

6. Das Stück einer Kugel, welches, wie CAQB, aus einem Kegel, CAB, und einem daran liegenden Haubenabschnitt, AQB, besteht, heiſst ein Kugelausschnitt (Kugelsektor, Kugelkegel).

Anmerkung. Man kann sich sowohl die ganze Kugel, als auch ihre eben erklärten Teile auf folgende Weise entstanden denken: Der Halbkreis PNBQ drehe sich um den Durchmesser PQ, wie um eine Achse, so beschreibt die Fläche des Halbkreises die Kugel, die halbe Peripherie PNBQ die Kugeloberfläche, die Punkte N, J, B Parallelkreise, deren Pole (Drehpunkte) P und Q sind; der Bogen PN beschreibt eine

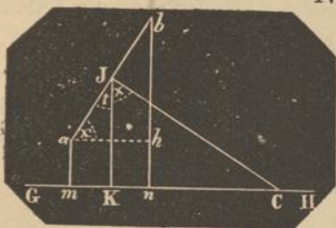
---

*) Bei Kreisen, die kleiner als ein gröſster Kreis, wie hier ADBE, ist dies von selbst der Fall. (§ 174, Zus.)

Haube, der Bogen NJ eine Zone, der Kreisausschnitt CQH einen Kugelausschnitt etc.

Was nun die Berechnung der Oberfläche und des Inhalts der Kugel, so wie auch Stücke derselben betrifft, so wird dies jedem sehr leicht begreiflich werden, der den folgenden Hilfssatz, welcher den Schlüssel dazu giebt, gut versteht.

175b.



Hilfssatz. Wenn eine gerade Linie, ab, sich um eine Achse, GH, ganz herumdreht,*) so läfst sich die Fläche F, welche sie beschreibt, nach der Formel:

$$F = 2\pi \,.\, CJ \,.\, mn$$

berechnen, worin CJ das auf der Mitte der Linie ab errichtete, bis an die Achse GH gehende Perpendikel, π die bekannte Zahl $3\frac{1}{7}$, und mn das Stück der Achse ist, welches die von a und b darauf gefällten Perpendikel zwischen sich fassen.

Beweis. Zuerst ist klar, dafs die Linie ab die Seitenfläche eines abgekürzten Kegels beschreibt, dessen parallele Radien am und bn sind und dessen Seitenlinie ab ist. Nach § 172 ist also die Fläche, welche die Linie ab nach ihrer ganzen Umdrehung beschrieben hat:

$$F = \pi \,.\, ab \,.\, (bn + am) \;\ldots\ldots\; (1)$$

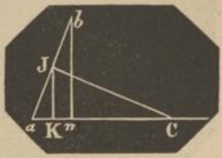
Dieser Ausdruck mufs nun aber, um ihn auf die Kugel anwenden zu können, zweimal umgeformt werden. Denkt man sich von der Mitte J der Linie ab das Perpendikel JK auf die Achse gefällt, so ist leicht einzusehen, dafs $2\,JK = bn + am$ ist. (Man denke sich nur durch J eine Parallele mit mn gezogen, die dann zu am dasselbe Stück hinzusetzt, welches sie von bn abschneidet.) Man darf also in der Formel (1) 2 JK statt $bn + am$ setzen, und es ist daher auch:

$$F = \pi \,.\, ab \,.\, 2JK = 2\pi \,.\, JK \,.\, ab \;\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

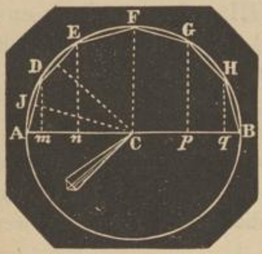
Zieht man nun noch ah parallel mit mn, so sind die beiden Dreiecke abh und CJK gleichwinklig und folglich ähnlich,

*) Man denke sich Trapez $mabn$ fest mit GH verbunden und diese Figur um GH rotierend.

(jedes hat einen rechten Winkel, außerdem $x + t = x' + t = 90^0$, woraus $x = x'$) mithin ab : CJ $= ah$: JK, oder, weil $mn = ah$, auch ab : CJ $= mn$: JK, hieraus: CJ . mn = JK . ab Man kann also in die zweite Formel CJ . mn statt JK . ab setzen, und man hat dann für die von ab beschriebene Fläche folgende im Lehrsatz behauptete Formel: F $= 2\pi$. CJ . mn. Diese Formel gilt auch, wenn der eine Endpunkt a der Linie ab in der Achse GH liegt, alsdann beschreibt ab (oder mb) die Seitenfläche eines ganzen Kegels, und es ist dann (§ 170) F $= \pi$. bn . ab, oder auch, weil 2JK $= bn$ ist: F $= \pi$. 2JK . ab = 2π . JK . ab. Ferner: da $\triangle\, abn \sim \triangle$CJK ist, ab : CJ $= an$: JK, hieraus: CJ . an = JK . ab. Daher auch: F $= 2\pi$. CJ . an.



176.



Lehrsatz. Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so grofs, als die Fläche eines gröfsten Kreises, und der Inhalt der Kugel so grofs, als der eines Kegels, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche, und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.

Bedeutet r den Radius, d den Durchmesser, F die Oberfläche und V den Kubikinhalt der Kugel, so ist:

$$F = 4\pi r^2 = \pi d^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Beweis. In dem die Kugel beschreibenden Halbkreis denke man sich ein regelmäfsiges Vieleck beschrieben und suche zuerst eine Formel für die Fläche, welche dieses regelmäfsige Vieleck beschreibt, indem es sich um den Durchmesser AB ganz herumdreht. Weil alle Vielecksseiten gleich, folglich auch alle auf ihren Mitten errichteten und durch den Mittelpunkt C gehenden Perpendikel gleich sind (§ 71, Zusatz), so ist, nach § 175b, die Fläche, welche die Seite AD beschreibt, $= 2\pi$. CJ . Am, die Fläche, welche die folgende Seite DE beschreibt, $= 2\pi . CJ . mn$, die Fläche, welche EF beschreibt, $= 2\pi . CJ . nC$ u. s. w., mithin die Fläche, welche das ganze Vieleck beschreibt:

$$= 2\pi . CJ . Am + 2\pi . CJ . mn + \ldots\ldots + 2\pi . CJ . qB$$

oder, indem man den, allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktor $2\pi . CJ$ heraussetzt:

$$= 2\pi . CJ . (Am + mn + nC + \ldots\ldots + qB)$$

oder, da der Ausdruck in der Klammer dem Durchmesser AB gleich ist,

$$= 2\pi . CJ . AB.$$

Man erhält also die Fläche, welche ein regelmäſsiges Vieleck beschreibt, indem man die Peripherie des dem Vieleck umgeschriebenen Kreises $2\pi . CJ$ mit dem Durchmesser AB multipliziert. Dieser Satz ist immer richtig, wieviel Seiten das regelmäſsige Vieleck auch haben möge. Denkt man sich also die Seitenzahl des regelmäſsigen Vielecks immerfort verdoppelt, so ändert sich in dem oben gefundenen Ausdruck $2\pi . CJ . AB$ bloſs der Faktor CJ, der mit jeder Verdoppelung der Seitenzahl immer gröſser, und zuletzt, wo diese Verdoppelung aufhört und das Vieleck in einen Halbkreis übergeht, dem Radius CA gleich wird. Es ist mithin die Fläche, welche der Halbkreis beschreibt, d. i. die Oberfläche der Kugel, $= 2\pi . CJ . AB = 2\pi r . AB$, oder, den Radius der Kugel $CA = r$, den Durchmesser $AB = 2r$, die Oberfläche $=$ F gesetzt: $F = 2\pi r . 2r = 4\pi r^2 = \pi d^2$.

Durch ähnliche Schlüsse, wie in § 137, gelangt man nun auch leicht zu dem im Lehrsatz angegebenen Ausdruck für den Inhalt der Kugel. Denkt man sich nämlich innerhalb der Kugel um den Mittelpunkt herum aneinander liegende regelmäſsige dreiseitige Pyramiden von gleicher Grundfläche und folglich auch von gleicher Höhe gelegt, so daſs ihre Spitzen im Mittelpunkt, die Eckpunkte ihrer Grundflächen in der Oberfläche der Kugel, die Grundflächen selbst also innerhalb der Kugel liegen, so ist die Summe aller dieser Pyramiden kleiner, als die Kugel. Denkt man sich die Grundflächen dieser gleichen regelmäſsig eingeschriebenen Pyramiden immer kleiner, folglich ihre Höhe immer gröſser werdend, so kommt die Summe dieser Pyramiden dem Inhalte der Kugel immer näher. Bezeichnet man nun die Grundfläche der 1. Pyramide mit g_1, der 2. Pyramide mit g_2, der 3. mit g_3 u. s. w., die Höhe der Pyramiden mit h, so ist nach § 169 der Kubikinhalt der 1. Pyramide $= \frac{g_1 h}{3}$, der zweiten $= \frac{g_2 h}{3}$ u. s. w., folglich die Summe, d. i. der Kubikinhalt sämtlicher Pyramiden

$$= \frac{g_1 h}{3} + \frac{g_2 h}{3} + \frac{g_3 h}{3} + \frac{g_4 h}{3} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{h}{3}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \ldots).$$

Sobald nun die Grundflächen der Pyramiden unendlich klein und dann Teile der Oberfläche der Kugel selbst werden, geht ihre Höhe h in den Radius der Kugel über und die Summe sämtlicher Pyramiden wird genau dem Kubikinhalt der Kugel gleich, der mithin

$$= \frac{r}{3}(g_1 + g_2 + g_3 + \ldots\ldots) \text{ wird.}$$

Die Summe $g_1 + g_2 + \ldots.$ sämtlicher Grundflächen wird aber alsdann zur Oberfläche der Kugel ($4\pi r^2$) und jener Ausdruck für den Kubikinhalt der Kugel wird $\frac{r}{3} . 4\pi r^2$ (= dem Inhalt eines Kegels mit der Grundfläche $4\pi r^2$ und Höhe r) $= \frac{4\pi r^3}{3}$.

177.

Aufgaben. 1. Der Radius einer Kugel ist $r = 15$ cm. Wie grofs ist die Oberfläche F und der Kubikinhalt V? ($\pi = \frac{22}{7}$ gesetzt).

2. Wie viel Meter $\frac{3}{4}$ breiten Taffet sind erforderlich, um einen kugelförmigen Luftballon zu bekleiden, dessen Radius = 2 m 56 cm?

3. Die Oberfläche einer Kugel ist = 23 qm. Wie grofs ist der Radius?

4. Eine Kugel, deren Radius = 18 cm ist, soll vergoldet werden. Wie teuer kommt dies, wenn für den Quadratcentimeter 15 Pfennige bezahlt wird?

5. Die Oberfläche einer Kugel ist = 3,579 qm. Wie grofs ist der Radius?

6. Der Kubikinhalt einer Kugel ist 97,5 cbcm. Wie grofs ist der Radius?

7. Man denke sich in einen Cylinder einen Kegel und eine Kugel gezeichnet, so dafs die Radien aller drei Körper gleich

sind, und die Höhe des Kegels und Cylinders gleich dem doppelten Radius ist. Wie verhalten sich diese drei Körper: Kegel, Kugel und Cylinder hinsichtlich ihres Volumens zu einander?

Antwort. (1) $F = 2828\frac{4}{7}$ qcm, $V = 14142\frac{6}{7}$ cbcm; (2) 82,388 m; (3) $r = 1{,}3526$ m; (4) 610 M. 97 Pf.; (5) $r = 53{,}54$ cm; (6) $r = 2{,}8548$ m; (7) wie 1 : 2 : 3.*)

178.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man die Fläche einer Kugelhaube berechnen kann.

Auflösung. Führt man den Beweis in § 176 in Bezug auf die dortigen Vielecksseiten AD und DE allein, so würde sich für die durch diese entstehende krumme Oberfläche

$$= 2\pi . CJ . Am + 2\pi . CJ . mn$$
$$= 2\pi . CJ . (Am + mn)$$
$$= 2\pi . CJ . An \quad \text{ergeben.}$$

Denkt man sich nun immer mehr Seiten in den Bogen AE, so würde, ganz analog der dortigen Ausführung, CJ zuletzt in den Radius r der Kugel, die durch die Vielecksseiten A bis E entstehende krumme Oberfläche $2\pi . CJ . An$ daher in die durch den Bogen AE entstehende krumme Oberfläche (Kugelhaube) mit der Formel $2\pi r . An$ übergehen.

In Bezug auf die Figur unseres § 178 erhält man dafür $2\pi r . AP$, oder, wenn man die Höhe AP der Haube mit h und die krumme Fläche derselben mit F bezeichnet,

$$F = 2\pi r h.$$

Zusatz 1. Aus denselben Betrachtungen folgt, daſs dieselbe Formel auch für eine Zone gilt, und daſs alle Zonen von gleicher Höhe auf derselben Kugel auch gleiche Flächen haben.

Zusatz 2. Denkt man sich vom Scheitel A der Haube nach einem Punkt, M, der sie begrenzenden Peripherie die Sehne $AM = a$ gezogen, so ist (§ 126, Zusatz 1) $h : a = a : 2r$, hieraus: $a^2 = 2rh$. Wir können also in obiger Formel a^2

---

*) Dieses merkwürdige Verhältnis entdeckte Cicero auf einem dem Archimed in Syrakus gesetzten Denkmale.

statt $2rh$ setzen und erhalten dann für die Fläche der Haube den Ausdruck:

$$F = \pi a^2,$$

welche Formel für die Praxis viel bequemer ist, indem man statt der Höhe und des Radius nur eine Sehne zu messen braucht.

Beispiel. Wie viel Quadratmeter Kupferblech sind zur Bedachung einer Kuppel erforderlich, wenn die vom höchsten zum tiefsten Punkt gemessene Sehne AM $= 5\frac{1}{3}$ m ist?

Antwort. 89,397 qm.