Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

Fünfzehntes Buch. Von den Körpern und deren Berechnung

urn:nbn:de:bsz:31-264714

Fünfzehntes Buch.

Von den Körpern und deren Berechnung.

158.

Erklärungen. Körper heiſst jeder nach allen Richtungen hin begrenzte Raum. Die Summe aller ihn begrenzenden Flächen heiſst die Oberfläche des Körpers. So wie aber eine Fläche durch eine einzige Linie begrenzt sein kann, z. B. der Kreis, so kann auch ein Körper durch eine einzige (krumme) Fläche begrenzt sein, z. B. die Kugel. Auſser den, später näher zu erwähnenden drei runden (krummflächigen) Körpern: Cylinder, Kegel und Kugel, beschäftigt sich aber die Elementar-Geometrie nur mit solchen Körpern, welche von lauter ebenen Flächen (Ebenen) begrenzt werden.

Die Linien, in welchen sich irgend zwei den Körper begrenzende Ebenen schneiden, heiſsen Kanten. An den Punkten, in welchen drei oder mehrere Grenzebenen zusammenstoſsen, entsteht das, was man, von auſsen betrachtet, eine Ecke, von innen gesehen, einen körperlichen Winkel nennt. Um eine Ecke oder einen körperlichen Winkel zu bilden, sind also wenigstens drei durch einerlei Punkt gehende Ebenen erforderlich.

Ein Körper wird manchmal nach der Anzahl der ihn begrenzenden ebenen Flächen benannt, ein achtflächiger Körper z. B. wird von acht Flächen begrenzt. Von weniger als vier Ebenen kann ein+ Körper nicht begrenzt sein. Körper, welche in der Praxis häufig vorkommen, und deren Namen deshalb wohl zu merken, sind folgende:

1) **Prisma**. Jeder Körper, begrenzt durch zwei kongruente Vielecke, welche man die Grundflächen nennt, deren gleichliegende Seiten parallel und dessen andere (die gleichliegenden Seiten der Grundflächen verbindende) Flächen, Seitenflächen genannt, folglich Parallelogramme sind (§ 93), heiſst ein Prisma, und zwar ein dreiseitiges, vierseitiges etc., je nachdem die Grundflächen Dreiecke, Vierecke etc. sind. Die Kanten, in welchen irgend zwei Seitenflächen sich schneiden, nennt man hier Seitenlinien. Ein jedes Prisma kann man beschrieben denken, indem die eine untere Grundfläche sich an zwei parallelen Seitenlinien und stets parallel mit sich selbst bis zur obern Grundfläche bewegt (siehe Figur § 162). In jedem Prisma sind die Seitenlinien einander gleich und parallel.

2) Ein Prisma heiſst gerade (normal), wenn die Seitenlinien senkrecht auf der Grundfläche stehen, mithin alle Seitenflächen Rechtecke sind.

3) Unter Höhe eines Prismas versteht man den Abstand der beiden parallelen Grundflächen, nämlich das von einem beliebigen Punkt der einen Grundfläche auf die andere (nötigenfalls erweitert gedachte) Grundfläche gefällte Perpendikel. Bei einem geraden Prisma geben schon die Seitenlinien die Höhe an.

4) Ein gerades Prisma heiſst regelmäſsig, wenn die Grundflächen regelmäſsige Vielecke sind.

5) **Parallelepipedon** heiſst jedes Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind (siehe Figur § 159). Sind die Grundflächen und Seitenflächen Rechtecke, so heiſst das Parallelepipedon ein rechtwinkliges oder rechteckiges.

6) **Kubus** (Würfel, Hexaeder) heiſst jedes Parallelepiped, dessen Grundflächen und Seitenflächen Quadrate sind, die folglich gleich und senkrecht auf einander sind.

7) **Cylinder** (Walze) heiſst jeder prismatische Körper, der zwei kongruente und parallele Kreise zu Grundflächen hat, und dessen Seitenfläche — Mantel — eine einzige solche krumme Fläche ist, deren sämtliche mit der Grundfläche parallelen Durchschnitte der Grundfläche gleich sind. Die die Mittelpunkte der Grundflächen verbindende Gerade nennt man Achse. Man unterscheidet gerade und schiefe Cylinder, je nachdem die Achse senkrecht auf den Grundflächen steht, oder nicht. Ersteren kann man sich durch Umdrehung eines Rechtecks, ECBG, um die Seite EC, als Achse beschrieben denken (Rotationscylinder — ... siehe Figur § 164). Die Radien EG und CB beschreiben dann gleiche und parallele Kreise, die Seitenlinie GB die in sich zurücklaufende krumme Seitenfläche.

8) **Pyramide** heiſst jeder Körper, dessen Grundfläche ein beliebiges Vieleck ist, und dessen Seitenflächen Dreiecke sind, die in einer Spitze, S, zusammenstoſsen (s. Figur § 166).

Ein von der Spitze der Pyramide auf die Grundfläche gefälltes Perpendikel heiſst die Höhe der Pyramide. Eine Pyramide wird nach der Anzahl Seiten der Grundfläche benannt: dreiseitige, vierseitige etc. Ferner heiſst eine Pyramide regelmäſsig, wenn die Grundfläche ein regelmäſsiges Vieleck ist, und das von der Spitze darauf gefällte Perpendikel den Mittelpunkt des regelmäſsigen Vielecks trifft.

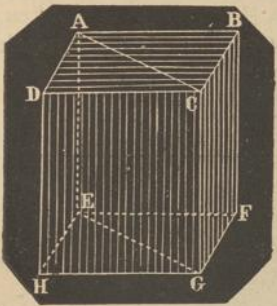
9) **Kegel** heiſst jeder pyramidische Körper, dessen Grund-

fläche ein Kreis, und dessen Seitenfläche — Mantel — eine einzige solche krumme ist, daſs darin von der Spitze nach jedem Punkt der Peripherie der Grundfläche eine gerade Linie gezogen werden kann. Die von der Spitze nach dem Mittelpunkt der Grundfläche gehende Linie heiſst die Achse des Kegels. Man unterscheidet gerade und schiefe Kegel, je nachdem die Achse auf der Grundfläche senkrecht steht, oder nicht. Ersteren kann man sich beschrieben denken, indem ein rechtwinkliges Dreieck, SCB, sich um eine Kathete, SC, als Achse dreht. (Rotationskegel — ... s. Figur § 170.)

10) Zwei Körper heiſsen symmetrisch, wenn alle Bestandteile derselben, wie Ecken, Winkel, Seitenflächen etc. einzeln genommen, vollkommen gleich sind, jedoch in der Zusammensetzung gerade entgegengesetzte Lage haben, so daſs dasselbe Stück, welches bei dem einen Körper rechts, oben etc. in dem andern links, unten etc. liegt. Obgleich solche symmetrische Körper sonst vollkommen gleich sind (z. B. die rechte und die linke Hand), so können sie doch, wegen der entgegengesetzten Lage ihrer gleichen Teile, nicht in vollkommen gleiche Grenzflächen eingeschlossen werden (nicht unmittelbar kongruent sein). Man nennt sie symmetrisch-kongruent.

159.

Lehrsatz. Ein Parallelepipedon wird durch eine Diagonal-Ebene in zwei gleich groſse dreiseitige Prismen geteilt *)



Beweis. Man denke sich durch zwei gegenüber liegende parallele Seitenlinien, CG und AE, eine Ebene (Schnitt) geführt, so wird dadurch das Parallelepiped AG offenbar in zwei dreiseitige Prismen geteilt. Das rechts liegende dreiseitige Prisma hat die Ebenen BCGF, ABFE und die Diagonal-Ebene ACGE zu Seitenflächen, das links liegende die Ebenen ADHE, DCGH und die

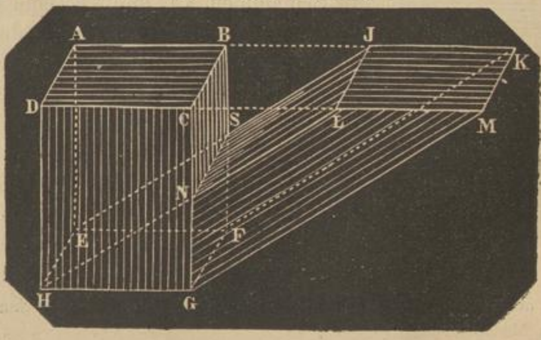
*) Des leichtern Verständnisses halber möge der Anfänger zuvor §§ 161 und 162 lesen. Auch möge man sich solche Körper aus einer weichen Masse formen.

Diagonal-Ebene zu Seitenflächen. Betrachtet man im rechts liegenden Prisma das Dreieck ABC, und im links liegenden das Dreieck HEG als untere Grundfläche, so sind die Grundflächen in beiden gleich, und da auch die Seitenflächen in beiden Prismen, sowohl gegen ihre Grundflächen ABC, HEG, als unter einander dieselbe Neigung haben (§§ 155 und 156, 1), so sind die Prismen jedenfalls symmetrisch kongruent und also gleich grofs. Wäre das Parallelepiped ein gerades, so könnte man beide Hälften in einander gesteckt denken.

160.

Lehrsatz. Ein schiefes Parallelepipedon ist so grofs, als ein gerades von derselben Grundfläche und Höhe.

Beweis. Man nehme zuerst an, dafs die beiden obern Grundflächen zwischen denselben Parallelen AK, DM liegen und denke sich die Parallelen AD, BC, JL, KM, . . EH, FG gegen die Bildfläche aufgerichtet, z. B. senkrecht auf der Ebene des Papiers, so dafs also AB, JK, EF in der Bildfläche, DC, LM, HG aber davor liegen. Das Parallelepiped AG kann man sich nun auch beschrieben denken, indem sich die hintere Seitenfläche ABFE parallel mit sich selbst und an den beiden parallelen Linien AD, BC hingleitend, bis zur vordern Seitenfläche DCGH aufbewegt (§ 158, 1), eben so kann man sich das Parallelepiped JG durch die parallele Bewegung der hintern Seitenfläche JKFE bis zur vordern LMGH entstanden denken. Eben so kann man sich nun auch die beiden dreiseitigen Prismen KBG und JAH beschrieben denken, indem beim erstern die hintere Fläche, nämlich das Dreieck



KBF, parallel mit sich selbst bis zur vordern MCG, und beim andern Prisma die hintere Fläche JAE bis zur vordern LDH sich bewegt. Diese beiden dreiseitigen Prismen sind aber offenbar vollkommen gleich. Subtrahiert man von beiden das dreiseitige Prisma, von welchem JBS die hintere und LCN die vordere Grundfläche ist, und addiert zu den gleichen Resten wieder das dreiseitige Prisma, von welchem SEF die hintere und NHG die vordere Grundfläche ist, so erhält man die beiden fraglichen und gleichen Parallelepipeda.

Läge die obere Grundfläche des schiefen Parallelepipedons mit der des geraden nicht zwischen denselben Parallelen, so kann man auf gleiche Weise erst zeigen, daſs es einem solchen, und folglich auch dem geraden an Gröſse gleich ist.

Zusatz 1. Parallelepipeda von derselben Grundfläche und Höhe sind gleich groſs.

Zusatz 2. Weil jedes der beiden Parallelepipeda durch eine Diagonal-Ebene in zwei gleich groſse dreiseitige Prismen geteilt wird (§ 159), so ist klar, daſs auch jedes schiefe dreiseitige Prisma so groſs ist, als ein gerades von derselben Grundfläche und Höhe.

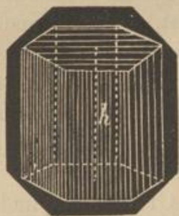
Zusatz 3. Weil jedes Prisma in dreiseitige zerlegt werden kann, so ist auch jedes beliebig vielseitige schiefe Prisma so groſs, als ein gerades von derselben Grundfläche und Höhe.

161.

Körpermaſs. Um von der Gröſse eines Körpers einen bestimmten Begriff zu erhalten, muſs ausgemittelt werden, wie oft ein anderer, als Maſseinheit betrachteter Körper darin enthalten ist. Als die bequemste Form der Einheit zeigt sich hier sogleich der Würfel oder Kubus (§ 158, 6). Solche kubische Körpereinheiten giebt es nun von verschiedener Gröſse, die alle nach der ihnen zu Grunde liegenden Längeneinheit benannt werden. Ist z. B. der zur Maſseinheit genommene Kubus 1 m lang, breit und hoch, mithin jeder seiner sechs Flächen 1 qm, so heiſst dieser Kubus oder der von ihm ausgefüllte Raum, 1 Kubikmeter (cbm). Ist der Kubus 1 cm lang, breit und hoch, so hat man 1 Kubikcentimeter (cbcm). Hiernach versteht man auch, was ein Kubikfuſs, Kubikmeile etc. heiſst.

Weiſs man nun, wie oft eine solche kubische Einheit, z. B. 1 cbm, in einem Körper enthalten ist, so giebt diese Zahl, verbunden mit der deutlichen Vorstellung der Einheit, einen bestimmten Begriff von der Gröſse (Kubikinhalt, kubischen Inhalt, Raumesinhalt, Volumen) des Körpers. Wie man diese Zahl finden kann, zeigen folgende Sätze.

162.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Bedeutet F den Flächeninhalt (Quadratinhalt) der Grundfläche, h die Höhe und V den Kubikinhalt (Volumen), so ist in Zeichen:

$$V = F \,.\, h.$$

Beweis. Zeigen wir zuerst, daſs der Satz wahr ist für ein gerades rechtwinkliges Parallelepipedon.

Angenommen, ein Zimmer habe diese Form und es sei die Länge desselben = 7 m, die Breite = 6 m und die Höhe = 5 m. Dann wäre der Quadratinhalt des Fuſsbodens = 42 qm und es könnten dann (weil die Grundfläche eines Kubikmeters 1 qm ist) offenbar 42 cbm (Würfel) auf dem Fuſsboden neben einander stehen. Ist nun die Höhe des Zimmers 5 m, so würden (weil die Höhe eines Kubikmeters 1 m ist) fünf solche Schichten von je 42 cbm das ganze Zimmer genau ausfüllen, mithin der Kubikinhalt des Zimmers $= 42.5 = 210$ cbm sein. — Wäre die Grundfläche des geraden Parallelepipedons statt eines Rechtecks, wie hier angenommen worden, ein schiefwinkliges Parallelogramm, so findet offenbar dieselbe Regel statt, ohne daſs man nötig hat, das Parallelogramm erst in ein Rechteck zu verwandeln. Und hiernach erhellt nun wohl, daſs man den Kubikinhalt eines jeden sowohl geraden als schiefen Prismas (§ 160, Zusatz 3) findet, wenn man erst den Quadratinhalt der Grundfläche sucht und diesen mit der Höhe multipliziert; denn so viel Quadratmeter die Grundfläche hält, so viel Kubikmeter könnten (gehörig geformt) auf derselben neben einander stehen, und man hat dann die Anzahl Kubikmeter in dieser untern Schicht so oft zu nehmen, als die Höhe Meter enthält.

Zusatz 1. Die Seitenfläche eines geraden Prismas wird erhalten, indem man den Umfang mit der Höhe multipliziert; denn, weil die einzelnen Seitenflächen lauter Rechtecke von gleicher Höhe sind, so sind sie alle zusammen offenbar gleich einem einzigen Rechtecke von derselben Höhe, und dessen Grundlinie gleich dem Umfange ist.

Zusatz 2. Um die Seitenfläche eines schiefen Prismas zu erhalten, berechne man die einzelnen Seitenflächen, indem man zwischen je zwei der gleichen und parallelen Seitenlinien ein Perpendikel fällt. Die ganze Seitenfläche ist also gleich einem Parallelogramm oder Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Seitenlinie, und dessen Höhe gleich dem Umfange eines auf den Seitenlinien senkrechten Durchschnitts (eines sogenannten Normalschnittes) ist.

Anmerkung. Beim Reduzieren der Zahlen auf höhere oder niedere Einheiten muſs man bemerken, daſs nach dem Decimalsystem 1 cbm = 1 000000 cbcm ist, weil die Grundfläche = 100 . 100 und die Höhe = 100 ist. 1 Liter (l) ist = einem Würfel, dessen Kante 10 cm miſst.

163.

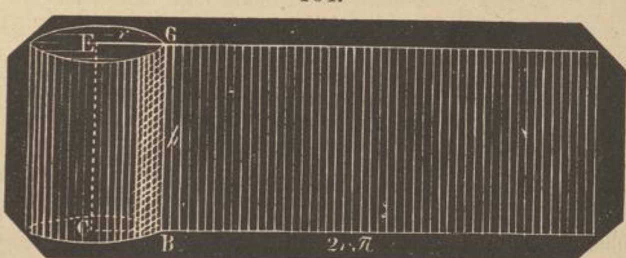
Aufgaben. 1. Die Grundfläche eines dreiseitigen Prismas sei ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete, b = 3 m 74 cm, die andere c = 2 m 30 cm, die Höhe des Prismas sei h = 4 m 15 cm; wie groſs ist der Kubikinhalt V?

2. Wie groſs ist der Kubikinhalt einer Säule von Sandstein, und wie groſs ist ihr Gewicht, wenn ihre Höhe = 5 m 66 cm, ihre Grundfläche ein Quadrat ist, dessen Seiten = 85 cm und das Gewicht von 1 cbm Sandstein = 5200 ℔ ist?

3. Der Kubikinhalt einer Eisenstange ist 88 700 cbm, die Grundfläche ist ein Rechteck, dessen eine Seite = 20 cm, die andere = 11 cm; wie lang ist die Stange?

Antwort. (1) V = 18,2211 cbm. (2) 4,08935 cbm. Gewicht = 21264,62 ℔. (3) 4 m 3,18 cm.

164.



Lehrsatz. 1) Der Kubikinhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe. 2) Die Seitenfläche (der Mantel) des geraden Cylinders ist gleich dem Produkt aus dem Umfange und der Höhe.

Bezeichnet h die Höhe des Cylinders, r den Radius der Grundfläche, V den Kubikinhalt eines beliebigen Cylinders und F die Seitenfläche eines geraden Cylinders, so ist in Zeichen:

$$V = \pi r^2 h \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$F = 2\pi r h \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Beweis. Der Cylinder kann als ein regelmäſsiges Prisma von unendlicher Seitenzahl betrachtet werden. Da nun die Grundfläche $= \pi r^2 h$ (§ 140) und die Höhe h, so ist $V = \pi r^2 h$. Was die Mantelfläche des geraden Cylinders betrifft, so kann man sich dieselbe vom Zylinder abgewickelt denken und erhält dann offenbar ein Rechteck, dessen Höhe $= h$, und dessen Grundlinie gleich dem Umfange der Grundfläche $= 2\pi r$ ist (§ 140). Die Formel (1) gilt selbstverstanden auch für einen schiefen Cylinder; die Seitenfläche eines solchen kann aber nur durch höhere Mathematik gefunden werden, weil die Abwickelung eine in der elementaren Mathematik unberechenbare Fläche giebt. Zufolge § 162, Zusatz 2 ist die Seitenfläche eines schiefen Cylinders gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Seitenlinie, und dessen Höhe gleich dem Umfange eines auf der Seitenlinie senkrechten Durchschnitts ist. Dieser Umfang ist aber kein Kreis und läſst sich, wie gesagt, nur durch höhere Mathematik berechnen, für praktische Zwecke aber leicht genau genug messen.

165.

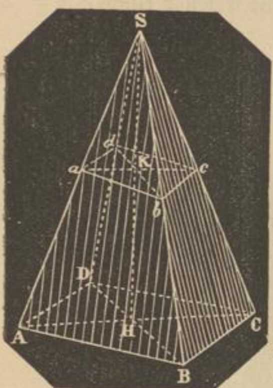
Aufgaben. 1. Wie gross ist der Inhalt V und die Seitenfläche F eines geraden Cylinders, dessen Höhe $h = 1$ m 56 cm, und dessen Radius $r = 26$ cm ist? ($\pi = 3^1/_7$).

2. Ein cylindrisches Gefäſs soll $V = 2600$ Liter halten, der Radius desselben $r = 76$ cm sein. Wie groſs muſs seine Höhe h genommen werden?

3. Ein Cylinder soll $h = 84$ cm hoch sein und $V = 678$ Liter Inhalt haben. Wie grofs mufs der Radius der Grundfläche sein?

Antwort. Es ist (1) $V = 331{,}433$ Liter und $F = 25494{,}86$ cm. (2) $h = 1$ m $43{,}226$ cm. (3) $r = 50{,}677$ cm.

166.



Lehrsatz. Der Durchschnitt einer Pyramide, welcher mit der Grundfläche parallel ist, ist mit derselben ähnlich, und die Flächeninhalte des Durchschnitts und der Grundfläche verhalten sich, wie die Quadrate der zugehörigen Höhen.

$$abcd : ABCD = \overline{SK}^2 : \overline{SH}^2.$$

Beweis. Weil die Linien ab, AB in parallelen Ebenen liegen, so können sie sich nicht schneiden, weil sie aber zugleich auch in einerlei Ebene liegen, nämlich in der Ebene des Dreiecks SAB, so sind sie parallel. Aus gleichem Grunde ist auch $bc \parallel BC$ etc. Die Winkel des Durchschnitts und die der Grundfläche sind also paarweise gleich (§ 154). Ferner ist nun auch (§ 117), $ab : AB = Sa : SA$ oder auch, indem man noch die Fufspunkte K und H der Perpendikel SK, SH mit den Eckpunkten des Durchschnitts und der Grundfläche verbunden denkt, weil dann auch $aK \parallel AH$, $bK \parallel BH$ etc.

$$ab : AB = Sa : SA = SK : SH$$

eben so: $bc : BC = Sb : SB = SK : SH$ etc.

Es verhalten sich also je zwei parallele Seiten, wie SK : SH, daher:

$$ab : AB = bc : BC = cd : CD \text{ etc.}$$

mithin ist: $abcd \sim ABCD$ (§ 116).

Nach § 125 ist nun $abcd : ABCD = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$. Weil aber $SK : SH = ab : AB$, also auch $\overline{SK}^2 : \overline{SH}^2 = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$, so ist auch, wie der Lehrsatz behauptet, $abcd : ABCD = \overline{SK}^2 : \overline{SH}^2$.

Wäre z. B. SH zwei, drei, viermal so grofs, als SK, so wäre die Grundfläche vier, neun, sechzehnmal so grofs, als die Fläche des Durchschnitts.

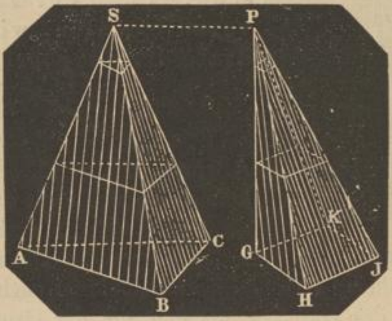
Beispiel 1. Es sei SK = 5 m, SH = 12 m, ABCD = 40 qm. Wie grofs ist $abcd = x$?

Antwort. Man hat $x : 40 = 5^2 : 12^2$ und hieraus $x = 6\frac{17}{18}$ qm.

Beispiel 2. Es sei SH = 12 m, ABCD = 60 qm. Der Durchschnitt $abcd$ soll 20 qm sein, auf welcher Höhe $SK = x$ mufs er genommen werden?

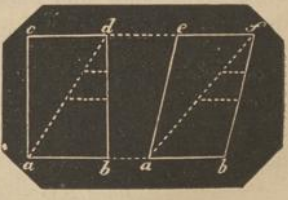
Antwort. Aus $20 : 60 = x^2 : 144$ folgt $x = 6{,}9282$ m.

167.



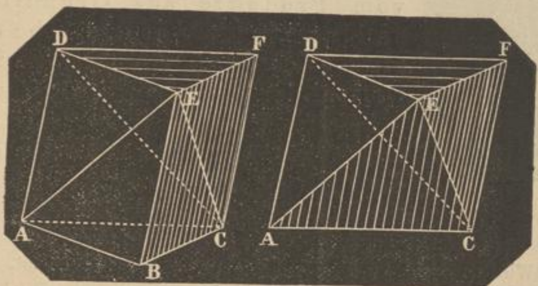
Lehrsatz. Pyramiden von gleich grofser Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

Beweis. Man überlege erst folgendes: Wenn zwei gleiche gerade Linien, $ab = ab$, sich parallel mit sich selbst auf gleiche Höhe bewegen, so beschreiben sie offenbar gleiche Flächen (§ 96, Zusatz). Auch müssen sie gleich grofse Flächen beschreiben, wenn sie bei ihrer parallelen Bewegung gleichzeitig und in demselben Verhältnis bis zu Null abnehmen. Auf diese Weise kann man sich die Dreiecke dab, fab beschrieben denken, wenn die Seiten ab auf der Hälfte ihres Weges um die Hälfte, auf dreiviertel ihres Weges um dreiviertel u. s. f. abnehmen.



Ebenso kann man sich nun die beiden Pyramiden beschrieben denken. Sind nämlich, wie der Lehrsatz voraussetzt, ihre Grundflächen gleich grofs, ABC = GHJK, und ihre Höhen gleich, so sind auch je zwei Durchschnitte von gleicher Höhe einander gleich, weil sie stets nach § 166 die gleichvielsten Teile von den gleichen Grundflächen sind. Bewegen sich nun die gleichen Grundflächen parallel mit sich selbst auf gleiche Höhe, so beschreiben sie offenbar gleich grofse Prismen, und eben so auch gleich grofse Pyramiden, indem sie hierbei gleichzeitig und im erwähnten Verhältnis bis zu Null abnehmen.

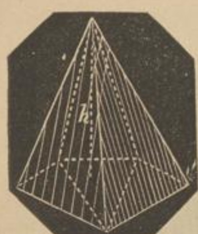
168.



Lehrsatz. Ein dreiseitiges Prisma ist so grofs, als drei Pyramiden von derselben Grundfläche und Höhe.

Beweis. Man lege durch die drei Punkte E, A, C, eine Ebene, diese geht dann durch die Linie AC (§§ 5 und 146) und schneidet also eine Pyramide, EABC, ab, welche E zur Spitze und ABC zur Grundfläche, also dieselbe Höhe und dieselbe Grundfläche, wie das Prisma hat. Denkt man sich diese Pyramide EABC vom Prisma weggenommen, so bleibt eine vierseitige, in Figur 2 dargestellte Pyramide übrig, welche E zur Spitze und das Parallelogramm DFCA zur Grundfläche hat; legt man nun wieder durch die drei Punkte E, D, C eine Ebene, so teilt diese die vierseitige Pyramide EDFCA in zwei dreiseitige, welche die gemeinschaftliche Spitze E haben, und wovon die links liegende Pyramide DAC die rechts liegende DFC zur Grundfläche hat. Diese beiden Pyramiden EDAC und EDFC sind aber gleich grofs (§ 167), und da die rechts liegende Pyramide, in welcher man auch C als Spitze und DFE als die Grundfläche betrachten kann, der zuerst abgeschnittenen Pyramide EABC gleich ist, so sind alle drei Pyramiden, in welche das Prisma zerlegt worden, gleich groſs, und folglich ist, wie der Lehrsatz behauptet, ein dreiseitiges Prisma so groſs, als drei Pyramiden von derselben Grundfläche und Höhe.

169.



Lehrsatz. Der Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teil vom Produkte aus Grundfläche und Höhe, oder, was dasselbe sagt, gleich der Grundfläche mit einem Drittel der Höhe multipliziert.

Bedeutet F den Quadratinhalt der Grundfläche, h die Höhe und V den Inhalt der Pyramide, so ist in Zeichen:

$$V = \frac{1}{3} hF.$$

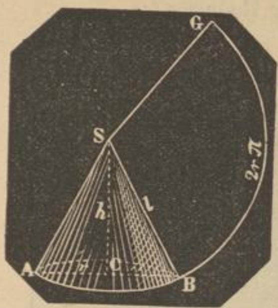
Beweis. Jede Pyramide, die keine dreiseitige ist, kann durch Diagonalebenen in solche zerlegt werden, und da nun nach § 168 jede dreiseitige Pyramide gleich dem dritten Teil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so muſs auch jede noch so vielseitige Pyramide gleich dem dritten Teil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe sein. Der Inhalt eines Prismas ist nun aber gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe (§ 162), mithin der Inhalt einer Pyramide gleich dem Produkt aus Grundfläche und einem Drittel der Höhe.

Zusatz. Um die Seitenfläche einer Pyramide zu bestimmen, muſs man die Seitendreiecke einzeln berechnen und dann addieren.

Aufgabe. Eine der ägyptischen Pyramiden ist $146\frac{1}{2}$ m hoch und die Grundfläche ein Quadrat, dessen Seiten ebenfalls $146\frac{1}{2}$ m. Wie groſs ist der Inhalt V dieser Pyramide?

Antwort. Es ist $V = \frac{(146\frac{1}{2})^2 . 146\frac{1}{2}}{3} = 1\,048\,073$ cbm.

170.



Lehrsatz. 1) Der Inhalt eines Kegels ist gleich dem Produkt aus der Grundfläche und einem Drittel der Höhe. 2) Die Seitenfläche eines geraden Kegels ist gleich dem Produkt aus dem halben Umfange und der Seitenlinie.

Bedeutet V den Inhalt, F die Seitenfläche, h die Höhe l die Seitenlinie und r den Radius des Kegels, so ist in Zeichen:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \ldots\ldots (1)$$

$$F = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \ldots\ldots (2)$$

Beweis. 1. Man kann den Kegel als eine Pyramide betrachten, deren Grundfläche ein regelmäſsiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ist; er ist deshalb auch, was sein Inhalt betrifft, gleich dem dritten Teil eines Cylinders von derselben Grundfläche und Höhe.

2. Was die Seitenfläche (Mantelfläche) betrifft, so kann man dieselbe vom Kegel abgewickelt denken. Die Abwickelung giebt dann, wenn der Kegel gerade ist, offenbar einen Kreisausschnitt, dessen Bogen, BG, gleich dem Umfange des Grundkreises, und dessen Radius gleich der Seitenlinie des Kegels ist. (§ 141, 2.)

Anmerkung. Der Inhalt eines schiefen Kegels wird auf dieselbe Weise nach Formel (1) berechnet, die Seitenfläche eines schiefen Kegels kann aber nur durch höhere Mathematik gefunden werden, weil die Abwickelung keinen Kreisausschnitt bildet.

171.

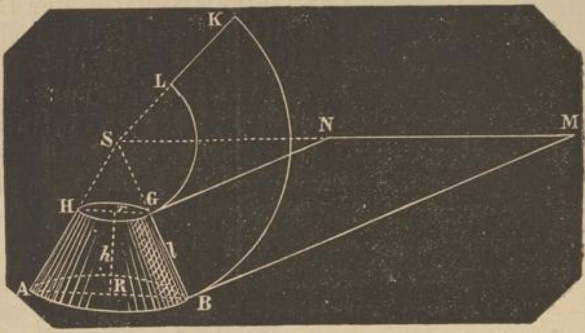
Aufgaben. 1. Der Radius der Grundfläche eines geraden Kegels sei $r = 3$ m, die Höhe $h = 4$ m, also die Seitenlinie $l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m. Wie groſs ist der Inhalt V und die Seitenfläche F? ($\pi = \frac{22}{7}$ gesetzt).

2. Der Inhalt eines Kegels ist $V = 1{,}76$ cbm, der Radius $r = 40$ cm. Wie groſs ist die Höhe h?

3. Der Inhalt eines Kegels ist V = 18 cbm, die Höhe, $h = 4$ m 68 cm. Wie grofs ist der Radius r?

Antwort. (1) $V = 37\frac{5}{7}$ cbm. $F = 47\frac{1}{7}$ qm (2) $h = 10\frac{1}{2}$ m (3) $r = 1{,}91607$ m.

172.



Lehrsatz. Die Seitenfläche eines parallel mit der Grundfläche abgekürzten geraden Kegels ist gleich der Fläche eines Trapezes, dessen parallele Seiten gleich den Peripherien der beiden parallelen Grundflächen, und dessen Höhe gleich der Seitenlinie ist.

Bedeutet also $l = GB$ die Seitenlinie, so ist in Zeichen:

$$F = \pi l\,(R + r).$$

Beweis. Man denke sich den abgekürzten Kegel zu einem ganzen ergänzt und dann abgewickelt. Stellt nun die auf SB senkrechte Linie BM die Länge der untern Peripherie ($2\pi R = \text{arc } BK$) dar, so ist die auf SG senkrechte Linie GN notwendig gleich der obern Peripherie ($2\pi r = \text{arc } GL$), denn die Bögen BK, GL verhalten sich wie ihre Radien SB, SG; wie diese verhalten sich aber auch die Linien BM, GN. Stellt also das Dreieck SBM die Seitenfläche des ganzen Kegels dar, so enthält das Dreieck SGN die Seitenfläche des Ergänzungskegels, und mithin das Trapez GBMN die Seitenfläche des abgekürzten Kegels. In dem Trapez ist nun aber $BM = 2\pi R$. $GN = 2\pi r$. Folglich ist (§ 103):

$$F = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} . l = (\pi R + \pi r)\, l = \pi l\,(R + r).$$

Dieser Satz folgt übrigens auch ganz einfach aus der Betrachtung der Figur GLKB, welche man sich als ein Trapez denken kann. Wäre z. B. $R = 6$ m, $r = 4$ m und $l = 5$ m, so wäre $F = 157\frac{1}{7}$ qm.