Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

Vierzehntes Buch. Von der Lage der Ebenen

urn:nbn:de:bsz:31-264714

Zweiter Teil.

Körperliche Geometrie.

Vierzehntes Buch.

Von der Lage der Ebenen.

142.

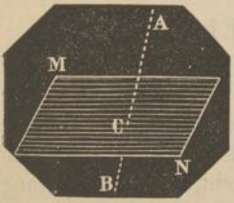
So wie die ebene Geometrie nur solche räumliche Gröſsen betrachtet, deren sämtliche Punkte in einerlei Ebene liegen und hierbei zuerst von der geraden Linie ausgeht, dann die Neigung zweier Linien gegen einander bestimmen lehrt, hierauf zu geschlossenen Figuren fortschreitet, die wichtigsten derselben besonders betrachtet, von den Eigenschaften, Ausmessung und Ähnlichkeit derselben handelt etc., so wird auf ähnliche Weise die sogenannte körperliche Geometrie (Stereometrie) sich mit solchen räumlichen Gröſsen beschäftigen, deren Punkte nicht alle in einerlei Ebene liegen, und hierbei zuerst die Lage der Ebenen gegen einander betrachten, dann zu geschlossenen Figuren, nämlich zu ringsum von allen Seiten durch lauter Ebenen oder krummen Flächen begrenzten Räumen (Körper) übergehen, sie ausmessen lehren etc.

Obwohl nun die körperliche Geometrie fast nur eine Anwendung der ebenen Geometrie ist, so bieten doch ihre ersten Sätze dem Anfänger deshalb Schwierigkeiten dar, weil in perspektivischer Zeichnung (indem das, was auſserhalb der Bildebene liegt, doch auf diese gezeichnet werden muſs) nicht alle Teile einer Figur im richtigen Verhältnis erscheinen. Indessen kann man der Anschauung auf verschiedene Weise zu Hilfe kommen, indem man z. B., statt der geometrischen Körper, physische Körper aus irgend einer weichen Masse schneidet und formt.

143.

Man pflegt eine Ebene gewöhnlich durch ein Viereck anzudeuten und durch zwei gegenüber stehende Buchstaben zu bezeichnen. So wie man eine gerade Linie nach beiden Enden hin bis ins Unendliche verlängert denken kann, so kann man sich auch eine Ebene nach allen Seiten bis ins Unendliche ausgedehnt denken. Versinnlichen kann man eine Ebene und deren Lage durch ein Blatt Papier, von dessen Dicke und Unebenheiten man abstrahiert.

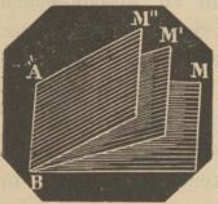
144.



Lehrsatz. Eine gerade Linie kann eine Ebene nur in einem Punkt schneiden.

Beweis. Sei MN eine Ebene und AB eine durch sie hindurch gehende gerade Linie.*) Hätte diese Linie aufser dem Durchschnittspunkt C noch einen zweiten mit der Ebene gemein, so müfste sie in ihrer ganzen Ausdehnung in derselben bleiben (§ 5), weil sie dieselbe aber schneiden soll, so kann dies nur in einem Punkt geschehen, weil beide, sowohl Linie als Ebene, keine Dicke haben.

145.



Lehrsatz. Durch zwei Punkte, A, B, oder durch die sie verbindende gerade Linie AB sind unzählig viele Ebenen möglich.

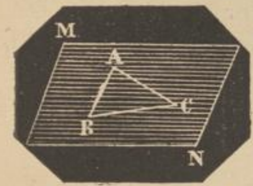
Beweis. Zuerst kann man sich eine durch A und B gehende Ebene BM, denken und sich sodann vorstellen, sie werde um AB, wie um eine Achse, gedreht (so

---

*) Sei MN ein Stück der Bildebene, so liegt nur ein Punkt, C, der Linie AB in dieser Ebene, alle übrigen Punkte der Linie AB liegen aufserhalb derselben, teils oberhalb, teils unterhalb. Man mufs sich also die Linie AB gegen die Ebene aufgerichtet denken. Wir werden solche Linien immer punktieren.

wie man ein Blatt in einem Buche wendet), alsdann kommt sie in unzählig verschiedene Lagen. Statt jeder dieser verschiedenen Lagen kann man sich aber eine andere Ebene, BM′, BM″,... durch AB gelegt*) denken.

146.



Lehrsatz. Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte ist immer eine, aber nur eine Ebene möglich, und die Lage derselben vollkommen bestimmt.

Beweis. Zuerst kann man sich durch zwei der festen Punkte, z. B. durch B und C, eine Ebene gelegt und diese dann um BC gedreht denken, bis sie auch durch den dritten Punkt A geht.

Weil nun die Ebene durch alle drei Punkte A, B, C geht, so geht sie auch durch die drei Seiten des Dreiecks ABC (§ 5). Wollte man noch eine zweite Ebene durch die drei Punkte A, B, C legen, so müfste sie auch wieder durch die drei Seiten des Dreiecks A, B, C gehen, folglich mit der zuerst hindurch gelegten in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen fallen. Es verhält sich hier mit der Ebene ähnlich, wie mit der geraden Linie. Durch einen Punkt sind unzählig viele gerade Linien möglich, durch zwei Punkte aber nur eine, deren Lage hierdurch völlig bestimmt ist. Durch ein oder zwei Punkte sind unzählig viele Ebenen möglich, durch drei aber nur eine, deren Lage dadurch bestimmt ist.

Zusätze. 1) Wenn zwei Ebenen drei nicht in gerader Linie liegende Punkte gemein haben, so fallen sie zusammen und bilden nur eine Ebene.

2) Man sagt von mehreren Punkten im Raume, durch welche eine Ebene gelegt werden kann, sie liegen in dieser Ebene oder in einerlei Ebene. — Durch je drei beliebige Punkte im Raume (z. B. drei Turmspitzen) kann man immer eine Ebene gelegt denken, aber nicht durch je vier (viel weniger durch fünf, sechs etc.), es sei denn, dafs der vierte Punkt schon mit

---

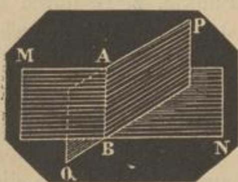
*) Bei Ebenen bedeutet das Wort legen (durch Punkte hindurch führen) dasselbe, was bei Linien ziehen heifst.

den drei andern in einerlei Ebene läge. Es erklärt sich hieraus, weshalb ein dreibeiniger Tisch immer fest steht, wie uneben auch der Grund, worauf er steht, sein möge.

3) Ferner ist klar, dafs durch zwei sich schneidende Linien oder durch einen Winkel immer eine Ebene möglich und der Lage nach bestimmt ist, eben so durch zwei Parallellinien, welche dem Begriffe zufolge immer in einer Ebene liegen.

Zwei Linien, welche kreuzweis *über* einander weggehen, liegen nicht in einerlei Ebene, sind also auch nicht parallel, obgleich sie sich nicht schneiden.

147.



Lehrsatz. *Der Durchschnitt zweier Ebenen ist immer eine gerade Linie.*

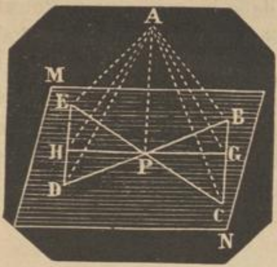
Beweis. Seien MN, PQ die beiden sich schneidenden Ebenen. Weil nun sämtliche Punkte des Durchschnitts beiden Ebenen gemein sind, so müssen sie auch in gerader Linie liegen; denn, lägen nur drei davon nicht in gerader Linie, so müfsten auch, weil diese Punkte in beiden Ebenen zugleich liegen, und durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte nur eine Ebene möglich ist, beide Ebenen zusammen fallen, und könnten sich nicht schneiden.

148.

Erklärung. Wenn eine Linie, AP (siehe folgende Figur), so auf einer Ebene, MN, steht, dafs sie mit allen durch den Fufspunkt P in der Ebene gezogenen Linien PB, PC, PD... rechte Winkel bildet, so sagt man: die Linie stehe senkrecht (normal) auf der Ebene, und umgekehrt: die Ebene stehe senkrecht auf der Linie. In jedem andern Falle heifsen beide schräg gegen einander.

149.

Lehrsatz. *Eine Linie steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie nur auf zwei sich schneidenden Linien in derselben senkrecht steht.*



Beweis. Seien BD, CE die beiden in der Ebene MN liegenden und sich in P schneidenden Linien, und AB auf beiden senkrecht, so dafs $\angle$ APB $=$ $\angle$ APC $= 90^0$,*) so haben wir nur zu zeigen, dafs AP dann auch auf jeder andern beliebig durch P gezogenen Linie, HG, senkrecht steht.

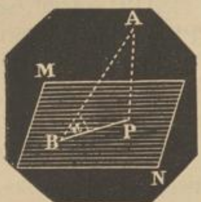
Weil nach Voraussetzung $\angle$ APB $=$ $\angle$ APC $= 90^0$, so sind auch ihre Nebenwinkel APD und APE Rechte (§ 28). Nimmt man nun PB $=$ PC $=$ PD $=$ PE, zieht BC und DE, so ist zuerst $\triangle$ BPC $\cong$ $\triangle$ DPE (§ 34), dann $\triangle$ BPG $\cong$ $\triangle$DPH (§ 37); hieraus folgt: PG $=$ PH und BG $=$ DH. Denkt man sich jetzt die Punkte B, C, D, E mit A verbunden, so erhält man vier kongruente, bei P rechtwinklige Dreiecke, nämlich $\triangle$ APB $\cong$ $\triangle$ APC $\cong$ $\triangle$ APD $\cong$ $\triangle$ APE, weil sie alle eine Kathete, AP, gemein und die andern Katheten PB, PC, PD, PE gleich haben, es sind also auch ihre schräg gegen die Ebene MN aufgerichteten Hypotenusen gleich, nämlich: AB $=$ AC $=$ AD $=$ AE; mithin sind nun auch die schräg gegen die Ebene MN aufstehenden Dreiecke ABC und ADE kongruent und gleichschenklig, also auch die Winkel an den beiden Grundlinien BC und DE einander gleich, daher $\angle$ ABG $=$ $\angle$ ADH. Denkt man jetzt noch AG und AH gezogen, so ist erstlich $\triangle$ ABG $\cong$ $\triangle$ADH (§ 34). (Denn wie vorhin bewiesen, ist BG $=$ DH, AB $=$ AD und $\angle$ ABG $=$ $\angle$ ADH, folglich auch AG $=$ AH. Das Dreieck AHG ist also ein gleichschenkliges und P die Mitte der Grundlinie, folglich steht auch AP auf HG senkrecht (§ 44), und da dies für jede andere durch P gezogene Linie gilt, so steht auch AP auf der Ebene MN senkrecht (§ 148).

---

*) Die nicht in der Ebene MN liegenden Winkel und Linien können in der Zeichnung nicht in natürlicher Gröfse erscheinen, deshalb mufs hier die Einbildungskraft zu Hilfe kommen. Um sich diesen und ähnliche Sätze zu veranschaulichen, nehme man die Oberfläche des Tisches als die Ebene MN, ziehe darauf die Linien BD, CE, und stecke senkrecht auf diese in P einen Stift ein. Die übrigen, aufwärts gehenden Linien, wie AB, AC etc. kann man sich leicht hinzudenken, oder ebenfalls durch schräg eingesteckte Stifte anschaulich machen.

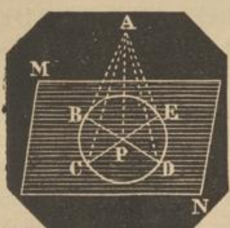
Zusatz. Es ist für sich klar, daſs 1) von einem Punkt auſserhalb oder innerhalb einer Ebene nur ein Perpendikel auf dieser Ebene möglich ist; 2) daſs die von einem Punkt an eine Ebene gehende Senkrechte kürzer ist, als jede Schräge. — Unter Entfernung eines Punktes von einer Ebene versteht man immer das auf diese (nötigenfalls erweitert gedachte) Ebene gefällte Perpendikel.

150.



Erklärung. Die Neigung einer schrägen Linie, AB, gegen eine Ebene, MN, wird immer durch den spitzen Winkel bestimmt, der entsteht, wenn man von einem beliebigen Punkt, A, der Schrägen ein Perpendikel, AP, auf die Ebene fällt, und den Fuſspunkt P desselben mit dem Fuſspunkt B der Schrägen verbindet. Durch diesen Winkel ABP ist dann die Neigung der Schrägen gegen die Ebene bestimmt.

151.



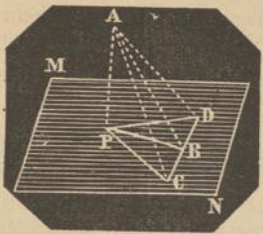
Lehrsatz. Wenn von einem Punkte, A auſserhalb der Ebene, mehrere Schrägen von gleicher Länge an dieselbe gehen, so liegen die Fuſspunkte dieser gleichen Schrägen alle in der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Fuſspunkt des von demselben Punkt A auf die Ebene gefällten Perpendikels ist.

Beweis. Sei AB = AC = AD = etc. und AP perpendikulär auf MN. Denkt man nun P mit B, C, D . . verbunden, so sind alle entstehenden bei P rechtwinkligen Dreiecke einander kongruent, weil sie nach Voraussetzung gleiche Hypotenusen und eine Kathete, AP, gemeinschaftlich haben. Daher:

PB = PC = PD = etc. (§ 107 oder § 43.)

Zusatz. Bestimmt man in einer Ebene drei Punkte, B, C, D, welche von einem auſserhalb liegenden Punkt, A, gleich weit entfernt sind, und beschreibt dann durch diese drei Punkte einen Kreis, so ist der Mittelpunkt desselben der Fufspunkt des von A auf die Ebene gefällten Perpendikels.

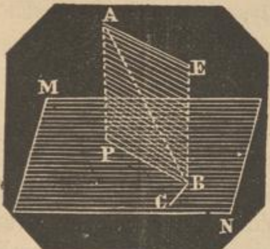
152.



Lehrsatz. Wenn man von einem Punkte, A, eine Schräge, AB, und eine Senkrechte, AP, an eine Ebene zieht, die Fufspunkte B und P verbindet, und auf dieser Verbindungslinie, im Fufspunkt der Schrägen ein Perpendikel, CB, errichtet, so ist dieses auch senkrecht auf der Schrägen AB. In Zeichen: Wenn AP senkrecht auf der Ebene MN und $\angle$ CBP $= 90^0$ ist, so ist auch $\angle$ CBA $= 90^0$.

Beweis. Verlängere CB, so dafs BD = BC, ziehe PC, PD, so sind die bei B rechtwinkligen Dreiecke PBC und PBD kongruent, daher PD = PC. Verbindet man jetzt C und D mit A, so sind die bei P rechtwinkligen Dreiecke APC und APD, wegen ihrer gleichen Katheten, kongruent; daher AC = AD. Das Dreieck ACD ist also gleichschenklig, und da B die Mitte der Grundlinie CD ist, so ist auch $\angle$ ABC $= 90^0$.

153.



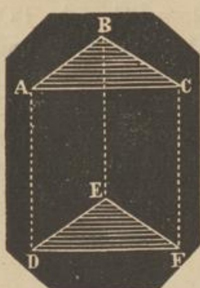
Lehrsatz. Wenn eine Linie senkrecht auf einer Ebene steht, so ist auch jede damit Parallele auf der Ebene senkrecht.

Beweis. Sei AP senkrecht auf MN, und EB $\parallel$ AP. Alsdann kann man sich durch die Parallelen AP, EB eine Ebene, EP, gelegt denken (§ 146, 3), welche die Ebene MN in der geraden Linie PB schneidet. Weil nun nach Voraussetzung $\angle$ APB $= 90^0$ und EB $\parallel$ AP, so ist auch $\angle$ EBP $= 90^0$. Denkt man sich nun CB auf PB senkrecht, so ist CB auch senkrecht auf der Schrägen AB (§ 152), mithin ist auch CB senkrecht auf der durch BP und BA gelegten Ebene, also auch senkrecht auf EB (§ 149). Die mit AP Parallele EB macht also mit BP und BC rechte Winkel, ist also senkrecht auf der Ebene MN (§ 149).

Zusatz 1. Da in einem Punkte nur ein Perpendikel auf einer Ebene möglich ist, so folgt, daſs, wenn man umgekehrt in einem Punkte, B, ein Perpendikel EB auf der Ebene MN errichtet, dieses mit jeder andern auf MN senkrechten Linie, AP, parallel sein muſs.

Zusatz 2. Wenn zwei Linien mit einer dritten einzeln parallel sind, so sind sie unter einander parallel. Denn denkt man sich durch die dritte Linie eine senkrechte Ebene gelegt, so steht auf dieser auch jede der beiden Parallelen senkrecht.

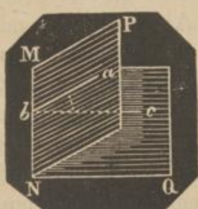
154.



Lehrsatz. Wenn die Schenkel zweier, nicht in einer Ebene liegenden Winkel, BAC und EDF, nach denselben Seiten hin parallel sind, so sind die Winkel gleich.

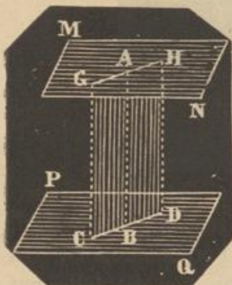
Beweis. Man denke sich von den parallelen Schenkeln gleiche Stücke abgeschnitten, AB = DE und AC = DF, dann BC und EF gezogen, so wie auch AD, BE, CF. Dann ist AD ǁ̲ BE und AD ǁ̲ CF. (§ 93); folglich CF ǁ̲ BE (§ 153, 2), also auch BC = EF. Mithin ist $\triangle$ BAC $\cong$ $\triangle$ EDF (§ 41) und hieraus: $\angle$ BAC = $\angle$ EDF.

155.



Erklärung. Unter Neigung zweier Ebenen, MQ, PN, gegen einander versteht man stets den Winkel, der entsteht, wenn man auf ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie MN in einem beliebigen Punkt, *b*, zwei Perpendikel errichtet, wovon das eine, *bc*, in der Ebene MQ und das andere, *ba*, in der Ebene PN liegt. Da der Punkt *b* in der Durchschnittslinie MN zufolge § 154 ganz willkürlich genommen werden kann, so ist durch den Winkel *abc* die Neigung der beiden Ebenen gegen einander vollkommen bestimmt. Denkt man sich die obere Ebene PN um die Durchschnittslinie MN so lange gedreht, bis der Winkel *abc* ein rechter wird, so sind die Ebenen senkrecht gegen einander.

156.



Lehrsatz. Wenn zwei Ebenen, MN, PQ, auf einer und derselben Linie, AB, senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Beweis. Durch die Linie AB denke man sich noch eine dritte Ebene, GD, gelegt und diese um AB ganz herum gedreht, so sind ihre jedesmaligen Durchschnittslinien in den beiden Ebenen MN, PQ, z. B. die Durchschnitte GH und CD, weil auf AB senkrecht (§ 148) und in einer Ebene, GD, liegend, stets parallel, also auch die Ebenen MN und PQ, in welchen die Durchschnittslinien liegen.

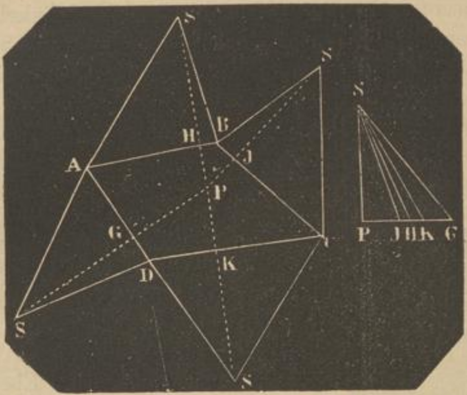
Zusatz 1. Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so sind die Durchschnitte parallel, die innern Wechselwinkel und korrespondierenden Winkel gleich etc.

Zusatz 2. Wenn zwei sich schneidende Ebenen zugleich auf einer dritten Ebene senkrecht stehen, so ist auch ihre Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht. Es seien z. B. die zwei an einander stoſsenden ebenen Wände eines Zimmers auf dem ebenen Fuſsboden (oder Decke) senkrecht, so ist es auch ihr Durchschnitt. (§ 149 und § 155).

Anmerkung. Die vorhergehenden Sätze kommen oftmals zur Anwendung, namentlich beruht auf ihnen die Theorie sowohl der perspektivischen, als auch der geometrischen Zeichnenkunst.

157.

*) **Aufgabe.** Es ist ein beliebiges ebenes Vieleck, z. B. ein Viereck, ABCD, gegeben, auf der Ebene dieses Vierecks denke man sich im Punkte P ein (in der Zeichnung nicht angegebenes) Perpendikel von gegebener Länge, SP, errichtet. Man soll nun über die Seiten des Vierecks Dreiecke zeichnen,



die gegen das Viereck aufgeklappt im Endpunkt S des Perpendikels SP zusammenstofsen und ein schliefsendes Dach bilden.

Auflösung. Vom Fufspunkte P des Perpendikels SP (in der Zeichnenkunst heifst P die Projektion von S) fälle auf die Seiten des Vierecks die Perpendikel PG, PH, PJ, PK und zeichne dann rechtwinklige Dreiecke, welche diese Perpendikel und die Höhe des Daches SP zu Katheten haben, so sind die Hypotenusen die nötigen Verlängerungen der von P auf die Seiten des Vierecks gefällten Perpendikel. Die Winkel SGP, SHP ... geben zugleich die Neigungen der Dächer SAD, SAB ... gegen die Ebene des Vierecks ABCD an. (§§ 152, 155.)

Zusatz. Halbiert man zwei benachbarte Winkel des Vielecks, z. B. A und B, und nimmt den Durchschnittspunkt der Halbierungslinien als Projektion der Spitze des zu konstruierenden Daches, so würden drei Dächer, SAB, SAD, SBC, gleiche Neigung gegen die Grundfläche ABCD bekommen. Soll diese Neigung 45° betragen, so mufs man die Höhe des Daches gleich den, vom bestimmten Projektionspunkt auf die drei Seiten AB, AD, BC gefällten und gleichen Perpendikeln nehmen.