Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

Dreizehntes Buch. Von den regelmäßigen Vielecken. Berechnung des Umfangs und Inhalts des Kreises

Dreizehntes Buch.

Von den regelmäfsigen Vielecken. Berechnung des Umfangs und Inhalts des Kreises.

132.

Erklärung. Ein Vieleck heifst regelmäfsig, wenn alle Seiten und alle Winkel gleichgrofs sind.

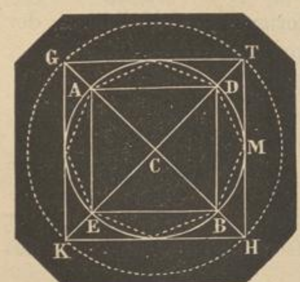
Denkt man sich einen Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Bögen geteilt, so würden die dazu gehörenden Sehnen, sowie auch die Peripheriewinkel, welche je zwei Sehnen mit einander bilden, gleich und somit das dadurch entstehende Vieleck, der Erklärung gemäfs, ein regelmäfsiges sein.

Könnte man also einen Kreis in jede beliebige Anzahl gleicher Bögen teilen, so könnte man auch, indem man nur die Sehnen zöge, ein jedes regelmäfsige Vieleck von beliebiger Seitenzahl zeichnen.

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe aber ist auf streng geometrische Weise, d. h. nicht durch Probieren, sondern durch, auf bestimmte Gesetze und Regeln gegründete Konstruktion, bis jetzt noch keinem Mathematiker gelungen und diese Aufgabe: ein beliebiges regelmäfsiges Vieleck von bestimmter Seitenzahl zu konstruieren, gehört daher zu den bis jetzt noch ungelösten.

In folgenden wenigen Fällen jedoch, wo der Kreis in 3, 4, 5, 15, so wie in die durch wiederholtes Verdoppeln dieser Zahlen angegebenen gleichen Teile geteilt werden soll, ist die Auflösung möglich.

133.



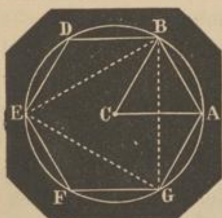
Aufgabe. Einen Kreis in vier gleiche Teile zu teilen, und ein regelmäfsiges Viereck zu konstruieren.

Auflösung. Man ziehe zwei auf einander senkrechte Durchmesser, so teilen diese den Kreis in vier gleiche Bögen. Zieht man die Sehnen, so hat man auch das regelmäſsige Viereck ADBE, welches offenbar ein Quadrat ist. Der Beweis ist leicht.

Zusatz 1. Um ein regelmäſsiges Viereck um den Kreis zu beschreiben, dessen Seiten mit den des eingeschriebenen parallel sind, halbiere man einen der Bögen in M (§ 71), ziehe durch M eine Tangente, welche die verlängerten Radien CD, CB in T und H schneidet, dann ist HT eine Seite des umgeschriebenen Vierecks, welche man nur in dem mit CT beschriebenen zweiten Kreise herumzutragen braucht.

Zusatz 2. Durch fortgesetztes Halbieren der Bögen erhält man die regelmäſsigen Vielecke von 8, 16, 32,... Seiten.

134.



Aufgabe. Einen Kreis in sechs gleiche Teile zu teilen und ein regelmäſsiges Sechseck zu zeichnen.

Auflösung. Man trage von einem Punkt, A, aus, den Radius CA, als Sehne, unmittelbar in der Peripherie herum, AB, BD etc., so erreicht man beim sechsten Male den Punkt A wieder und die Aufgabe ist gelöst.

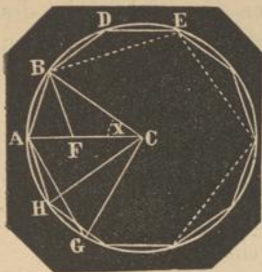
Beweis. Um zu zeigen, daſs der Radius $AC = AB$ wirklich die Seite des Sechsecks ist, denke man noch BC gezogen, so folgt aus dem gleichseitigen und folglich auch gleichwinkligen Dreieck ABC, daſs $\angle C = 60^0$ (§ 65, Zusatz 3), folglich ist $\angle C$ der sechste Teil von 360^0, also auch der über dem Radius AB ausgespannte Bogen AB der sechste Teil vom Kreise.

Zieht man BE, BG, EG, so erhält man das regelmäſsige Dreieck im Kreise, und durch fortgesetztes Halbieren der Bögen die regelmäſsigen Vielecke von 12, 24, 48,.. Seiten.

135.

*) **Aufgabe.** In einem Kreise ein regelmäſsiges Zehneck zu zeichnen.

Auflösung. Man teile den Radius AC in F nach stetiger Proportion (§ 131), so ist der gröſsere Teil FC die Seite des Zehnecks.



Beweis. Nimmt man $AB = FC$, zieht BF und BC, so kann man zeigen, daſs der Winkel x wirklich der zehnte Teil von vier Rechten oder $= \frac{360^0}{10} = 36^0$ und folglich $AB = FC$ die Seite des Zehnecks ist. Denn nach Voraussetzung ist $AF : FC = FC : AC$, also, weil $AB = FC$, auch : $AF : AB = AB : AC$. Die beiden Dreiecke ABF und ABC haben also, auſser dem gemeinschaftlichen Winkel A, zwei ihn einschlieſsende proportionierte Seiten, sind folglich ähnlich (§ 120) und daher gleichwinklig, mithin $\angle$ ABF des $\triangle$ ABF $= \angle x$ des $\triangle$ ABC und die Winkel A und F des $\triangle$ ABF gleich den Winkeln A und B des $\triangle$ ABC. Da aber diese beiden Winkel A und B einander gleich sind, so müssen es auch jene Winkel A und F sein und folglich ist $BF = AB$ (s. § 40, Zusatz). Weil aber nach der Konstruktion auch $CF = AB$, so ist $BF = CF$, daher $\angle CBF = x$. Nun ist $\angle ABC = \angle ABF + \angle CBF = x + x = 2x$ und $\angle A = \angle ABC = 2x$. Die drei Winkel des $\triangle$ ABC betragen mithin $x + 2x + 2x = 5x$, aber auch (s. § 65) $= 180^0$, folglich $x = 36^0$.

Ist $BD = DE = AB$, so ist BE die Seite des regelmäſsiges Fünfecks. Man kann also ein regelmäſsiges Vieleck von 5, 10, 20, 40, 80 . . . Seiten zeichnen. (§ 195, Anmerkung.)

Zusatz. Ist AG die Seite des regelmäſsigen Sechsecks, AH die des Zehnecks, so ist $\angle HCG = 60^0 - 36^0 = 24^0 = \frac{360^0}{15}$, folglich GH die Seite des regelmäſsigen Fünfzehnecks. Man kann also auch noch regelmäſsige Vielecke von 15, 30, 60 . . . Seiten zeichnen.

136.

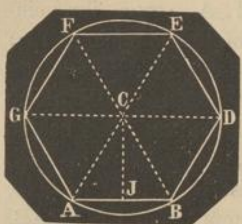
Aufgabe 1. Den rechten Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. (NB. Der rechte Winkel ist, auſser den durch stetes Halbieren daraus abgeleiteten Winkeln von 45^0, $22\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{4}$ . . ., der einzige, bei dem die Dreiteilung durch Konstruktion bewirkt werden kann. Vergl. die Randbemerkung zu § 48.)

Aufgabe 2. In einem Kreise drei andere gleiche Kreise zu beschreiben, die sich unter einander und zugleich auch den gegebenen Kreis berühren.

Auflösung 1. Beschreibe zwischen den Schenkeln des rechten Winkels einen Bogen und trage darin von beiden Endpunkten aus den Radius als Sehne ab, verbinde die Endpunkte beider Sehnen mit dem Mittelpunkt, so ist dadurch die Dreiteilung vollbracht (§ 134).

Auflösung 2. Beschreibe um den gegebenen Kreis ein regelmäſsiges Dreieck (§ 134 und § 133, Zusatz 1), verbinde dessen Eckpunkte mit dem Mittelpunkt und beschreibe in jedem der entstandenen drei Dreiecke einen Kreis.

137.



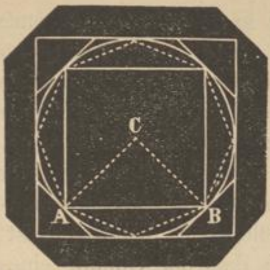
Lehrsatz. Die Fläche eines regelmäſsigen Vielecks ist so groſs, als die eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Vielecks und dessen Höhe gleich dem Radius des eingeschriebenen Kreises, d. i. gleich dem vom Mittelpunkt auf eine der Seiten gefällten Perpendikel CJ ist.

Beweis. Denkt man nach allen Eckpunkten die Radien CA, CB, CD...gezogen, so erhält man eben so viele Dreiecke als das regelmäſsige Vieleck Seiten hat. Weil nun die Höhen dieser Dreiecke, nämlich die vom Mittelpunkt auf die Seiten gefällten Perpendikel alle gleich sind (nämlich $=$ CJ $=$ dem Radius des dem regelmäſsigen Vieleck eingeschriebenen Kreises), so kann man die Grundlinien geradlinig an einander gelegt denken und erhält dann ein einziges Dreieck von der Höhe CJ, und dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Vielecks ist. Arithmetisch ist der Beweis viel kürzer, es ist nämlich der Inhalt $F = \frac{1}{2} CJ . AB + \frac{1}{2} CJ . BD + .. = \frac{1}{2} CJ (AB + BD + ... + GA)$.

Zusatz. Auch der Inhalt eines um den Kreis beschriebenen regelmäſsigen Vielecks ist offenbar gleich der Fläche eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Vielecks und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist.

137 a.

Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Kreises ist so groſs, als der eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist.



Beweis. Man denke sich regelmäfsige Vielecke von beliebiger, aber gleicher Seitenzahl, eins in, eins um den Kreis beschrieben, so ist offenbar der Inhalt des innern kleiner, der des äufsern gröfser, als der des Kreises. Denkt man sich nun die Seitenzahl beider Vielecke immerfort verdoppelt, indem man die jedesmaligen Bögen in Gedanken halbiert, so wird mit jeder folgenden Verdoppelung der Seitenzahl der Kreis in immer engere Grenzen eingeschlossen. Man sieht nämlich, dafs nach jeder Verdoppelung der Seitenzahl der Inhalt eines jeden der beiden Vielecke dem des Kreises immer näher rückt und deshalb ihr Flächenunterschied immer kleiner wird. Könnte man nun durch fortgesetztes Verdoppeln der Seitenzahl beide Vielecke so nahe zusammenrücken lassen, dafs ihr Flächenunterschied $= 0$ würde, so müssten beide Vielecke notwendig mit einander und mit dem Kreise ganz zusammen fallen. Bei der wirklichen Ausführung dieser Verdoppelung der Seitenzahl z. B. 4, 8, 16, 32 . . . hätten wir allerdings eine unendliche Reihe von Vielecken zu beschreiben und deshalb eine, dem ersten Anschein nach, nie aufhörende Halbierung des jedesmaligen Bogens einer Vielecksseite oder des ihr entsprechenden Centriwinkels vorzunehmen, und das wäre allerdings eine endlose, folglich unmögliche Arbeit. Dessenungeachtet können wir sie aber doch als vollendet denken, ja sie in Gedanken (worauf es hier nur ankommt) selbst schnell vollenden, indem wir uns vorstellen: der Radius CB drehe sich um den Mittelpunkt, um den Winkel BCA zu beschreiben, alsdann beschreibt er erst offenbar die Hälfte dieses Winkels, dann von der übrig bleibenden Hälfte wiederum die Hälfte u. s. w., bis er auf CA fällt, und somit die Unzahl von Halbierungen durchlaufen und die nur endlos scheinende Arbeit wirklich vollbracht hat.*)

Bevor nun aber dieses geschehen, ehe nämlich die immer kleiner werdenden Seiten bis zu Elementen verschwinden und die Vielecke selbst zusammen fallen, sich in stetig gebrochene

---

*) Wegen dieses für Anfänger epineusen Satzes vergleiche man Algebra § 329.

Linien (Kreis) verwandeln, ist immer so nahe an der Grenze (dem Kreise) als man will, der Inhalt eines jeden Vielecks so grofs, als ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich dem Radius des eingeschriebenen Kreises ist, mithin mufs dieser Satz auch in ihrer gröfsten Nähe, für die Grenze, das ist für den Kreis selbst gelten. Der Kreis ist also wirklich so grofs, als ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich der Peripherie und dessen Höhe gleich dem Radius ist.

Zusatz. Es folgt zugleich noch: dafs der Umfang eines umgeschriebenen Vielecks gröfser, der eines eingeschriebenen aber kleiner ist, als der Umfang des Kreises, ferner: dafs der Umfang eines eingeschriebenen Vielecks mit jeder Verdoppelung der Seitenzahl gröfser, der des umgeschriebenen hingegen immer kleiner wird, bis beide ihre Grenze, den Kreis, erreichen und gleich werden (§ 52).

138.

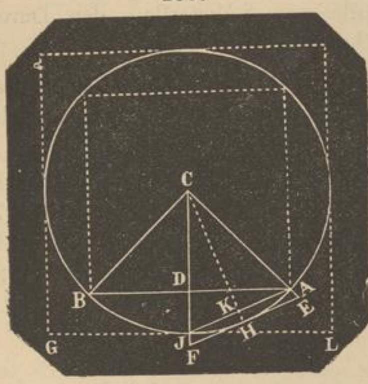
Kreisverhältnis. Berechnung des Umfangs und Inhalts eines Kreises kommt sehr häufig vor, und man mufste deshalb schon frühe darauf sinnen, zur Kenntnis der Zahl zu gelangen, welche angiebt, wie viel mal so grofs der Umfang eines Kreises ist, als sein Durchmesser. Dafs diese Zahl, das sogenannte Kreisverhältnis, zwischen 3 und 4 liegen mufs, folgt schon daraus, dafs der Umfang des eingeschriebenen regelmäfsigen Sechsecks gerade dreimal, der Umfang des umgeschriebenen Vierecks aber viermal so grofs ist, als der Durchmesser (§§ 134 und 133). Nun ist aber der Umfang des Kreises gröfser, als der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks und kleiner, als der des umgeschriebenen Vierecks (§ 137, Zusatz). Es kommt also darauf an, den zu 3 hinzukommenden Bruch zu bestimmen, um jenes fragliche Kreisverhältnis zu haben.

Unter den geschichtlich bekannten Mathematikern war Archimedes, 300 v. Chr., der erste, welcher nach einer unvollkommenen, uns nicht geläufigen Arithmetik fand, dafs diese gesuchte Zahl zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ liegt. Er nahm, als für die damalige Praxis und auch jetzt noch häufig genügend, die erstere ein wenig zu grofse, aber bequemere Zahl $3\frac{1}{7}$. Metius fand diese fragliche Zahl weit genauer $= \frac{355}{113} = 3\frac{16}{113} =$ 3,141592... Durch höhere Mathematik ist dieses Kreisverhältnis noch genauer und schärfer, als je erforderlich, bis auf 1000 Decimalen berechnet worden, die in den ersten Stellen 3,1415926536 lauten.

Wir nehmen von diesem Kreisverhältnis, das irrational ist und als solches sich nie genau durch einen gemeinen Bruch ausdrücken läſst, nur die sieben ersten Decimalen, nämlich: 3,1415927, als für die meisten Fälle vollkommen genügend. In einem Werke der Braminen, betitelt *Ayeen Akbery*, hat man das Verhältnis des Durchmessers zum Umfang wie 1250 : 3927, d. i. wie 1 : 3,1416 gefunden, welches viele Jahrhunderte älter, und genauer ist, als das Archimedische $3\frac{1}{7} =$ 3,142. ., welches schon in der dritten Decimale fehlerhaft ist. Das von Metius, $\frac{355}{113} = 3{,}1415929$, weicht erst in der siebenten Decimale von der Wahrheit ab. Das äuſserst mühsame und langweilige Verfahren, durch bloſse Elementar-Arithmetik diese Zahl zu finden, lehrt der folgende Paragraph.

Bei andeutenden Kreisrechnungen in Formeln pflegt man, der Kürze wegen, statt dieser Zahl den griechischen Buchstaben π (sprich: pih) zu setzen, wo man dann, je nachdem es die geringere oder gröſsere Genauigkeit erfordert, statt π die Zahl $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ oder 3,1416 oder 3,1415927 nimmt.

139.



Berechnung der Zahl π. Man setze, der bequemeren Rechnung halber, den Radius eines Kreises, AC = 1, so ist, nach § 107, die Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Vierecks AB = $\sqrt{2}$ = 1,41421356. Die Seite des umgeschriebenen Vierecks ist offenbar dem Durchmesser gleich, also $GL = 2$. Mithin ist der halbe Umfang des eingeschriebenen Vierecks 2,8284271 mal und der halbe Umfang des umgeschriebenen Vierecks viermal so groſs, als der Radius, und eben so viel mal so groſs sind die ganzen Umfänge der erwähnten Vierecke, als der Durchmesser.

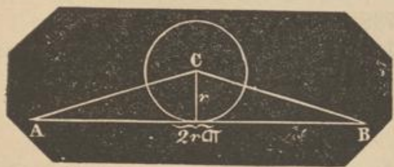
Aus den Seiten der ein- und umgeschriebenen Vierecke berechne man nun die Seiten der ein- und umgeschriebenen Achtecke, indem man zuerst das Perpendikel CD aus $AC = 1$ und $AD = \frac{1}{2} AB = 0,7071067 \ldots$ berechnet, nämlich $CD = \sqrt{1 - \overline{AD}^2}$, dann hat man auch $DJ = 1 - CD$. Aus den beiden Katheten DJ und AD findet man die eingeschriebene Achteckseite $AJ = 0,7653668 \ldots$. Um hieraus die umgeschriebene Achteckseite zu erhalten, berechne man erst das Perpendikel $CK = \sqrt{1 - (\frac{1}{2} AJ)^2}$, dann hat man aus den ähnlichen Dreiecken CAJ und CEF die Proportion: $CK : CH = AJ : EF$, und hieraus folgt die umgeschriebene Achteckseite $EF = 0,8284271 \ldots$ Mithin ist der halbe Umfang des eingeschriebenen Achtecks 3,0614674 .. mal, der des umgeschriebenen Achtecks 3,3137085 ... mal so groſs, als der Radius, also die ganzen Umfänge eben so viel mal so groſs, als der Durchmesser.

Fährt man auf diese mühsame Weise fort und berechnet die Seite des ein- und umgeschriebenen 16-Ecks, 32-Ecks u. s. w., so würde man finden, daſs, den Durchmesser = 1 gesetzt (vergleiche § 194):

Der Umfang des eingeschriebenen regelmäſsigen		Der Umfang des umgeschriebenen regelmäſsigen
4-Ecks,	= 2,8284271 ...	4,
8 „	= 3,0614674 ...	3,3137085 ...
16 „	= 3,1214451 ...	3,1825979 ...
32 „	= 3,1365485 ...	3,1517249 ...
64 „	= 3,1403311 ...	3,1441184 ...
	⋮	⋮
8192 „	= 3,1415925 ...	3,1415928 ...
16384 „	= 3,1415926 ...	3,1415927 ...

Die gesuchte Zahl π, welche angiebt, wie viel mal so groſs der Umfang des Kreises ist, als der Durchmesser, fällt also zwischen 3,1415926...und 3,1415927...(§ 137, Zusatz) und ist folglich bis auf sieben Decimalen genau: $\pi = 3{,}1415927$. Multipliziert man mit dieser Zahl den Durchmesser, so erhält man die Länge der Peripherie bis auf ein Zehnmilliontel des Durchmessers genau, z. B. bis auf $\frac{3}{4}$ mm genau, wenn der Durchmesser 7420,44 m (1 geographische Meile) wäre.

140.



Kreisrechnungen. Bedeutet r den Radius, d den Durchmesser, U den Umfang und F den Inhalt eines Kreises, so findet man Umfang und Inhalt nach folgenden Formeln:

$$\mathrm{U} = 2\pi r = \pi d \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\mathrm{F} = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Die erste Formel, nach welcher man den Durchmesser d oder $2r$ mit π multiplizieren mufs, um den Umfang des Kreises zu erhalten, folgt schon aus § 139. Da nun die Fläche eines Kreises gleich der eines Dreiecks, CAB, ist, dessen Grundlinie AB gleich dem Umfang $2\pi r$ und dessen Höhe gleich dem Radius r ist (§ 137), so ist, indem man die halbe Grundlinie $\frac{1}{2}\mathrm{AB} = \pi r$ mit der Höhe r multipliziert (§ 102), die Fläche des Kreises $\mathrm{F} = r . \pi r = \pi r^2$ (sprich: „pih r quadrat").

Zusatz 1. Es folgt aus vorstehenden Formeln, dafs sich die Umfänge zweier Kreise wie ihre Radien, oder wie ihre Durchmesser, ihre Inhalte aber sich wie die Quadrate derselben verhalten.

Zusatz 2. Dividiert man den Umfang eines Kreises durch π, so erhält man den Durchmesser d. Dividiert man den Inhalt durch π und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so erhält man den Radius.

In Zeichen:

$$d = \frac{\mathrm{U}}{\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$r = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\pi}} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Aufgabe 1. Man berechne die Umfänge dreier Kreise, deren Radien 5 m 38 cm; $3\frac{2}{3}$ m und $\frac{1}{2}$ m sind.

Bei diesem und allen folgenden Übungsbeispielen ist, der kürzern Rechnung halber, immer das Archimedische Kreisverhältnis genommen, nämlich $\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$.

Aufgabe 2. Man berechne die Flächeninhalte der Kreise, deren Radien $3\frac{2}{3}$ m; 0,97 m; 4,05 cm und 1 m sind.

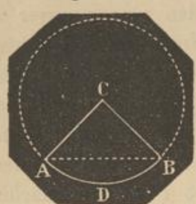
Aufgabe 3. Man suche die Radien zweier Kreise, deren Inhalte 54,62 qm; 5 qm 738 qcm.

Antwort. 33 m $81\frac{5}{7}$ cm; $23\frac{1}{21}$ m; $3\frac{1}{7}$ m; 42,254 qm; 2,9571 qm; 51,5507 qcm; $3\frac{1}{7}$ qm; 4,168823 m; 1,270586 m.

141.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun leicht, wie man Teile von einem Kreise berechnen muſs.

1) Ist die Länge eines in Graden gegebenen Bogens ADB zu berechnen, so muſs man den 360sten Teil vom ganzen Umfange so oft nehmen, als der Bogen Grade enthält.



2) Ist ein Kreisausschnitt, d. i. ein von zwei Radien und einem Bogen eingeschlossener Teil vom Kreise, wie CADB zu berechnen, so nimmt man den 360sten Teil von der ganzen Kreisfläche so oft, als der Winkel am Mittelpunkt oder der Bogen ADB Grade enthält. — Ist der Bogen ADB in Länge gegeben (gemessen), so betrachte man den Ausschnitt wie ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich der Länge des Bogens und dessen Höhe gleich dem Radius ist.

3) Hat man endlich einen Kreisabschnitt, d. i. einen von einer Sehne und einem Bogen begrenzten Teil, ADBA, zu berechnen, so muſs man von dem Ausschnitt CADB das Dreieck CAB subtrahieren.

Ist der Kreisabschnitt nicht gröſser als der Halbkreis und setzt man die begrenzende Sehne $= s$, die Höhe (Verbindungslinie der Mitte der Sehne und der Mitte des Bogens) $= h$, so giebt die nachstehende Formel (von Rich. Schurig) die Fläche F des Abschnittes sehr genau.

$$F = \frac{h}{3}\left[\sqrt{s^2 + 2{,}63616\,h^2} + \sqrt{s^2 + 0{,}56384\,h^2}\right].$$