Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

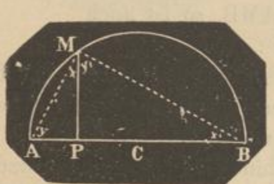
Zwölftes Buch. Proportionen beim Kreise

urn:nbn:de:bsz:31-264714

Zwölftes Buch.

Proportionen beim Kreise.

126.



Lehrsatz. Das Perpendikel MP von einem beliebigen Punkt der Peripherie auf den Durchmesser ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten AP und PB des Durchmessers.*)

Oder: Die vom Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte MP ist das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

In Zeichen:

$$AP : MP = MP : PB.$$

Beweis. Zieht man die beiden Sehnen AM, BM, so entstehen dadurch drei ähnliche Dreiecke,**) denn weil $\angle AMB = R$ (§ 81) und nach Voraussetzung $\angle MPB = R$, so ist $x + y' = x + y = x' + y' = R$, also $y = y'$ und $x = x'$, daher $\triangle APM \sim \triangle BPM \sim \triangle AMB$. Da nun in ähnlichen Dreiecken die den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten proportional sind (§ 117, 2. Zus.), so folgt aus den beiden kleinern Dreiecken die im Lehrsatz behauptete Proportion $AP : MP = MP : PB$.

---

*) Wenn in einer Proportion die beiden innern Glieder gleich sind, wie in $2 : 6 = 6 : 18$, so heifst die Proportion eine stetige und eins der gleichen mittlern Glieder die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel zu den beiden äussern; so ist hier z. B. 6 die mittlere Proportionale zu 2 und 18.

**) Der Anfänger wird wohl thun, diese drei Dreiecke getrennt zu zeichnen.

Zusatz 1. Vergleicht man jedes der kleinern Dreiecke mit dem grofsen, so ergiebt sich noch ein anderer wichtiger Satz, nämlich: jede der beiden Sehnen ist die mittlere Proportionale zwischen dem anliegenden Abschnitt des Durchmessers und dem ganzen Durchmesser. Oder: Jede Kathete ist das geometrische Mittel zwischen dem anliegenden Abschnitt der Hypotenuse (begrenzt durch die Höhe auf derselben) und der Hypotenuse selbst, denn weil $\triangle$ APM $\sim$ $\triangle$ AMB, so ist (§ 117):

$$AP : AM = AM : AB$$

und weil $\triangle$ BPM $\sim$ $\triangle$ AMB, so ist auch

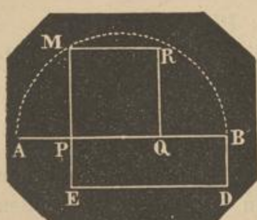
$$PB : BM = BM : AB.$$

Zusatz 2. Aus den beiden letztern Proportionen folgt noch ein anderer und zwar arithmetischer Beweis für den Pythagoräischen Lehrsatz. Man hat nämlich $AP . AB = \overline{AM}^2$; $PB . AB = \overline{BM}^2$. Addiert man mithin beide Gleichungen und berücksichtigt, dafs $AP . AB + PB . AB = (AP + PB)\, AB = AB . AB$, so folgt $\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$.

Aufgabe. Es sei $AP = 9$, $PB = 16$. Wie grofs ist MP?

Antwort. Es ist $MP = \sqrt{9.16} = \sqrt{144} = 12$.

127.



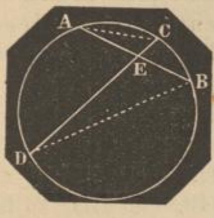
Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen, welches so grofs ist, als ein gegebenes Rechteck, mit anderen Worten: ein gegebenes Rechteck, PBDE, in ein an Inhalt gleiches Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Es kommt nur darauf an, zu den beiden gegebenen Seiten des Rechtecks PE und PB die mittlere Proportionale x zu finden, so dafs $PE : x = x : PB$, denn dann ist $x^2 = PE . PB$. (§ 99).

Man füge also PE geradlinig an PB, so dafs $AP = PE$, beschreibe über AB, als Durchmesser, einen Halbkreis, errichte in P auf AB das Perpendikel MP, so ist das über dieses Perpendikel konstruierte Quadrat MPQR das verlangte, weil nach § 126 $\overline{MP}^2 = AP . PB = PE . PB$.

Zusatz. Um ein Quadrat zu zeichnen, welches beliebig vielmal, z. B. $2\frac{3}{4}$ mal so grofs ist, als ein gegebenes Quadrat, mache man die eine Seite desselben $2\frac{3}{4}$ mal so lang und verwandele das erhaltene Rechteck in ein Quadrat.

128.



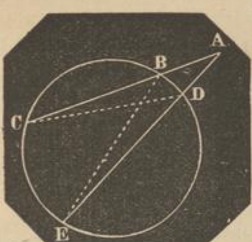
*) **Lehrsatz.** Wenn zwei Sehnen im Kreise sich schneiden, so ist das Produkt aus den beiden Abschnitten der einen Sehne gleich dem Produkt aus den beiden Abschnitten der andern Sehne.

In Zeichen:

$$AE.EB = CE.ED.$$

Beweis. Man ziehe die Hilfslinien AC und BD, so sind die beiden entstehenden Dreiecke gleichwinklig und folglich ähnlich, denn nach § 80 ist $\angle A = \angle D = \frac{\text{arc } BC}{2}$ und $\angle C = \angle B = \frac{\text{arc } AD}{2}$. Daher (§ 117) $\triangle AEC \sim \triangle BED$. Setzen wir nun ähnlich liegende Seiten in Proportion, so ist: $AE : DE = CE : BE$ und hieraus: $AE.BE = CE.DE$. Wäre z. B. $AE = 4\,\text{m}$, $EB = 3\,\text{m}$, $CE = 2\,\text{m}$, so müfste $DE = \frac{3.4}{2} = 6\,\text{m}$ sein.

129.



*) **Lehrsatz.** Wenn zwei Sekanten (verlängerte Sehnen) sich aufserhalb des Kreises schneiden, so sind die Produkte aus jeder ganzen Sekante und ihrem aufserhalb liegenden Teile gleich.

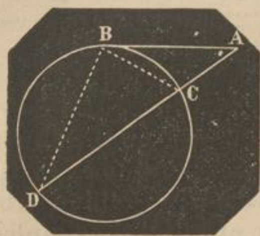
In Zeichen:

$$AC.AB = AE.AD.$$

Beweis. Denkt man sich die Hilfslinien CD und BE gezogen, so sind die beiden Dreiecke ADC und ABE ähnlich; beide haben nämlich den Winkel A gemein und dann die auf demselben Bogen BD stehenden Peripheriewinkel C und E gleich (§ 80). Die ähnlichen Dreiecke geben nun die Proportion $AD : AB = AC : AE$ und hieraus $AB.AC = AD.AE$.

7*

130.



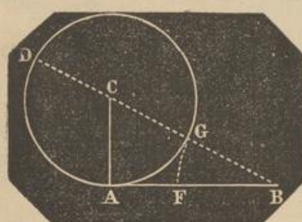
Lehrsatz. Wenn man von einem Punkt A, aufserhalb des Kreises eine Tangente, AB, und eine Sekante, AD, zieht, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zu der ganzen Sekante und ihrem aufserhalb liegenden Teile.

In Zeichen:

$$AC : AB = AB : AD.$$

Beweis. Zieht man die Hilfslinien BC und BD, so ist $\triangle ABC \sim \triangle ADB$, denn beide haben den Winkel A gemein und aufserdem, nach § 84, $\angle D = \angle ABC$, daher (§ 117) $AC : AB = AB : AD$.

131.



*) **Aufgabe.** Eine gegebene Linie, AB, nach stetiger Proportion, nämlich so in F zu teilen, dafs sich die ganze Linie AB zum gröfsern Teile BF, wie dieser zum kleinern Teil AF verhält.

Anmerkung. Diese Teilung nennt man den goldenen Schnitt.

Auflösung. In dem einen Endpunkt A errichte auf AB eine Senkrechte $AC = \frac{1}{2} AB$, beschreibe aus C mit CA einen Kreis, ziehe BC, welche den Kreis in G schneidet, mache $BF = BG$, so ist F der verlangte Teilungspunkt.

Beweis. Verlängere BC nach D, so ist (§ 130):

$$BD : AB = AB : BG,$$

also auch: $AB : BD—AB = BG : AB—BG$, d. i.

weil $BD—AB = BD—DG = BG = BF$

und $AB—BG = AB—BF = AF$,

$$AB : BF = BF : AF.$$