Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

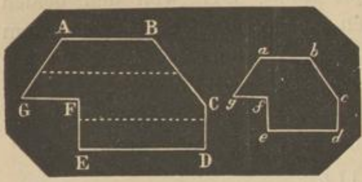
Elftes Buch. Von der Ähnlichkeit der Figuren

urn:nbn:de:bsz:31-264714

Elftes Buch.

Von der Ähnlichkeit der Figuren.

116.



Erklärung. Zwei Figuren heifsen **ähnlich**, wenn sie gleichwinkelig sind und die in gleicher Ordnung, zwischen gleichen Winkeln liegenden Seiten dasselbe Verhältnis zu einander haben. Je zwei solcher Seiten heifsen dann ähnlich liegende oder homologe.

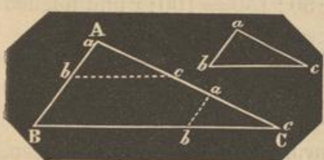
Wären z. B. die beiden Figuren ABCD..G und *abc..g* so konstruiert, dafs sie gleichwinkelig ($A = a$, $B = b$, ... $G = g$) und die ähnlich liegenden Seiten proportional, d. h. wenn AB z. B. dreimal so grofs, als *ab* wäre, dann auch jede andere Seite der gröfseren Figur dreimal so grofs, als die ähnlich liegende Seite der kleinern Figur wäre, nämlich BC dreimal so grofs als *bc*; CD dreimal so grofs als *cd* etc., so wären die beiden Figuren ähnlich, und man kann sie dann auf einerlei Weise konstruiert denken, die eine nur nach einem kleinern Mafsstab. Ähnliche Figuren haben nur verschiedene Gröfse, in allem Übrigen, — Form und Eigenschaften — sind sie gleich.

Die zum Begriff der Ähnlichkeit erforderlichen zwei Merkmale, Gleichheit der Winkel und Proportionalität der Seiten, müssen aber, wohl gemerkt, gleichzeitig vorhanden sein, denn es können zwei sehr unähnliche Figuren eines dieser Merkmale ohne das andere gemein haben. Man kann sich z. B. aus der Figur ABC...G, durch die mit AB und ED angedeuteten parallelen Linien, eine andere Figur herausgeschnitten denken, welche vermöge § 60, Zusatz 1, noch dieselben Winkel hat, bei der das Verhältnis der Seiten aber nicht mehr dasselbe ist. Eben so kann man sich die Seiten der einen Figur ABG...G um die Eckpunkte gedreht (verschoben) denken, wobei noch das Verhältnis der Seiten dasselbe bleibt, die Gleichheit der Winkel aber gestört ist.

Nur bei Dreiecken folgt eins dieser zur Ähnlichkeit erforderlichen Merkmale aus dem andern, und, so wie über die Kongruenz ($\cong$) der Dreiecke, haben wir uns hier nun auch über die Ähnlichkeit ($\sim$) derselben die folgenden wichtigen Lehrsätze (die vier Ähnlichkeitssätze) wohl zu merken, weil auf diese alle übrigen, die Ähnlichkeit der Figuren betreffenden, wichtigen Sätze sich gründen, indem alle ähnliche Figuren in Netze von ähnlichen Dreiecken zerlegt werden können.

Anmerkung. Aus der Voraussetzung: $ab : AB = bc : BC = cd : CD =$ etc., folgt: $ab : bc : cd : .. = AB : BC : CD : ..$. Statt also zu sagen: zwei Figuren heifsen ähnlich, wenn sie gleichwinklig sind und proportionale Seiten haben, könnte man auch sagen: zwei Figuren heifsen ähnlich, wenn die Seiten der einen Figur dieselbe Lage und dasselbe Verhältnis zu einander haben, wie die der andern.

117.



1. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen gleich zwei Winkel des andern sind.

In Zeichen:

Wenn:	so ist notwendig:
$\angle a = \angle A$	$\angle c = \angle C$.
$\angle b = \angle B$	$ab : AB = ac : AC = bc : BC$
	$\triangle abc \sim \triangle ABC$.
	(Lies: $\triangle abc$ ähnlich $\triangle ABC$.)

Beweis. Zunächst mufs nach § 65, Zusatz 2, $\angle c = \angle C$ sein. Denkt man sich ferner das kleinere Dreieck übereinstimmend so auf das grofse gelegt, dafs zwei gleiche Winkel, a, A, sich decken, so ist, weil $\angle b = \angle B$, die Linie bc parallel mit BC (§ 60, Zusatz), mithin auch (§ 113) $ab : AB = ac : AC$ und (nach § 114) $ab : AB = bc : BC$.

1. Zusatz. Zieht man daher in einem $\triangle ABC$ eine Parallele bc zu einer Seite BC, so entsteht ein $\triangle Abc$, welches jenem $\triangle ABC$ ähnlich sein mufs.

2. Zusatz. In ähnlichen Dreiecken sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten proportional.

118a.

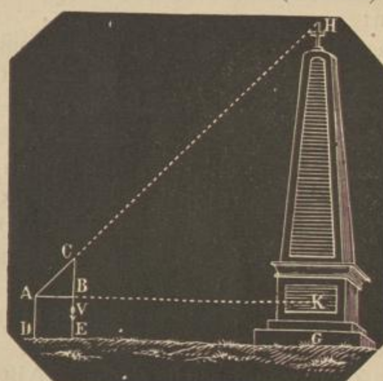
Aufgabe. Die Entfernung eines unzugänglichen Punktes, A, von einem Punkte, B, zu bestimmen.

Auflösung. Von B aus messe 2 beliebige in gerader Linie liegende Längen B*b*, *b*C ab (indem man die Punkte C und *b* mit Meſsstangen bezeichnet). Von *b* aus stecke man eine Linie *ab* so ab, daſs $\angle$ ABC $=$ *abC* (z. B. mittelst des Winkelkreuzes $= 90^0$) und der Endpunkt *a* mit C und A in einerlei Richtung liegt. Miſst man alsdann noch die Linie *ab*, so kann man die Länge von AB durch eine einfache Proportion finden.

Nach Konstruktion ist nämlich: $\triangle\, abC \sim \triangle\, ABC$ (§ 117), daher: $bC : BC = ab : AB$. Hätte man z. B. $BC = 150$ m, $bC = 50$ m, $ab = 100$ m, so wäre $50 : 150 = 100 : x$ und folglich $x = \frac{100.150}{50}$ oder $x = 300$ m $=$ AB.

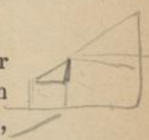
118b.

Aufgabe. Die Höhe eines Turmes (Baumes) zu bestimmen.



Auflösung. In einerlei Richtung und parallel mit HG stecke in D und E zwei Meſsstangen ein, lege daran eine dritte Meſsstange so, daſs, wenn man über dieselbe hin visiert, die Visierlinie durch den Punkt H geht, messe dann DG, DE, AD und CE, so kann man (AK ∥ DG gedacht) durch eine einfache Proportion, HK, berechnen, welches zu AD addiert, die gesuchte Höhe giebt.

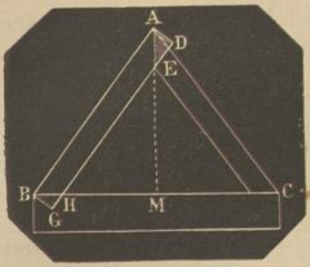
Nach Konstruktion ist $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ AKH (§§ 117 und 61, Zusatz). Wäre z. B. gemessen DG = 100 m, DE = 5 m, AD = 2 m, CE = 6 m, also BC = CE − AD = 4 m, so hat man (§ 117): AB : AK = BC : KH, oder, indem man die Zahlen setzt: $5 : 100 = 4 : x$, woraus $x = \frac{4 . 100}{5} = 80$ = HK, mithin HG = 80 + 2 = 82 m.



Zusatz. Viel bequemer kann man die Höhen zugänglicher Gegenstände messen, indem man sich zu diesem Zweck ein rechtwinkliges Dreieck, ABC, verfertigt, dessen Katheten, AB, BC, gleich lang sind. Dieses Dreieck kann man entweder frei in der Hand halten, oder noch besser an einem Stab, AD, befestigen und dann leicht in eine solche Lage bringen, daſs die Kathete CB mit dem in C befestigten Senkblei CV zusammenfällt, also vertikal und mit HG parallel wird. Hat man sich nun mit diesem einfachen Instrument so weit vom Gegenstande HG entfernt, bis man durch Visieren wahrnimmt, daſs die Hypotenuse AC genau auf die Spitze H zielt, so messe man nur (durch Abschreiten) die Linie DG und addiere hierzu die Höhe des Auges AD, so hat man HG, denn weil nach Voraussetzung AB = BC, $\angle$ B = 90°, also $\angle$ A = $\angle$ C = $\angle$ H = 45°, so ist auch KH = AK = DG, mithin HG = DG + AD. Forstmänner messen auf diese Weise die Höhen der Bäume.

118c.

Aufgabe. Zwei gleich lange viereckige Balken, AB = AC = 10 m, sollen über einen dritten, BC = 12 m, dachförmig aufgerichtet werden. Damit die Balken nun genau an einander passen, muſs offenbar erst von beiden gleich langen Balken, AB, AC, oben ein dreieckiges Stück, ADE, und unten ein dreieckiges Stück, BGH, nach den Linien AE und BH abgesägt werden. Um nun diese Richtungen AE und BH zuvor angeben zu können, kommt es nur darauf an, die Punkte E und H zu bestimmen, oder die Längen DE und GH zu berechnen. Wie findet man diese, wenn die Breite AD = BG = $\frac{1}{3}$ m ist?



Auflösung. Zuerst hat man die Höhe AM $= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ m (§ 107). Ferner sind die Dreiecke AED und ABM ähnlich, denn jedes hat einen rechten Winkel (D = M), außerdem ist $\angle$ AED $= \angle$ BAM (§ 61, Zusatz); mithin (§ 117):

$$DE : AD = AM : BM$$

$$\text{oder } DE : \tfrac{1}{3} = 8 : 6$$

$$\text{und hieraus: } DE = \frac{8 \cdot \frac{1}{3}}{6} = \tfrac{4}{9}\text{ m} = 44{,}4\text{ cm.}$$

$$\text{Ferner ist } \triangle\, BGH \sim \triangle\, ABM$$

$$\text{daher } GH : BG = BM : AM$$

$$GH : \tfrac{1}{3} = 6 : 8$$

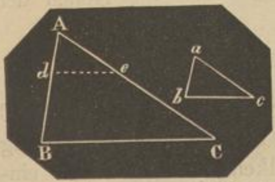
$$\text{folglich: } GH = \frac{6 \cdot \frac{1}{3}}{8} = \tfrac{1}{4}\text{ m} = 25\text{ cm.}$$

119.

2. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Seitenverhältnisse gleich haben.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:
$ab : AB = ac : AC$,	$A = a,\ B = b,\ C = c.$
$ab : AB = bc : BC$,	$\triangle\, ABC \sim \triangle\, abc.$



Beweis. Dieser Satz ist die Umkehrung von § 117. Um die Richtigkeit an einem bestimmten Beispiel zu zeigen, mögen die Seiten des größern Dreiecks dreimal so groß, als die des kleinern sein. Denkt man sich nun auf AB ein Stück, A$d = ab$, abgeschnitten und $de \parallel$ BC gezogen, so ist $\triangle$ A$de \sim \triangle$ ABC (§ 117). Weil nun A$d = ab$ der dritte Teil von AB, so ist auch Ae der dritte Teil von AC und de der dritte Teil von BC, mithin A$e = ac$, $de = bc$, daher $\triangle$ A$de \cong \triangle\, abc$. Setzt man nun $\triangle\, abc$ an die Stelle von $\triangle$ Ade in jener Ähnlichkeitsbeziehung $\triangle$ Ade $\sim \triangle$ ABC, so ist auch $\triangle\, abc \sim \triangle$ ABC, $\angle a =$ A, $\angle b =$ B, $\angle c =$ C.

120.

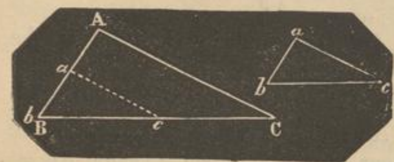
3. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie ein Seitenverhältnis und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich haben.

In Zeichen:

Wenn: so ist:

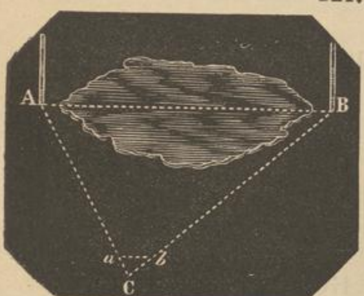
$\angle b = \angle B$

$ab : AB = bc : BC$, $\triangle abc \sim \triangle ABC$.



Beweis. Denkt man das kleinere Dreieck so auf das gröſsere gelegt, daſs die als gleich vorausgesetzten Winkel b und B sich decken und ab auf AB, also bc auf BC fällt, so muſs, weil vermöge Voraussetzung $ab : AB = bc : BC$, die Linie ac parallel mit AC sein (§ 114), folglich $a = A$, $c = C$ (§ 61, Zusatz); die Dreiecke sind also gleichwinklig, folglich ähnlich.

121.



Aufgabe. Den Abstand zweier Punkte, A und B, auf kürzere Weise zu bestimmen, als in § 36 gelehrt.

Auflösung. Man bezeichne einen dritten Punkt, C, messe die Linien AC und BC, trage von beiden die gleichvielsten Teile nach b und a ab, so daſs, wenn z. B. bC der zehnte Teil von BC, dann auch ac der zehnte Teil von AC ist, alsdann muſs ab der ebensovielste Teil von AB sein (§ 120). Miſst man also noch ab und multipliziert diese Länge mit 10, so hat man AB.

122.

4. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie ein Seitenverhältnis und den der gröſsern dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich haben. (Fig. zu § 119.)

Wenn:	so ist:
$ab : AB = ac : AC$,	$\angle a = A$, $\angle c = C$
$\angle b = \angle B$,	$\triangle abc \sim \triangle ABC$.
$\angle b > \angle c$,	

Beweis. Mache A*d* = *ab* und ziehe *de* ∥ BC, so ist A*de*, ∾ △ ABC (§ 117 Zusatz). Ist nun

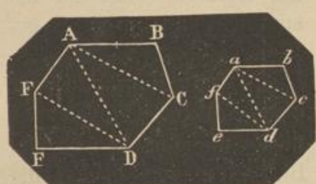
AC $1\frac{1}{2}$ mal so grofs als *ac*, so ist auch
APb $1\frac{1}{2}$ „ „ „ „ A*b*, folglich auch
AB $1\frac{1}{2}$ „ „ „ „ A*d*

und da die △△ A*de* und ABC als ähnliche Dreiecke gleiche Seitenverhältnisse haben müssen, auch

AC $1\frac{1}{2}$ mal so grofs als A*e*.

Folglich mufs *ac* = A*e* sein. Nach § 43 sind nun die △△ A*de* und *abc* kongruent, denn sie haben 2 Seiten A*d* = *ab*, A*e* = *ac* und den der letztern gröfsern Seite (§ 55 und § 43) gegenüberliegenden Winkel gleich ($\angle d = \angle b$). Mithin kann in jener Ähnlichkeitsbeziehung △ A*de* ∾ △ ABC an die Stelle von △ A*de* das △ *abc* gesetzt werden und es ergiebt sich △ *abc* ∾ △ ABC.

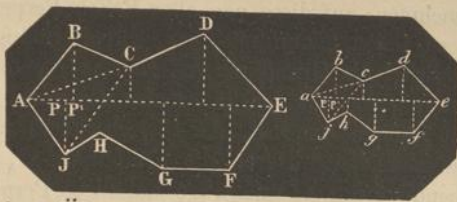
123.



Lehrsatz. Ähnliche Figuren können in ähnliche Dreiecke zerlegt werden, und je zwei ähnlich liegende Diagonalen verhalten sich wie zwei ähnlich liegende Seiten.

Beweis. Seien die beiden Figuren *abc*. . *f* und ABC. . F ähnlich (§ 116). Dann ist zuerst △ *abc* ∾ △ ABC, weil nach Voraussetzung $\angle b = \angle B$ und $ab : AB = bc : BC$, folglich (§ 120) auch $ac : AC = ab : AB$ und $\angle acb = \angle ACB$, und da nach Voraussetzung $\angle bcd = \angle BCD$, so ist nach Abzug der Winkel *acb* und ACB auch: $\angle acd = \angle ACD$. Ferner ist nun auch △ *acd* ∾ △ ACD, weil $\angle acd = \angle ACD$ und $ac : AC = cd : CD$, daher auch (§ 120) $ad : AD = cd : CD$. Eben so zeigt man, dafs △ *adf* ∾ △ ADF, △ *fde* ∾ FDE.

124.



Aufgabe. Über eine gegebene Linie, *ab*, eine Figur zu konstruieren, welche einer andern Figur, ABC...J, ähnlich ist.

Auflösung 1. Man denke sich die Figur ABC..J in zusammenhängende Dreiecke zerlegt, trage dann an die Bildseite *ab* die Winkel *cab* = CAB und *cab* = CBA, so ist $\triangle$ *abc* $\sim$ $\triangle$ ABC (§§ 117 und 65, Zusatz 4); an die Seite *ac* trage man nun die Winkel *caj* = CAJ, *acj* = ACJ, so ist auch $\triangle$ *acj* $\sim$ $\triangle$ ACJ. Auf diese Weise müfste man zwar, wie aus § 123 folgt, eine ähnliche Figur erhalten, weil jedoch das viele Winkelzeichnen zu umständlich und unsicher, so ist dieses Verfahren praktisch nicht anwendbar.

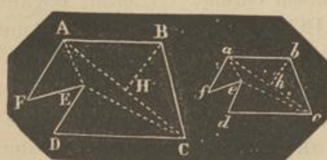
2. Hat man einen sogenannten Reduktionszirkel, d. i. einen Doppelzirkel, dessen Gewinde, in beiden Schenkeln zugleich, verschiebbar, durch eine Schraube festgestellt und mithin die Länge des einen Schenkelpaars in jedem beliebigen Verhältnis zum andern verkürzt werden kann, so stelle man zuerst diesen Zirkel so: dafs, wenn man mit dem einen Schenkelpaar die Originalseite AB fafst, das andere Paar Schenkel die Bildseite *ab* zwischen seinen Spitzen enthält. Hierauf zeichne man alle Dreiecke der Figur ABC...J so ab: dafs man mit dem ersten Schenkelpaar die Seiten der Originaldreiecke abnimmt und mit dem andern Schenkelpaar (umgewandten Zirkel), welches dann jedesmal die ähnlich liegende (reduzierte) Seite fafst, zeichnet; alsdann mufs die zweite Figur der ersten ähnlich werden (§ 119), denn je zwei gleichseitig zwischen beiden Schenkelpaaren enthaltenen Linien verhalten sich immer wie die Längen der Schenkel (§ 120). Enthält die Figur krumme Linien, so mufs man diese durch einzelne Punkte, je mehr, je besser, bestimmen und diese Punkte durch einen freien Handzug verbinden (vergl. § 42, 2. Aufgabe).

3. In vielen Fällen ist es bequemer, statt die ähnlich abzubildende Figur in Dreiecke zu zerlegen, innerhalb oder

aufserhalb derselben eine schickliche Grundlinie, hier z. B. AE, anzunehmen, auf diese von allen Ecken Perpendikel, JP, BP' etc., zu fällen, dann mit dem, zuvor richtig gestellten Reduktionszirkel die Grundlinie AE zu fassen und ihre durch den Zirkel reduzierte Länge in *ae* abzuschneiden, hierauf die reduzierten Längen von AP, AP'...(Abscissen) nämlich *ap*, *ap'*... abzuschneiden. Durch die Endpunkte *p*, *p'*... ziehe man Perpendikel auf *ae* und trage auf diese Perpendikel die reduzierten Längen der Perpendikel (Ordinaten) JP, BP..., nämlich *jp*, *bp*... ab etc.

4. Statt eines Reduktionszirkels kann man sich auch eben so gut eines verjüngten Mafsstabes bedienen. Man mifst dann nach einem solchen Mafsstabe alle Dreiecksseiten der ähnlich nachzubildenden Figur oder die Perpendikel AP, AP'.. JP, BP'..(Abscissen und Ordinaten), dividiert oder multipliziert ihre Längen mit der Reduktionszahl, welche angiebt, wie viel mal so grofs oder so klein die Seiten der Abbildung sein sollen, als die des Originals, und trägt dann die gefundenen Zahlen, von demselben Mafsstabe abgenommen, gehörig auf. — Konstruiert man noch einen zweiten Mafsstab, auf welchem die Einheit so viel mal so klein oder so grofs ist, als die bestimmte Reduktionszahl vorschreibt, so kann man, ohne erst dividieren oder multiplizieren zu brauchen, die nach ersterem Mafsstab gemessenen Längen unmittelbar vom zweiten abmessen.

125.



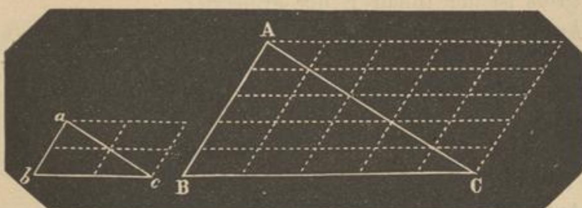
Lehrsatz. Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie zwei ähnlich liegende Seiten, ihre Inhalte aber wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

Ist $abc\ldots f \sim ABC\ldots F$ und bedeuten u, U die Umfänge, f und F die Flächeninhalte, so ist, in Zeichen:

$$1)\ u : U = ab : AB$$
$$2)\ f : F = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2.$$

Beweis. Sei, um zuerst ein bestimmtes Beispiel zu haben, das Verhältnis der ähnlich liegenden Seiten wie 1 zu 3, d. h. jede Seite der gröfsern Figur sei dreimal so grofs, als die ähnlich liegende der kleinern, alsdann ist offenbar auch die Summe aller Seiten der gröfsern Figur, d. i. ihr Umfang, dreimal so grofs, als der Umfang der kleinern Figur. Verhielten sich die ähnlich liegenden Seiten wie 3 : 7, d. i. wie $1 : 2\frac{1}{3}$, so wäre der Umfang der gröfsern Figur $2\frac{1}{3}$ so grofs als der Umfang der kleinern.

2. Der zweite Teil des Lehrsatzes mufs zuerst für zwei ähnliche Dreiecke bewiesen werden.*) Seien deshalb *abc*, ABC zwei ähnliche Dreiecke, deren Seiten sich z. B. wie 2 zu 5 verhalten mögen. Denkt man sich die Seiten *bc* und *ab* jede in 2 und BC und AB jede in fünf gleiche Teile geteilt,



so sind die Teile auf *bc* und BC einander gleich und eben so die auf *ab* und AB. Denkt man sich nun die Dreiecke zu Parallelogrammen ergänzt, durch die Teilpunkte auf *bc* und BC Parallelen mit *ab*, AB und durch die Teilpunkte auf *ab* und AB Parallelen mit *bc*, BC gezogen, so wird dadurch offenbar das eine Parallelogramm in $2.2 = 4$ und das andere in $5.5 = 25$ Parallelogramme geteilt, welche alle einander gleich sind. Da sich nun die Inhalte beider Parallelogramme wie 4 zu 25 verhalten, so müssen sich auch ihre Hälften, d. i. die Inhalte der ähnlichen Dreiecke *abc* und ABC wie 4 zu 25 verhalten, mithin der Inhalt des Dreiecks ABC $= \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$ mal so grofs sein, als der Inhalt von *abc*. Verhielten sich die Seiten zweier ähnlichen Dreiecke wie 1 zu 4, so verhalten sich

*) Am kürzesten ist der Beweis folgendermafsen: Die Perpendikel *bh*. BH gefällt, hat man $\frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}$ oder $\frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}ac} = \frac{BC}{bc}$ und $\frac{BH}{bh} = \frac{BC}{bc}$; die beiden letztern Gleichungen mit einander multipliziert: $\frac{\frac{1}{2}AC \,.\, BH}{\frac{1}{2}ac \,.\, bh} = \frac{BC \,.\, BC}{bc \,.\, bc}$ oder $\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{BC^2}{bc^2}$ etc. (§ 102.)

ihre Inhalte wie 1 zu 16 etc. Ähnliche Figuren kann man in ähnliche Dreiecke zerlegt denken. Verhielten sich nun die Seiten zweier ähnlichen Figuren, $abc\ldots f$ und ABC...F, z. B. wie 1 zu 3, so wäre offenbar jedes Dreieck der gröfsern Figur 9 mal so grofs, als ein ähnliches der kleinern, und folglich wäre dann auch die Summe aller Dreiecke der gröfsern Figur, d. i. ihr Inhalt 9 mal so grofs, als der der kleinern. Verhielten sich die Seiten wie 2 : 7, so verhalten sich die Inhalte wie 4 : 49 und so bei jedem andern Zahlenverhältnis.

Aufgabe 1. Die ähnlich liegenden Seiten verhalten sich wie 2 : 5, der Inhalt der kleinern Figur ist $f = 560$ qm. Wie grofs ist der Inhalt F der gröfsern?

Aufgabe 2. Der Inhalt der kleinern Figur sei $= 400$ qm, ihre Grundlinie $= 13$ m. Wie grofs mufs die Grundlinie x einer ähnlichen Figur genommen werden, damit der Inhalt derselben $= 800$ qm?

Antwort 1. Aus der Proportion $560 : \mathrm{F} = 2^2 : 5^2$ folgt $\mathrm{F} = 3500$ qm.

Antwort 2. Aus $13^2 : x^2 = 400 : 800$ folgt $x = 13\sqrt{2} = 18{,}385$ m.