# Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

**Lübsen, Heinrich B.**

**Leipzig, 1885**

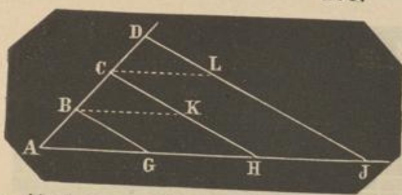
Zehntes Buch. Von den Proportionallinien

urn:nbn:de:bsz:31-264714

# Zehntes Buch.

## Von den Proportionallinien.

### 108.




**Lehrsatz.** Wenn man auf dem einen Schenkel eines Winkels gleiche Stücke abschneidet und durch die Teilpunkte Parallelen an den andern Schenkel zieht, so schneiden diese auch auf dem andern Schenkel gleiche Stücke ab. In Zeichen:

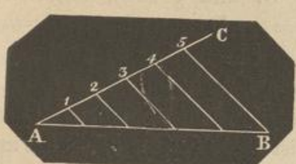
| Wenn: | so ist: |
|---|---|
| $AB = BC = CD = \dots$ | |
| und $BG \parallel CH \parallel DJ \parallel \dots$ | $AG = GH = HJ = \dots$ |

**Beweis.** Man denke sich BK, CL parallel mit AJ gezogen, so sind die entstehenden Dreiecke kongruent, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben, nämlich:

| | |
|---|---|
| $AB = BC = CD$, n. V. | folglich ist auch (§ 37): |
| $\angle BAG = \angle CBK = \angle DCL$ | $\triangle ABG \cong \triangle BCK \cong \triangle CDL$ |
| $\angle ABG = \angle BCK = \angle CDL$ | und hieraus: |
| (§ 61, Zusatz, oder § 64.) | $AG = BK = CL$. |

Nun ist aber (§ 92): $BK = GH$ und $CL = HJ$, mithin ist auch: $AG = GH = HJ$.

### 109.

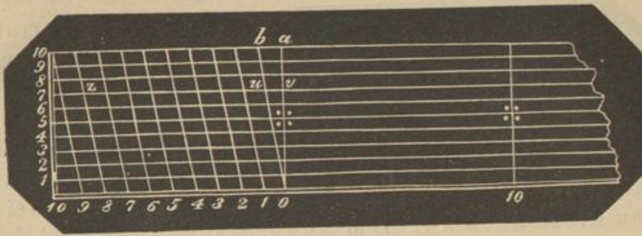



**Aufgabe.** Eine gegebene Linie, AB, in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile zu teilen, z. B. in fünf.

**Auflösung.** Man ziehe aus A eine Linie, AC, schneide auf dieser von A aus fünf gleiche Teile ab, ziehe von dem letzten Teilpunkt 5 nach B und dann durch 4, 3, 2, 1 die mit $\overline{5B}$ parallelen Linien, so ist dadurch AB in fünf gleiche Teile geteilt (§ 108).

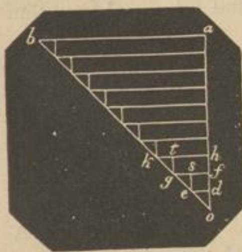
110.

**Verjüngter Maſsstab.** Zur Einteilung einer geraden Linie kann man sich auch eines sogenannten verjüngten Maſsstabes bedienen. Ein solcher, besonders bei Entwerfung von Zeichnungen, Karten etc. unentbehrlicher Maſsstab, läſst sich folgendermaſsen leicht anfertigen.



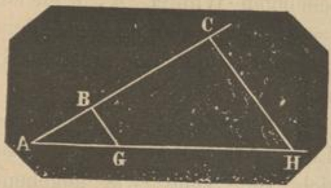

Man trägt nämlich eine beliebige Lineareinheit, *ab*, von 0 nach 10, zehnmal ab, dann diese zehn Teile beliebig oft von 0 bis 10, von 10 bis 20 etc., zieht durch den Endpunkt ein Perpendikel, nur nach Augenmaſs, schneidet auf diesem wieder zehn gleiche Stücke ab, zieht durch die Teilpunkte die zehn Parallelen mit $\overline{10,10}$, so wie auch die zehn mit $\overline{9,10}$ parallelen Querlinien, so ist der Maſsstab fertig.

Bedeutet nun in dem Dreieck *oab* die Linie *ab* die Einheit, 1 m z. B., so ist, wie folgendes gröſser gezeichnete Dreieck es deutlicher zeigt, die neunte, damit Parallele $de = \frac{1}{10}$ m = 0,1 m, die achte Parallele $fg = \frac{2}{10} = 0{,}2$ m etc. Denn erstlich sind, weil $od = df = fh$ etc., die Linien $oe$, $eg$, $gk$...gleich (§ 108). Denkt man noch mit *oa* die Parallelen $es$, $gt$... gezogen, so sind die entstehenden Dreiecke *oed*, *egs* etc. kongruent (§ 37 und § 108), folglich: $ed = gs = kt = \ldots$ Da nun $ed = sf$, $gf = th$ etc. (§ 92), so ist offenbar *gf* zweimal, *kh* dreimal u. s. f. *ba* zehnmal so groſs, als *ed*, folglich: wenn *ab* einen Meter bedeutet, so ist $ed = 0{,}1$ m, $gf = 0{,}2$ m etc.




Der Gebrauch dieses zehnteiligen Maſsstabes ist nun leicht einzusehen. Wollte man z. B. eine Länge von 8 m 70 cm = 8,7 m in den Zirkel fassen, so setzt man den einen Zirkelfuſs auf die siebente Parallele in *v* und öffnet den Zirkel so weit, bis der andere Fuſs auf derselben Parallelen die achte Querlinie erreicht, so hat man die Linie $vz = 8{,}7$ m im Zirkel (weil $uz = 8$ m und $uv = 0{,}7$ m). Die unten stehenden Zahlen der Querlinien geben nämlich die ganzen Einheiten und die an den Parallelen stehenden Zahlen die Zehntel an.

111.




**Lehrsatz.** Parallelen zwischen den Schenkeln eines Winkels schneiden auf denselben proportionale Stücke ab.*)

In Zeichen:

Wenn: BG ∥ CH so ist: AB : BC = AG : GH,

d. h. AB verhält sich eben so zu BC, wie AG zu GH; mit andern Worten: AB ist so oft in BC enthalten, als AG in GH.

**Beweis.** Sei, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, AB in BC gerade dreimal enthalten. Denkt man sich dann BC in drei gleiche Teile geteilt und durch die Teilpunkte Parallelen zu BG gezogen, so ist, weil AC in vier gleiche Teile geteilt, auch AH in vier gleiche Teile geteilt (§ 108), mithin auch AG in GH gerade dreimal enthalten. — Wäre die Zahl, welche angiebt, wie oft AB in BC enthalten ist, keine ganze Zahl, wäre z. B. AB = 7 und BC gleich 24, also BC nun $3\frac{3}{7}$ mal so groſs, als AB, so kann man sich AB in 7 gleiche Teile und BC in 24 solcher gleichen Teile geteilt, durch die Teilpunkte wieder Parallelen mit GH gezogen denken, so ist dadurch auch AG in 7 und GH in 24 unter sich gleiche Teile geteilt, mithin auch GH dann $3\frac{3}{7}$ mal so groſs, als AG.

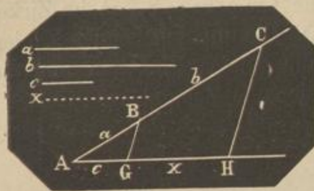
**Beispiel.** Es sei AB = 2,6 m, BC = 4,5 m, AG = 3,9 m. Wie groſs ist GH?

**Antwort.** Es ist 2,6 : 4,5 = 3,9 : GH, folglich

$$GH = \frac{4{,}5 \cdot 3{,}9}{2{,}6} = 6{,}75 \text{ m.}$$

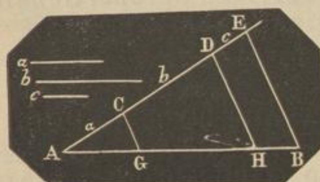
*) Die Lehre von den Proportionen gehört in die Arithmetik und zwar Algebra und muſs hier als bekannt vorausgesetzt werden. S. Algebra § 322.

112.




**1. Aufgabe.** Zu drei gegebenen Linien, $a$, $b$, $c$, die vierte Proportionale $x$ durch Konstruktion zu suchen, so daſs $a : b = c : x$.

**Auflösung.** Man zeichne einen beliebigen Winkel, A, schneide auf dem einen Schenkel AB $= a$, BC $= b$ und auf dem andern Schenkel AG $= c$, ab, ziehe BG und dann CH $\parallel$ BG, so ist GH die gesuchte Linie $x$.

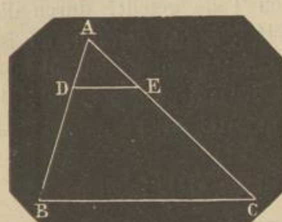



**2. Aufgabe.** Eine gegebene Linie, AB, so einzuteilen, daſs sich die Teile wie gegebene Linien, $a$, $b$, $c$..., verhalten.

**Auflösung.** Man ziehe aus dem Endpunkt A noch eine Linie, trage auf dieser von A aus, die gegebenen Linien, $a$, $b$, $c$ ab, so daſs AC $= a$, CD $= b$ und DE $= c$ ist, verbinde den letzten Teilpunkt E mit B und ziehe dann DH und CG parallel mit EB, so verhalten sich die Teile auf AB, wie die auf AE (§ 111).

**Zusatz.** Soll eine Linie, AB, in Stücke geteilt werden, die sich wie gegebene Zahlen, z. B. 2, 5, 4, verhalten, so trage man eine beliebige Lineareinheit von A nach C zweimal, von C nach D fünfmal, von D nach E viermal ab, verbinde E mit B und ziehe DH und CG parallel mit EB.

113.




**Lehrsatz.** Die Linie, welche in einem Dreieck mit einer Seite parallel läuft, schneidet die beiden andern Seiten so, daſs sich die Abschnitte der einen Seite wie die entsprechenden der andern verhalten.

In Zeichen:

Wenn: DE $\parallel$ BC, so ist:

$$AD : DB = AE : EC,$$
$$AD : AB = AE : AC,$$
$$AB : BD = AC : CE.$$

**Beweis.** Nach § 111 ist erstlich AD : DB = AE : EC und da nun eine Linie in sich selbst einmal enthalten ist, so ist notwendig auch AD : (AD + DB) = AE : (AE + EC), oder was dasselbe ist: AD : AB = AE : AC. Wäre z. B. AD in BD dreimal enthalten, so wäre offenbar AD in AB einmal mehr, also viermal enthalten, und eben so AE in AC viermal.

In gleicher Weise muſs AB : BD = AC : CE sein.

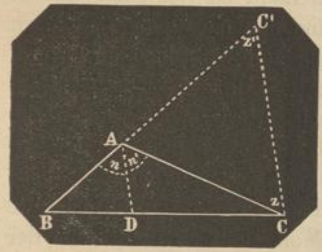
Schneidet umgekehrt eine Linie, DE, von den beiden Schenkeln des Winkels A dēn gleichvielsten, z B. von jedem den fünften Teil ab, mit andern Worten: Ist AD : AB = AE : AC, so muſs auch DE parallel mit BC sein, weil nur die mit BC parallele Linie, welche den fünften Teil von AB abschneidet, auch denselben Teil von AC abschneidet.

114.

**Lehrsatz.** Ist BC ∥ DE (Fig. zu § 113), so ist AB : BC = AD : DE. Oder: Der Schenkel AB des △ ABC verhält sich zur Grundlinie BC wie der Schenkel AD des △ ADE zur Grundlinie DE.

**Beweis.** Denkt man sich durch D eine Parallele zu AC, die BC in F schneidet, so verhält sich nach § 113: AB : BC = AD : CF. Da aber CF = DE (s. § 92), so geht diese Proportion über in AB : BC = AD : DE.

115.




*) **Lehrsatz.** Die Linie, welche einen beliebigen Winkel eines Dreiecks halbiert, teilt die gegenüber liegende Seite so: daſs sich die beiden Teile (Abschnitte) derselben wie die beiden anderen Seiten des Dreiecks verhalten.

In Zeichen:

Wenn: so ist:

$\angle n = \angle n' = \frac{1}{2} \angle BAC$ BD : DC = AB : AC.

**Beweis.** Man denke sich BA verlängert, so daſs AC′ = AC und verbinde C′ mit C, dann ist $\angle z = z'$ (§ 40) und da $n + n' = z + z'$ (§ 66), so ist, weil $n = n'$ und $z = z'$, $2n' = 2z$, also auch $n' = z$, daher AD ∥ C′C (§ 60) und folglich (§ 111) BD : DC = AB : AC, weil AC = AC′.