Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

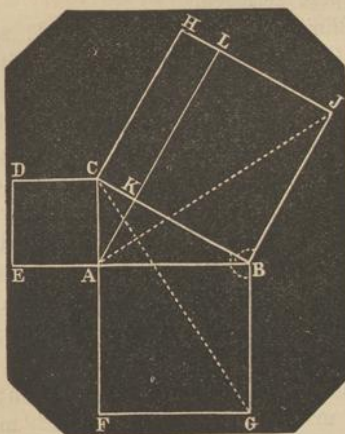
Leipzig, 1885

Neuntes Buch. Der Pythagoräische Lehrsatz

Neuntes Buch.

Der Pythagoräische Lehrsatz.

105.



Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse so grofs, als die Quadrate der beiden Katheten zusammen genommen.

In Zeichen:*)

$\square BH = \square AG + \square AD$, oder

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Beweis. Sei CAB ein bei A rechtwinkliges Dreieck und über seinen drei Seiten Quadrate errichtet, so soll die Fläche des auf der Hypotenuse BC stehenden Quadrats BCHJ allein so grofs sein, als die Flächen der beiden auf den Katheten stehenden Quadrate ABGF und ACDE zusammen genommen.

Aus dem Scheitel A des rechten Winkels sei AL ∥ CH gezogen, so ist dadurch das Quadrat der Hypotenuse in zwei Rechtecke CHLK und LKBJ geteilt, und es läfst sich nun zeigen, dafs jedes der beiden Rechtecke seinem benachbarten Quadrate an Inhalt gleich ist. Zieht man nämlich noch die Hülfslinien AJ und CG, so haben die beiden Dreiecke ABJ und CBG zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich, nämlich: $JB = CB$, $AB = GB$ und $\angle ABJ = \angle CBG = 90^0 + \angle ABC$, daher: $\triangle ABJ \cong \triangle CBG$ (§ 34). (Man denke sich das Dreieck CBG um den Punkt B gedreht, so fällt der Punkt C auf J und G auf A). Das Dreieck ABJ hat nun mit dem Rechteck LKBJ einerlei Grundlinie, BJ, und gleiche Höhe, KB, eben so haben das Dreieck CBG und das Quadrat ABGF einerlei

---

*) $\overline{BC}^2$ bedeutet so viel als $\overline{BC} \cdot \overline{BC}$ oder das über die Linie $\overline{BC}$ konstruierte Quadrat.

Grundlinie, BG, und gleiche Höhe, AB, daher: (§ 97) △ ABJ = ½ Rechteck KBJL, und △ CBG = ½ Quadrat ABGF. Da nun die beiden Dreiecke ABJ und CBG gleich grofs sind, so ist auch: ½ Rechteck KBJL = ½ Quadrat ABGF, also auch das ganze Rechteck KBJL so grofs, als das Quadrat ABGF. Eben so zeigt man an der andern Seite,*) indem man die Hilfslinien AH und BD zieht, dafs auch das Rechteck CHLK dem Quadrat ACDE an Fläche gleich ist, und folglich auch beide Rechtecke zusammen, d. i. das Quadrat der Hypotenuse, so grofs ist, als die Summe der Quadrate der beiden Katheten.**)

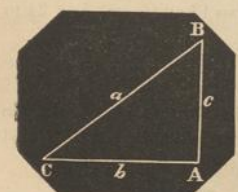
Zusatz. Das Quadrat der einen Kathete ist so grofs als das Quadrat der Hypotenuse weniger dem Quadrat der andern Kathete.

106.

Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen, welches 1) so grofs ist, als die Summe zweier gegebenen Quadrate, 2) welches so grofs ist, als die Differenz derselben, und 3) welches 2, 3, 4.. mal so grofs ist, als ein gegebenes Quadrat.

Auflösung. Siehe § 45, Randanmerkung.

107.



Dieselbe merkwürdige Beziehung, welche unter den Flächen der, auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehenden Quadrate stattfindet, mufs offenbar auch unter den Quadratzahlen dieser Seiten stattfinden, d. h. wenn man die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit einerlei Längeneinheit ausmifst, so mufs das Quadrat von der Zahl, welche die Länge der Hypotenuse angiebt,

---

*) Der Anfänger möge sich die Figur gröfser zeichnen.

**) Obgleich man eigentlich von keinem Lehrsatz sagen kann, er sei der wichtigste in der Geometrie, indem alle, als Glieder einer Kette, gleich notwendig sind, so dienen doch einige Sätze nur zur Begründung anderer, von denen mehrere praktische Anwendungen gemacht werden können, und in dieser Hinsicht kann man sagen, dafs obiger, nach seinem Entdecker Pythagoras benannte Satz, der fruchtbarste und wichtigste in der ganzen Geometrie ist. Wir haben deshalb auch, dem Pythagoras zu Ehren, diesem Satze ein eigenes Buch gewidmet, unter andern Umständen würden wir ihm einen Tempel gebaut haben.

so grofs sein, als die Quadrate der beiden Zahlen, welche die Längen der Katheten ausdrücken, zusammen genommen, so dafs man also, vermöge dieses Satzes, aus zwei in Zahlen gegebenen Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die dadurch bestimmte dritte Seite immer berechnen kann.

Wäre z. E. in dem bei A rechtwinkligen Dreieck ABC die eine Kathete AC = 4, die andere AB = 3, so wäre das Quadrat der Hypotenuse $= 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, folglich die Hypotenuse BC $= \sqrt{25} = 5$. Bedeutet a die Länge der Hypotenuse, b und c die der Katheten, so ist allgemein:

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ oder } a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Man findet also die Hypotenuse, wenn man beide Katheten quadriert (jede mit sich selbst multipliziert) und aus der Summe beider Quadrate die Quadratwurzel zieht. Um eine Kathete zu finden, mufs man das Quadrat der andern Kathete vom Quadrat der Hypotenuse abziehen und aus dem Reste die Quadratwurzel ziehen (§ 105, Zusatz). In Zeichen:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a + c)\,(a - c)}.$$

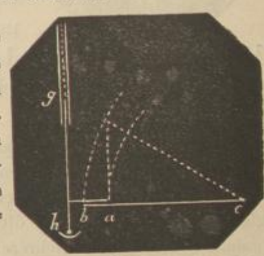
Beispiele: 1) Gegeben: beide Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, $b = 16$ m, $c = 21$ m. Gesucht: die Hypotenuse a?

2) Gegeben: die Hypotenuse $a = 34$ m, die Kathete $b = 16$ m. Gesucht: c?

3) Gegeben: zwei Seiten eines Rechtecks, $h = 13$ m 80 cm, $b = 24$ m 25 cm. Gesucht: die Diagonale d?

4) Gegeben: die Seite eines gleichseitigen Dreiecks, $b = 30$ m. Gesucht: die Höhe h?

5) In den Endpunkten einer geraden Linie BC = 100 m, sind die beiden Perpendikel AB = 60 m und DC = 90 m errichtet. Wie weit sind die beiden Endpunkte A und D von einander entfernt?



6) Eine Stange, bc, beschreibt um c einen Kreis und hebt dabei eine andere Stange, gh, indem sie dieselbe, unter einem rechtwinklig daran befindlichen Arm, greift. Die Stange gh ist genötigt, sich zwischen Leisten nach ihrer Längenrichtung zu bewegen. Auf welche Höhe (h) wird dieselbe gehoben, wenn $bc = 2$ m 12 cm und $ab =$ 33 cm ist?

Antwort: 1) $a = 26{,}4$ m; 2) $c = 30$ m; 3) $d = \sqrt{13{,}8^2 + 24{,}25^2} =$ 27,902 m = 27 m 90,2 cm.; 4) $h = 25{,}98$ m. Allgemein: $\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,b$; 5) AD = 104,4 m; 6) h = 1 m 13,6 cm.