Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

Achtes Buch. Vom Parallelogramm der Gleichheit und der Berechnung des Flächeninhalts geradliniger Figuren

urn:nbn:de:bsz:31-264714

Visual Library

Achtes Buch.

Vom Parallelogramm der Gleichheit und der Berechnung des Flächeninhalts geradliniger Figuren.

91.

Erklärungen. Ein Viereck erhält nach dem Verhältnis und der Lage seiner Seiten folgende besondere Namen. Es heifst:

1) Parallelogramm, wenn je zwei gegenüber liegende Seiten parallel sind.

Rechtwinklige Parallelogramme:

a) Rechteck (Rektangel, Oblongum), wenn nur die gegenüberliegenden Seiten gleich grofs sind.

b) Quadrat, wenn alle vier Seiten gleich lang sind. Abgekürzt mit □ oder q.

Schiefwinklige Parallelogramme:

a) Rhomboid, wenn nur die gegenüberliegenden Seiten gleich grofs sind.

b) Rhombus oder Raute, wenn alle 4 Seiten gleich lang sind.

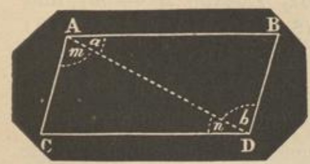
2) Trapez (Paralleltrapez), wenn nur zwei Seiten parallel sind.

3) Trapezoid, oder Viereck schlechtweg, wenn keine Seite einer andern parallel ist.

Anmerkung. Das Viereck in § 90 bezeichnet man mit „Viereck ABCD" oder kürzer mit „Viereck AC".

92.

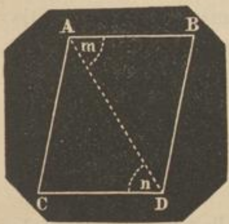
Lehrsatz. In jedem Parallelogramm sind die gegenüber liegenden Seiten und Winkel einander gleich, und eine Diagonale teilt es in zwei kongruente Dreiecke.



Beweis. Weil im Parallelogramm die gegenüber liegenden Seiten parallel sind, so sind erstlich die innern Wechselwinkel gleich, $a = n$, $b = m$, § 61, Zusatz. Die beiden Dreiecke ACD und ABD haben nun eine gemeinschaftliche Seite und beide anliegenden Winkel gleich, daher $\triangle$ ACD $\cong$ $\triangle$ ABD (§ 37) und hieraus folgt AB = CD, AC = BD und $\angle$ B = $\angle$ C.

Zusatz. Wenn umgekehrt in einem Viereck jedes Paar gegenüberliegender Seiten gleich sind, so sind sie notwendig auch parallel, und das Viereck ist dann ein Parallelogramm; denn nachdem die Diagonale AD wieder gezogen, folgt nach § 41 die Kongruenz der Dreiecke und daraus die Gleichheit der inneren Wechselwinkel. Diesen Satz kann man zur Konstruierung eines Parallelogramms benutzen, von welchem zwei Seiten, AC, CD, und der eingeschlossene Winkel C gegeben sind.

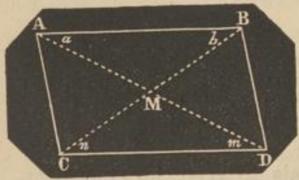
93.



Lehrsatz. Wenn in einem Viereck zwei Seiten parallel und gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Beweis. Sei AB gleich und parallel mit CD. Ziehe eine Diagonale, AD, so sind, weil AB ∥ CD, die Wechselwinkel m und n gleich. Da nun auch AB = CD so sind die beiden Dreiecke ACD und ABD kongruent (§ 34) und hieraus folgt $\angle$ CAD = $\angle$ ADB, oder AC ∥ BD. Nun sind beide Paare Gegenseiten parallel, folglich das Viereck ein Parallelogramm.

94.



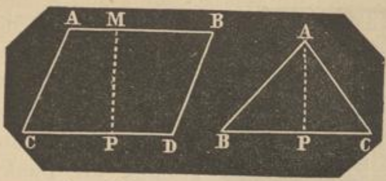
Lehrsatz. Die beiden Diagonalen eines Parallelogramms halbieren sich gegenseitig.

Beweis. Weil AB ∥ CD, so ist (§ 61, Zusatz) $a = m$, und $b = n$, und da auch AB = CD, so ist (§ 37) $\triangle$ MAB $\cong$ $\triangle$ MCD und hieraus folgt: AM = MD und CM = MB.

Aufgabe. Man zeige, dafs die von den Ecken eines beliebigen Dreiecks ABC auf die gegenüber liegenden Seiten gefällten drei Perpendikel sich in einem und demselben Punkte schneiden müssen.

Auflösung. Man ziehe durch die Ecken A, B, C Parallelen mit den gegenüber liegenden Seiten, so bilden diese ein neues Dreieck DEF und der Beweis folgt nun leicht aus: § 61, Zus., § 92 und § 73, Aufg. 3.

95.



Erklärungen 1. Wenn man in einem Parallelogramm eine beliebige Seite, CD, als Grundlinie betrachtet, so heiſst das von einem beliebigen Punkt, M, der gegenüber liegenden parallelen Seite auf die (nötigenfalls verlängerte) Grundlinie gefällte Perpendikel MP (also die Entfernung der beiden parallelen Seiten) die Höhe des Parallelogramms. Nimmt man daher in einem Rechteck eine Seite zur Grundlinie, so ist die daran stoſsende die Höhe.

In einem Quadrat sind Höhe und Grundlinie gleich.

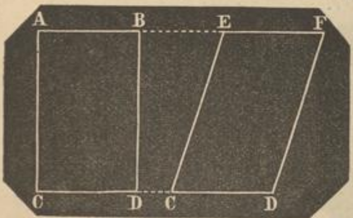
2. Eben so kann man in einem Dreieck eine beliebige Seite, BC, als Grundlinie betrachten, und dann heiſst das von der gegenüber liegenden Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel AP die Höhe des Dreiecks. Befindet sich an der Grundlinie ein stumpfer Winkel, so fällt das die Höhe angebende Perpendikel auſserhalb des Dreiecks auf die Verlängerung der Grundlinie.

Nimmt man in einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete zur Grundlinie, so ist die andere Kathete die Höhe.

Die nachstehenden Sätze beziehen sich auf die Gleichheit geradliniger Figuren (siehe § 17, 2 und § 18) und die daraus entspringenden Sätze.

Umfang (§ 32) ist nicht mit Inhalt zu verwechseln.

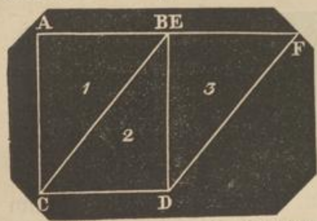
96.



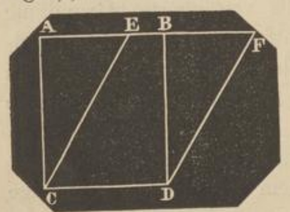
Lehrsatz. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind inhaltsgleich.

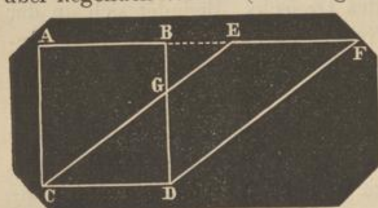
Haben also die beiden Parallelogramme ABDC und EFDC gleiche Grundlinie

(CD = CD) und gleiche Höhe (die Entfernung der Seite AB von CD = der Entfernung der Seite EF von CD), so sind sie inhaltsgleich.

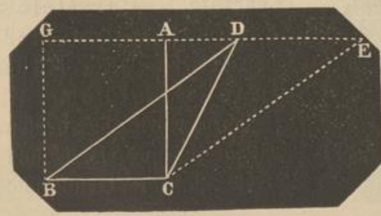


Beweis. Denkt man sich die Grundlinie des 1. Parallelogramm auf die des 2. gelegt, so fällt die Seite EF auf die verlängerte AB und es können alsdann die Punkte B und E zusammenfallen (siehe nebenstehende Figur), oder E fällt zwischen A und B (die folgende Figur), oder endlich E fällt auf die Verlängerung von AB (letzte Figur). In jedem dieser 3 Fälle entsteht ein Trapez ACDF und zwei Dreiecke ACE und BDF. Diese beiden Dreiecke sind nach § 65,5 kongruent, weil sie eine Seite (AC = BD s. § 92), einen anliegenden Winkel (A = B als korrespondierenden Winkel) und einen jener Seite gegenüber liegenden Winkel (E = F gleichfalls als korrespondirenden Winkel) gleich haben. Mithin sind die Dreiecke auch inhaltsgleich. Zieht man daher △ ACE vom Trapez ACDF ab, so muſs man eben so viel erhalten, als wenn man △ BDF vom Trapez ACDF abzieht. Im ersten Falle erhält man aber Parallelogramm CEFD, im zweiten Falle Parallelogramm CABD, die mithin gleich sein müssen.





97.



Lehrsatz. Ein Dreieck ist halb so groſs, als ein Rechteck (oder Parallelogramm) von gleicher Grundlinie und Höhe.

Beweis. Auf der Grundlinie BC des Dreiecks DBC denke man sich das Rechteck GACB von gleicher Höhe errichtet (§ 95, 2). Denkt man sich jetzt das Dreieck DBC zu einem Parallelogramm, DECB, ergänzt, so ist dieses Parallelogramm eben so grofs, als das Rechteck GACB (§ 96), folglich ist auch die Hälfte des Parallelogramms, nämlich das Dreieck DBC gleich dem halben Rechteck GACB (§ 92).

Zusatz. Dreiecke von einerlei Grundlinie und Höhe (oder Dreiecke von gleicher Grundlinie, deren Spitzen in der Parallelen zur Grundlinie liegen) sind inhaltsgleich, weil jedes halb so grofs ist, als das Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe.

98.

Berechnung des Flächeninhalts. Durch den vorhergehenden Lehrsatz sind wir nun in den Stand gesetzt, die Flächengröfse einer jeden geradlinig begrenzten Figur auszumessen und durch Zahlen bestimmt anzugeben. Da wir nämlich eine jede, in noch so beliebigem Zickzack geradlinig begrenzte Figur durch Diagonalen immer in ein Netz von Dreiecken zerlegen können, und jedes Dreieck halb so grofs ist, als ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe, so kommt die so verwickelt scheinende Aufgabe darauf zurück, nur Mittel und Wege zu ersinnen: den Flächeninhalt eines Rechtecks durch Zahlen anzugeben.*)

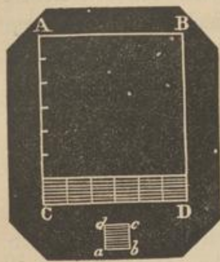
Als die bequemste Form der Flächeneinheit zeigt sich sogleich die quadratförmige.

Quadratförmige Flächeneinheiten giebt es in der Praxis von verschiedener Gröfse und die alle nach der ihnen zum Grunde liegenden Längeneinheit, nur mit dem Beiwort: Quadrat benannt werden. Wäre z. B. (siehe folgende Figur) die Linie $ab = 1$ m, so wäre das darüber stehende Quadrat, d. h. die davon eingeschlossene Fläche $abcd = 1$ qm (d. i. „1 Quadratmeter"). Wäre $ab = 1$ cm, so wäre die Fläche von $abcd = 1$ qcm. Hiernach versteht man nun auch, was eine Quadratmeile, Quadratyard, Quadratfufs etc. bedeutet.

---

*) Die alten Römer unter den Konsuln verstanden noch nicht, den Flächeninhalt eines Dreiecks zu bestimmen.

99.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe.

Beweis. Sei, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, die Flächeneinheit $abcd = 1$ qm. Die Längeneinheit $ab = 1$ m sei sechsmal in der Grundlinie CD und siebenmal in der Höhe AC enthalten, so ist einleuchtend, dafs, wie in der Zeichnung angedeutet, auf der Grundlinie gerade 6 qm neben einander Platz finden, und dafs 7 solche Reihen, von je 6 qm, das ganze Rechteck ausfüllen und folglich dessen Inhalt in Quadratmeter ausgedrückt, 7 mal 6 qm, oder = 42 qm ist, und so in jedem andern Fall. Wäre z. B. $CD = 7\frac{1}{2}$ m, $AC = 10$ m, so wäre der Inhalt des Rechtecks $= 7\frac{1}{2} . 10$ oder 75 qm. Die Regel, um den Inhalt eines Rechtecks zu finden, ist also diese: Man mifst mit der, der Flächeneinheit zu Grunde liegenden Längeneinheit erst Grundlinie und Höhe des Rechtecks, multipliziert dann beide (vorläufig als unbenannt zu betrachtenden) Zahlen mit einander und legt dem Produkt die Benennung der Längeneinheit, jedoch mit dem Beiwort „Quadrat“, bei. Wäre z. B. $CD = 3$ cm, $AC = 5$ cm, so wäre der Inhalt des Rechtecks $= 15$ qcm.

Zusatz 1. Eben so findet man den Inhalt eines Parallelogramms, indem man die Grundlinie mit der Höhe multipliziert (§ 95, 1 und § 96).

Zusatz 2. Dividiert man den Inhalt eines Rechtecks durch die Grundlinie oder Höhe, so giebt der Quotient die andere Linie.

100.

Die im vorigen Lehrsatz ausgesprochene Regel, nach welcher man Grundlinie und Höhe mit einander multiplizieren mufs, um den Inhalt eines Rechtecks zu finden, pflegt man kurz in Zeichen anzudeuten, indem man die beiden Linien als Faktoren ansetzt und ihr Produkt (Flächeninhalt) mit F bezeichnet. Für das Rechteck ABCD (§ 99) wäre also dessen Inhalt: $F = AC . CD$. Gewöhnlich bezeichnet man aber bequemer die Höhe durch h und die Grundlinie (Basis) durch b, nämlich: $F = bh$.

Es versteht sich bei dieser Formel aber von selbst, daſs man die Lineargröſsen b und h mit einer Längeneinheit ausgemessen und als Zahlen denken muſs, weil man keine Linien, als ausgedehnte Gröſsen, mit einander multiplizieren kann.

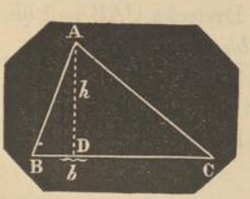
Auch ist klar, daſs beide Faktoren, b und h, einnamig und gleichnamig sein, und nötigenfalls erst auf solche reduziert werden müssen, bevor man sie mit einander multiplizieren kann. In der Regel ist es am bequemsten, mehrnamige Zahlen statt auf die niedere, auf die höhere zu reduzieren. Hierbei wollen wir nur noch bemerken, daſs im Decimalsystem 1 m = 100 cm, 1 cm = 10 mm und folglich 1 Quadratmeter (qm) = 10 000 qcm, 1 qcm = 100 qmm etc.

101.

Aufgabe. Folgende Rechtecke zu berechnen; h bedeutet Höhe, b Grundlinie, F Inhalt, qm Quadratmeter etc.

Gegeben:		Gesucht:
1) $h = 3\frac{2}{3}$ m,	$b = 6\frac{3}{4}$ m;	$F = 24\frac{3}{4}$ qm = 24 qm 7500 qcm;
2) $h = 2$ m,	$b = 87$ cm;	$F = 17400$ qcm = 1 qm 7400 qcm;
3) $h = 104$ m 7 cm,	$b = 90$ m 64 cm;	$F = 9432{,}9048$ qm.
4) $h = 25{,}9$ m,	$b = 37{,}8$ m;	$F = 979{,}02$ qm;
5) $F = 230\frac{7}{8}$ qm,	$h = 13\frac{3}{4}$ m;	$b = 16\frac{87}{110}$ m = 16 m $79\frac{1}{11}$ cm;
6) $F = 4$ qm;	$b = 16$ cm;	$h = 2500$ cm = 25 m.
7) $F = 285$ qm 935 qcm,	$b = 18$ m 90 cm;	$h = 1508{,}431$ cm = 15 m 8,431 cm.
8) $F = 1{,}06$ qm,	$b = 0{,}7$ m;	$h = 1{,}5143$ m = 1 m 51,43 cm.

102.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe.

In Zeichen:

$$F = \tfrac{1}{2} BC . AD,$$

oder kürzer:

$$F = \tfrac{1}{2} b h.$$

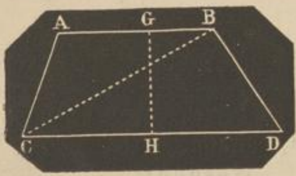
Beweis. Dies folgt aus § 97, wonach ein Dreieck gerade halb so groſs ist, als ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe.

Um den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen, kann man auch erst die Grundlinie oder die Höhe durch 2 dividieren, also die halbe Grundlinie mit der Höhe oder die halbe Höhe mit der Grundlinie multiplizieren.

Umgekehrt findet man die Höhe eines Dreiecks, wenn man den Inhalt durch die halbe Grundlinie dividiert. Beispiele:

Gegeben:		Gesucht:
1) $b = 24$ m 84 cm,	$h = 26$ m 18 cm;	$F = 325{,}1556$ qm $= 325$ qm 1556 qcm;
2) $F = 77\frac{1}{3}$ qm,	$b = 24$ m 86 cm;	$h = 6{,}2215$ m $= 6$ m 22,15 cm;
3) $b = 1{,}2$ m,	$h = 69{,}3$ cm;	$F = 0{,}4158$ qm $= 4158$ qcm;
4) $F = 54{,}3$ qm,	$h = 768$ cm;	$b = 1414{,}06$ cm $= 14$ m 14,06 cm.

103.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der Höhe und der halben Summe seiner beiden parallelen Seiten.

In Zeichen:

$$F = \frac{AB + CD}{2} . GH,$$

oder kürzer, indem man $CD = a$, $AB = b$, $GH = h$ setzt:

$$F = \frac{a + b}{2} . h.$$

Beweis. Durch eine Diagonale wird das Trapez in zwei Dreiecke geteilt, welche die parallelen Seiten $CD = a$ und $AB = b$ zu Grundlinien und die Höhe des Trapezes $HG = h$, zur Höhe haben (§ 63). Die Flächensumme beider Dreiecke giebt die Fläche des ganzen Trapezes. Nun ist die Fläche des Dreiecks $BCD = \frac{1}{2}\, ah$ und die des Dreiecks $CAB = \frac{1}{2}\, bh$, mithin die Summe beider $F = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{a+b}{2} . h$. Wäre z. B. $a = 16$ m 40 cm, $b = 10$ m 75 cm und $h = 9$ m $37\frac{1}{2}$ cm, so wäre $F = \frac{1}{2} . (16\frac{2}{5} + 10\frac{3}{4}) . 9\frac{3}{8} = 127\frac{17}{64}$ qm $= 127$ qm $2656\frac{1}{4}$ qcm.

104.

Um den Flächeninhalt einer jeden andern geradlinigen Figur zu bestimmen, zerlege man sie durch schicklich gezogene Diagonalen in lauter Dreiecke, messe in jedem eine

Grundlinie und die zugehörige Höhe, berechne den Inhalt eines jeden Dreiecks besonders, so giebt die Summe aller den Inhalt der ganzen Figur. Um nicht mehr Linien zu messen, als nötig ist, kann man darauf achten, daſs immer zwei Dreiecke eine gemeinschaftliche Grundlinie haben. Oftmals läſst sich auch eine Figur oder Teile derselben in Parallelogramme, Rechtecke oder Trapeze zerlegen.

Da im Quadrat: Grundlinie und Höhe gleich sind, so findet man den Inhalt eines Quadrats, indem man eine Seite desselben mit sich selbst multipliziert, und umgekehrt findet man die Seite eines Quadrats, wenn man aus dem Inhalt desselben die Quadratwurzel zieht. Wäre z. B. in dem Quadrat ABGF (siehe folgende Figur) die Seite AB = 12 m, so wäre der Inhalt $F = \overline{AB . AB} = 144$ qm. Wäre umgekehrt der Inhalt = 144 qm gegeben, so wäre eine Seite desselben $= \sqrt{144} = 12$ m.

Beispiele. Man suche die Seiten der Quadrate, deren Inhalt 106 929 qm; 604 qm 140 qcm; 2 qm; $1\frac{1}{6}$ qm; 0,6 qm; 2,8 qm; 0,908 qm.

Antwort. Die Seiten sind 327 m; 24,5767 m; 1,414 m; 1,0801 m; 0,7746 m; 1,67332 m = 1 m 67,332 cm; 0,95289 m = 95,289 cm.

BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg