Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

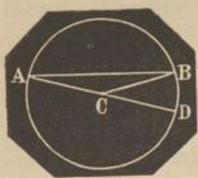
Leipzig, 1885

Siebentes Buch. Vom Kreise

Siebentes Buch.

Vom Kreise.

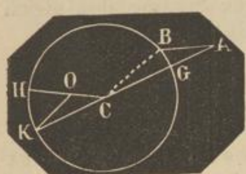
69.



Lehrsatz. Jede Sehne im Kreise ist kürzer, als der Durchmesser. (Siehe § 17.)

Beweis. Sei AB eine beliebige Sehne und AD ein Durchmesser, so ist zu zeigen, daſs $AB < AD$. Denkt man sich noch den Radius CA gezogen, so ist (§ 17, 3) $AC + CB = AD$ und da nun $AC + CB > AB$ (§ 52), so ist auch: $AD > AB$.

70.

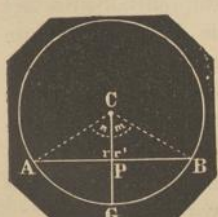


Lehrsatz. Die kürzeste Linie, welche von einem Punkt, A, ausserhalb oder von einem Punkt, O, innerhalb eines Kreises an die Peripherie gezogen werden kann, ist diejenige, welche verlängert durch den Mittelpunkt geht.

Beweis. Die Linien AG, OH gehen verlängert durch den Mittelpunkt C. Man denke nun andere Linien, AB, OK, gezogen und B und K mit C verbunden, so ist (§ 52):

$$\begin{array}{llll} & AG + CG < CB + AB & \text{und} & OH + CO < CO + OK \\ \text{subtr.} & \underline{CG = CB} & \text{subtr.} & \underline{CO = CO} \\ \text{bleibt} & AG < AB & \text{bleibt} & OH < OK. \end{array}$$

71.

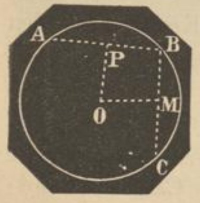


Lehrsatz. Die vom Mittelpunkt auf eine Sehne gefällte Senkrechte halbiert die Sehne und den zugehörigen Bogen.

Beweis. Sei CP senkrecht auf AB und bis G verlängert. Denkt man noch die Radien CA, CB gezogen, so ist, weil nach Voraussetzung, $\angle r = \angle r' = 90^0$, und $\angle A = \angle B$ (§ 40), notwendig auch $\angle n = \angle m$ (§ 65, Zusatz 4). Daher $\triangle ACP \cong \triangle BCP$ (§ 34 oder 37) und hieraus: AP = BP (§ 34, Anmerkung). Denkt man sich die Figur BCG um CG gedreht und auf ACG gelegt, so müssen, weil die Winkel n und m sich decken, auch die Bögen AG und BG sich decken, weil deren Punkte gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind (§ 17), folglich ist auch arc AG = arc BG.

Zusatz. Weil vom Mittelpunkt C nur ein Perpendikel auf die Sehne AB möglich ist (§ 50) und dieses durch die Mitte geht, so ist auch klar, daſs das auf der Mitte P einer Sehne AB errichtete Perpendikel notwendig durch den Mittelpunkt des Kreises gehen und auch den zugehörigen Bogen AGB halbieren muſs.

72.



Aufgabe. Durch drei ganz beliebig gegebene (jedoch nicht in gerader Linie liegende) Punkte, A, B, C, einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man verbinde zwei und zwei Punkte, A, B und B, C, so kann man die Linien AB und BC als Sehnen des zu beschreibenden Kreises betrachten. Errichtet man also auf deren Mitten M und P Perpendikel (§ 47, Zusatz), so muſs jedes derselben durch den gesuchten Mittelpunkt gehen (§ 71, Zusatz) und dieser also der Durchschnittspunkt O sein. Daſs die beiden Perpendikel sich notwendig schneiden müssen, folgt daraus: weil sie auf einer gebrochenen Linie stehen, also nicht parallel sein können.

Anmerkung. Wollte man zuvor die Möglichkeit der Auflösung darthun und zeigen, daſs es immer einen Punkt, O, giebt, der von drei beliebigen, nur nicht in gerader Linie liegenden Punkten, A, B, C, gleich weit entfernt ist, so müſste man die Hilfslinien OA, OB, OC ziehen. Aus den entstehenden, paarweise gleichen, bei M und P rechtwinkligen Dreiecken, nämlich: $\triangle OMC \cong \triangle OMB$ und $\triangle OPB \cong \triangle OPA$ (§ 34) folgt dann OA = OB = OC. Der mit OA beschriebene Kreis muſs also auch durch die Punkte B und C gehen. Auch ist leicht einzusehen, daſs durch drei Punkte nur ein einziger Kreis möglich ist.

73.

Aufgabe 1. Den Mittelpunkt eines Kreises oder eines Kreisbogens zu finden.

Aufgabe 2. Einen Kreisbogen zu halbieren.

Aufgabe 3. Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben, so daſs die Seiten des Dreiecks Sehnen des Kreises werden.

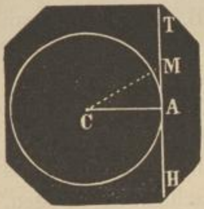
Auflösung 1. Man nehme in dem Bogen drei Punkte beliebig an und verfahre wie im § 72.

Auflösung 2. Die die Sehne halbierende Gerade halbiert zugleich den Bogen (§ 71, Zusatz).

Auflösung 3. Man errichte auf den Mitten zweier Seiten Perpendikel, so ist der Durchschnittspunkt derselben der gesuchte Mittelpunkt.

Man wird hier die merkwürdige Eigenschaft des Dreiecks bemerken, daſs die auf den Mitten seiner Seiten errichteten drei Perpendikel sich in einem und demselben Punkt, nämlich im Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises schneiden müssen.

74.



Lehrsatz. Eine Linie, TH, welche auf einem Radius, CA, im Endpunkt, A, senkrecht steht, hat nur diesen einen Punkt A mit der Peripherie gemein.

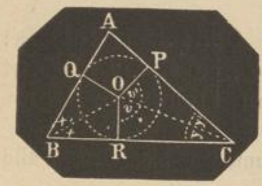
Beweis. Um zu zeigen, daſs jeder andere Punkt, M, in der Linie TH, wie nahe er auch bei A liegen möge, dennoch auſserhalb des Kreises liegt, denke man vom Mittelpunkt nach ihm die Linie CM gezogen, so entsteht ein bei A rechtwinkliges Dreieck CAM, in welchem CM eine Schräge und folglich gröſser, als der Radius CA ist (§ 51). Der Punkt M liegt also weiter, als A vom Mittelpunkt entfernt, mithin auſserhalb des Kreises (§ 17).

75.

Erklärung. Eine gerade Linie, welche nur einen Punkt mit der Peripherie eines Kreises gemein hat, sonst aber ganz auſserhalb desselben liegt, heiſst eine Tangente (Berührungslinie)

Um durch einen in der Peripherie gegebenen Punkt, A, eine Tangente an den Kreis zu ziehen, verbinde man A mit dem Mittelpunkt C und errichte auf dieser Linie CA in A eine Senkrechte (§ 74). Es ist leicht einzusehen, daſs durch einen Punkt A nur eine einzige Tangente am Kreise möglich ist, d. h. jede andere durch A gehende Linie muſs notwendig in den Kreis hinein treten und ihn schneiden. Denn dächte man sich auf diese zweite Linie von C eine Senkrechte, CP, gefällt, so müſste diese kürzer sein, als die Schräge CA, mithin der Fuſspunkt P der Senkrechten innerhalb des Kreises liegen.

76.



Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck, ABC, einen Kreis zu beschreiben, so daſs der Kreis alle drei Seiten berührt, mithin die Seiten des Dreiecks Tangenten des Kreises werden.

Auflösung. Man halbiere zwei beliebige Winkel, B und C (§ 48), fälle vom Durchschnittspunkt O der Halbierungslinien auf eine der drei Seiten eine Senkrechte, OR, so ist OR der Radius und O der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.

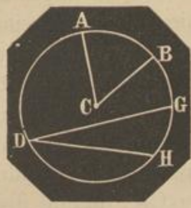
Beweis. Es braucht nur gezeigt zu werden, daſs alle drei von O auf die Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel OR, OP, OQ, gleich sind. Zuvörderst sind nun die beiden bei R und P rechtwinkligen Dreiecke ORC und OPC kongruent, weil sie eine Seite, OC, gemeinschaftlich, ferner einen anliegenden Winkel, $y = y'$, und einen gegenüberliegenden Winkel, R = P, gleich haben, (§ 65, Zus. 5). Mithin ist OR = OP. Eben so beweist man, daſs $\triangle$ ORB $\cong$ $\triangle$ OQB, und hieraus: OR = OQ.

77.

Aufgabe. Es sind drei gleiche Kreise, A, B, C, gegeben, deren Mittelpunkte A, B, C nicht in gerader Linie liegen. Einen vierten Kreis zu beschreiben, der alle drei berührt.

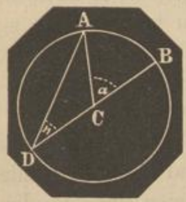
Auflösung. Man verbinde ihre Mittelpunkte, errichte auf die Mitten zweier Verbindungslinien Perpendikel, welche sich in dem gesuchten Mittelpunkt schneiden (§ 70).

78.



Erklärung. Ein Winkel im Kreise, dessen Scheitel im Mittelpunkt liegt, heifst Centriwinkel, zur Unterscheidung von einem solchen, dessen Scheitel in der Peripherie liegt und den man deshalb Peripheriewinkel nennt. — Von jedem dieser Winkel sagt man: er stehe auf dem Bogen, den seine Schenkel zwischen sich fassen. So steht z. B. der Centriwinkel C auf dem Bogen AB und der Peripheriewinkel D auf dem Bogen $\widehat{GH}$.

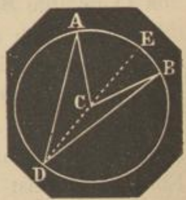
79.



Lehrsatz. Der Centriwinkel ist immer doppelt so grofs, als ein auf demselben Bogen stehender Peripheriewinkel.*)

Beweis. Wir müssen hier drei Fälle besonders betrachten.

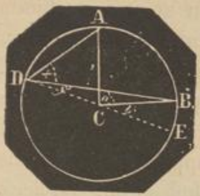
1. Fall. Wenn der Mittelpunkt auf einem Schenkel des Peripheriewinkels liegt. In diesem Falle ist der Centriwinkel a Aufsenwinkel an dem gleichschenkligen Dreieck CAD, mithin $\angle a = \angle 2n$. (§§ 66, 40 und 17, 3.)



2. Fall. Wenn der Mittelpunkt zwischen die Schenkel des Peripheriewinkels fällt. Man denke jetzt den Durchmesser DE gezogen, so teilt dieser sowohl den Centriwinkel, als den Peripheriewinkel, jeden in zwei Teile und es ist nun, ganz wie im ersten Fall, der links liegende Teil des Centriwinkels doppelt so grofs, als der links liegende Teil des Peripheriewinkels, nämlich: $\angle ACE = 2. \angle ADE$. Ebenso auf der andern Seite $\angle ECB = 2. \angle EDB$, mithin $\angle ACE + \angle ECB = 2. \angle ADE + 2. \angle EDB$ oder $\angle ACB = 2. \angle ADB$.

---

*) Um Raum zu sparen, werden wir von jetzt an, statt die Beweise wie bisher in Worten zu geben, oft nur die zur Führung derselben nötigen Sätze citieren. Auch sollte der Anfänger von nun an versuchen, leichtere Beweise und Auflösungen selber zu finden.



3. Fall. Wenn der Mittelpunkt aufserhalb der Schenkel des Peripheriewinkels liegt. Man denke wieder den Durchmesser DE gezogen, so ist am gleichschenkligen Dreieck CAD der Winkel CDA = A (§ 40), der Aufsenwinkel ACE = 2.CDA oder $a + b = 2x + 2y$, da nun aber (erster Fall) $b = 2y$, so bleibt offenbar, wenn man b gegen $2y$ wegläfst, $a = 2x$.

80.

Lehrsatz. Peripheriewinkel auf einerlei Bogen sind gleich.

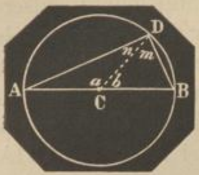
Beweis. Dies folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Lehrsatz, nach welchem jeder auf dem Bogen AB stehende Peripheriewinkel D, D', D''... halb so grofs ist, als der auf demselben Bogen stehende Centriwinkel ACB.

Zusatz. Weil ein Centriwinkel, ACB, gerade so viele Winkelgrade hält, als der Bogen AB, worauf er steht, Bogengrade, so ist klar, dafs ein auf demselben Bogen stehender Peripheriewinkel, D, D'... gerade halb so viele Grade hält. Man pflegt dies so auszudrücken: Ein Centriwinkel hat den ganzen Bogen, ein Peripheriewinkel den halben Bogen zu seinem Mafse, worauf er steht. Kämen z. B. von den 360 gleichen Bögen (Bogengrade), in welche man sich die ganze Peripherie geteilt denkt, 60 solcher Teile auf den Bogen AB, so wäre der Centriwinkel ACB = 60^0 und der Peripheriewinkel D $= \frac{60^0}{2} = 30^0$.

81.

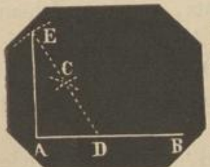
Lehrsatz. Jeder Winkel im Halbkreise ist ein rechter Winkel.

Beweis. Unter Winkel im Halbkreise versteht man einen Peripheriewinkel, der auf dem Halbkreise oder Durchmesser steht und hieraus folgt schon, weil nach § 80, Zusatz, der Peripheriewinkel ADB den halben Bogen AD zu seinem Mafse hat, dafs $\angle ADB = \frac{180^0}{2} = 90^0$. Um dies jedoch noch



auf eine andere Weise zu zeigen, verbinde man D mit dem Mittelpunkt C, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke, CAD und CDB, daher $\angle A = \angle n$ und $\angle B = \angle m$ (§ 40). Da nun (§ 66) der Aufsenwinkel a am Dreieck ODB doppelt so grofs als m, und der Aufsenwinkel b am Dreieck CAD doppelt so grofs als n, und a und b, als Nebenwinkel, 2 R betragen, so müssen m und n zusammen, d. i. der Winkel im Halbkreise, nämlich ADB, ein Rechter sein.

82.

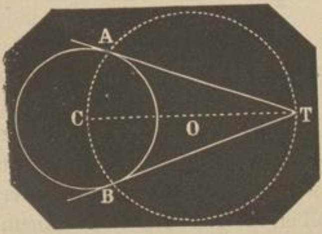


Aufgabe. Auf einer Linie, AB, im Endpunkte A ein Perpendikel zu errichten, ohne die Linie erst zu verlängern.

Auflösung. Man nehme in AB einen Punkt, D, beliebig und beschreibe aus A und D mit einerlei Radius zwei Bögen, die sich in C schneiden. Aus C beschreibe mit demselben Radius einen Bogen, welcher die von D durch C gezogene Linie in E schneidet und ziehe dann EA, welches das verlangte Perpendikel ist.

Beweis. Denkt man sich den aus C beschriebenen Bogen zu einem ganzen Kreise vollendet, so ist, weil DE ein Durchmesser, EAD ein Winkel im Halbkreise, mithin ein rechter Winkel (§ 81).

83.

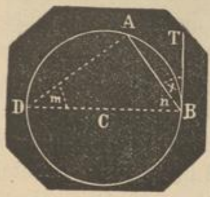


Aufgabe. Von einem aufserhalb eines Kreises, C, gegebenen Punkt, T, eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

Auflösung. Ziehe CT und beschreibe über diese, als Durchmesser, einen zweiten Kreis, der den gegebenen in zwei Punkten, A und B, schneidet, ziehe AT und BT, so hat man zwei Tangenten.

Beweis. Denkt man noch die Radien CA, CB gezogen, so sind A und B Winkel im Halbkreise und folglich AT senkrecht auf CA (§§ 81, 74).

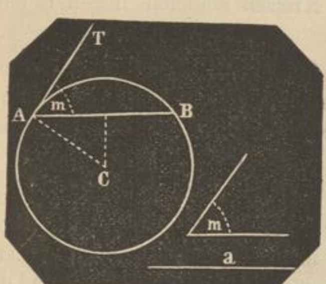
84.



Lehrsatz. Ein Tangentenwinkel, d. i. ein Winkel, den eine Tangente, TB, und eine Sehne, AB, mit einander machen, hat die Hälfte des Bogens AB zu seinem Maſse, den seine Schenkel zwischen sich fassen und ist also gleich einem Peripheriewinkel, der auf demselben Bogen AB steht.

Beweis. Ist B der Berührungspunkt, so muſs der von B gezogene Durchmesser DB auf BT senkrecht stehen (§ 75), also $x + n = 90^0$ sein. Zieht man noch AD, so ist $A = 90^0$ (§ 81), folglich auch $m + n = 90^0$ (§ 65). Da es nun einerlei ist, ob man x oder m zu n addiert, indem man jedesmal 90^0 erhält, so muſs auch $x = m = \frac{\text{arc AB}}{2}$ sein. (§ 80, Zusatz.)

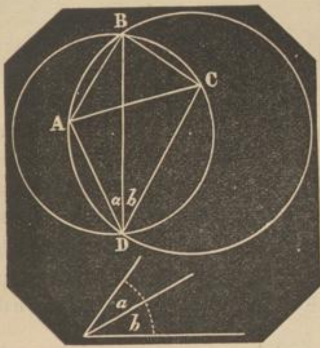
85.



Aufgabe. Über eine als Sehne gegebene Linie, a, einen Kreis zu beschreiben, in welchem alle auf dieser Sehne oder ihrem Bogen stehenden Peripheriewinkel einem gegebenen Winkel, m, gleich sind.

Auflösung. Stecke die gegebene Sehne a in AB ab, trage an das eine Ende derselben den gegebenen Winkel m und betrachte den andern Schenkel AT als Tangente. Errichte nun auf AT in A und auf der Mitte von AB Perpendikel (§ 82, 47, Zusatz und 45), so ist deren Durchschnittspunkt C der gesuchte Mittelpunkt und CA = CB der Radius (§ 71, Zusatz und 75) und alle auf dem Bogen AB stehenden Peripheriewinkel sind dem Winkel m gleich (§ 84).

86.



*) **Aufgabe.** Es sind die Lagen dreier Punkte, A, B, C, oder was dasselbe ist, das Dreieck ABC und zwei Winkel, a und b, gegeben. Es soll die Lage eines vierten Punktes, D, so bestimmt werden, daſs die von ihm nach A und B gehenden Linien den Winkel a und die nach B und C gehenden Linien den Winkel b bilden.

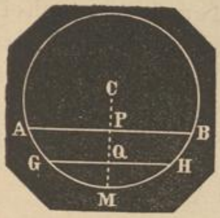
Auflösung. Man beschreibe, wie in vorhergehender Aufgabe, über AB als Sehne einen Kreis, in welchem alle auf dieser Sehne stehenden Peripheriewinkel dem gegebenen Winkel a gleich sind, so muſs der gesuchte Punkt D notwendig irgendwo in dieser Kreislinie liegen. Beschreibt man also auch über BC als Sehne einen Kreis, in welchem alle auf BC stehenden Peripheriewinkel dem Winkel b gleich sind, so muſs der gesuchte Punkt D auch in diesem Kreise liegen, und mithin (weil er in beiden Kreisen zugleich liegen muſs) in ihrem Durchschnittspunkt D.

Anmerkung 1. Wären zufällig die Winkel A und C des gegebenen Dreiecks den gegebenen Winkeln b und a gleich, so fallen beide Kreise zusammen und die Lage des Punktes D ist dann nicht bestimmt.

Dieses sogenannte Pothenot'sche Problem ist sowohl für die niedere als höhere Geodäsie sehr wichtig.

Anmerkung 2. Beschreibt man über AC als Sehne einen Bogen, in welchem alle Peripheriewinkel dem Winkel ADC $= a + b$ gleich sind, so muſs auch dieser Bogen durch den gesuchten Punkt D gehen. Auch ist klar, daſs die drei gegebenen Punkte, A, B, C, in gerader Linie liegen können, so wie auch, daſs der Punkt D jenseits $\overline{AC}$, innerhalb oder auſserhalb des Dreiecks ABC fallen kann.

87.



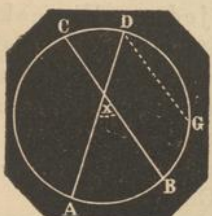
Lehrsatz. Zwei parallele Sehnen fassen gleiche Bögen zwischen sich.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:
AB ∥ GH	arc AG = arc BH.

Beweis. Das vom Mittelpunkt auf AB gefällte Perpendikel CP steht auch senkrecht auf GH (§ 61, Zusatz) und halbiert die Sehnen und ihre Bögen (§ 71). Es ist also arc AM = arc BM, und da auch arc GM = arc HM, so ist auch (Gleiches von Gleichem subtrahiert): arc AG = arc BH. Dies folgt auch, wenn man AH zieht, dann sind die Wechselwinkel gleich, und zu gleichen Peripheriewinkeln gehören gleiche Bögen.

88.



Lehrsatz. Ein Winkel, durch zwei Sehnen gebildet, hat die halbe Summe der beiden Bögen zu seinem Maſse, welche seine*) Schenkel zwischen sich fassen.

In Zeichen:

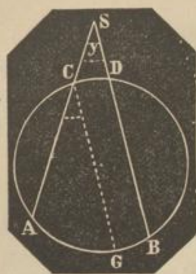
$$x = \frac{\text{arc AB} + \text{arc CD}}{2}$$

Beweis. Denkt man DG ∥ CB gezogen, so ist $\angle D = \angle x$ (§ 61, Zusatz). Der Peripheriewinkel D hat nun aber den halben Bogen ABG, d. i. die Hälfte von (arc AB + arc BG), also auch, weil arc CD = arc BG (§ 87), die Hälfte von (arc AB + arc CD) zu seinem Maſse. Dieser Satz ist besonders beim Gebrauch der Winkelmesser wichtig. Kämen z. B. von der in 360 Bogengrade geteilten Peripherie 60° auf AB und 40° auf CD, so wäre $x = \frac{60^0 + 40^0}{2} = 50^0$.

---

*) Es sollte heiſsen: seine direkten und entgegengesetzten.

89.



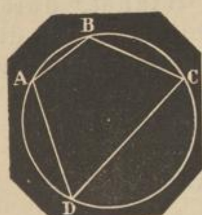
Lehrsatz. Ein Winkel, durch zwei Sekanten (d. i. den Kreis scheidende Linien) gebildet, hat die halbe Differenz der beiden Bögen zu seinem Maſse, welche seine Schenkel zwischen sich fassen.

In Zeichen:

$$y = \frac{\text{arc AB} - \text{arc CD}}{2}$$

Beweis. Denkt man sich CG ∥ DB gezogen, so ist $C = y$, folglich $y = \frac{\text{arc AG}}{2}$; weil aber arc CD = arc GB (§ 87), folglich arc AG = arc AB — arc GB = arc AB — arc CD, so ist auch $y = \frac{\text{arc AB} - \text{arc CD}}{2}$. Kämen z. B. 124 Bogengrade auf arc AB und 40° auf arc CD, so wäre $y = \frac{124 - 40}{2} = 42^0$.

90.



Lehrsatz. In jedem Viereck, dessen Ecken in einem Kreise liegen, also in jedem Sehnenviereck, betragen je zwei gegenüber liegende Winkel zusammen zwei Rechte.

$$\angle A + \angle C = 180^0$$
$$\angle B + \angle D = 180^0$$

Beweis. Der Peripheriewinkel A hat die Hälfte des Bogens BCD, und der gegenüber liegende Winkel C die Hälfte des Bogens DAB, also beide zusammen die Hälfte der ganzen Peripherie zu ihrem Maſse, daher $\angle A + \angle C = \frac{360^0}{2} = 180^0$. Eben so $\angle B + \angle D = 180^0$.

Zusatz. Wenn in einem Viereck zwei gegenüber liegende Winkel zusammen zwei Rechte betragen, so läſst sich um ein solches Viereck immer ein Kreis beschreiben, sonst nicht.