Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

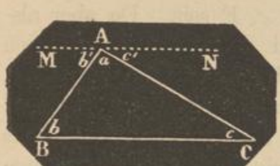
Leipzig, 1885

Sechstes Buch. Summe der innern und äussern Winkel einer geradlinigen Figur

Sechstes Buch.

Summe der innern und äufsern Winkel einer geradlinigen Figur.

65.



Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe aller drei Winkel gleich zwei Rechten.

$$a + b + c = 2\mathrm{R} = 180^{\circ}.$$

Beweis. Man denke sich durch einen Winkelpunkt, A, eine Linie, MN, parallel mit der gegenüber liegenden Seite BC gelegt, so ist (§ 61, Zusatz) $c' = c$ und $b' = b$. Da nun $b' + a + c' = 2\mathrm{R}$ (§ 29), so ist auch $a + b + c = 2$ R.

Zusatz 1. Ein Dreieck kann also nur einen rechten oder nur einen stumpfen Winkel enthalten, die beiden andern Winkel müssen alsdann spitze sein. Der rechte oder stumpfe Winkel ist folglich auch immer der gröfste Winkel im Dreieck. Mittelst dieser Bemerkung läfst sich nun auch der Lehrsatz in § 51 sehr einfach beweisen; denn da $\angle P > \angle G$ (s. Fig. § 51), so mufs auch $AG > AP$ sein (§ 55).

Zusatz 2. Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist der dritte bestimmt. Wäre z. B. $\angle a = 110^{\circ}$, $\angle b = 40^{\circ}$, so wäre $c = 180^{\circ} - (110^{\circ} + 40^{\circ}) = 180^{\circ} - 150^{\circ} = 30^{\circ}$.

Zusatz 3. In einem gleichseitigen, also auch gleichwinkligen Dreieck ist jeder Winkel $\frac{2}{3}$ R $= 60^{\circ}$. — In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck ist jeder der beiden spitzen Winkel $= \frac{1}{2}$ R $= 45^{\circ}$.

Zusatz 4. Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel gleich haben, so ist auch der dritte Winkel des einen dem dritten Winkel des andern Dreiecks gleich. [Dafs zwei verschiedene Dreiecke dennoch dieselben Winkel enthalten können, leuchtet ein, wenn man innerhalb eines beliebigen Dreiecks mit den Seiten desselben Parallelen zieht; man erhält ein kleineres Dreieck, welches aber dieselben Winkel hat, wie das grofse. (§ 64.)]

Zusatz 5. Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite, einen anliegenden und einen gegenüberliegenden Winkel gleich haben. (2. Fall des 2. Kongruenzsatzes. S. § 37.)

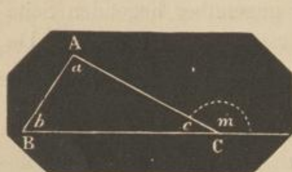
In Zeichen (Fig. zu § 37):

Es sei:	so ist:	daher:
$\overline{BC} = \overline{EF}$	$\angle C = \angle F$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$
$\angle B = \angle E$	$\overline{AC} = \overline{DF}$	
$\angle A = \angle D$	$\overline{AB} = \overline{DE}$.	

Beweis. Da $\angle B = \angle E$, $\angle A = \angle D$, so mufs nach vorstehendem Zus. 4 auch $\angle C = \angle F$ sein. Da aber alsdann beide Dreiecke eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich haben ($\overline{BC} = \overline{EF}$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$), so müssen sie nach § 37 I kongruent sein.

Zusatz 6. Stehen zwei Linien auf den Schenkeln eines Winkels senkrecht, so schneiden sie sich unter demselben Winkel. (Vergl. § 64.)

66.



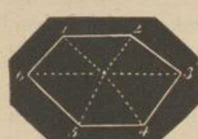
Lehrsatz. Der Aufsenwinkel am Dreieck ist gleich der Summe der beiden innern gegenüber liegenden.

In Zeichen:

$$m = a + b.$$

Beweis. Unter Aufsenwinkel, m, einer Figur ist derjenige gemeint, den die Verlängerung einer Seite, BC, mit der daran stofsenden AC bildet. Da nun nach dem vorhergehenden Lehrsatz a und b mit c vereint zwei Rechte geben, und auch die beiden Nebenwinkel m und c zusammen zwei Rechte betragen, es folglich einerlei ist, ob man $a + b$ oder m zu c addiert, so ist auch $m = a + b$. Wäre z. B. $a = 80^0$, $b = 60^0$, so wäre $m = 140^0$.

67.



Lehrsatz. In jedem Vieleck beträgt die Summe aller innern Winkel so viel mal zwei Rechte, als die Figur Seiten hat, weniger vier Rechte.

Beweis. Man denke sich von einem innerhalb beliebig angenommenen Punkt, o, nach allen Ecken Linien gezogen, so erhält man offenbar genau so viele Dreiecke als die Figur Seiten (Ecken) hat. Da nun die Summe der Winkel in jedem Dreiecke 2 R beträgt (§ 65), so enthalten alle Dreiecke zusammen so viel mal 2 R, als die Figur

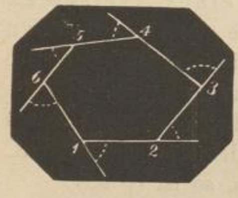
Seiten hat. Werden hievon die vier Rechten abgezogen, welche um den Punkt o liegen (§ 30) und nicht mit zu den Winkeln der Figur gehören, so bleibt die im Lehrsatz angegebene Summe übrig. Es ist hiernach die Summe der innern Winkel in einem

Viereck, = 4 R. Sechseck, = 8 R.
Fünfeck, = 6 R. Siebeneck, = 10 R. u. s. w.

Es ist also nicht möglich, ein Vieleck zu zeichnen, in welchem die Summe der innern Winkel eine ungerade Anzahl rechte Winkel betrüge.

Anmerkung. Dieser Satz ist ganz allgemein, er gilt nämlich auch für Vielecke mit eingehenden Ecken, indem man ein solches in Vielecke mit ausgehenden Ecken zerlegen kann, jedoch mufs man dann überstumpfe oder erhabene Winkel unterscheiden (s. § 22), die dadurch entstehen, dafs sich der eine Schenkel um mehr als zwei Rechte gedreht hat. (Denkt man sich die überstumpfen Winkel um die Endpunkte der Schenkel nach aufsen gedreht, so erhält man für jeden überstumpfen Winkel drei andere, deren Summe ihm gleich ist, und es findet dann derselbe Beweis statt.)

68.



Lehrsatz. Die Summe aller Aussenwinkel eines Vielecks beträgt immer vier rechte Winkel.

Beweis. Jeder Aufsenwinkel macht mit seinem innern Nebenwinkel 2 R. Die Summe aller äufsern und innern Winkel beträgt also gerade so viel mal 2 R, als die Figur Seiten hat, und da die Summe der innern Winkel um 4 R kleiner ist (§ 67), so mufs die Summe der Aufsenwinkel immer vier Rechte betragen.

Man kann diesen Satz versinnlichen, indem man durch einen beliebigen Winkelpunkt Parallelen mit allen Seiten des Vielecks gezogen denkt, wodurch dann alle Aufsenwinkel um einen Punkt zu liegen kommen. (§§ 64 und 30.)

Anmerkung. Auch dieser Satz ist ganz allgemein. Denn denkt man sich von einem Eckpunkte aus den Umfang des Vielecks ganz umgangen, so hat man sich um vier rechte Winkel gedreht, indem man bei eingehenden Winkeln die entgegengesetzten Drehungen als subtraktiv betrachtet.