Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

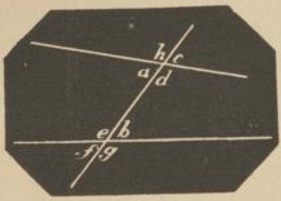
Fünftes Buch. Von den Parallellinien

urn:nbn:de:bsz:31-264714

Fünftes Buch.

Von den Parallellinien.

57.



Erklärung. Wenn zwei Linien von einer dritten geschnitten werden, so entstehen acht Winkel. Je ein Winkel des einen Durchschnittspunktes mit je einem Winkel des andern Durchschnittspunktes geben folgende Winkelpaare:

I. Auf einerlei Seite der Schneidenden.
  1) Innerhalb der Parallelen: Innere Winkel (*a* und *e*, *b* und *d*).
  2) Außerhalb der Parallelen: Äußere Winkel (*f* und *h*, *c* und *g*).
  3) Auf einerlei Seite der Parallelen (beide unterhalb oder beide oberhalb): Korrespondierende oder gleichliegende (oder Gegen-) Winkel (*a* und *f*, *d* und *g* u. s. w.).

II. Auf verschiedenen Seiten der Schneidenden:

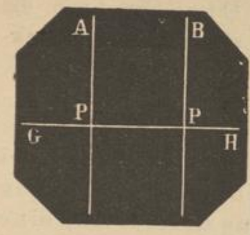
Wechselwinkel,

und zwar
  1) Innere Wechselwinkel (*a* und *b*, *d* und *e*).
  2) Äußere Wechselwinkel (*h* und *g*, *c* und *f*).
  3) Korrespondierende (oder Gegen-) Wechselwinkel (*a* und *g*, *c* und *e*).

58.

Erklärung. Zwei gerade Linien, welche in einerlei Ebene liegen und nach keiner Seite hin zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängert denken mag, heißen parallel (gleichlaufend).

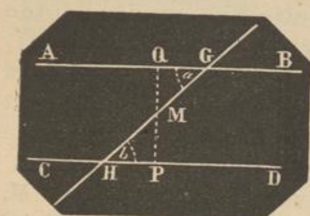
59.



Lehrsatz. Wenn zwei Linien auf einer dritten senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Beweis. Seien AP und BP auf GH senkrecht. Weil nun nach § 50 von einem und demselben Punkt nicht zwei Perpendikel auf einer Linie möglich sind, so können auch nicht die Perpendikel AP und BP, weder oberhalb noch unterhalb der Linie GH, in einem Punkt zusammen treffen. Es ist also (§ 58) AP ‖ BP. (Das Zeichen ‖ heifst parallel.)

60.



Lehrsatz. Wenn zwei Linien gegen eine dritte eine solche Lage haben, dafs die innern Wechselwinkel gleich sind, so sind die Linien parallel.

In Zeichen:

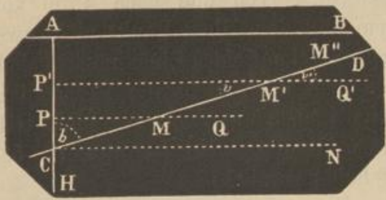
Wenn:	so ist:
$\angle a = \angle b$	AB ‖ CD.

Beweis. Man denke die Linie GH in M halbiert und von M auf CD das Perpendikel MP gefällt, so mufs dieses, rückwärts nach Q verlängert, notwendig auch auf AB senkrecht stehen, denn die beiden Dreiecke MHP und MGQ sind kongruent, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich haben. Es ist nämlich: $\overline{MH} = \overline{MG}$ und $\angle a = \angle b$, nach Voraussetzung, dann $\angle$ HMP $= \angle$ GMQ (§ 31), mithin auch $\triangle$ MHP $\cong \triangle$ MGQ (§ 37) und hieraus (§ 34, Anmerkung) $\angle Q = \angle P$. Da nun, nach Konstruktion, P ein rechter Winkel ist, so ist auch Q ein rechter. Die beiden Linien AB, CD stehen also auf PQ senkrecht und sind folglich parallel. (§ 59.)

Zusatz 1. Wenn die innern Wechselwinkel a, b gleich sind, so sind es offenbar auch die korrespondierenden (weil $a =$ dem Scheitelwinkel von b), und die innern betragen dann zusammen zwei Rechte (§ 57). Statt also zu sagen: zwei Linien sind parallel, wenn die innern Wechselwinkel gleich sind, kann man auch sagen: wenn die korrespondierenden Winkel gleich sind, oder die innern zwei Rechte betragen.

Zusatz 2. Ist AB ∥ CD und ∠ AQP ein rechter Winkel, so ist auch ∠ DPQ ein rechter Winkel. Oder: Eine Linie, die senkrecht auf einer von zwei Parallelen steht, steht auch senkrecht auf der andern.

61.



Lehrsatz. Wenn zwei Linien, AB, CD, gegen eine dritte, AH, eine solche Lage haben, dafs die innern Wechselwinkel nicht gleich sind, so müssen die Linien, hinreichend verlängert, einmal zusammen treffen und zwar nach der Seite hin, wo die beiden innern Winkel zusammen kleiner als 2 R sind.

Erläuterung. Der einfachern Zeichnung wegen, nehmen wir an, dafs die Schneidende AH auf AB in A senkrecht steht, oder durch Drehung um den Punkt C in diese Lage gebracht worden, und dafs also $\angle\, b < 90^{0}$.

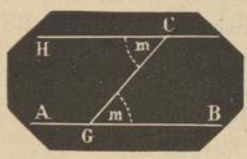
Denkt man sich nun von verschiedenen Punkten, M, M′ . . . der Linie CD, Perpendikel, MP, M′P′ . . . auf AC gefällt, so ist klar, dafs die Fufspunkte P, P′ . . . dieser Perpendikel immer näher an A rücken, je weiter man die Punkte M, M′ . . . von C entfernt nimmt, und dafs man von keinem der gefällten Perpendikel, z. B. von M′P′ behaupten kann, es sei das letzte, so dafs über dasselbe hinaus keins mehr möglich sei; denn weil die Richtung der Linie CD unbegrenzt ist, so kann man, wo auch ein letzter Punkt, M′, angenommen werden möge, die Linie CM′ immer noch um ein beliebiges Stück, M′M″, verlängert und von diesem Punkt M″ ein neues Perpendikel, M″P″, auf AC gefällt denken. Da nun nach der Natur der geraden Linien kein Teil dieses neuen Perpendikels M″P″ mit einem Teil der Linie CD zusammen fallen kann (§ 8), mithin zwei Scheitelwinkel, v, v', entstehen müssen, so liegt der Punkt M″ aufser der Linie P′Q′ und zwar oberhalb, daher auch das von M″ auf AC gefällte Perpendikel M″P″ oberhalb P′Q′.

Um nun klar einzusehen, dafs die Linien AB und CD sich endlich einmal schneiden müssen, stelle man sich vor:

die Senkrechte QP gleite rechtwinklig an AH hinauf, so mufs sie (hinreichend verlängert) die Linie CD (ebenfalls hinreichend verlängert, von der sie also auch nicht an einem vermeintlichen letzten Punkt abgleiten kann) immer und selbst noch über AB hinaus schneiden, also auch in der Lage von AB.

Zusatz. Sind zwei Linien parallel, so sind notwendig auch alle innern und äufsern Wechselwinkel oder korrespondierenden Winkel gleich, welche sie mit irgend einer sie schneidenden Linie bilden.

62.

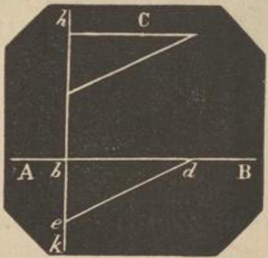


Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt, C, mit einer gegebenen Linie, AB, eine Parallele zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe von C nach einem beliebigen Punkt, G, in AB die Linie CG und trage den bei G erhaltenen Winkel *m* auf der andern Seite bei C an, so ist CH ∥ AB. (§ 60.)

Anmerkung. Eine Konstruktion ist eine mathematische (geometrische), wenn sie durch kein anderes Instrument als Lineal und Zirkel ausgeführt ist und ohne alle Versuche notwendig zum Ziele führt. Die nachstehende ist daher keine mathematische, sondern eine mechanische (empirische).

Zusatz 1. Einfacher zieht man Parallelen mit Hilfe eines Lineals und eines Dreiecks. Man legt nämlich die eine Seite *bd* des Dreiecks an die Linie AB, und an die andere Seite *be* des Dreiecks ein Lineal, *hk*, schiebt dann das Dreieck am festgehaltenen Lineal bis an den Punkt C und zieht durch C eine Linie, welche, wegen Gleichheit der korrespondierenden Winkel, mit AB parallel ist.

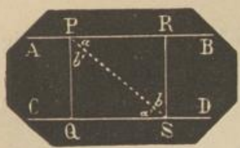


Zusatz 2. Auf dem Felde zieht man durch C eine Parallele mit AB, indem man erst mit Hilfe des Winkelkreuzes von C ein Perpendikel auf AB und dann auf diesem Perpendikel in C wieder ein Perpendikel errichtet (§ 49, Zusatz 2), welches mit AB parallel ist.

63.

Lehrsatz. Zwei Parallellinien sind überall gleich weit von einander entfernt.

Beweis. Unter Abstand zweier Parallellinien versteht man die zwischen beiden gezogene Senkrechte.



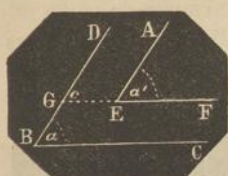
Wir haben also zu beweisen, dafs es einerlei ist, an welcher Stelle man sie zieht.

Sei demnach AB ‖ CD und sowohl PQ als RS auf CD, also auch auf AB senkrecht (§ 61, Zusatz), so ist zu zeigen, dafs PQ = RS.

Man denke noch die Diagonale PS gezogen, so sind die beiden bei Q und R rechtwinkligen Dreiecke PQS und PRS kongruent, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben, nämlich: Seite PS beiden gemein, $\angle a = \angle a'$ (§ 61, Zusatz) also auch $\angle b = \angle b'$. Daher (§ 37) $\triangle PQS \cong \triangle PRS$ und hieraus PQ = RS.

Zusatz. Auch dieser Lehrsatz dient zum Ziehen paralleler Linien. Errichtet man auf dem Papier oder auf dem Felde auf CD zwei gleich lange Perpendikel, PQ, RS. so ist die durch die beiden Endpunkte P und R gehende Linie AB mit CD parallel.

64.



Lehrsatz. Sind die Schenkel zweier Winkel nach einerlei Seite hin beziehlich parallel, so sind die Winkel gleich.

In Zeichen:

Sei:	so ist
DB ‖ AE	
BC ‖ EF	$\angle a = \angle a'$.

Beweis. Man denke sich EF nach G verlängert, so ist (§ 61, Zusatz) $\angle a = \angle c$ und $\angle a' = \angle c$, folglich auch $\angle a = \angle a'$.