Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

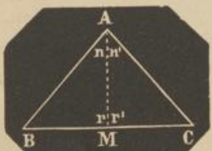
Leipzig, 1885

Viertes Buch. Von den Perpendikeln

Viertes Buch.

Von den Perpendikeln.

44.



Lehrsatz. Die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks nach der Mitte der Grundlinie gehende Linie steht senkrecht auf der Grundlinie und halbiert den Winkel an der Spitze.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:
$AB = AC$	$\angle r = \angle r' = 90^0$
und $BM = MC$	$\angle n = \angle n'$.

Beweis. Die beiden Dreiecke ABM und ACM sind kongruent, weil sie alle drei Seiten wechselweise gleich haben; denn die Seite AM ist beiden gemein, und nach Voraussetzung ist $AB = AC$ und $BM = MC$, daher (§ 41) $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ und hieraus (§ 34, Anmerkung) $n = n'$ und $r = r'$.

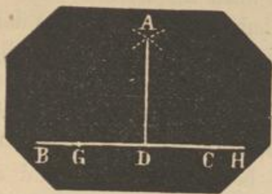
Weil nun aber die beiden gleichen Winkel r und r' zugleich auch Nebenwinkel sind, so ist jeder ein rechter Winkel und folglich AM perpendikulär auf BC. (§ 23).

45.

Aufgabe. Auf einer Linie BH in einem bestimmten Punkt D eine Senkrechte zu errichten.*)

---

*) Wer den vorhergehenden Lehrsatz gut verstanden und über die Lösung der hier gestellten Aufgabe, als eine sehr einfache Anwendung des Lehrsatzes, gehörig nachgedacht hat, wird sie ohne Anleitung finden.

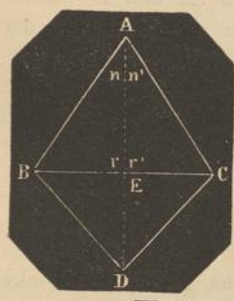


Auflösung. Man schneide von D aus erst rechts und links zwei gleiche Stücke ab, $DC = DG$. Beschreibe jetzt aus C und G mit einerlei Radius zwei sich schneidende Bögen und verbinde deren Durchschnittspunkt A mit D, so ist AD das verlangte Perpendikel.

Beweis. Denkt man noch AG und AC gezogen, so ist, zufolge Konstruktion, AGC ein gleichschenkliges Dreieck und D die Mitte der Grundlinie, folglich (§ 44) AD auf GC senkrecht.

Zusatz. Auf gleiche Weise kann man auf dem Felde auf einer ausgesteckten Linie BC in D eine Senkrechte errichten, indem man von D aus, zu beiden Seiten gleiche Stücke $DC = DG$ abmifst, in den Punkten C und G die Enden einer Schnur (Kette) befestigt und sie dann, in der Mitte A fassend, straff anspannt, bis sie mit GC ein gleichschenkliges Dreieck bildet, dessen Spitze A dann notwendig in der auf GC in D zu errichtenden Senkrechten liegt.

46.



Lehrsatz. Die Linie, welche durch die Spitzen zweier gleichschenkligen Dreiecke von gemeinschaftlichen Grund-Linie geht, halbiert 1) die Winkel an den Spitzen, 2) halbiert die Grund-Linie und steht 3) senkrecht auf derselben.

In Zeichen:

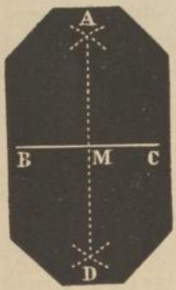
Wenn:	so ist:
$AB = AC$	1) $\angle n = \angle n' = \frac{1}{2} \angle BAC$
$DB = DC$	2) $BE = EC$
	3) $\angle r = \angle r' = 90^{\circ}$.

Beweis. Die beiden Dreiecke ABD und ACD sind kongruent, weil sie alle drei Seiten wechselweise gleich haben, nämlich die Seite AD ist beiden gemein und dann, zufolge Voraussetzung, $AB = AC$ und $DB = DC$, folglich (§ 41) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ und hieraus (§ 34, Anmerkung) $\angle n = \angle n'$.

Jetzt ist es leicht zu beweisen, daſs auch die Dreiecke ABE und ACE kongruent sind; denn sie haben zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich, nämlich: die Seite AE ist beiden gemein; nach Voraussetzung ist $AB = AC$ und, wie eben bewiesen, ist $\angle n = \angle n'$, daher (§ 34) $\triangle ABE \cong \triangle ACE$, und hieraus (nach § 34, Anmerkung) $BE = EC$ und $\angle r = \angle r'$. Weil aber die beiden Winkel r und r' zugleich auch Nebenwinkel sind, so ist jeder ein Rechter und folglich steht AD senkrecht auf BC. (§ 23.)

Anmerkung. Satz und Beweis bleiben dieselben, wenn die beiden gleichschenkligen Dreiecke, statt wie hier, an verschiedenen Seiten, über einerlei Seite der gemeinschaftlichen Grundlinie liegen.

47.

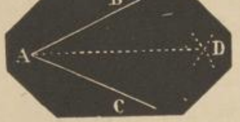


Aufgabe. Eine gegebene Linie BC zu halbieren (die Mitte zu bezeichnen).

Auflösung. Man sehe zuvor § 45, Randanmerkung — beschreibe über BC die Spitzen A und D zweier gleichschenkligen Dreiecke, so muſs die Linie, welche A und D verbindet, die gegebene Linie BC gerade in der Mitte M treffen. (§ 46.)

Zusatz. Dieselbe Konstruktion findet statt, wenn auf einer Linie BC in der Mitte ein Perpendikel errichtet werden soll.

48.



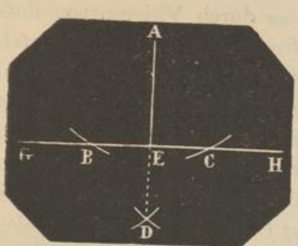
Aufgabe. Einen gegebenen Winkel A zu halbieren.

Auflösung. Siehe § 45, Randanmerkung. Vom Scheitel A aus schneide man auf beiden Schenkeln gleiche Stücke $AB = AC$ ab. Aus B und C beschreibe man mit einerlei Radius zwei sich schneidende Bögen, ziehe von deren Durchschnittspunkt D nach A; so ist der Winkel A halbiert, $\angle BAD = \angle CAD$. Der Beweis ist ganz wie in § 46, indem man die Linien BD und CD gezogen denkt.

Durch fortgesetztes Halbieren kann man also auch einen Winkel in 4, 8, 16, 32 . . . gleiche Teile teilen.*)

Zusatz. Auf dieselbe Weise kann man mittelst der Meſskette (Schnur) einen Winkel auf dem Felde halbieren.

49.



Aufgabe. Von einem auſserhalb einer Linie GH gegebenen Punkt A eine Senkrechte auf dieselbe zu fällen.

Auflösung. Mit einem Radius, der über die Linie GH hinausreicht, beschreibe man aus A einen Bogen, welcher die (nötigenfalls verlängerte) Linie GH in zwei Punkten, B und C, schneidet. Aus diesen, von A gleich weit entfernten Punkten B und C beschreibe man dann mit einerlei Radius zwei sich schneidende Bögen, und verbinde deren Durchschnittspunkt D mit A, so ist AE auf GH senkrecht.

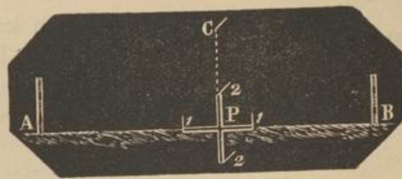
Beweis. Denkt man sich die Linien $AB = AC$ und $DB = DC$ gezogen, so ist der Beweis wie in § 46.

Zusatz 1. Um auf dem Felde von einem Punkt A auf eine nicht zu weit davon entfernte Linie GH ein Perpendikel zu fällen, befestige man das eine Ende einer Schnur (Kette) in A, ziehe sie straff an, so daſs das andere Ende links und rechts an die Linie GA reicht, und darin zwei von A gleich weit entfernte Punkte B und C bezeichnen kann, halbiere darauf die Linie BC in E, so liegt E in der verlangten Senkrechten (§ 44).

Zusatz 2. Zur Konstruierung der Perpendikel auf dem Felde bedient man sich bequemer eines sogenannten Winkelkreuzes, bestehend aus zwei auf einen Stab (Stativ) befestigten gegen einander senkrechten Linealen,**) an deren Enden, um

*) Die Aufgabe, einen beliebigen Winkel in 3 gleiche Teile zu teilen, ist zwar nur mit Hilfe der Parabel möglich, dennoch nähert sich die einfache und vollkommen genaue Lösung mittelst Lineals und Zirkels von Rich. Schurig einer mathematischen in hohem Grade.

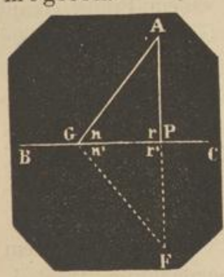
**) In der Regel besteht ein solches Winkelkreuz, das man sich, so wie oben angegeben, leicht selbst verfertigen kann, aus einem runden Körper mit zwei auf einander senkrechten Durchsichten (Diopteren).



scharfe Zielpunkte zu bekommen, gerade aufstehende Stifte (Nadeln) eingesteckt sein können. — Steckt man das Stativ dieses Kreuzes bei P in die Erde und richtet es durch Visieren so, dafs die Nadeln 1 und 1 mit dem in B oder A stehenden Mefsstab in einerlei Richtung sind, und läfst nun in der Richtung, welche die Nadeln 2 und 2 angeben, einen Stab in C stecken, so ist die durch die beiden Punkte P und C bestimmte Linie auf AB perpendikulär. Um von C ein Perpendikel auf die Linie AB zu fällen, trage man das Winkelkreuz so weit in der Linie AB fort, bis der bezeichnete Punkt C mit 2, 2, aber zugleich auch 1, 1 mit AB in einerlei Richtung ist, dann ist der so gefundene Punkt P der gesuchte.

50.

Lehrsatz. Von einem Punkte A aufserhalb einer Linie BC ist nur ein Perpendikel auf diese Linie möglich.



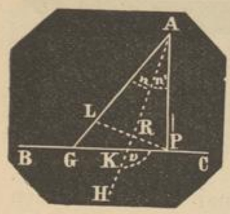
Beweis. Sei AP auf BC perpendikulär. Um nun zu zeigen, dafs jede andere von A an BC gehende Linie, wie AG, schräg gegen BC sein mufs, denke man sich AP um sich selbst nach F verlängert, so dafs $FP = AP$ wird, und verbinde F mit G, so sind die beiden bei P rechtwinkligen Dreiecke APG und FPG einander kongruent, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, nämlich: Seite PG beiden gemein, FP gleich AP gemacht und nach Voraussetzung ist der eingeschlossene Winkel r, mithin auch sein Nebenwinkel r' ein rechter; daher (§ 34) $\triangle\ APG \cong \triangle\ FPG$ und hieraus $\angle n = \angle n'$. Wäre nun n ein rechter Winkel, so wäre es auch n' und die beiden Linien AG, GF bildeten eine einzige gerade Linie; das ist nun aber nicht möglich, weil durch zwei Punkte, A und F, nur eine einzige gerade Linie AF möglich ist, folglich ist AG schräge gegen BC.

Zusatz 1. Da man sich in jedem Punkt der Linie BC, also auch im Punkte G, ein Perpendikel auf BC errichtet denken kann und dieses, aus eben angeführten Gründen, links von GA fallen muſs, so ist Winkel n notwendig spitz.

Zusatz 2. Wenn ein Dreieck einen rechten oder einen stumpfen Winkel hat, so muſs jeder der beiden andern notwendig spitz sein.

Zusatz 3. Unter Entfernung eines Punktes A von einer Linie BC versteht man allemal das von A an die (nötigenfalls verlängerte) Linie BC gehende Perpendikel.

51.



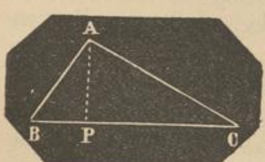
Lehrsatz. Das Perpendikel von einem Punkt A an eine Linie BC ist kürzer, als jede Schräge.

Beweis. Sei AP senkrecht auf BC und AG eine Schräge, so ist zu zeigen, daſs AP kürzer ist, als AG. In Zeichen

$$AP < AG.$$

Man denke sich den Winkel GAP durch die Linie AH halbiert, so daſs also $\angle n = \angle n'$. Von dem Scheitel des rechten Winkels APG denke man sich noch ein Perpendikel PR auf AH gefällt und bis L verlängert. Daſs der Fuſspunkt R dieses letztern Perpendikels notwendig zwischen A und K fallen muſs, folgt aus dem vorhergehenden Satz, weil Winkel v stumpf ist. Die beiden bei R rechtwinkligen Dreiecke APR und ALR sind nach § 37 kongruent, und hieraus folgt: $AL = AP$, mithin ist die Schräge AG um ein Stück LG gröſser als AP.

52.



1. Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser, als die dritte.

Beweis. Sei BC die gröſste Seite und darauf von der gegenüber liegenden Spitze das Perpendikel AP gefällt.

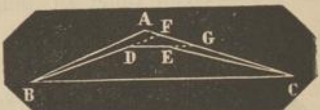
Nach dem vorhergehenden Satze ist nun die gegen AP schräge Linie CA gröſser, als die senkrechte CP. Aus demselben Grunde ist BA gröſser als BP, folglich:

AB + AC > BP + PC oder AB + AC > BC.

2. Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

Beweis. Aus der vorstehenden Ungleichung BC < AB + AC folgt unmittelbar BC — AB < AC.

Zusatz. Wenn in einem beliebigen Vieleck ein anderes Vieleck mit ausspringenden Ecken liegt, so ist der Umfang des äussern Vielecks stets gröſser, als der des innern.



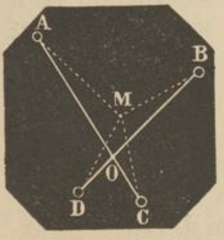
Es sei z. B. das äussere Vieleck ein Dreieck *ABC*, das innere ein Viereck *BDEC*. Verlängert man die Seiten des innern Vielecks nach *F* und *G*, so ist, wie eben bewiesen:

$$AB + AF > BD + DF$$
$$DF + FG > DE + EG$$
$$EG + GC > EC.$$

Addiert man diese Ungleichungen und läſst auf beiden Seiten Gleiches weg, so bleibt:

$$AB + AF + FG + GC > BD + DE + EC$$
$$\text{d. i. } AB + AC > BD + DE + EC.$$

53.



Aufgabe. Es sind vier Punkte, *A B, C, D*, gegeben, man soll die Lage eines fünften Punktes, *O*, so bestimmen, daſs die Summe der von ihm nach *A, B, C, D* gehenden Linien ein Kleinstes (Minimum) werde. (Sollten z. B. von einem Punkte *O* vier Röhren nach vier andern Punkten gelegt werden, so würde die Praxis die Lage des Punktes *O* so zu bestimmen suchen, daſs die Summe der vier Wege und deshalb sowohl die Kosten der ersten Anlage, als auch die der spätern Unterhaltung möglichst klein wird.)

Auflösung. Man ziehe die beiden sich kreuzenden Linien *AC* und *BD*, so ist ihr Durchschnittspunkt *O* der gesuchte.

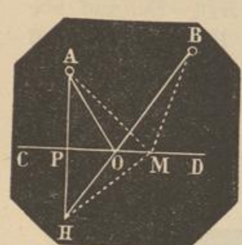
Beweis. Man kann leicht zeigen, daſs die Summe der von jedem andern Punkt, z. B. von *M* nach *A*, *B*, *C*, *D* führenden vier Wege gröſser ist, als die vier von *O* ausgehenden, denn da (nach § 52):

$$AM + MC > AO + OC$$
$$\text{und } BM + MD > BO + OD$$

so ist auch:

$$AM + MC + BM + MD > AO + OC + BO + OD.$$

54.



Aufgabe. In einer gegebenen Linie *CD* einen Punkt so zu bestimmen, daſs die Summe seiner Abstände von zwei beliebig gegebenen Punkten, *A* und *B*, ein Kleinstes werde. (Es sei z. B. *CD* eine Gas- oder Wasserröhre, aus welcher zwei nach *A* und *B* leitende Röhren ausmünden sollen.)

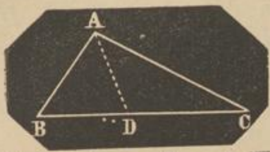
Auflösung. Man fälle von dem einen Punkte *A* ein Perpendikel *AP* auf *CD* und verlängere es um sich selbst bis *H*, so daſs $AP = PH$; ziehe nun *HB*, so ist der Durchschnittspunkt *O* der gesuchte.

Beweis. Um zu zeigen, daſs die Summe der von jedem andern Punkt, z. B. von *M* nach *A* und *B* führenden beiden Wege *AM* und *BM* gröſser ist, als die Summe der von *O* ausgehenden *AO* und *BO*, verbinde man noch *M* mit *H*. — Zuerst sind nun die beiden bei *P* rechtwinkligen Dreiecke *APO* und *HPO* kongruent, wegen zwei beziehlich gleicher Seiten und des eingeschlossenen rechten Winkels; denn Seite *PO* ist beiden gemein und, vermöge Konstruktion, das Perpendikel *AP* gleich dem Perpendikel *HP*; hieraus (§ 34, Anmerkung) $HO = AO$.

Aus demselben Grunde ist auch $\triangle APM \cong \triangle HPM$, folglich auch $HM = AM$. Die Summe der beiden erstern Wege *OA* und *OB* ist also durch die gerade Linie *BH*, und die Summe der beiden andern Wege *MA* und *MB* durch die gebrochene Linie *BMH* dargestellt, da nun (§ 52) $HM + MB > BH$, so ist auch:

$$MA + MB > OA + OB.$$

55.

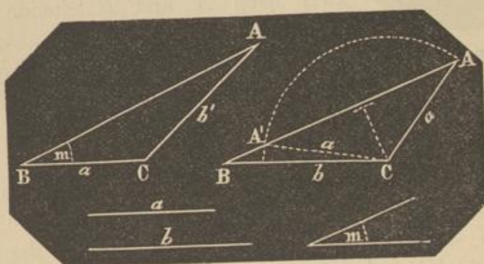


*) **Lehrsatz.** In jedem Dreieck liegt dem gröfsern Winkel auch die gröfsere Seite gegenüber, und umgekehrt.

Beweis. Es sei $\angle BAC$ gröfser als $\angle B$, so soll auch $\overline{BC} > \overline{AC}$ sein.

Denkt man sich von dem gröfsern Winkel BAC einen Winkel $BAD = \angle B$ abgeschnitten, so ist das Dreieck DAB, wegen der beiden gleichen Winkel an der Grundlinie AB gleichschenklig (§ 40), daher $AD = BD$. Da nun aber (§ 52) $AD + DC > AC$, so ist auch $BD + DC > AC$ oder $BC > AC$. Der umgekehrte Satz: dafs der gröfseren Seite auch der gröfsere Winkel gegenüber liegt, ist unmittelbar in vorstehendem enthalten.

56.



*) **Aufgabe.** Es sind zwei Seiten, a und b, und ein Winkel m gegeben.

Man soll 1) ein Dreieck konstruieren, welches die drei Stücke so enthält, dafs der Winkel m der gröfsern Seite b gegenüber liegt, und 2) ein anderes Dreieck zeichnen, in welchem der Winkel m der kleinern Seite a gegenüber liegt.

Auflösung 1. Mache (Fig. 1) BC = der kleinern Seite a, trage hieran in B den Winkel m, beschreibe aus C mit der gröfsern Seite einen Bogen, der den andern Schenkel des Winkels m in A schneidet, so ist ABC das durch die gestellte Bedingung (der Winkel m soll der gröfsern Seite gegenüber liegen) völlig bestimmte und verlangte Dreieck.

Auflösung 2. (Fig. 2.) Man nehme jetzt BC = der gröſsern Seite b, trage wieder in B den Winkel m an und beschreibe aus C mit der kleinern Seite a einen Bogen, so muſs dieser jetzt (weil $a < b$) den andern Schenkel des Winkels m zweimal in A und A′ schneiden. Diese letztere Aufgabe führt also auf zwei verschiedene Dreiecke, ABC und A′BC, welche beide die gegebenen Stücke in geforderter Ordnung enthalten. (Vergl. § 43.) Wäre die kleinere Seite a kürzer als das von C an $\overline{BA}$ gehende Perpendikel, so gäbe es gar kein Dreieck. Wäre sie gleich diesem Perpendikel, so wäre das Dreieck wiederum bestimmt.
