Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

Drittes Buch. Von der Kongruenz der Dreiecke

urn:nbn:de:bsz:31-264714

Visual Library

Drittes Buch.

Von der Kongruenz der Dreiecke.

32.

Zur Bildung einer geradlinigen Figur sind mindestens drei Gerade erforderlich. Diese begrenzenden Geraden werden Seiten, die Summe der Seiten: Umfang (Perimeter), und der vom Umfange eingeschlossene Teil der Ebene: Inhalt der Figur genannt. Die Punkte, in welchen 2 Seiten zusammenstoſsen, heiſsen Ecken, die also zugleich die Scheitel der Winkel der Figur sind. Nach der Zahl der Seiten (oder Ecken) teilt man die Figuren ein in Dreiecke, Vierecke und Vielecke (Polygone).

Das Dreieck ist offenbar das einfachste unter allen geradlinigen Figuren, zugleich aber auch die wichtigste, weil alle Vielecke in Dreiecke zerlegt werden können. Deshalb muſs man auch alle Lehrsätze über das Dreieck nicht allein gut verstehen, sondern auch gut inne haben. Überhaupt hängt, wie man schon in den beiden vorhergehenden Büchern gemerkt haben wird, die Leichtigkeit und Gewandtheit in den Anwendungen der Geometrie und rasches Fortschreiten in derselben von der leichten und schnellen Erinnerung ihrer Lehrsätze ab.

33.

Erklärungen. 1) Die Seite des Dreiecks, auf welcher man sich dasselbe ruhend denkt, wird Grundlinie oder Basis genannt. Die beiden andern Seiten nennt man Schenkel des Dreiecks oder Scheitelseiten. Die der Grundlinie gegenüberliegende Ecke heiſst Spitze des Dreiecks. „Dreieck“ kürzt man durch $\triangle$ ab.

2) Dem Verhältnis seiner Seiten nach ist das Dreieck:

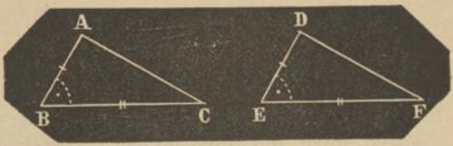
a) ungleichseitig, wenn alle drei Seiten ungleich sind;

b) gleichseitig, wenn alle Seiten gleich sind;
c) gleichschenklig, wenn es nur zwei gleiche Seiten hat. Diese heifsen dann die Schenkel und die dritte Seite Grundlinie.

3) Der Beschaffenheit der Winkel nach ist das Dreieck:
a) spitzwinklig, wenn alle drei Winkel spitz sind;
b) stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel hat;
c) rechtwinklig, wenn es einen rechten Winkel hat. Im rechtwinkligen Dreieck heifsen die beiden rechtwinklig auf einander stehenden Seiten die Katheten (Senkrechte) und die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite: Hypotenuse.

Unter den sechs Bestandteilen eines jeden Dreiecks (drei Seiten und drei Winkel) giebt es immer drei von einander unabhängige Stücke, durch deren Gröfse das ganze Dreieck, also auch die übrigen drei Stücke vollkommen bestimmt sind. Diese drei aus den „vier Kongruenzsätzen“ erforderlichen Bestimmungsstücke, welche man sich ganz besonders merken mufs, werden nun die folgenden Paragraphen kennen lehren.

34.



1. Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und den von denselben eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich haben.

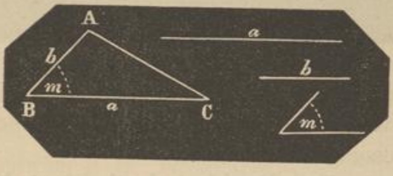
Beweis. Angenommen, es seien für die beiden Dreiecke ABC und DEF die im Lehrsatz erwähnten drei gleichen Stücke beziehlich folgende: Die Seite BC im ersten Dreieck sei $=$ der Seite EF im andern Dreieck, ferner Seite $AB =$ Seite DE und der von den beiden Seiten AB, BC eingeschlossene Winkel B gleich dem von den beiden Seiten DE, EF gebildeten Winkel E.

Man denke sich nun das eine Dreieck DEF aus der Bildebene herausgenommen und übereinstimmend, nämlich so auf das andere Dreieck ABC gelegt, dafs die gleich grofs vorausgesetzten Winkel B und E mit ihren ebenfalls gleich grofs vorausgesetzten Schenkeln sich decken, so dafs also

E auf B, F auf C und D auf A fällt. Notwendig muſs dann auch (§ 3) die Seite DF die Seite AC, Winkel D den Winkel A, und Winkel F den Winkel C decken und folglich auch, wie der Lehrsatz behauptet, $\triangle\ ABC \cong \triangle\ DEF$ sein. (Lies: $\triangle\ ABC$ kongruent $\triangle\ DEF$; s. § 18).

Anmerkung. In kongruenten Dreiecken liegen gleiche Winkel gleichen Seiten und umgekehrt, gleiche Seiten gleichen Winkeln gegenüber Hiernach findet man aus Dreiecken, die kongruent sind, auch leicht die beziehlich gleichen Stücke heraus.

35.



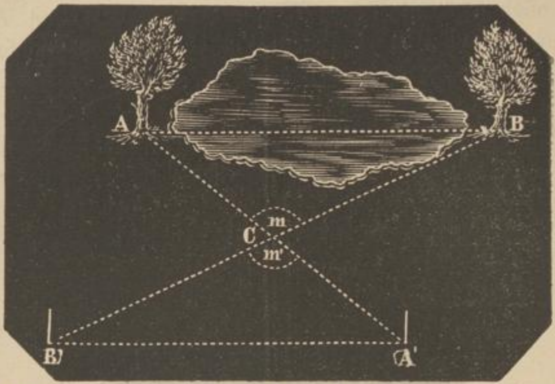
Aufgabe. Es sind zwei Seiten a und b eines Dreiecks und der davon eingeschlossene Winkel m gegeben. Es soll das dadurch bestimmte Dreieck konstruiert werden.

Auflösung. Man nehme eine der beiden gegebenen Seiten (a) in den Zirkel und stecke sie in BC ab, trage an das eine Ende B dieser Linie den gegebenen Winkel m (§ 21), mache den andern Schenkel BA so lang, als die andere Linie b ist und ziehe dann die Linie AC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Anmerkung. Hätte man auch den gegebenen Winkel m statt in B, in C, oberhalb oder unterhalb BC angetragen, so würde man doch immer dasselbe Dreieck, nur in anderer Lage erhalten haben. Anfänger werden wohl thun, diese beiden Konstruktionen noch zu machen.

Statt also zu sagen: zwei (alle) Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und den zwischenliegenden Winkel gleich haben, hätte man auch sagen können: ein Dreieck ist bestimmt durch zwei Seiten und den zwischen liegenden Winkel. Die im Lehrsatz beibehaltene frühere Redeform ist aber für den ersten Unterricht besser.

36.



Aufgabe. Durch Anwendung des vorhergehenden Lehrsatzes die Entfernung zweier Punkte A, B auf dem Felde zu bestimmen, wenn ein zwischenliegendes Hindernis die unmittelbare Messung nicht erlaubt.

Auflösung. Man bezeichne durch einen Meſsstab noch einen dritten Punkt C, von dem man ungehindert mit der Kette nach A und B messen kann. Messe die Linien AC und BC und trage ihre Längen geradlinig nach A' und B' fort, so daſs $A'C = AC$ und $B'C = BC$ wird; messe hierauf nur die Linie $A'B'$, so giebt diese die gesuchte Länge von $\overline{AB}$. Wäre z. B. $\overline{A'B'} = 400$ m gemessen, so wäre auch $\overline{AB} = 400$ m.

Beweis. Die beiden Dreiecke $A'B'C$ und ABC sind kongruent, weil sie zufolge Konstruktion zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, nämlich: $A'C = AC$, $B'C = BC$ (gleich gemacht) und $m' = m$ (als Scheitelwinkel, § 31). Stellt man sich vor, das untere Dreieck drehe sich um den Punkt C herum, bis A' auf A fällt, so muſs dann B' auf B, mithin $A'B'$ auf AB fallen.

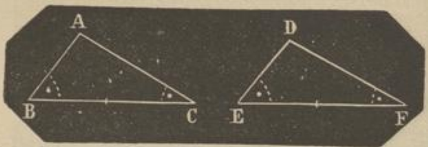
37.

2. Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite und zwei entsprechende (in Bezug auf die Seite gleichliegende) Winkel gleich haben. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Die Dreiecke haben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich.

In Zeichen:

Es sei	so ist:	
$\overline{BC} = \overline{EF}$	$\overline{AB} = \overline{DE}$	
$\angle B = \angle E$	$\overline{AC} = \overline{DF}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$
$\angle C = \angle F$	$\angle A = \angle D$	

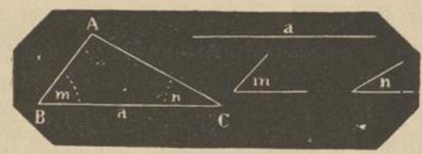


Beweis. Man denke sich das eine Dreieck DEF so auf das andere ABC gelegt, daſs die als gleich vorausgesetzten Seiten und Winkel sich decken, also erstlich $\overline{EF}$ auf $\overline{BC}$ fällt, alsdann muſs, weil $\angle E = \angle B$ und $\angle F = \angle C$, der Punkt D notwendig sowohl in die Richtung $\overline{BA}$, als in die Richtung $\overline{CA}$ fallen. Soll aber ein Punkt D (der keine Ausdehnung hat) in zwei verschiedene Richtungen $\overline{BA}$, $\overline{CA}$ zugleich fallen, so liegt er notwendig in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt A. Die Dreiecke decken sich also und es ist, wie im Lehrsatz behauptet, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

II. Die Dreiecke haben eine Seite, einen anliegenden und einen gegenüberliegenden Winkel gleich.

Dieser Fall findet in § 65 Berücksichtigung.

38.



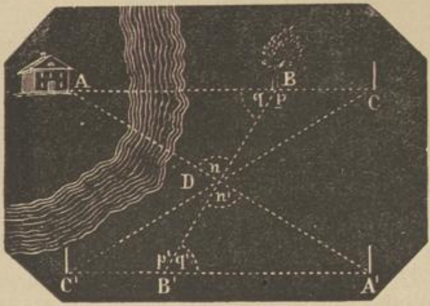
Aufgabe. Es sind eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel m und n gegeben; es soll das durch diese drei Stücke bestimmte Dreieck konstruiert werden.

Auflösung. Man stecke die Linie a in $\overline{BC}$ ab, trage daran in B den Winkel m, in C den Winkel n, und verlängere die Sckenkel dieser angetragenen Winkel bis zu ihrem Durchschnittspunkt A, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Anmerkung. Hätte man $\angle n$ bei B und $\angle m$ bei C oder beide Winkel unterhalb BC angetragen, so hätte man doch dasselbe Dreieck, nur in anderer Lage, erhalten.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

39.



Aufgabe. Mittelst des vorhergehenden Lehrsatzes die Entfernung zweier Punkte A und B zu bestimmen, wenn nur der eine Punkt B zugänglich ist.

Auflösung. Man stecke erst in C einen Mefsstab, der mit A, B in einerlei Richtung ist; dann stecke man einen Mefsstab in D, messe die Linien BD, CD und trage ihre Längen geradlinig nach B' und C' hinaus, so dafs $B'D = BD$, und $C'D = CD$ wird. Jetzt gehe man in der, durch die bezeichneten Punkte C', B' bestimmten Richtung rückwärts fort, bis man an einen Punkt A' kommt, der zugleich auch mit A, D in einerlei Richtung liegt, messe dann nur die Linie $A'B'$, so giebt diese die gesuchte Entfernung von A bis B.

Beweis. Um zu zeigen, dafs zufolge der Konstruktion notwendig $AB = A'B'$ sein mufs, bemerke man zuerst, dafs $\triangle\ B'C'D \cong \triangle\ BCD$ (§ 34) und dafs hieraus die Gleichheit der Winkel p und p' folgt (§ 34, Anmerkung). Ferner sind nun auch die Dreiecke ABD und $A'B'D$ kongruent, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben, nämlich: $BD = B'D$ (gleich gemacht), $\angle n = \angle n'$ (als Scheitelwinkel, § 31) und $\angle q = \angle q'$ (als Nebenwinkel von $\angle p$ und $\angle p'$); denn wenn zwei Winkel p und p' gleich sind, so müssen auch ihre Nebenwinkel q und q' gleich sein (§ 28) Daher $\triangle\ ABD \cong \triangle\ A'B'D$ (§ 37) und hieraus: $AB = A'B$ (§ 34, Anmerkung).

40.

Lehrsatz. In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

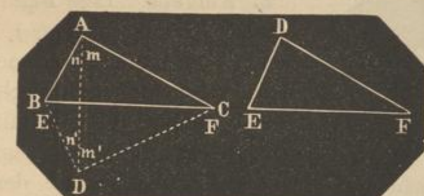
In Zeichen:

Wenn:	so ist auch:
AB = AC	$\angle$ B = $\angle$ C.

Beweis. Man kann sich den Winkel BAC an der Spitze durch die Linie AD halbiert denken, so daſs $\angle n = \angle n'$; alsdann würden aber die beiden Dreiecke ABD und ACD kongruent sein wegen zwei beziehlich gleicher Seiten und des zwischen liegenden gleichen Winkels, nämlich: $AB = AC$, nach Voraussetzung; $\angle n = \angle n' = \frac{1}{2} \angle BAC$ und $AD = AD$; folglich (§ 34) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ und hieraus (§ 34, Anmerkung) $\angle B = \angle C$.

Zusatz. Sind umgekehrt in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, $\angle B = \angle C$, so sind notwendig auch die ihnen gegenüber liegenden Seiten gleich, $AB = AC$, und das Dreieck ist ein gleichschenkliges. Denn dächte man sich in der Mitte D ein Perpendikel auf BC errichtet, so müssen nach § 37 zwei kongruente Dreiecke entstehen ($BD = DC$, $\angle B = \angle C$, $\angle D = \angle D$), mithin die beiden andern Seiten dies Perpendikel in einem gemeinschaftlichen Punkt A schneiden, und folglich $AB = AC$ sein.

41.



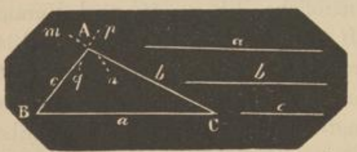
3. Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie alle drei Seiten beziehlich gleich haben.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:	daher:
AB = DE	$\angle$ A = $\angle$ D	
AC = DF	$\angle$ B = $\angle$ E	$\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ DEF.
BC = EF	$\angle$ C = $\angle$ F	

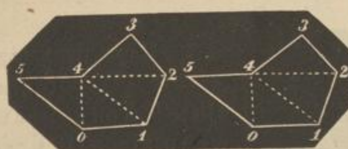
Beweis. Man denke sich das eine Dreieck DEF in umgekehrter Lage so an das andere Dreieck ABC gelegt, daſs Seite EF die als gleich vorausgesetzte Seite BC deckt. Denkt man sich nun in den Dreiecken links die Linie AD gezogen, so ist das Dreieck ABD gleichschenklig, weil nach Voraussetzung $AB = DE$ und daher die Winkel an der Grundlinie AD einander gleich, nämlich $\angle n = \angle n'$ (§ 40). Aus demselben Grunde ist auch Dreieck ACD gleichschenklig und deshalb auch $\angle m = \angle m'$. Die Summe der beiden Winkel m und n ist also gleich der Summe der beiden andern Winkel m' und n', daher ist auch $\angle BAC = \angle DEF$. Das Übrige folgt nun aus § 34, weil beide Dreiecke jetzt zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel beziehlich gleich haben.

42.



1. Aufgabe. Es sind alle drei Seiten a, b, c eines Dreiecks gegeben, es soll das dadurch bestimmte Dreieck gezeichnet werden.

Auflösung. Man stecke eine der gegebenen Seiten, z. B. a in BC ab, beschreibe aus dem einen Endpunkt B mit der Seite c, als Radius, einen Bogen mn, ebenso aus C mit der Seite b, als Radius, einen zweiten Bogen pq, und ziehe von dem Durchschnittspunkt A beider Bögen Gerade nach B und C, so ist ABC das verlangte Dreieck. Vergleiche § 35, Anmerkung.



2. Aufgabe. Eine Figur abzuzeichnen (abzutragen).

Auflösung. Man bezeichne die Winkelpunkte nach einerlei Folge herum mit Ziffern, teile die Figur durch Diagonalen (d. h. solche Linien, welche irgend zwei nicht auf einander folgende Punkte der Figur verbinden) in lauter Dreiecke und zeichne dann diese an einander hängenden Dreiecke ab.

Anmerkung. Die erwähnten Diagonalen brauchen nicht wrklich gezogen, sondern nur gedacht zu werden.

Genauer wird die Kopie, wenn man mit einer und derselben Grundlinie oder Diagonale alle übrigen Punkte des Originals zu Dreieckspunkten verbunden denkt.

Sind krumme Linien abzuzeichnen, so kann man die

Lage der wichtigsten Punkte, je mehr, je genauer, einzeln bestimmen und sie durch freie Handzeichnung verbinden.

Dieses Verfahren, eine Figur abzuzeichnen, ist, obwohl theoretisch richtig, doch nur dann praktisch brauchbar, wenn die Figur nur wenige und lauter gerade Seiten hat.

Außer andern Methoden, welche in der Zeichenkunst gelehrt werden, bedient man sich auch, um Karten und Pläne abzuzeichnen, mit großem Vorteil eines unter dem Namen Pantograph bekannten, aber sehr teuern Instruments (300 Mark), welches nicht mit dem sogenannten Storchschnabel zu verwechseln ist, obgleich er auf demselben Prinzip beruht. (Vergleiche § 124, 3.)

43.

4. (und letzter) Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie 2 Seiten und den der größeren dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich haben.

In Zeichen (s. Fig. zu § 41):

Wenn	so ist	daher
$BC = EF$	$AC = DF$	$\triangle\ ABC \cong DEF.$
$AB = DE$		
BC größer als AB		
$\angle A = \angle D$		

Beweis. Man denke sich das $\triangle\ DEF$ in umgekehrter Lage so an $\triangle\ ABC$ gelegt, daß sich die gleichen Seiten EF und BC decken. Denkt man sich nun in den Dreiecken links die Linie AD gezogen, so ist $\triangle\ ABD$, wegen $AB = ED$, gleichschenklig, daher nach § 40: $\angle n = \angle n'$. Da aber nach Voraussetzung $\angle A = \angle D$, so muß nun auch $\angle A - \angle n = \angle D - \angle n'$ d. i. $\angle m = \angle m'$ sein, folglich ist auch $\triangle$ ACD ein gleichschenkliges (s. § 40, Zusatz), daher $AC = CD$ d. i. $AC = DE$. Da nun alle 3 Seiten des Dreiecks DEF gleich den 3 Seiten des Dreiecks ABC, so sind beide Dreiecke nach § 41 kongruent.

Anmerkung. Dreiecke sind nicht unbedingt kongruent, wenn sie zwei Seiten und den der kleinern Seite gegenüberliegenden Winkel gleich haben (s. § 56, 2. Aufgabe).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg