Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

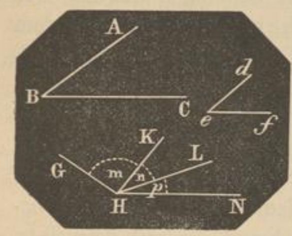
Zweites Buch. Von den Winkeln

Zweites Buch.

Von den Winkeln.

20.

Erklärung. Wenn von einem Punkte zwei gerade (unendliche) Linien (Strahlen) nach verschiedenen Richtungen ausgehen, so sagt man: sie seien gegen einander g e n e i g t und bilden einen W i n k e l mit einander, und man versteht daher unter W i n k e l immer die Neigung zweier geraden Linien gegen einander.*) Die beiden, einen Winkel bildenden Linien, wie $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, heifsen die S c h e n k e l und der Punkt B, in welchem sie zusammenstofsen, der S c h e i t e l (Spitze, Scheitelpunkt) des Winkels.



Einen Winkel nennt und bezeichnet man entweder blofs durch den am Scheitel stehenden Buchstaben, oder, wenn mehrere an einerlei Scheitel liegen und dadurch Verwechselung entstehen könnte, durch einen in die Öffnung der Schenkel gesetzten Buchstaben, oder auch durch drei Buchstaben, indem man den am Scheitel stehenden zwischen die an den Schenkeln stehenden schreibt. Als Winkelzeichen benutzt man $\angle$ oder $\sphericalangle$. Manche legen auch eine gebrochene Linie über die den Winkel bezeichnenden Buchstaben. So bedeutet z. B. „Winkel B", $\angle$ B, $\sphericalangle$ B, $\widehat{B}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBA}$ den Winkel bei B, ebenso: *n*, KHL, LHK den Winkel, den die beiden Linien $\overline{HK}$ und $\overline{HL}$ bilden.

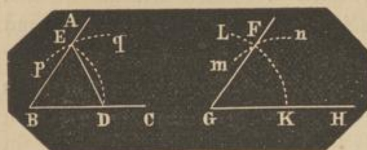
Die Gröfse eines Winkels hängt allein von der Neigung (Öffnung) seiner Schenkel ab, die Länge der Schenkel ist ganz gleichgültig. Denkt man den Winkel *e* so auf $\widehat{B}$ gelegt, dafs der Scheitel *e* auf *B*, der Schenkel *ef* in die Richtung *BC* kommt, und es fällt dann der Schenkel *ed* auf *BA*, so sind die Winkel *B* und *e* gleich grofs, obgleich ihre Schenkel verschiedene Länge haben.

---

*) Denkt man sich unter „Winkel" den Teil der (unendlichen) Ebene, der zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen enthalten ist, so läfst sich die Gleichheit der korrespondierenden Winkel streng beweisen (Paralleltheorie von Rich. Schurig).

Einen Winkel kann man sich durch Bewegung entstanden denken. Der Schenkel $\overline{BA}$ z. B. habe anfangs auf dem Schenkel BC gelegen, sich dann um den Scheitel B gedreht, so entsteht sogleich ein Winkel, der mit fortgesetzter Drehung immer gröfser wird.

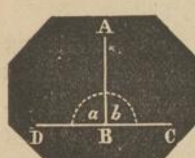
21.



Aufgabe. An die Linie GH im Punkte G einen Winkel zu tragen, der einem gegebenen Winkel B gleich ist.

Auflösung. Aus dem Scheitel B des gegebenen Winkels beschreibe man zwischen den Schenkeln desselben, mit einem beliebigen Radius BD einen Bogen DE, und mit demselben Radius BD aus dem neuen Scheitel G einen Bogen KL, denke die Sehne DE gezogen und beschreibe mit derselben als Radius aus K einen Bogen mn, der den Bogen KL in einem Punkte F schneidet, und ziehe dann nur die Linie GF, so ist der Winkel G = Winkel B. Denn denkt man sich die Winkel gehörig auf einander gelegt, so fallen die mit demselben Radius BD beschriebenen Bögen DE, KL und ebenso die mit demselben Radius DE beschriebenen Bögen pq, mn und, wie leicht einzusehen (wenn man die Bögen zu ganzen Kreisen vollendet denkt), auch deren Durchschnittspunkte E und F auf einander; die Winkel decken sich also und sind folglich gleich, $\angle G = \angle B$.

22.



Erklärungen. 1) Liegen die Schenkel eines Winkels in entgegengesetzter Richtung, bilden sie also eine einzige gerade Linie, so heifst der Winkel ein gestreckter oder flacher; z. B. $\angle DBC$.

2) Der rechte Winkel ist die Hälfte des gestreckten. Ist also a die Hälfte des Winkels $\angle DBC$, so ist $\angle a$ ein Rechter. Den rechten Winkel bezeichnet man mit R. Die beiden Geraden, welche einen rechten Winkel bilden, stehen perpendikulär (senkrecht, lotrecht, normal, vertikal*)

*) „Vertikal“ bedeutet ursprünglich die Richtung des freien Falles (s. § 11, Anmerkung).

auf einander. „AB steht senkrecht auf DC“ kürzt man durch „AB $\perp$ CD“ ab. B ist der Fuſspunkt des Perpendikels (der Senkrechten) AB. Aus vorstehenden Erklärungen folgt, daſs in einem Punkt B der Linie DC nur ein Perpendikel AB möglich ist, und daſs daher alle rechte Winkel notwendig gleich sind (sich decken müssen).

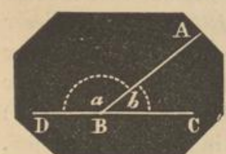
Man breche ein Stück Papier und dann nochmals, so daſs das eine Ende des ersten Bruches auf das andere fällt, so hat man einen rechten Winkel und zwei auf einander senkrechte Linien.

3) Winkel, die kleiner als ein gestreckter, also kleiner, als zwei Rechte sind, heiſsen konkave (hohle oder ausspringende). Die konkaven Winkel sind entweder rechte oder spitze oder stumpfe. Spitz ist ein Winkel, wenn er kleiner ist als ein rechter, z. B. $\angle b$ in der Fig. zu § 23, stumpf, wenn er gröſser ist als ein rechter, z. B. $\angle a$ in der Fig. zu § 23. Zwei Linien, die einen spitzen oder stumpfen Winkel bilden, heiſsen schräg oder schief gegen einander. Spitze und stumpfe Winkel nennt man daher auch schiefe.

4) Der konvexe (überstumpfe, erhabene, einspringende Winkel ist gröſser als ein gestreckter ($< 2\,R$).

5) Der Winkel, welcher durch eine volle Umdrehung entstanden ist, also $= 4\,R$ ist, heiſst ein voller oder kompleter.

23.

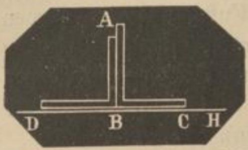


Erklärung. Zwei Winkel, welche einen Schenkel gemein haben und deren beiden andern Schenkel eine gerade Linie bilden, heiſsen Nebenwinkel.

Von zwei Nebenwinkeln, a und b, kann man sich den einen entstanden denken, indem man den Schenkel des andern rückwärts verlängert. Anfänger müssen sich den Begriff Nebenwinkel genau merken. Bei zwei bloſs an einander liegenden Winkeln, wie m und n in § 20, die auch einen Schenkel HK gemein haben, bilden die beiden äuſsern Schenkel HG, HL keine gerade Linie, wie es bei Nebenwinkeln sein muſs.

Ein rechter Winkel ist also auch seinem Nebenwinkel gleich, und umgekehrt: Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder ein Rechter.

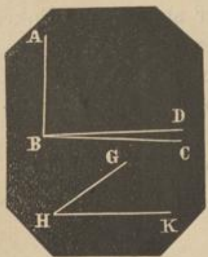
24.



Aufgabe. Zu untersuchen, ob die Schenkel eines sogenannten Winkelhakens (oder Dreiecks), dessen man sich bedient, um rechte Winkel zu zeichnen und Perpendikel zu ziehen, auch genau rechtwinklig auf einander stehen.

Auflösung. Man ziehe eine gerade Linie DH, lege an dieselbe den einen Schenkel BC des Winkelhakens und ziehe längs des andern AB eine gerade Linie. Wäre nun der Winkel ABC genau ein rechter, so müfste er seinem Nebenwinkel ABD gleich sein; ob er dies ist, würde sich gleich zeigen, indem man den Winkelhaken nur hineinpafst.

25.



Winkelmafs. So wie man, um Linien zu messen, verschiedene Längen-Einheiten (Meter, Centimeter, Millimeter) gebraucht, so ist man auch, um Winkel zu messen, über folgende drei Winkel-Einheiten übereingekommen.

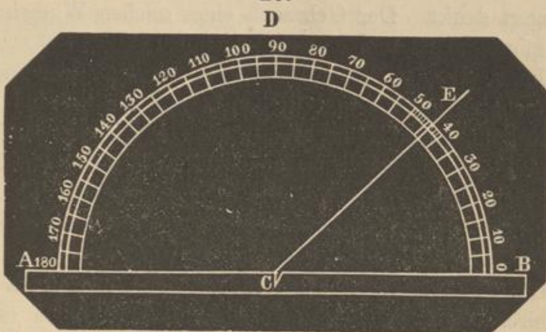
Man denkt sich den rechten Winkel in 90 kleinere gleiche Winkel geteilt, welche man Grade (^{0}) nennt. Sei $\angle DBC$ ein solcher, deren neunzig an einander liegend den rechten Winkel ABC genau ausfüllen, nämlich $\angle DBC = 1^0$, so ist dieser Winkel die gröfste Winkel-Einheit. Diese denkt man ferner in 60 gleiche (ihrer Kleinheit wegen aber auf dem Papier nicht darstellbare) Winkel geteilt, welche man Minuten ($'$) nennt, so dafs also 1 Grad = 60 Minuten, in Zeichen $1^0 = 60'$. Den Winkel von einer Minute denkt man sich wiederum in 60 gleiche Winkel geteilt, welche Sekunden ($''$) heifsen, so dafs also $1' = 60''$. Hiernach ist also der rechte Winkel nämlich:

$$R = 90^0 = 5400' = 324\,000''.$$

Es genügt hier, sich diese weit gehende Teilung des rechten Winkels nur in Gedanken vorzustellen. Gehörigen Orts kann man sich überzeugen, dafs es einem geschickten Mechanikus mittelst einer Teilmaschine und einer künstlichen Vorrichtung (Mikrometer, Nonius) möglich ist, diese feine Teilung zu bewirken und einen Winkelmesser herzustellen, mit dem man, bei gehöriger Handhabung desselben, die Winkel bis auf die Sekunde genau messen kann.

Gesetzt nun, es sei in dem Winkel H die erste Einheit, nämlich 1 Grad, 36 mal, in dem überschüssigen Teil die zweite Winkel-Einheit, nämlich 1 Minute, 40 mal, und in dem jetzt noch übrig bleibenden Teil des Winkels H die dritte Einheit, nämlich eine Sekunde, noch 20 mal enthalten, so betrüge die Gröſse des Winkels H, 36 Grad 40 Minuten und 20 Sekunden, oder kürzer in Zeichen: $\angle H = 36^0\ 40'\ 20''$.

26.



Winkelmesser. Der Kreis dient uns nicht allein als Hilfslinie, um Winkel zu zeichnen, sondern gehörig dazu eingerichtet, auch als Instrument, vermittelst dessen man einen Winkel messen und seine Gröſse in Graden, Minuten und Sekunden angeben kann.

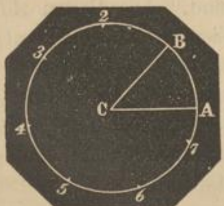
Man denke sich den Durchmesser AB eines Kreises gezogen, wodurch derselbe halbiert ist (§ 19). Auf dem Durchmesser denke man sich im Mittelpunkt C das Perpendikel DC errichtet, so teilt dieses den Halbkreis wieder in zwei gleiche Teile arc AD = arc DB; denn denkt man sich die beiden rechten Winkel ACD und DCB zur Deckung gebracht, so müssen sich auch die Bögen AD und DB decken, weil alle ihre Punkte gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind. Die Bögen AD und DB sind also gleich und jeder ein Viertelkreis (Quadrant). Denkt man sich nun jeden der beiden rechten Winkel in 90 gleiche Winkel (Winkelgrade) geteilt, so würden die Teilungslinien offenbar auch jeden der beiden Viertelkreise in 90, mithin den Halbkreis in 180 gleiche Bögen (Bogengrade) teilen (§ 18). Würde nun umgekehrt der Halbkreis erst in 180 gleiche Bögen geteilt (welches einem geschickten Mechanismus mittelst einer Teilmaschine desto leichter sein mufs, je gröfser der Halbkreis ist, weil dann die Teilpunkte weiter auseinander liegen und deutlicher hervortreten) und dann von diesen Teilpunkten nach dem Mittelpunkte C gerade Linien gezogen, so wären dadurch 180 an einander liegende gleiche Winkel-Grade versinnlicht.

In manchem Besteck findet sich ein solcher eingeteilter metallener Halbkreis, oder vielmehr nur dessen ausgeschnittener Rand, wo man sich dann die Teilstriche bis zum Mittelpunkt verlängert denkt. Der Gebrauch eines solchen Winkelmessers (Transporteurs) ist nun einfach folgender:

Um z. B. den Winkel ECB zu messen, lege man das Instrument so: dafs sein Mittelpunkt auf den Scheitel C und sein Nullpunkt auf einen Schenkel CB des zu messenden Winkels fällt, alsdann sehe man zu, wie viele Grade der andere Schenkel CE abschneidet, indem man halbe bis viertel Grade nach dem Augenmafs schätzt. Nach Andeutung der Figur wäre z. B. Winkel $ECB = 43^0\ 50'$.

Anmerkung. Dieser eben beschriebene, etwa 6 bis 15 cm im Durchmesser haltende und nur bis auf Grade (seltener halbe Grade) geteilte Winkelmesser wird nur gebraucht, um Winkel in Zeichnungen oder Rissen zu messen und aufzutragen und gewährt für solche Zwecke eine hinreichende Genauigkeit. Die § 25 erwähnten, besonders für die Geodäsie und Astronomie erforderlichen feineren Winkelmesser sind ganze Kreise von 40 cm bis 1 m und darüber im Durchmesser mit einem um den Mittelpunkt drehbaren Fernrohr. Die Teilstriche sind hier so fein, dafs man sie nur mit einem Vergröfserungsglase deutlich sehen und ablesen kann. Nach den hohen Preisen derselben, von 300 bis zu 10 000 Mark und darüber, kann man mutmafsen, welche Geduld und Geschicklichkeit die Verfertigung solcher Instrumente erfordert.

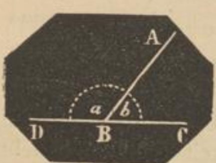
27.



Aufgabe. Die Anzahl Grade und Minuten, welche ein beliebig gegebener Winkel C enthält, blofs mit Hilfe eines Zirkels und wenigstens eben so genau zu bestimmen, als es mit den gewöhnlichen Winkelmessern möglich ist.

Auflösung. Mit einem möglichst großen Radius CA beschreibe man zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels C einen Bogen AB, den man zu einem ganzen Kreise vollendet. Hierauf untersuche man, wie oft der Bogen AB (indem man dessen Sehne $\overline{AB}$ in den Zirkel nimmt) in der ganzen Peripherie enthalten ist, und dividiere mit der gefundenen Zahl in 360^0. Wäre z. B. arc AB $7^1/_2$ mal in der ganzen Peripherie enthalten, so wäre $\angle C = \frac{360^0}{7^1/_2} = 48^0$.

28.



Lehrsatz. Zwei Nebenwinkel betragen zusammen zwei rechte Winkel. In Zeichen:

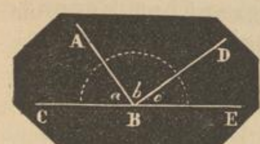
$$a + b = 2\,R = 180^0.$$

Beweis. Denkt man sich aus dem gemeinschaftlichen Scheitel B einen in 180^0 geteilten Halbkreis beschrieben, oder den Winkelmesser angelegt, so ist klar, daſs die beiden Nebenwinkel a und b ihn ganz ausfüllen, und daſs der eine Nebenwinkel a gerade so viel über 90^0 hat, als dem andern b daran fehlen. Dasselbe folgt auch, wenn man in B ein Perpendikel auf DC errichtet denkt.

Aufgabe. Es sei der Winkel $b = 52^0\ 37'\ 49''$. Wie groſs ist der Winkel a?

Antwort. Es ist $\angle a = 127^0\ 22'\ 11''$.

29.



Lehrsatz. Alle Winkel, welche an einerlei Seite einer geraden Linie liegen und einen Scheitel in derselben gemein haben, betragen zusammen zwei rechte Winkel. In Zeichen:

$$a + b + c = 2\,R = 180^0.$$

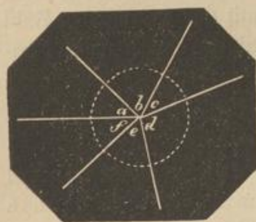
Beweis. Man denke sich wieder im gemeinschaftlichen Scheitel B ein Perpendikel auf CE errichtet (oder den Winkelmesser angelegt), so werden die entstehenden beiden rechten Winkel durch die andern ganz ausgefüllt; letztere haben also zusammen eben so viele Grade, als zwei rechte Winkel.

Aufgabe 1. Es sei $\angle a = 50^0\ 16'\ 20''$; $\angle c = 30^0\ 10'\ 10''$; wie groſs ist $\angle b$?

Aufgabe 2. Es sei $\angle a = 72^0\ 50'\ 6''$; $\angle b = 86^0\ 21'\ 18''$; wie viel mal so grofs ist $\angle a$ als $\angle c$?

Antwort. 1) $\angle b = 99^0\ 33'\ 30''$; 2) $3^1/_2$ mal.

30.



Lehrsatz. Alle Winkel, welche rings um einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt liegen, betragen zusammen immer vier Rechte. In Zeichen:

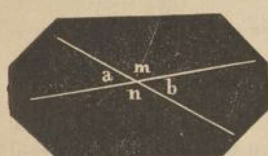
$a + b + c + d + e + f = 4\,R = 360^0.$

Beweis. Man denke sich durch den gemeinschaftlichen Scheitel eine gerade Linie gezogen, so betragen die Winkel an jeder Seite derselben 2 R, mithin an beiden Seiten zusammen 4 R. Die Richtigkeit des Satzes ergiebt sich auch, indem man den Mittelpunkt eines in 360^0 geteilten Kreises auf den gemeinschaftlichen Scheitel gelegt denkt.

Aufgabe. Es sei $a = 50^0\ 25'\ 2''$, $b = 68^0\ 0'\ 12''$, $c = 29^0\ 40'\ 48''$, $d = 120^0\ 57'\ 0''$, $e = 60^0\ 9'\ 54''$; wie grofs ist der Winkel f?

Antwort. Es ist $\angle f = 30^0\ 47'\ 4''$.

31.



Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien sich schneiden, so sind je zwei gegenüber liegende Winkel, welche man Scheitelwinkel nennt, einander gleich.

In Zeichen: $a = b$

$m = n$

Beweis. Die Winkel a und m sind zwei Nebenwinkel und betragen zusammen zwei Rechte (§ 28); eben so sind b und m zwei Nebenwinkel und betragen zusammen auch zwei rechte Winkel. Da es nun einerlei ist, ob man a oder b zu m legt, indem in beiden Fällen die Summe gleich zweien Rechten ist, so ist notwendig auch $a = b$. Eben so ist es einerlei, ob man m oder n zu a addiert, mithin auch der Winkel m seinem Scheitelwinkel n gleich. Wäre z. B. $\angle a = 60^0$, so wäre jeder seiner Nebenwinkel m und n, $= 120^0$ und $b = 60^0$.