Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

Einleitung

urn:nbn:de:bsz:31-264714

Einleitung.

I.

Mutmaſslicher Ursprung der Geometrie.

Von der ursprünglichen Geschichte aller menschlichen Kenntnisse in den ersten Zeiten des menschlichen Geschlechts ist so wenig auf uns gekommen, daſs fast alles, was man über einzelne gerettete Bruchstücke berichtet, sich in reine Mutmaſsungen von zweifelhaftestem Werte verliert. Sogar die erste Spur der allgemeinen Geschichte des nach langen Zeiträumen schon auf eine gewisse Kultur gehobenen Menschengeschlechts hat sich in tiefes, nie zu lichtendes Dunkel gehüllt.

Erst lange nachher, als die ägyptische Finsternis riſs (wovon in den meisten Schulen noch ein Stück zu sehen ist), bricht eine Art Dämmerung in der Geschichte an, und hiernach soll diejenige mathematische Wissenschaft, welche den Namen „Geometrie" als Titel führt, zuerst durch die alljährlichen Überschwemmungen des Nils veranlaſst sein. (Herodot.)

Wenn der Nil, so wird erzählt, aus seinen Ufern trat, so pflegte er nicht selten die Grenzen und Befriedigungen der ägyptischen Ländereien zu zerstören und unkenntlich zu machen, sondern auch nach und nach hier ein Stück Land abzureiſsen und dort wieder anzusetzen. Es muſste also oftmals von neuem wieder geteilt und jedem das Seinige zugewiesen werden, um nach Recht und Billigkeit die Steuern regulieren zu können.

Diese Teilungen und Grenzenbestimmungen mögen nun aber anfangs aufs Geratewohl, durch bloſse Schätzung nach dem Augenmaſse bewirkt und deshalb manche Streitigkeiten entstanden, und dadurch denkende Köpfe veranlaſst worden sein, auf untrüglichere, nicht von dem Augenmaſse abhängende Mittel zu sinnen.

Auf solche und ähnliche Veranlassungen sind nun wahrscheinlich einige für die Landmesskunst wichtige Sätze erfunden (z. B. gleichlaufende gerade Linien abzustecken und auszumessen, Nivellieren etc.), deren Richtigkeit — weil sie sich nicht bloſs auf Erfahrung, sondern auf reine Vernunft gründeten — jeder Vernünftige anerkennen muſste und nach welchen die fraglichen Gröſsen und Grenzenbestimmungen sicher geleitet, etwa begangene Irrtümer und absichtliche Betrügereien leicht entdeckt und berichtigt werden konnten.

Auſserdem bezeugen die vielen groſsen Pyramiden, Gnomonen, unterirdischen Gänge, Grabmäler, Palläste, Schiffsgräben und Kanäle,*) dass die Ägypter sich viel mit der Baukunst, Fortifikation, Astronomie und Schiffahrt beschäftigt haben, wozu einige Kenntnis der Geometrie nicht allein sehr nützlich, sondern sogar unentbehrlich war.

Kurzum, vielfältige praktische Bedürfnisse müssen schon früh, bei allen zivilisierten Völkern, die Kultur und Pflege dieser vielleicht uralten Wissenschaft (Geometrie) veranlaſst haben. Denkende Köpfe, bei den Ägyptern wohl besonders die Priester, bei den Griechen, Persern, Arabern, Chinesen etc. die Philosophen, unter denen auch Fürsten, strengten sich an, noch immer mehr neue geometrische Sätze zu entdecken. Hie und da unternahm es dann einer (später z. B. der Grieche Euklides 300 v. C. durch seine Reisen in Ägypten etc.) diese anfangs sehr zerstreuten geometrischen Lehren zu sammeln und sie, nicht allein wegen ihres praktischen Nutzens, sondern auch als äuſserst merkwürdige Produkte des menschlichen

*) „Um die Kosten der Kanalbauten zu decken, wurde von Sesostris das der Kriegerkaste zugewiesene Dritteil des Landes einer Grundsteuer unterworfen. Die Ausdehnung der Überschwemmung bestimmte dort jährlich, welche Ländereien steuerbar sein würden, und da feste Grenzen unter diesen Umständen nutzlos gewesen wären, so muſste alljährlich mittelst vorgenommener Vermessung jedem Grundbesitzer ein gleiches Stück des vom Nil befruchteten Landes zugeteilt werden. Beides, die Landesvermessung, wie die Steuererhebung, war ein Geschäft der Priesterkaste.“ S. Reynier, De l'écon. polit. et rurale des Égyptiens et Carthaginois, p. 190, und Rau, Grunds. der Finanzwiss.; Pölitz, Neue Jahrb. der Politik und Geschichte, 1840, Oktbr.-Heft, und Montucla, Histoire des mathématiques.

Scharfsinns, zu ordnen, zu vervollkommnen, zum vorkommenden Gebrauche und zur Bildung des Geistes für die Nachwelt aufzubewahren, und weil doch die Erd- oder Feldmeſskunst die mutmaſsliche Veranlassung zur Entdeckung dieser Sätze gewesen war, so gab oder lieſs man der ganzen Sammlung derselben den Titel Geometrie (Erdmessung).

Seitdem ist aber diese Wissenschaft so sehr erweitert und vervollkommnet, daſs für die richtige Bezeichnung derselben der ursprüngliche Name „Geometrie“ in der wörtlichen Bedeutung „Erdmessung“ gar nicht mehr passt, oder vielmehr nie gepaſst hat. Die Erd- oder Feldmeſskunst ist allerdings eine Anwendung der Geometrie, aber auch auf andere ganz verschiedene Wissenschaften wird sie angewandt, z. B. auf Astronomie, Schiffahrtskunst, Optik, Mechanik, Wasserbaukunst, Fortifikation etc., und so unpassend es also sein würde, das Wort *„Geometrie“* durch Himmelsmesskunst, Mechanik etc. zu übersetzen, eben so unpassend würde es sein, dies Wort jetzt noch in der anfänglichen Bedeutung *„Erdmeſskunst“* zu nehmen.

Um nun aber einen vorläufigen Begriff von dieser Wissenschaft geben und andeuten zu können, worauf man beim Studium derselben seine Aufmerksamkeit zu richten und was man von ihr zu erwarten hat, ist es durchaus notwendig, erst ihren eigentlichen Gegenstand, Zweck und Wesen hervorzuheben und kennen zu lernen, so wie auch einige notwendige Vorbegriffe vorauszuschicken.

II.

Gegenstand der Geometrie.

Räumliche Gröſsen: Körper, Flächen und Linien.

Körper. Jeder Mensch hat die Vorstellung von dem nach allen Richtungen bis ins Unendliche ausgedehnten Raume. Von diesem unbegrenzten Raume denke man sich beliebig groſse, von allen Seiten begrenzte Stücke (z. B. den Raum, welcher von den Wänden, Decke und Boden eines Zimmers eingeschlossen (begrenzt) ist, so hat man sich das gedacht, was man Körper oder auch wohl geometrische Körper nennt, um sie durch dieses Beiwort „geometrisch“ von den materiellen oder physischen Körpern zu unterscheiden, welche aufser ihrer Ausdehnung und Form noch andere Merkmale haben, wie z. B. Materialität — Gewicht, Farbe etc. Der geometrische Körper ist also nichts Materielles, sondern nur ein begrenzter leerer Raum. Spricht man von der Grösse und Form eines physischen Körpers, so abstrahiert man von dem Stoffe (Holz, Eisen etc.), aus welchem er besteht, betrachtet vielmehr nur den leeren Raum, welchen der physische Körper einnimmt (ausfüllt).

Flächen. Die Grenzen eines Körpers nennt man Flächen und alle Flächen, welche einen Körper begrenzen (einschliefsen), bilden zusammen dessen Oberfläche. Die Flächen eines Körpers können also, eben weil sie einen Raum begrenzen, kein Teil davon sein, mit andern Worten: Flächen haben keine Dicke, sind nur vom Körper abstrahierte Grössen im Raume. Will man sich eine Fläche durch ein Blatt Papier versinnlichen, so muss man sich nur die eine Seite desselben denken, denn wie dünn es auch sein möge, so hat es doch als materieller Körper notwendig eine gewisse Dicke und ist mithin keine mathematische Fläche.

Linien. Die Grenzen einer Fläche nennt man Linien. Die Linien können also, eben weil sie eine Fläche begrenzen (einfassen), kein Teil davon sein, weil ein Teil einer Fläche doch selbst wieder eine Fläche, mithin nicht die Grenze wäre. Die Linien sind also auch nur Gröfsen im Raume, sie haben weder Dicke noch Breite, sondern nur eine Ausdehnung, nämlich Länge.

Punkte. Die Grenzen einer Linie nennt man Punkte. Der mathematische Punkt kann also, eben weil er die Grenze (Anfang, Ende) einer Linie bezeichnet, kein Teil davon sein, mithin auch gar keine Ausdehnung haben. Die verschiedenen Richtungen im Raume nennt man auch „Dimensionen“. Der Körper hat also drei Dimensionen (Länge, Breite und Dicke oder Höhe), die Fläche nur zwei Dimensionen, die Linie nur eine Dimension. Da der Punkt keine Dimension hat, so kann er auch keinen Stoff zu weiteren Betrachtungen geben.

Wir unterscheiden demnach nur dreierlei Arten räumliche Gröfsen, nämlich: Körper, Flächen und Linien, und diese reinen Gedankendinge sind nun der eigentliche Gegenstand, mit welchem die Geometrie sich beschäftigt.

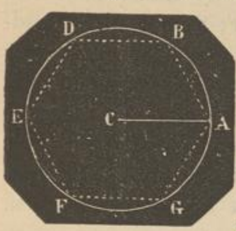
III.

Zweck der Geometrie.

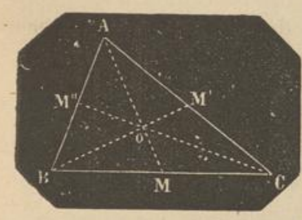
Entdeckung der Eigenschaften; Konstruktion und Ausmessung der räumlichen Gröſsen.

1. Die Geometrie soll die Eigenschaften der räumlichen Gröſsen entdecken und kennen lehren.

So hat z. B. die in sich zurücklaufende krumme Linie, welche man Kreis nennt,*) unter andern merkwürdigen und wichtigen Eigenschaften auch die, daſs sich der Halbmesser desselben gerade sechsmal in die krumme Linie abtragen läſst.



Nimmt man nämlich die vom Mittelpunkt *C* nach *A* gehende gerade Linie, welche man Halbmesser nennt, in den Zirkel und steckt sie erst von *A* nach *B* ab, dann von *B* nach *D*, von *D* nach *E* etc., so muſs man zum sechstenmale genau wieder auf den Punkt *A* zurückkommen, zugleich ist hierdurch die Kreislinie in sechs gleiche Bögen geteilt. Ebenso hat jede andere räumliche Gröſse viele merkwürdige Eigenschaften. So hat z. B., um noch ein Erläuterungs-Beispiel anzuführen, ein jedes Dreieck



die (für die Mechanik wichtige) Eigenschaft, daſs die drei, von den Endpunkten *A*, *B*, *C* nach den Mitten *M*, *M'*, *M''* der gegenüber liegenden Seiten gezogenen geraden Linien sich immer in einem und demselben Punkte *o* treffen müssen u. m. dgl.

2. Die Geometrie lehrt die räumlichen Gröſsen (Figuren und Liniengebilde) richtig und leicht konstruieren (zeichnen). Wollte z. B. ein Architekt ein regelmäſsiges Sechseck zeichnen, d. i. eine Figur von sechs gleichen Seiten und sechs gleichen Winkeln

---

*) Zu einer vorläufigen Einleitung genügen die gewöhnlichen populären Begriffe von geraden und krummen Linien, Kreis, Dreieck etc. vollkommen und diese dürfen wir auch unbedenklich bei jedem zum Studium der Geometrie fähigen Schüler voraussetzen.

und zwar so, dass jede Seite 5 cm lang wäre, so würde ihm dieses, wenn er Geometrie verstände, ein leichtes sein. Er brauchte sich ja nur der eben erwähnten Eigenschaft des Kreises zu erinnern, mit einem Halbmesser von 5 cm einen Kreis zu beschreiben, hierauf den Halbmesser nur unmittelbar darin herumzutragen und die so gefundenen sechs Teilungspunkte durch gerade Linien zu verbinden. Ebenso lehrt die Geometrie jede andere verlangte Figur richtig zu konstruieren.

3. Die Geometrie lehrt ein sicheres Verfahren kennen, die räumlichen Gröſsen genau auszumessen. Frägt z. B. jemand: wie viel kann auf jenem viereckigen Stück Feld mehr wachsen, als auf diesem fünfeckigen; wie viel kann dieses Schiff laden, um nicht tiefer als $3^1/_2$ m zu gehen; wie findet man den richtigen Weg durch das bahnlose Meer; wie werden Land- und See-Karten angefertigt; wie findet man die Entfernung des Mondes von der Erde, die Zeit, nach welcher eine Sonnenfinsternis eintritt, ein Komet wieder erscheint; wie muſs ein Geschütz gerichtet werden, damit die Kugel einen bestimmten Punkt treffe u. m. dgl., so können solche und ähnliche Fragen nur von einem der Geometrie Kundigen beantwortet werden.

IV.

Begriff der Geometrie.

Nachdem nun die zur Bildung des hier geforderten vorläufigen Begriffs nötigen Vorstellungen vorausgeschickt worden, kann man also, um von dem Umfang und Inhalt einer ganzen Wissenschaft so viel wie möglich in ein paar Worten zusammen zu fassen, sagen: Die Geometrie ist die Wissenschaft von den Eigenschaften, der Konstruktion und Ausmessung der räumlichen Gröſsen.

V.

Methode der Geometrie.

Aus dem Vorhergehenden erhellet wohl, daſs die Hauptaufgabe der Geometrie darin besteht: die Eigenschaften der räumlichen Gröſsen zu entdecken. Auf welche Weise soll dies aber geschehen? Wie ist man z. B. wohl zur Kenntnis des vorhin erwähnten merkwürdigen Satzes gelangt: daſs sich der Halbmesser eines Kreises gerade sechsmal in demselben herumtragen lasse, so wie zu dem andern Satze: daſs die drei von den Eckpunkten eines Dreiecks nach den Mitten der gegenüber liegenden Seiten gezogenen geraden Linien sich immer in demselben Punkte durchschneiden? Hat man diese unumstöſslichen Wahrheiten etwa durch einen glücklichen Zufall, durch Erfahrung entdeckt, indem man ganz gedankenlos, gleichsam spielend, den Halbmesser in den Kreis herumtrug und jene drei Linien in dem Dreiecke zog, ohne die Entdeckungen zu ahnen, von welchen man nachher überrascht wurde?

Viele solche einfache Sätze der Geometrie können und mögen in grauer Vorzeit wirklich auf diese Weise durch bloſses Probieren zuerst entdeckt sein, allein die meisten und wichtigsten Eigenschaften der räumlichen Gröſsen würden sich auf diese Weise: durch Versuche und Erfahrungen unmöglich finden lassen. Auch würden die so gefundenen Sätze keine allgemeine Gültigkeit haben und also auch nicht auf den Namen: m a t h e m a t i s c h e Wahrheiten Anspruch machen können, welche immer so e v i d e n t, d. h. so einleuchtend gewiſs und zuverlässig sein müssen, daſs man auf die unumstöſsliche Richtigkeit derselben unbedenklich bauen kann.

Wollte z. B. jemand den eben vom Dreieck erwähnten Satz behaupten und die unbestreitbare Richtigkeit desselben dadurch beweisen, daſs er vor unsern Augen die fraglichen drei Linien zöge, und nun sagen: seht ihr, daſs die drei Linien sich wirklich in demselben Punkte schneiden! so würden wir ihm doch gleich zurufen: Du bist durch Deine uns soeben gezeigte Probe, strenge genommen, noch nicht einmal berechtigt, nur die wahrscheinliche, viel weniger noch die absolute Richtigkeit Deines Satzes zu behaupten; denn angenommen, Deine Zeichnung sei ohne Irrtum, so genau, als es Deine Sinne und Instrumente erlauben, so gilt Dein behaupteter Satz doch nur von diesem e i n e n Dreiecke, oder von so vielen als Du untersucht hast; welcher Grund berechtigt Dich aber, von einem oder ein paar Dreiecken auf alle übrigen zu schliessen, deren Zahl, weil unendlich, Du doch nicht alle durchprobieren kannst?

Hiernach möchte es wohl schon dem ersten Anfänger einleuchten, daſs, wenn die mathematischen Wahrheiten diesen Namen verdienen, nämlich unumstöſsliche Gewiſsheit und allgemeine Gültigkeit haben sollen, dieselben dann auch als eine absolute Notwendigkeit durch die reine Vernunft erkannt werden müssen. Dies ist auch der Grund, weshalb man die reine Mathematik eine reine Vernunftwissenschaft nennt. Kein Satz, kein Schlufs gründet sich auf Erfahrung. Alles mufs hier durch reine Vernunftspekulation, aus reinen Verstandesbegriffen abgeleitet und gefunden werden, und eben dadurch erhalten die mathematischen Sätze ihre einleuchtende Gewifsheit und Notwendigkeit. Dieser unumstöfslichen Gewifsheit halber standen die mathematischen Wissenschaften auch bei allen Philosophen des Altertums, deren Lehren und Sitten die vollkommensten waren, in so hoher Achtung. Besonders waren es die griechischen Philosophen Thales, Pythagoras, Hippokrates, Plato, Aristoteles, Euklides und Archimedes, welche sich für die mathematischen Wissenschaften interessierten und deren Studium nicht allein des praktischen Nutzens halber, sondern auch als eine praktische Logik, die Entwickelung der Geisteskräfte fördernd, und das Urteil schärfend, so dringend empfahlen. Von Plato wird erzählt: er habe keinen Schüler ohne mathematische Vorbildung zu seinem Unterricht gelassen. Der berühmte Arzt Hippokrates soll seinem Sohne dringend geraten haben, mit dem Studium der Arzeneikunst auch das der Mathematik zu verbinden.*) Genug, der Anfänger wird sich bald selbst überzeugen, dafs jeder, der mit Nutzen Mathematik studieren will, auch genötigt ist, sein Denkvermögen in Thätigkeit zu setzen und sich an ein solides Urteil zu gewöhnen, wozu ihm unerschöpflicher Stoff dargeboten wird. Ohne Nachdenken und Spekulieren würden die mathematischen Wissenschaften nicht erfunden sein, und soll das Studium derselben Erfolg haben, Ausbildung des Verstandes, sichere Praxis, schnelle Kombination bekannter Wahrheiten und Auffindung neuer erreicht werden, so mufs sich der Anfänger gleich von Haus aus wissenschaftlich bilden, die vorgetragenen Lehren nicht blofs aufs Wort glauben und mechanisch auffassen, sondern dieselben so zu durchdringen suchen, dafs er die vollkommenste Überzeugung erlange und mithin einsieht, dafs es durchaus so sein mufs, wie behauptet worden.

*) Hippokrates mag hierbei wohl an die Physiologie gedacht haben, die in neuerer Zeit so eifrig kultiviert wird und durchaus Kenntnisse der Mathematik und Naturwissenschaft verlangt.

VI.

System der Geometrie.

Wie schon in IV. gesagt, ist die Geometrie die Wissenschaft von den Eigenschaften, der Konstruktion und Ausmessung der räumlichen Gröſsen und ihre Hauptaufgabe ist: die Eigenschaften derselben zu entdecken. Nun kann man sich aber von jeder der drei Arten räumlicher Gröſsen: Körper, Flächen und Linien unzählige verschieden geformte denken. So sind z. B. die Körper, welche man Würfel, Kegel, Kugel, Cylinder etc. nennt, an Gestalt (Form, Figur) himmelweit verschieden; ebenso die Flächengröſsen, Dreieck, Viereck, Kreis etc.; auſser der Kreislinie lassen sich noch unzählige anders gestaltete krumme Linien denken. Aber alle diese unzähligen Gestalten betrachten und ihre Eigenschaften entdecken zu wollen, würde offenbar, eben weil ihre Zahl unendlich ist, unmöglich sein. Glücklicherweise ist dies aber auch gar nicht nötig. Es hat sich nämlich gezeigt, daſs man zur Bildung einer vollständigen Geometrie dennoch nur sehr wenige von den unzähligen räumlichen Gröſsen zu betrachten und genau zu erforschen braucht, nämlich diejenigen, die uns gleichsam den Schlüssel zur Kenntnis aller übrigen geben.

Die wichtigsten Eigenschaften, welche man bei diesen wenigen räumlichen Gröſsen entdeckt hat, sind nun, wie schon bemerkt, von unsern Vorfahren aufgezeichnet worden. Als die beste Form sie mitzuteilen und zu lehren, hat man sie in sogenannte Lehrsätze gekleidet und diese nach einer gewissen, durch die Wissenschaft selbst vorgeschriebenen systematischen Ordnung an einander gereiht. Denn, so wie in der Arithmetik ein gewisses systematisches Fortschreiten notwendig beobachtet werden muſs, und man z. B. nicht eher das Dividieren lernen kann, bevor man das Multiplizieren gelernt hat, diesem aber das Addieren und diesem wiederum das Zählen vorhergehen muſs, so müssen auch in der Geometrie die Lehrsätze in einer gewissen Ordnung auf einander folgen, und der Anfänger wird deshalb schwerlich einen Satz gehörig verstehen, wenn er nicht alle vorhergehenden Sätze, welche ihn begründen und wie Glieder einer Kette mit ihm zusammenhängen, gehörig verstanden hat.

Um die unumstöſsliche Richtigkeit dessen, was jeder Lehrsatz behauptet, zu bestätigen, sind jedesmal die notwendigen Gründe dafür in Form eines Beweises hinzugefügt und hierauf folgen dann in der Regel noch Beispiele, um den mitgeteilten Satz praktisch einzuüben und dem Gedächtnis einzuprägen.

Sämtliche im System der Geometrie enthaltenen Lehrsätze etc. pflegt man auch wohl die Elemente (Fundamente) derselben und deshalb das System selbst die Elementar-Geometrie zu nennen.

Schliefslich möge hier noch erwähnt werden, dafs altem Herkommen nach, die Geometrie in zwei Hauptteile geteilt wird, nämlich in ebene und körperliche Geometrie. Die ebene Geometrie (Planimetrie) betrachtet nur solche Konstruktionen, welche ganz in einer ebenen Fläche liegen; die körperliche Geometrie (Stereometrie) dagegen diejenigen räumlichen Gröfsen, welche nicht in einer ebenen Fläche liegen und deren Bilder deshalb auch nur perspektivisch gezeichnet werden können.

Mit der Betrachtung der einfachsten räumlichen Gröfsen müssen wir natürlich beginnen und zwar zunächst mit den Bestandteilen der ebenen Figuren, nämlich mit der Betrachtung der geraden Linien und Winkel (resp. Ecken). Denn obgleich jeder Mensch diese Begriffe schon hat und bei nüchternem Verstande gewifs keine gerade Linie mit einer krummen verwechseln wird, so ist doch eine genauere mathematische Bestimmung dieser Begriffe notwendig.

Wer nun gesunden Menschenverstand und für merkwürdige Schöpfungen des menschlichen Geistes Sinn hat, nicht denkfaul ist und sich nicht durch die ersten Schwierigkeiten (die sich übrigens durch fleifsiges Repetieren beseitigen lassen) abschrecken läfst, der wird nach Überwindung derselben sich immer mehr und mehr für die mathematischen Wissenschaften interessieren, sich über die schöne Ordnung in denselben freuen und von ihrer überzeugenden Gewifsheit überrascht, mit zunehmender Spannung die allmähliche Entwickelung derselben verfolgen.

Um zur Kenntnis der ganzen Geometrie zu gelangen, hat man übrigens im ganzen nur etwa hundert eigentliche (hier mit gesperrter Schrift bezeichnete) Sätze zu lernen, und diese werden die darauf zu verwendende Zeit, wenn wöchentlich auch nur zwei statt vier gelernt werden, reichlich lohnen.