Maschinenbau

Studien-Jahr 1860/61

Redtenbacher, Ferdinand

Karlsruhe, 1861

Lehre von der Festigkeit und Elastizität der Materialien

urn:nbn:de:bsz:31-278567

Lehre von der Festigkeit und Elasticität der Materialien.

Dabei handelt es sich um die Gesetze des Verhaltens der Körper unter der Einwirkung der äußeren Kräfte.

Alle Körper, wie sie in der Natur vorkommen sind absolut starr, und wenn äußere Kräfte auf sie einwirken erleiden sie Veränderungen, sie werden ausgedehnt, zusammengedrückt, gebogen, verwunden; sie erleiden also Volumen-, Elastizität-, Formveränderungen; es kömmt darauf an, daß wir diese Gesetze studieren, nach welchen die Änderungen vorgehen.

Bei der Lehre von der Festigkeit und Elastizität der Materialien kann man einen rationellen Weg einschlagen, indem man von einer fundamentalen Grundanschauung ausgeht und auf diese Anschauungsweise die Gesetze der Statik anwendet. Dieser Weg führt zur tiefsten Einsicht, allein er fordert einen bedeutenden Aufwand an analytischen Materialien und Apparaten und am Ende bleibt doch nichts übrig als annähernd zu verfahren.

Ein anderer Weg besteht darin, daß man zuerst Erfahrungen macht, dadurch zu gewissen Regeln gelangt, die, wenn auch nicht absolut, so doch annähernd genau sind, und darauf weiter baut. Dieser Weg gewährt allerdings nicht die tiefe Einsicht, aber man kommt auf verhältnißmäßig einfachen Mitteln vorwärts und die Resultate, die man erhält sind leicht anwendbar, und leisten für die Praxis gute Dienste.

Diesen zweiten Weg schlagen wir ein indem wir Versuche anstellen.

1. Stabausdehnungs Gesetz.

Die einfachste Art auf einen Körper Kräfte einwirken zu lassen ist die, daß man auf einen stabförmigen Körper eine Kraft einwirken läßt, die denselben seiner Länge nach auszudehnen strebt. Wir machen die Erfahrung, daß die Ausdehnung und die ausdehnende Kraft in einem gewissen Zusammenhang stehen. Um diesen Zusammenhang verständig zu machen, können wir geradezu Experimente anstellen, zu welchen wir eine Menge Stäbe desselben Materials, aber von verschiedenen Dimensionen nehmen, verschiedene Kräfte einwirken lassen und die Ausdehnung messen. Dieser Weg ist aber sehr mühsam.

Schlagen wir einen andern Weg ein, um uns den Vorgang, um den es sich hier handelt vorzustellen, und in den Körper hineindenken und den Vorgang zu erforschen suchen, wenn eine solche ausdehnende Kraft einwirkt, und indem wir versuchen zu errathen, nach welchem Gesetz diese Einwirkg stattfindet. Haben wir auf diese Weise das Gesetz aufgestellt, so gehen wir an die Experimente, stellen Versuche an, durch welche wir prüfen, ob dieses Gesetz richtig ist oder nicht. Dieser Forschungsweg führt in den meisten Fällen zum Ziel.

Hat nun der Stab die ursprüngliche Länge = l und den Querschnitt = a, bestehe ferner aus einem gewissen Material

Nun lassen wir auf den Stab gewisse Kräfte einwirken, zuerst eine kleine Kraft, dann immer größere Kräfte.
Diese ausdehnende Kraft sei = P.
Die Größe der Ausdehnung = G.
Wir stellen uns nun die Frage, wie groß das e, d. h. die Ausdehnung unter den verschiedenen Kräften sei.
Mathematisch ausgedrückt hätten wir

$$e = \text{funct}(l, a\, P, E)$$

worin E der Elasticitätsmodul ist, über welchen wir später reden werden. Nun ist klar, daß diese Ausdehnung von der Größe der ausdehnenden Kraft abhängt und wird mit der ausdehnenden Kraft wachsen. Wenn wir fragen in welcher Weise das e von P abhängt, so ist das einfachste, daß das e dem P direkt proportional sei; dann aber ist in der Formel P als Faktor anzusehen. Ferner können wir annehmen, daß man einen langen Stab stärker ausdehnen kann als einen kurzen, und es wächst die Ausdehnung mit der Länge des Stabes, und es ist das natürlichste, daß das e dem l direkt proportional sei, dann aber steht auch l als Faktor. Weil nun die Ausdehnung abnimmt, wenn der Querschnitt des Stabes zunimmt, so ist das einfachste anzunehmen, daß das e dem a verkehrt proportional sei. Folglich steht a im Nenner.
Die Ausdehnung hängt ferner ab von der Natur des Materials und wir schreiben noch den Factor $\frac{1}{E}$ hinzu und heißen ihn Elasticitätsmodul. Wir haben somit die Formel

$$e = f(l, a, P, E) = \frac{Pl}{aE} \quad (1.)$$

Man könnte auch fragen, ob die Form des Querschnitts keinen Einfluss habe auf die Ausdehnung, aber man wird sich nach einiger Ueberlegung sagen müssen, dass dieselbe schwerlich bei gleichem Quadratinhalt einen merklichen Einfluss haben könne. Bei allen bisherigen Betrachtungen haben wir natürlich vorausgesetzt und angenommen, dass die Form der Querschnitte durch den ganzen Körper identisch sei.

Wir benehmen uns nun, als ob wir die Wahrheit erfahren hätten, dann ist es leicht zu sagen, was denn eigentlich die Grösse E bedeute. Angenommen nämlich, dass dieses Gesetz nicht eine Annäherung, sondern eine absolute Wahrheit sei, so müsste sich dieses dadurch kundgeben, dass man für einen u. denselben Stab für E immer den gleichen Werth finden würde, ob man den Stab durch eine schwache oder starke Kraft ausdehnte, ob der Stab kurz oder lang wäre. Gesetzt nun der Fall, dass es eine Wahrheit wäre, so könnten wir ~~annehmen~~ uns den Stab so ausgedehnt denken, dass $e = l$ würde, wobei wir annehmen der Stab habe den Querschnitt $\alpha = 1$. Für diesen Fall würde $E = P$, und E wäre die Kraft, die nöthig ist, um einen Stab vom Querschnitt $= 1$ um seine ganze ursprüngliche Länge auszudehnen. Für starre Materialien wäre dieselbe natürl. ungeheuer gross, für andere, wie caoutchouc ganz klein.

Die Gleichung (1) lässt sich auch anders schreiben

$$\left(\frac{P}{\alpha}\right) = E\left(\frac{e}{l}\right) \qquad (2.)$$

wobei die in Klammern stehenden Quotienten besondere Bedeutung haben:

$\frac{P}{\alpha}$, bedeutet die Kraft mit der die Einheit des Querschnitts ausgedehnt wird und diese Kraft nennen wir Spannungsintensität

$\frac{e}{l}$ bedeutet folgendes. Wenn e die gesammte Ausdehnung und l die ursprüngliche Länge bedeutet, so drückt dieser Bruch aus um wieviel jede Längeneinheit ausgedehnt worden ist.

Es bedeutet also:

$$\frac{P}{a} = p = \text{Intensität der Spannung}$$

$$\frac{e}{l} = \lambda = \text{lineare Ausdehnung, verhältnißmäß. Ausdehnung.}$$

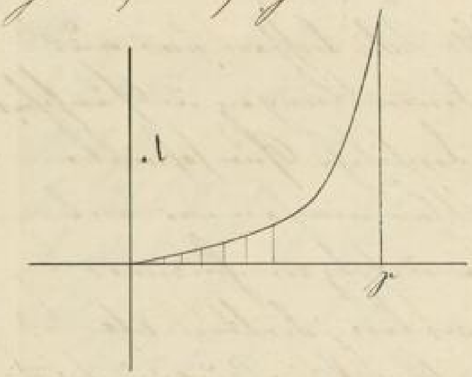
Nun ist die Frage ob die obige Behauptung wahr ist. Wir denken uns folgende Versuche gemacht: Wir lassen uns aus demselben Material Stäbe von verschiedenen Längen u. Querschnitten anfertigen, daß sie vollkommen identische Querschnitte haben und vollkommen homogen sind. Nun machen wir mit dem ersten eine Reihe von Versuchen u. setzen ihn immer stärkeren Kräften aus, ebenso den zweiten, dritten etc u. erhalten eine Reihe von Zahlenwerthen für P u. e u. wenn nun obiger Ausdruck eine Wahrheit ist, so muß jeder einzelne dieser Versuche denselben Werth für ε geben.

Aus Gleichung 1 folgt:

$$\varepsilon = \frac{Pl}{ae} = \frac{\left(\frac{P}{a}\right)}{\left(\frac{e}{l}\right)} = \frac{p}{\lambda}$$

Rechnen wir für jeden einzelnen Versuch den Werth von $\frac{Pl}{ae}$ und machen wir eine Reihe von Versuchen, und wenn dann immer die gleichen Werthe heraus kämen, so folgte daraus, daß unser hypothetisches Gesetz richtig wäre u. daß für diesen individuellen Stab, ε den Werth hat, den wir gefunden haben. Macht man wirklich die Versuche, so zeigt sich, daß ε nicht ganz constant ist.

Innerhalb gewisser Grenzen verändert sich ε beinahe nicht, namentlich wenn S und λ nicht zu groß sind.
Aber wenn diese Spannungs-Intensitäten über eine gewisse Grenze hinausgehen, namentl. wenn man sich dem Zustande nähert, da der Stab reißt, so wird der Elasticitätsmodulus auffallend variabel. Die Art u. Weise wie dies stattfindet, kann man graphisch darstellen, wenn man auf der Abscisse die Spannungsintensitäten und auf die Ordinaten die verhältnißmäßige oder lineare Ausdehnung aufträgt.



Aus der Fig. ist nun ersichtlich, daß für schwache Spannungsintensitäten ε konstant ist und wenn dieselben eine gewisse Grenze übersteigen, so wird ε variabel. Das aufgestellte Gesetz ist also kein Naturgesetz; denn von einem Naturgesetz gibt es keine Ausnahmen, sondern bloß eine empirische Regel, welche mit der Wirklichkeit sehr gut übereinstimmt, so lange es sich um kleine Ausdehnungen handelt.
Daß es kein Naturgesetz ist, erhellt aus der Kurve, durch welche das ε dargestellt ist, denn eine Kurve kann nie einen Theil haben der eine gerade Linie ist, wenn die Kurve nach einem Gesetz gebildet ist.
Es wird also der erste Theil nur annähernd eine gerade Linie sein.
Die Werthe für ε Seite 36 der Resultaten
Nun hat aber z. B. nicht alles Schmiedeisen den gleichen Elasticitätsmodul, sondern derselbe unterliegt bei den

verschiedenen Sorten der Materialien bedeutenden Schwankungen. Man muß daher bei größeren Werken, Brücken die individuellen Eigenschaften und Elasticitätsmodul für das zu verwendende Schmiedeisen vorerst genau untersuchen, u. darf sich nicht mit den mittleren Werthen begnügen, welche allerdings für die Constructionen des Maschinenbaues genügen, u. wie sie in den Resultaten für die verschiedenen Materialien zusammengestellt sind.

In der Festigkeitslehre nehmen wir den Centimeter als Längeneinheit, den Quadratcentimetre als Flächeneinheit u. den Cubiccentimeter als Cubiceinheit an.

Elasticitätsgrenze.

Man versteht darunter diejenige Grenze, von welcher an der Elasticitätsmodul aufhört constant zu sein; welche Grenze sich allerdings nicht genau bestimmen läßt. Die Grenze der Elasticität für die verschiedenen Materialien siehe Resultate Seite 37.

Bleibende Veränderungen.

Wenn man einen Stab nimmt, denselben schwach ausdehnt, u. dann die ausdehnende Kraft wegnimmt, den Stab sich selbst überläßt, so zieht er sich wieder vollständig zusammen u. kehrt ganz in seine ursprüngliche Lage zurück; es kommen also in diesem Falle keine bleibenden Verlängerungen vor. So ist das Verhalten eines Stabes innerhalb der Elasticitätsgrenze. Wenn man aber den Stab bis über die Elasticitätsgrenze ausdehnt u. dann die Kraft wegnimmt, so zieht sich der Stab allerdings zusammen, aber nicht mehr vollständig u. kehrt nicht mehr in seine ursprüngliche Lage zurück, er erleidet mithin eine bleibende Verlängerung. Innerhalb der Elasticitätsgrenze ist dies Verhalten analog mit dem was man Stabilität nennt; über die Elasticitätsgrenze hinaus hört die Stabilität auf. Ein Material, das innerhalb der Elasticitätsgrenze ausgedehnt wird, leidet nicht an seiner Qualität. Man muss daher für praktische Verwendungen immer sorgen, dass diese Grenze nicht überschritten werde.

Zusammenziehung des Querschnitts.

Wir haben bis jetzt nur die Veränderungen beobachtet, die an der Länge eines Stabes vorgehen, u. unbeachtet gelassen, was im Querschnitte vorgeht, da doch das Gefühl uns sagt, sowie auch die Versuche bestätigen, dass bei der Verlängerung des Stabes eine Abnahme des Querschnitts eintritt. Dehnt sich der Stab aus, so zieht sich der Querschnitt zusammen u. diese Abnahme verschwindet vollständig, sowie die ausdehnende Kraft weggenommen wird, aber wohlgemerkt so lang als die Ausdehnung innerhalb der Elasticitätsgrenze bleibt.

Absolute Festigkeit eines Materials.

Wir verstehen darunter die Kraft, oder das Maass der Kraft, die nothwendig ist, um einen Stab von 1 □ c.M. Querschnitt abzureissen. Nun ist leicht einzusehen, dass die Kraft P, die nothwendig ist um einen Stab vom Querschnitt a abzureissen, a mal so gross ist als die, welche einen Stab von 1 □ c.M. Querschnitt abreissen kann. Heissen wir die letztere Kraft oder die absolute Festigkeit A, so haben wir:

$$P = a\mathfrak{A}.$$

die Kraft um den Stab abzureißen ist unabhängig von der Länge des Stabes, sowie auch unabhängig von der Form des Querschnitts; sie ist nur abhängig von der Größe des Querschnittes und dem Material des Stabes.

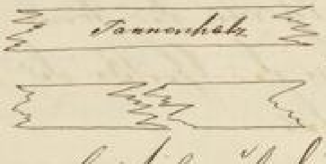
$$\mathfrak{A} = \frac{P}{a}.$$

Um dies zu beweisen, muß man bei verschiedenen Stäben von verschiedenen Längen und Querschnitten immer denselben Werth finden. Die für $\mathfrak{A}$ gefundenen Werthe sind zu finden in der Tabelle u. den Resultaten Seite 36. Dabei sind die Kräfte in Kilogrammen ausgedrückt. Die absolute Festigkeit ist wie der Elasticitätsmodul nicht bei allen Qualitäten eines und desselben Stoffes gleich, sondern sie schwankt z. B. bei Guß- u. Schmiedeisen u. Stahl bedeutend. Eisen das frei von Nebenbestandtheilen ist wird natürlich größere absolute Festigkeit haben.

Verhalten der Materialien beim Abreissen.

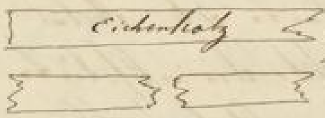
Wir denken uns, daß wir eine Maschine haben, mittelst derer wir die Stäbe zum Ausdehnen und Zerreißen bringen können, u. suchen uns die dabei eintretenden Erscheinungen deutlich zu machen.

a) Wir nehmen einen Stab von Tannenholz, spannen denselben ein, dehnen ihn aus, indem wir die spannenden Kräfte mehr u. mehr wachsen lassen. Haben dieselben die Elasticitätsgrenze überschritten, so dehnt sich der Stab im ganzen genau gleichmäßig aus, die Querschnitte nehmen etwas ab u. wenn die Ausdehnung bereits sehr stark geworden ist, so hört man zuweilen em Klingen, wie wenn eine Saite eines Instruments reißt, es reißen einzelne Fasern, das Klingen vermehrt sich, es reißen



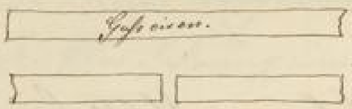
immer mehr Fasern u. plötzlich wenn die Spannung einen gewissen Grad erreicht hat, so folgt die Trennung der Theile, wobei sich auch die Structur des Tannenholzes deutlich zeigt.

b. Nehmen wir hingegen einen Stab aus Eichenholz u. verfahren auf dieselbe Weise, so sind die Erscheinungen anfangs dieselben wie beim Tannenholz, bei einem gewissen Grad von



Ausdehnung hört man ein sehr leises Geräusch, und es reißt endlich der Stab, wobei sich wieder die Structur des Holzes außerordentlich deutlich zeigt.

c. Verschiedener halten sich die Metalle, je nachdem sie schmiedbar oder schmelzbar sind. Nehmen wir z. B. einen Stab von Gußeisen, welches schmelzbar ist u. lassen ausdehnende Kräfte darauf einwirken, so wird sich der Stab in seiner Länge aus-

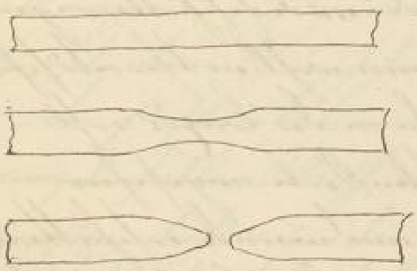


dehnen u. in seinem Querschnitt zusammenziehen. Man hört kein Geräusch, auch zeigen sich keine auffallenden Erscheinungen, aber plötzlich tritt der Riß ein u. es zeigt sich an der Rißfläche die Textur des Gußeisens in charakteristischer Weise. Die Rißfläche ist rauh, crystallinisch. Bei weißem Gußeisen ist die Rißfläche mehr crystallinisch als beim grauen. Ganz ähnlich verhält es sich auch mit andern schmelzbaren Metallen: Kanonenmetall, Gußstahl, s. bei welchen letzteren die Rißfläche eine prachtvolle crystallinische glänzende Structur zeigt, u. die beiden Gegensätze: tiefe schwarze Schatten und leuchtenden Glanz vereinigt.

d. Ganz anders sind die Erscheinungen, die sich bei schweißbaren Metallen und insbesondere beim Schmiedeisen zeigen.

Wenn wir einen Stab von Schmiedeisen ausdehnen, welches ganz rein ist, so zeigen sich folgende Erscheinungen.

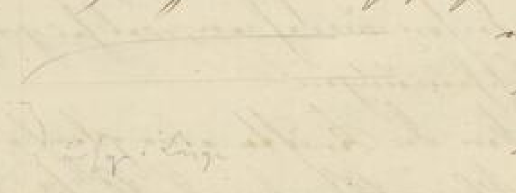
Anfangs erfolgt durch Einwirken der Kräfte eine gleichmäßige Ausdehnung und eine kleine Abnahme der Größe des Querschnitts. Wird aber die Elasticitätsgrenze überschritten, so erfolgt die weitere Ausdehnung nicht mehr gleichmäßig nach der ganzen Länge des Stabes, sondern an gewissen Stellen erfolgt die Ausdehnung stärker u. wenn wir diese fortsetzen, so reißt der Stab u. die beiden Enden sind gleichsam zugespitzt. Man sieht hier das zähe Wesen des Schmiedeisens, es protestirt so lang als möglich gegen das Zerreißen. Das zähe Wesen kommt im Schmiedeisen in noch höherem Maße vor, wenn man den Stab nicht durch Ausdehnen, sondern durch Biegen zerreißen will.



Wenn wir einen Stab ausdehnen, innerhalb der Elasticitätsgrenze, so frägt es sich, ob mit der Zeit eine weitere Verlängerung eintritt, oder ob die Verlängerung constant sei.

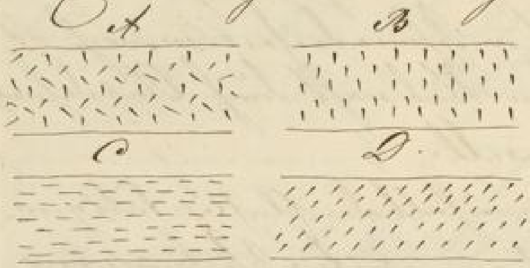
Ganz streng ist die Frage noch nicht entschieden: soviel aber ist wahrscheinlich, daß die Ausdehnungen allerdings mit der Zeit etwas wachsen, aber wie es scheint nimmt die Ausdehnung nicht proportional mit der Zeit zu, sondern so, daß die Länge des Stabes sich einer gewissen Grenze fortwährend nähert, vielleicht ohne dieselbe jemals zu erreichen.

Man kann dies auch graphisch darstellen, indem man die Zeiten als Abszissen und als Ordinaten die verschiedenen Längen aufträgt. Das Gesetz aber nach welchem die Länge wächst ist nicht bekannt, es ist



angenähert dargestellt durch die beistehende Kurve. Dadurch sind die Veränderungen dargestellt, die möglicherweise durch andauernde Spannung eintreten können.

Eine weitere Frage ist, ob die Festigkeit eines Materials durch andauernde dynamische Einwirkungen, andauernde Erschütterungen, nicht leidet. Dies ist eine Frage, wobei man wohl in theoretischer Seite Vermuthungen aufstellen kann, die in der Praxis erst erledigt werden muß. Von der theoretischen Seite angesehen muß man sich sagen, daß durch derlei andauernde erschütternde Einwirkungen Änderungen im Innern des Körpers, in der



Molekulargruppierung eintreten können, wodurch sich die Festigkeits und Elasticitätsverhältnisse sich bedeutend ändern können. Wenn wir durch (A) ein Atom des Körpers andeuten, so können z. B. durch die Erschütterungen in dem Körper, in welchem ursprüngl. die Atome wirr durcheinander gelagert waren, Tendenzen entstehen, sich regelmäßiger zu lagern. Denn jedes Atom ist eigentlich freischwebend u. ein unmittelbarer Kontakt findet nicht statt. Wenn aber die Lagerung sich ändert, so tritt allerdings auch eine Änderung der Elasticitäts und Festigkeitsverhältnisse ein; tritt z. B. eine Lagerung wie bei

B an, so wird bei dieser transversalen Lagerung die Festigkeit bedeutend verlieren, bei der Lagerung C fing sogar zu nehmen u. der Zustand D ungefähr die Festigkeit der ersten A haben.

2. Zusammendrückung der Stäbe.

Die Versuche zeigen, daß für die die Zusammendrückung der Stäbe ganz dieselben Regeln, wie die für die Ausdehnung gelten, so lange die Zusammendrückung nicht eine gewisse Grenze überschreitet u. es gilt auch hier die Regel, daß die Zusammendrückung proportional ist der Länge des Stabes, als auch der zusammendrückenden Kraft u. verkehrt proportional dem Querschnitt des Stabes.

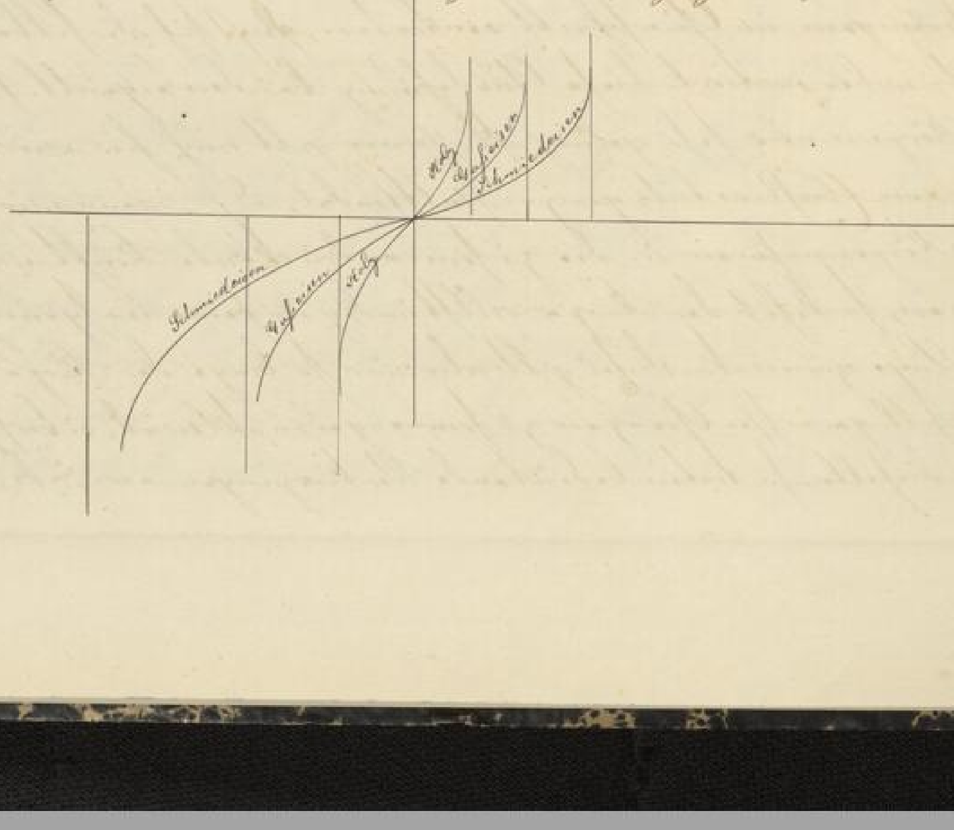
Der Elasticitätsmodul hat für die Zusammendrückung ganz denselben Werth, wie für die Ausdehnung u. die Versuche zeigen, daß wenn die Zusammendrückung eine gewisse Grenze überschreitet, dann dies Gesetz nicht mehr richtig ist, daß dann der Elasticitätsmodul nicht mehr constant bleibt, sondern bei fortschreitender Zusammendrückung mehr u. mehr wächst; es zeigt sich auch ferner bei der Zusammendrückung, daß Änderungen im Querschnitt eintreten, daß sich derselbe ausdehnt, wobei natürl. diese Ausdehnung bei den eigentl. starren Körpern nur sehr gering ist. Ferner gilt auch hier wiederum, daß eine Elasticitätsgrenze stattfindet, d.h., wenn wir einen Körper nehmen u. die zusammendrückende Kraft wegnehmen, so kehrt der Körper vollständig in seine ursprüngliche Lage zurück. Dieses gilt aber nur so lange der Körper innerhalb gewisser Grenzen zusammengedrückt wird, überschreitet man dieselbe, so treten bedeutende Verkürzungen ein, u. es wird die Kraft wieder weg, so dehnt sich zwar der Körper wieder aus, allein er kehrt nicht vollständig in seine frühere Lage zurück. Man kann annehmen, daß sich die Natur u. Qualität eines Materials nicht verändert, so lange die Elasticitätsgrenze nicht überschritten ist, daß aber eine Änderung in der Molekülargruppirung eingetreten ist, wenn die Folge einer Zusammendrückung eine bleibende Verkürzung ist. Bei der Verwendung der Materialien zu Constructionen darf also niemals diese Grenze überschritten werden.

Absolute rückwirkende Festigkeit.

Als Maaß für dieselbe gilt diejenige Kraft, die nöthig ist, um 1 Stab von 1 □ Centim. Querschnitt zu zerquetschen. Die Tabelle über dieselbe siehe Resultate Seite 37.

Wir wollen nun das was in dieser Tabelle gegeben ist, graphisch darstellen. Als Abscissen tragen wir die Spannungsintensitäten auf, als Ordinaten die linearen Ausdehnungen.

Am besten ist es, wenn man sich für die Abscissen u. Ordinaten einen eigenen Maaßstab macht. Für Holz z. B. ist $\frac{R}{A} = \frac{1}{2}$.



Man kann sich auch die Aufgabe stellen zu versuchen, die Gleichung der Linie selbst herzuleiten, die in diesem Gesetze liegt, wobei man auf folgende Weise verfahren kann.

Es sei durch die nebenstehende Figur eine solche Linie annähernd gegeben und aus ihr ist ersichtlich, daß für

$$x = +a\,,\quad y = \infty \text{ u.}$$

$$\text{für } x = -a\,,\quad y = -\infty$$

wird. Zieht man nun an einen beliebigen Punkt eine Tangente, so ist, wenn die zu diesem Punkt gehörigen Coordinaten dx u dy heißen

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi.$$

Nun weiß man aus der Natur der Sache u. es folgt aus den thatsächlichsten Ergebnissen, daß für $x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c} \text{ wird,}$$

während auch

$$\text{für } x = +a\,,\quad \frac{dy}{dx} = +\infty$$

$$\text{und für } x = -a\,,\quad \frac{dy}{dx} = -\infty \text{ wird.}$$

Nach der Lagrange'schen Interpolationsformel erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c}\,\frac{aa}{(a-x)(a+x)} \text{ u}$$

Es ist aber doch nicht gesagt, daß die Kurve, die dieser Gleichung entspricht auch wirklich die Kurve sei, die wir suchen, sondern die Differentialgleichung erfüllt nur die Anforderungen, die geschrieben sind; ohne daß damit gesagt ist, daß diese Kurve auch wirklich das wahre Gesetz ist.

Um nun zu integriren setzt man:

$$\frac{1}{(a-x)(a_1+x)} = \frac{1}{a+a_1}\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a_1+x}\right)$$ und wir haben

$$\frac{dy}{dx} = \frac{aa_1}{\varepsilon(a+a_1)}\left[\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a_1+x}\right]$$

$$y = \frac{aa_1}{\varepsilon(a+a_1)}\left[\int\frac{dx}{a-x} + \int\frac{dx}{a_1+x}\right].$$

$$y = \frac{aa_1}{\varepsilon(a+a_1)}\left[-\lg nat(a-x) + \lg nat(a_1+x)\right] + C.$$

$$y = \frac{aa_1}{\varepsilon(a+a_1)}\left(\log nat\frac{a_1+x}{a-x} + C\right)$$

Um nun die Constante zu bestimmen, setzen wir $x = 0$, dann wird auch $y = 0$ und

$$0 = \frac{aa_1}{\varepsilon(a+a_1)}\left(\log nat\frac{a_1}{a} + C\right)$$

der erste Faktor ist nie $= 0$, folglich muß

$$0 = \lg nat\frac{a'}{a} + C.$$

oder $C = -\log nat\frac{a'}{a}$ und schließlich

wird $y = \frac{aa_1}{\varepsilon(a+a_1)}\log nat\left(\frac{a_1+x}{a-x}\times\frac{a'}{a}\right)$

und ausgegangen sind wir von

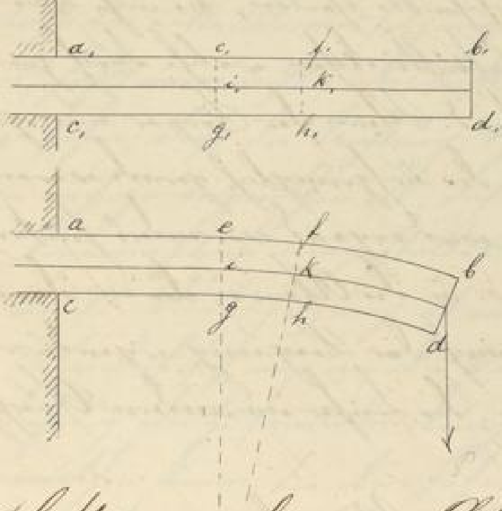
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{aa_1}{(a-x)(a_1+x)}$$

Was wir bis jetzt gethan haben war bloße Induction, aber wir haben kein Naturgesetz, weil es nicht aus feststehenden Prinzipien hergeleitet ist. Aber aus Erfahrungen Gesetze bestimmen zu wollen ist etwas trauriges.

Es gibt unendlich viele Annäherungen, aber nur eine einzige Wahrheit.

Biegung der Stäbe.

Wir denken uns einen Stab von bestimmten Dimensionen u. Querschnitt, spannen denselben an einem Ende ein und lassen auf den Mittelpunkt der freien Endfläche eine [illegible] verticale Kraft einwirken, die den Stab biegt. Es handelt sich nun darum u. wir legen uns die Frage vor, den Gleichgewichtszustand, der in dem gebogenen Stabe herrscht, ausfindig zu machen, zu ermitteln wie groß die Spannungsintensitäten sind, die an den verschiedenen Stellen des Stabes vorhanden sind, ferner



zu bestimmen die ganze Gestalt des Stabes u. womöglich auch die Ortsveränderungen, welches jedes einzelne Atom des Stabes in Folge der Biegung erlitten hat. Ist dies Alles bestimmt, so haben wir den ganzen Zustand des Stabes erkannt. Dies alles sehr genau zu bestimmen, ist gar nicht möglich und wir müssen uns deßhalb mit einer Annäherung begnügen, wie dies überhaupt von allen Rechnungen gilt, die sich auf die Wirklichkeit beziehen, da in der Natur eine so große Mannigfaltigkeit von Einwirkungen von Kräften vorhanden ist, daß eine vollständige Lösung nie möglich ist.

Aus dem Grunde kann ein Problem, das sich auf die Wirklichkeit bezieht, nichts anderes als eine annähernde Lösung erwarten, weil wir die Natur nicht kennen.

Wir nennen nun eine Reihe von Atomen, welche ursprüngl. vor der Biegung in einer u. derselben geraden Linie # zur Längenkante liegen, eine Faser, u. können uns den Körper bestehend denken aus einer Reihe nebeneinander liegenden und miteinander verbundenen Fasern, wobei aber das Wort Faser nur eine Fiktion ist. Wir wollen nun auch den Körper in seinem ursprünglichen Zustande durch Querschnitte theilen, die nahe aneinander liegen, so sind ef & gh Faserstückchen, welche durch zwei solche Querschnitte abgeschnitten sind. Wenn der Körper nun gebogen wird, so werden alle Fasern, die ursprünglich gerade waren, jetzt gekrümmt sein, das Atom e, wird irgend wo anders hinkommen müssen, ebenso das Atom f, u. s. w. u. die Atome, die in dem einen Querschnitte lagen, werden nach der Biegung irgend wo zu treffen sein, ebenso die Atome, die früher im andern Querschnitte waren.

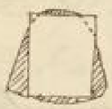
Jetzt müssen wir Hypothesen machen. Wir nehmen an

1. daß alle Atome, welche ursprüngl. in einer Querschnittsebene lagen, auch nach erfolgter Biegung noch in einer Ebene liegen u. zwar in einer Ebene senkrecht zur Krümmungslinie ab, d. h. daß eg normal sei im Punkte e auf ab.
2. daß die Atome eines u. desselben Querschnittes ihre relative Lage gegeneinander nicht ändern
3. daß alle ursprüngl. geraden parallelen Fasern im gebogenen Zustande parallele oder aequidistante Linien zur Faser ab bilden.
4. Wir nehmen eine so schwache Biegung u. Formänderung an, daß für dieselbe der Elasticitätsmodul als constant angesehen werden kann.

Fragen wir uns, ob diese Voraussetzungen richtig sind, oder ob sie es nur annähernd sind und unter welchen Umständen diese Voraussetzungen mit der Wahrheit annähernd übereinstimmen können u. unter welchen Umständen nicht. Dies ist absolut nothwendig zu wissen, weil es von dieser Kenntniß davon abhängt, unter welchen Umständen die Resultate, die uns die Rechnung liefert, mit der Wahrheit übereinstimmen können

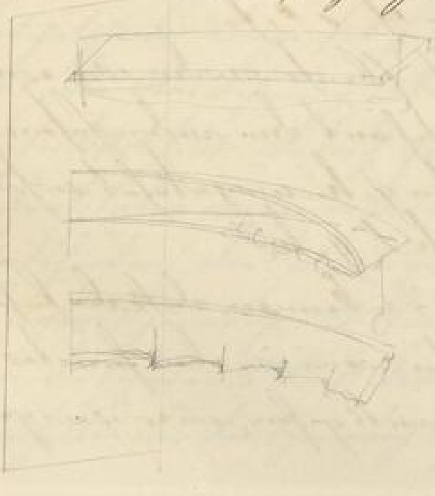
1. daß die erste Voraussetzung wohl nur annähernd richtig sein wird, fühlt man wohl; aber daß dies genau sein sollte ist nicht einzusehen, daß die Richtung eg vollständig normal ist auch ab, sowie auch zu vermuthen ist, daß sich die Querschnittsebene in eine krumme Fläche umgestaltet.

2) die 2te Voraussetzung ist entschieden falsch, was leicht einzusehen ist. Man darf sich nur an die Veränderung des Querschnitts durch Ausdehnung oder Zusammendrückung erinnern. Es wird, wie man leicht vermuthen kann, die obere Faser gedehnt u. die untere zusammengedrückt sein; es ist daher absolut unmöglich, daß sich der Querschnitt conserviert. Ist z. B. der Querschnitt ein Rechteck, so wird eine Form entstehen, wie die in beistehender Figur extravagant dargestellte.



Ferner ist einzusehen, daß manche von den Atomen, die ursprünglich im Querschnitt lagen, in Folge der Biegung ganz aus diesem Querschnitt heraustreten u. ferner manche Atome ganz in den Querschnitt hineintreten. Das Gefühl muß uns sagen, daß unsere Voraussetzung bei starren Körpern und wenn die Biegung eine sehr schwache ist, ganz nahe eine Wahrheit ist.

3. Die 3te Voraussetzung ist wohl zuweilen richtig, unter andern



Umständen aber falsch. Wenn wir z. B. eine Reißschiene so einspannen, daß die Querdimension horizontal ist, so wird unser Satz wohl richtig sein. Spannen wir die Schiene hingegen so ein, daß die Querdimension vertikal steht, so trifft die Voraussetzung nicht ein.

Es können ja auch wie bei Fig. 2.

Ueberwerfungen eintreten, sowie auch bei Fig. 3 Falten auf der unteren Seite. Also ist unsere Theorie auf solche Fälle, wo Ueberwerfungen oder Falten eintreten nicht anwendbar.

Die 4 Annahmen haben nicht blos den Sinn u. die Bedeutung, daß sie uns die Rechnung möglich machen, sondern sie sprechen auch etwas anderes aus, was von großer Wichtigkeit ist, es müssen nämlich diese 4 Bedingungen erfüllt werden, damit irgend ein constructiver Bau seinem Zweck entsprechen kann. Aber wir sind nicht im Stande, das hier gesagte mit mathematischer Genauigkeit zu formuliren; sondern wir können nur herausfühlen ob diese 4 Bedingungen erfüllt sind. Es kommt aber für unsere Zwecke außerordentlich viel an, daß wir uns in die Sache hineinfühlen, weil alle unsere Rechnungen nur Annäherungen sind, u. die Voraussetzungen unter denen sie richtig sind, müssen, weil wir sie nicht rechnen können, heraus gefühlt werden.

4 dies ist eine Bedingung, die zum Zweck der Rechnung gemacht wird; aber sie muß auch erfüllt sein, damit ein Bau seinem Zweck entspreche.

Wir gehen nun zur eigentlichen Rechnung über.

Wir werden gleich erkennen, daß das Fasernstückchen $e, f,$ durch Biegung größer geworden ist, daß also $ef > e, f,$.

Es findet folglich eine Ausdehnung statt. Ebenso werden wir ersehen, daß es sich mit dem anderen Fasernstückchen $g, h,$ umgekehrt verhält und $gh < g, h,$.

Es ist zu erkennen, daß die Fasernstückchen, wenn wir oben hinunter u. einwärts gehen, immer weniger ausgedehnt werden, hingegen immer länger werden, wenn wir von unten hinaufgehen, also die Compression abnimmt. Es muss also nothwendiger Weise irgendwo ein Faserstückchen vorkommen, das weder ausgedehnt, noch zusammengepresst wird, das also seine ursprüngliche Länge beibehalten hat. Ganz die gleiche Betrachtung kann man anstellen für je 2 Normal~~linien~~ ebenen und es wird für je 2 Normallinien sich ein Faserstückchen finden, das weder ausgedehnt noch zusammengepresst ist. Alle diese Faserstückchen zusammengenommen, bilden eine gewisse Linie, deren Gestalt uns bis jetzt noch nicht bekannt ist und wir neutrale Faser nennen wollen.

Wenn nun $l\,i\,k\,m$ die neutrale Faser ist, so sind in derselben alle Faserstückchen so lang als vor der Biegung.

Es ist also $ik = i_1k_1 = e_1f_1 = g_1h_1$

und es drückt ik zugleich aus, wie lang ursprüngl. alle Faserstückchen waren, die zwischen eg u. f_1h_1 liegen. Wir ziehen nun durch k eine Linie $no \,\#\, eg$

So entstehen dadurch 2 Dreiecke knf & kho, aus welchen wir erkennen können, um wieviel jedes einzelne von den Faserstückchen ausgedehnt worden ist. So hatte z. B. das Faserstückchen, das jetzt die Länge pr hat ursprüngl. die Länge pq, folglich qr die Ausdehnung, ebenso ist nf die Ausdehnung des obersten Faserstückchens. Dadurch sind wir jetzt im Stande die Spannungsintensitäten auszurechnen, die an den verschiedenen Stellen stattfinden. Die Spannungsintensität ist aber die auf 1 □ Einh. bezogene Spannung. Stellen wir uns bei ef einen kleinen Querschnitt vor, die spannende Kraft dividiren durch die Grösse des Querschnitts, so erhalten wir die Spannung $ef = P$. dagegen sei die Spannung bei $qr = s$. Die Spannungsintensitäten verhalten sich aber, wie bei der Stabausdehnung gezeigt wurde, wie die Verlängerungen.

Also $P : s = nf : qr = kn : kq$

$$P : s = \lambda : \xi$$

$$s = \frac{P}{\lambda}\xi \quad (1)$$

Die Gleichung (1) gibt also an, wie stark ein □cm bei qr gespannt wird. Nun denkt man sich auch bei qr einen sehr schmalen Flächenstreifen aus dem ganzen Querschnitt, dessen Flächeninhalt f sei; so ist die gesamte Kraft mit der alle Fasern dieses Querschnittes gespannt werden sf, und folglich die Summe aller Spannungen im ganzen Querschnitt

$$\sum sf = \sum \frac{P}{\lambda} f\xi = \frac{P}{\lambda}\sum f\xi \quad (2)$$

Da die Gleichung (2) auf den ganzen Querschnitt bezogen ist, so gibt sie also die Differenz zwischen der Summe aller Spannungen und aller Pressungen, die im ganzen Querschnitt herrschen, an.

Berechnen wir nun das stat. Moment der Kraft mit welcher das Flächentheilchen f gespannt wird, in Bezug auf eine Axe, die durch k geht und senkrecht auf der Ebene der Figur steht. sf ist die Kraft, mit der das Flächentheilchen im Abstande ξ von der neutralen Faser gespannt wird.

Also ist $sf\xi$ das statische Moment der Kraft und

$\sum sf\xi$ die Summe der stat. Momente aller Spannungen und Pressungen.

$$\text{oder } \sum \frac{P}{\lambda}\xi f\xi = \frac{P}{\lambda}\sum f\xi^2$$

woraus man ersieht, dass alle Kräfte nach einerlei Weise zu daher das Bestreben haben

Denken wir uns nun den Stab bei f k durchschnitten u. statt der Sp. & Pressungen in demselben die früher gezeigten Kräfte angebracht, welche dieselben ersetzen u. denken wir uns dann ferner das Material absolut starr, so haben wir also dann einen Körper auf den nur äußere Kräfte einwirken u. müssen die 6 Gleichungen zur Bedingung des Gleichgewichts aufstellen. Wir ziehen durch k deshalb eine Linie ∥ f k und dazu eine Senkrechte dann haben wir 2 Kräfte $P \sin \varphi$ und $P \cos \varphi$ statt der einen P; ferner nehmen wir in k ein 3 faches Axensystem an, eine Axe die ∥ in der Ebene des Papiers liegt und ⊥ kf, die 2te Z steht bei kf ⊥ der Ebene des Papiers & die 3te ist kf.

Es wirken dann in Richtung der X Axe die Kräfte: $P \sin \varphi$ u. die Differenz zwischen der Summe aller Spannungen u. Pressungen.

Da also Gleichgewicht herrschen soll, so muss sein:

$$1.\quad \frac{1}{2} \Sigma f \xi = P \sin \varphi$$

In der Richtung der Z Axe wirken keine Kräfte, also hat man

$$2.\quad 0 = 0.$$

Wir sehen nun, daß wir bei f noch eine Kraft F in der Richtung von k f anbringen müssen, welche wirklich bevor der Stab durchschnitten, vorhanden war, und welche nem Abscheerungskraft nach, denn ohne diese wäre ja kein Gleichgewicht möglich, In der Richtung der dritten Axe y wirken also F & $P\cos\varphi$ und es besteht die 3te Gleichung.

$$F = P\cos\varphi$$

Um die Axe y wirken nun drehend die Kraft P und $\frac{V}{z}\Sigma f\xi$

Man hat also $\frac{V}{z}\Sigma f\xi^2 = Pl$ (1)

Um die Axen x u. z wirken gar keine Kräfte, u. man hat

$$0 = 0 \quad (2)$$

$$0 = 0 \quad (3)$$

Um diese Gleichungen analytisch zu behandeln, ist folgende Voraussetzung zu machen: Wir nehmen an, daß die Biegung so schwach sei, daß wir φ annähernd $= 0$ setzen können, was in der Praxis auch wirklich der Fall ist.

Für $\varphi = 0$ ergeben sich dann die Gleichungen

$$F = P \quad (1)$$

$$\Sigma f\xi = 0 \quad (2)$$

$$\frac{V}{z}\Sigma f\xi^2 = Pl \quad (3)$$

d.h. in Worten ausgedrückt: bei (1) ist die hier schwache Biegung, wie wir sie annehmen, die Abscheerungskraft gleich der Belastung.

Die Gleichung 2 drückt aus, daß der Punkt K der Schwerpunkt des Querschnitts ist, u. da dies für jeden Querschnitt gilt, so ist also die neutrale Faser gleich der Schwerpunktsfaser.

Setzen wir in Gleichung (3) $\frac{\Sigma f\xi^2}{z} = E$, so ist E eine Größe, die nur von der Größe u. Form des Querschnitts abhängt u. findet sich für verschiedene Querschnitte Taf V in den Resultaten aufgezeichnet; man hat dann auch die Gleichung

$$p E_1 = \mathfrak{P}\varphi.$$

oder $$p = \frac{\mathfrak{P}\varphi}{E_1}$$

welches Gesetz die Spannungsintensität ausdrückt, die an der obersten Faser in der Entfernung ξ von der Belastung stattfindet.
Setzt man nun diesen Werth von p in die Gleichung

$$s = \frac{p}{z}\,\xi \text{ ein,}$$

so erhält man $$s = \frac{\mathfrak{P}\varphi}{E}\,\frac{\xi}{z} = \frac{\mathfrak{P}}{Ez}(\varphi\xi).$$

oder $$s = \left(\frac{\mathfrak{P}}{E\int\xi^2}\right)\varphi\xi.$$

Man kann deshalb die Spannungsint., die in jedem Punkt stattfindet mittelst dieser Gleichung berechnen, und da die Größe in der Klammer für jeden Punkt denselben Werth hat, so braucht man also diese Größe nur mit der horizontalen Entfernung des Punktes von der Belastung u. mit der vertikalen desselben von der neutralen Faser zu multipliziren.
Mittelst dieser Regel kann man sich leicht eine graphische Darstellung derjenigen Punktenreihen, in denen gleiche Spannungsintensitäten herrschen.

Bisher setzten wir immer eine sehr schwache Biegung voraus, wir wollen uns nun aber erlauben die erhaltenen Resultate auch auf starke Biegungen zu übertragen u. endlich auf so starke, dass der Bruch erfolgt. Aus letzterer Formel folgt, dass der Bruch bei d.

stattfinden muß; und zwar findet er dann statt, wenn die Spannung bei a, also die Belastung gleich der absol. Festigkeit ist. diese Belastung P muß also berechnet werden.

$$\text{Es ist } SE = Pl.$$

Bezeichnen wir nun mit L. diejenige Spannungsintensität bei welcher der Stab bricht, und nennen diese den Bruchcoefficienten des Materials.

$$\text{So ist auch } L \cdot E = Pl.$$

$$\text{oder } P = \frac{L \cdot E}{l} \quad (1)$$

dieser Bruchcoefficient findet sich für verschiedene Materialien in den Resultaten verzeichnet, und man versteht also darunter diejenige Spannungsintensität bei der ein Stab von 1 □cm Querschnitt bricht.

__Beispiel__. für einen Stab von Eichenholz, dessen Länge $l = 200$, Breite $b = 10$ und die Höhe $h = 20$ ist, diejenige Belast. P zu suchen bei der der Stab bricht.

Man findet in d. Res. $L = 700$, $E = \frac{1}{6} bh^2 = \frac{1}{6}\, 10 \cdot 400 = 666.$

$$\text{Also ist } P = \frac{700 \cdot 666}{200} = 2331 \text{ Kilg.}$$

die Gleichung (1) drückt also das Tragvermögen eines Balkens aus, u. zwar wird dies unter sonst gleichen Umständen um so größer sein, je größer E ist, und wir werden uns also in der Folge mit diesem E zu beschäftigen haben, d.h. E hängt, wie wir gesehen haben nur von der Form des Querschnitts ab.

Wir müssen deshalb diejenigen Querschnittsformen aufsuchen, die so beschaffen sind, daß E den größt möglichen ~~Querschnitt~~ Werth erhält bei gleicher Querschnittsgröße.

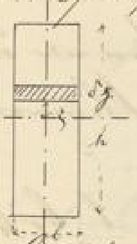
Aus der Gleichung von E sehen wir schon, daß E um so größer sein wird, je größer ζ ist; d. h. es wird bei denjenigen Formen um so größer sein, bei denen sich das Material in großer Entfernung von der neutralen Faser befindet.

Mittelst dieser Regel kann man nun leicht entscheiden, welche von zweien oder mehreren gegebenen Querschnittsformen das größte Tragvermögen besitzen.

Berechnungen von E für einige Querschnittsformen (Taf V. Fig.)

Aus der Formel $E = \frac{\Sigma f \zeta^2}{z}$ ersichtlich, daß wir nur das Trägheitsmoment des Querschnitts zu berechnen haben, und dieses durch z dividiren müssen.

1. Der Querschnitt sei ein Rechteck. Es ist dann $z = \frac{1}{2} h$.

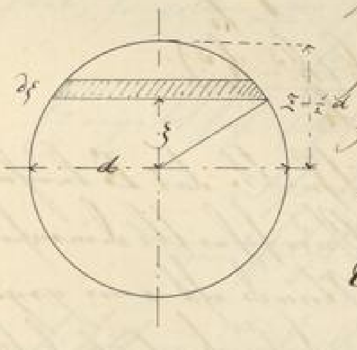


$$f = b\, d\zeta$$

$$\text{und also } \Sigma f \zeta^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b\, d\zeta\, \zeta^2 = \frac{bh^3}{12}$$

$$\text{folglich } E = \frac{\frac{1}{12} bh^3}{\frac{1}{2} h} = \frac{1}{6} bh^2$$

2. Der Stab sei cylindrisch.



Dann ist $z = \frac{1}{2} d$ u. die Breite eines Streifens $= 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \zeta^2}$

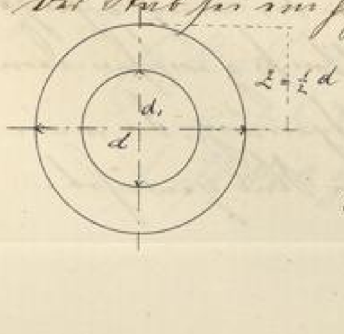
$$\text{folglich } f = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \zeta^2}\, d\zeta.$$

$$\text{und } \Sigma f \zeta^2 = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} 2\zeta^2 \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \zeta^2}\, d\zeta$$

$$\text{Also } E = \frac{\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} 2\zeta^2 \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \zeta^2}\, d\zeta}{\frac{1}{2} d}$$

$$E = \frac{\frac{\pi}{64} d^4}{\frac{1}{2} d} = \frac{\pi}{32} d^3.$$

3. Der Stab sei ein hohler Cylinder.



Es ist $z = \frac{1}{2} d$.

$$\text{ferner ist } \Sigma f z^2 = \frac{\pi}{64} d^4 - \frac{\pi}{64} d_1^4$$

$$\text{Also } E = \frac{\frac{\pi}{64}(d^4 - d_1^4)}{\frac{1}{2}d} = \frac{\pi}{32}\,\frac{d^4 - d_1^4}{d}$$

$$= \pi\,\frac{d^2 - d_1^2}{32}\,\frac{d^2 + d_1^2}{d} = \frac{\pi}{32}(d^2 - d_1^2)\left(d + \frac{d_1^2}{d}\right)$$

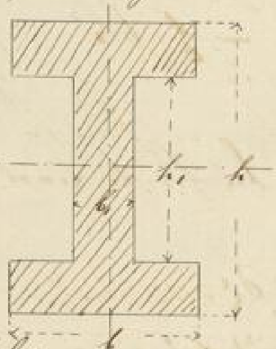
4. Der Stab habe einen Querschnitt, wie beistehende Fig. zeigt. Man wird also zuerst das Trägheitsmoment des Rechtecks abcd berechnen, u. dann das des Rechtecks efgh abziehen, u. man wird das Trägheitsmoment des verlangten Querschnitts erhalten.

Man hat $z = \frac{1}{2}h$

und $\Sigma f\varsigma^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh_1^3}{12}$

$$E = \frac{\frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{12}bh_1^3}{\frac{1}{2}h} = \frac{1}{6}\,\frac{b}{h}(h^3 - h_1^3)$$

5. Der Querschnitt habe die I form. Hierbei denken wir uns ein großes Rechteck u. ziehen von diesem die beiden kleinern ab.



Es ist $z = \frac{1}{2}h$

Also $\Sigma f\varsigma^2 = \frac{1}{12}bh^3 - 2\left(\frac{1}{12}\,\frac{b - b_1}{2}\,h_1^3\right)$

folglich $E = \dfrac{\frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{12}(b - b_1)h_1^3}{\frac{1}{2}h}$

$$= \frac{b_1h_1^3 + b(h^3 - h_1^3)}{6h}$$

Nachdem wir nun also für verschiedene Querschnitte das E berechnet haben, legen wir uns die Frage vor, welche Querschnittsdimensionen ein Balken erhalten muß, damit er im Stande ist eine gegebene Last mit Sicherheit zu tragen. Wir sehen sogleich, daß die Maximalspannung, die im Stabe herrschen darf, bedeutend kleiner sein muß als diejenige, bei welcher der Bruch erfolgt, und man versteht nun unter dem Verhältniß zwischen dem Bruchcoefficienten u. derjenigen Maximalspannung, die man eintreten lassen will, die Sicherheit, die ein Stab gewährt.

Es bedeutet z. B. ein Stab gewährt die 10fache Sicherheit heißt, daß man denselben 10 mal so stark belasten darf, bis er bricht.
Wir wollen nun an einigen Beispielen die Berechnung der Querschnittsdimensionen erläutern.
Beispiel 1. Für einen Stab aus Eichenholz, dessen Querschnitt rechteckig, dessen Länge 200 cm beträgt, die Querschnittsdimensionen zu berechnen, wenn derselbe mit 2000 Kilg. belastet wird, und eine 10fache Sicherheit gewähren soll.

Es ist also $P = \frac{700}{10} = 70$

und $E = \frac{1}{6} bh^2$

oder weil $Pl = PE$,

so ist auch $Pl = \frac{P}{6} bh^2$

oder $2000 \cdot 200 = \frac{70}{6} bh^2$

und $bh^2 = \frac{6 \cdot 2000 \cdot 200}{70} = 34286.$

Da nun b oder h willkürlich angenommen werden kann, u. sich dies je nach den Umständen, denen der Balken entsprechen soll, richtet, so wollen wir hier beispielsweise ein Verhältniß von

$\frac{h}{b} = \frac{7}{5}$ annehmen.

Es ergibt sich $\left(\frac{b}{h}\right) h^3 = 34286$ oder $h^3 = 34286 \cdot \frac{7}{5} = 48000$

also $h = \sqrt[3]{48000} = 36{\cdot}3$ cm

und folgt $b = \frac{5}{7} h = 26$ cm.

2. Es soll ein runder Stab aus Schmiedeisen gemacht werden, der bei 100 cm Länge und 4000 Kilg Belastung, eine zehnfache Sicherheit gewährt.

Es ist also $P = \frac{4000}{10} = 400$

und da $E = \frac{\pi}{32} d^3$

so ist $400 \frac{\pi}{32} d^3 = 4000 \cdot 100$

oder $d = \sqrt[3]{\frac{32\cdot 4000\cdot 100}{400\cdot 3{,}142}} = \sqrt[3]{10000} = 21{,}5$ cm.

Nun soll auch die Querschnittsform für einen complicirten Stab bestimmt werden z. B. für die I Form.

Es ist $Pl = \mathfrak{f}E$

$$E = \frac{1}{6h}\left(b_1h_1^3 + b(h^3 - h_1^3)\right)$$

$$Pl = \frac{\mathfrak{f}}{6h}\left[b_1h_1^3 + b(h^3 - h_1^3)\right]$$

Wir werden nun die Querschnittsdimensionen zu nehmen haben, daß die Spannungsintensität bei a einen gewissen Werth habe.

Gesetzt es wäre $P = 50 \cdot 75 = 3750$ Kilg.

$$l = 250 \text{ cm.}$$

$$\mathfrak{f} = \frac{3000}{10} = 300$$

$$\frac{3750 \cdot 250 \cdot 6}{300} = \frac{1}{h}\left(b_1h_1^3 + b(h^3 - h_1^3)\right).$$

$$18750 = \frac{1}{h}\left[b_1h_1^3 + b(h^3 - h_1^3)\right]$$

In dieser Gleichung sind diesmal 3 Größen, die man willkürlich annehmen kann, was bei solchen Rechnungen sehr angenehm ist, da dies zu einer schönen Form od. andern Nebenumständen wesentlich beitragen u. benützt werden kann, ohne der Festigkeit zu schaden. Nehmen wir also Folgendes an

$$h = 20b_1,\ h_1 = 18b_1,\quad b = 3b_1,$$

und setzen diese Werthe in obige Gleichung ein, so erhalten wir.

$$18750 = \frac{b_1^3}{20}\left[18^3 + 3(20^3 - 18^3)\right]$$

$$18750 = \frac{b_1^3}{20}\left[5832 + 3(8000 - 5832)\right] = 617\, b_1^3$$

$$\text{Also } b_1 = \sqrt[3]{\frac{18750}{617}} = \sqrt[3]{30{,}3} = 3{,}1.$$

$b_{,} = 3,1.$

$h = 20 \cdot 3,1 = 62.$

$h_{,} = 18 \cdot 3,1 = 55,8.$

$b = 3 b_{,} = 9,3.$

Bei solchen Aufgaben kann man die schon bestehenden Constructionen zu Hülfe nehmen, oder diese willkürlichen Werthe nach Gefühl bestimmen.

Wir wollen nun die Gestalt der neutralen Faser bestimmen. Da ge u. fh gemäß der Voraussetzung gerade Linien sind, so ist O der Mittelpunkt der Bogenstückchen ef, ik und gh, also auch $ko = oi$, der Krümmungshalbmesser für das neutrale Faserstückchen.

Setzt man nun $ko = oi = \rho$; $kn = \lambda$.

und beachtet ferner, daß $\Delta\, oik \sim \Delta\, nfk$,

so ist auch $oi : ik = kn : nf.$

$\rho : ik = \lambda : nf.$

$\rho : \lambda = ik : nf.$

Woraus auch $\frac{\lambda}{\rho} = \frac{nf}{ik}$

und $\frac{\lambda}{\rho} = \frac{\mathfrak{S}}{E}$ (2)

Es ist dieses $\frac{nf}{ik}$ der Quotient aus der Verlängerung des Faserstückchens ef, dividirt durch ik; es ist dies aber auch gleich der Spannungsintensität dividirt durch den Modulus der Elasticität.

Setzt man für $\mathfrak{S}$ seinen Werth aus Gleichung (1), so erhält man $\frac{\lambda}{\rho} = \frac{\mathfrak{D}\varphi}{E.\varepsilon}$. (3)

Bezeichnet man mit $OW = \varphi$ u. $kW = v$, die Coordinaten des Punktes k.

für ρ seinen analytischen Werth gesetzt, erhält man eine Differentialgleichung:

$$\rho = \pm \frac{dv^3}{d\xi\, d^2v - dv\, d^2\xi} \quad (4)$$

Nimmt man $d\xi$ als constant an, so ist auch $d^2\xi = 0$

und folglich $\rho = \frac{dv^3}{d\xi\, d^2v}$ (5).

Die Integration dieser Gleichung ist nicht gut möglich, deshalb muß man sich mit einer Annäherung begnügen.

Für sehr schwache Biegungen kann man $dv = d\xi$ setzen

und es ist dann $\rho = \pm \frac{d\xi^3}{d\xi\, d^2v} = \frac{d\xi^2}{d^2v}$

oder $\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2v}{d\xi^2}$ (6).

Dieser Ausdruck muß negativ genommen werden, da die Curve concav gegen die Abscissenaxe liegt; dieser letztere Werth wird in Gleich. (3) eingesetzt.

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} = \frac{P}{E\varepsilon z}\,\psi \quad (7)$$

durch Integration erhält man $\frac{dv}{d\xi} = -\frac{P}{E\varepsilon z}\,\frac{1}{2}\,\psi^2 + C$ (8).

Setzt man $\psi = l$ so ist $\frac{dv}{d\psi} = 0$.

und folglich $0 = -\frac{P}{E\varepsilon z}\,\frac{1}{2}\,l^2 + C$ (9).

Entwickelt man hieraus C u. setzt dies in (8) ein, so kommt:

$$\frac{dv}{d\psi} = \frac{1}{2}\,\frac{P}{E\varepsilon z}\,(l^2 - \psi^2)$$

Integrirt man, so ist: $v = \frac{1}{2}\,\frac{P}{E\varepsilon z}\left(l^2\psi - \frac{1}{3}\psi^3 + C\right)$

Setzt man nun $\psi = 0$, so ist $v = 0$ und folglich $C = 0$

Man erhält endl. $v = \frac{1}{2}\,\frac{P}{E\varepsilon z}\left(l^2\psi - \frac{1}{3}\psi^3\right)$ (10)

Aus dieser Formel sieht man, daß der Krümmungshalbmesser an dem Ende, wo der Stab eingemauert ist am kleinsten ist; gegen das andere Ende aber immer größer wird, woraus man sieht, daß an dem befestigten Ende die Krümmung stark u. am belasteten Ende hingegen kaum merklich ist.

Biegung der Stäbe mit Berücksichtigung ihrer eigenen Gewichte.

Bei den vorhergehenden Aufgaben wurde das Gewicht des Balkens nur vernachlässigt, wir wollen nun sehen, welchen Einfluß dieses auf die Biegung hat. Der Balken wird nicht nur allein durch die Last P gebogen, sondern das Gewicht

jedes einzelnen Atoms wird denselben niederzuziehen streben. In einem solchen Stabe liegt der Schwerpunkt in der Mitte; denkt man sich in diesem die ganze Masse des Balkens vereinigt, so erhält man das stat. Moment, welches den Stab an dem Punkte a abzureißen strebt. $\frac{pl}{2}$. Addirt man hiezu das Gewicht P, so erhält man die Summe aller Spannungen u. Pressungen, welche in dem Punkte a herrschen.

$$Pl + \frac{pl}{2} = PE.$$

Aus dieser Formel könnte man auch die Tragkraft bestimmen. Betrachtet man den Fall, daß ein Balken an beiden Enden unterstützt wird u. in der Mitte belastet; sei ferner die ganze Belastung 2P, die Länge 2l, das Gewicht des Balkens 2p; so ist leicht einzusehen, daß derselbe in der Mitte brechen wird. Der Druck, den in diesem Falle die Stütze auszuhalten hat, ist

$$Pl + \frac{pl}{2}$$

der Gleichgewichtszustand wird nicht geändert, wenn wir die Stütze wegnehmen, dafür aber eine Kraft $P + \frac{p}{2}$ anbringen. Es wird ferner der Gleichgewichtszustand nicht geändert, wenn wir den Stab in gebogenem Zustande bei c einmauern. Die Kraft mit welcher der Balken bei c abzubrechen strebt ist daher

$$\left(P + \frac{p}{2}\right) l - \frac{p}{2}\,\frac{l}{2} = Pl + \frac{pl}{2} - \frac{p}{2}\,\frac{l}{2}$$

$$\text{oder } Pl + \frac{pl}{4} = SE.$$

wobei S die Spannungskraft bezeichnet, die in der untersten Faser herrscht. Es sei nun ein Stab ebenfalls auf 2 Enden unterstützt, u. es wirke an denselben ein Gewicht $2P$ an einem beliebigen Punkt C ein, ferner habe der Stab die Länge $2l$.
Wir nehmen nun bei B die Stütze weg u. bringen statt derselben eine gleichgroße entgegengesetzte Kraft x an, wodurch der Gleichgewichtszustand nicht geändert wird. Das Moment von x muß nun gleich sein der Summe der Momente, die den Stab niedertreiben, oder $x\,2l = 2Pc + pl$.
und folglich $x = \frac{Pc}{l} + \frac{p}{2}$.
Wenn man nun den Stab bei C einmauert, und bei B dieselbe Kraft x einwirken läßt, so wird

der Gleichgewichtszustand ebenfalls nicht verändert.

Es ist nun die Summe der statisch. Momente die den Stab bei C abzubrechen streben:

$$\left(\frac{Pc}{l} + \frac{p}{2}\right)c' - \frac{pc}{2l}\,\frac{c'}{2} = \frac{Pcc_1}{l} + \frac{pc_1}{2}$$

$$- \frac{pc_1^2}{4l} = \frac{Pcc_1}{l} + \frac{pc_1}{2}\left(1 - \frac{c_1}{2l}\right)$$

$$= \frac{Pcc_1}{l} + \frac{pc_1}{2}\left(\frac{2l - c'}{2l}\right) = \frac{Pcc'}{l} + \frac{pcc'}{4l}$$

oder $PE = \frac{cc_1}{l}\left(P + \frac{p}{4}\right)$.

Ein Balken liege auf 2 Stützen u. in verschiedenen Entfernungen seien Gewichte angebracht.

Behandlung der Aufgabe, wie die vorige.

In dem Schwerpunkt S muß das halbe Gewicht des Balkens angebracht werden. Es ist daher die abwärtsziehende Kraft:

$$\left(P + \frac{p}{2}\right)l - P(l-c) - \frac{1}{2}\,\frac{pl}{2} =$$

$$Pl + \frac{pl}{2} - Pl + Pc - \frac{pl}{4}$$

$$= Pc + \frac{pl}{4}$$

dieß ist aber wieder die Summe der stat. Momente, welche den Querschnitt bei c abzubrechen streben.

Es ist also $PE = Pc + \frac{pl}{4}$.

Wenn es sich darum handelte für einen solchen Balken das Tragvermögen zu bestimmen, so müssten wir zuerst auszumitteln suchen, an welcher Stelle das Biegungsmoment ein Max. werde, woselbst der Bruch erfolgen würde.

Wir haben seither diese Stelle immer errathen u. wollen sehen wie auch dieselbe durch Rechnung zu finden ist.

$$M = Py + \frac{p}{l}y\frac{y}{2} \quad \text{oder} \quad M = Py + \frac{p}{2l}y^2$$

$$\text{und} \quad Pl + \frac{pl^2}{2l} = \frac{pl}{2} + Pl$$

das Max Moment wird bei a erfolgen wo y ein Maximum erreicht

$$Pl + \frac{pl}{2} = SE.$$

die Rechnung ist jedoch nicht in allen Fällen so einfach.
Für alle diese Fälle kann man wieder eine krumme Linie suchen.
Man muss nun diese zu finden zuerst das Moment entwerfen welches ein beliebigen Querschnitt zu biegen strebt.

$$Py + \frac{p}{l}y\frac{y}{2} = Py + \frac{p}{2l}y^2 = SE.$$

S hat die Bedeutung der Spannungseinh. welche in der obersten Faser M herrscht.

$$\rho : lk = z : nf.$$

$$\rho : z = lk : nf.$$

$$\frac{z}{\rho} = \frac{nf}{lk} = \frac{S}{E}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{S}{Ez}.$$

Es ist aber $\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{Py + \frac{p}{2l}y^2}{E\varepsilon z}.$

Also $\frac{\partial v}{\partial \psi^2} = -\frac{P}{E\varepsilon Z}\left[\psi + \frac{p}{2l} P\psi^2\right)$

durch Integr. erh. man $\frac{\partial v}{\partial \psi} = -\frac{P}{E\varepsilon Z}\left[\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{p}{2lP}\frac{\psi^3}{3} + C\right]$

Es ist aber für $\psi = l$, $\frac{\partial v}{\partial \psi} = 0$
Dieses eingeführt, erhält man

$$0 = -\frac{P}{E\varepsilon Z}\left[\frac{1}{2}l^2 + \frac{p}{2lP}\frac{l^3}{3} + C\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial \psi} = \frac{P}{E\varepsilon Z}\left[\frac{1}{2}l^2 - \psi^2 + \frac{p}{2lP}\frac{1}{3}(l^3 - \psi^3)\right]$$

$$v = \frac{P}{E\varepsilon Z}\left[\frac{1}{2}l^2\psi - \frac{1}{3}\psi^3 + \frac{p}{6lP}\left(l^3\psi - \frac{1}{4}\psi^4\right)\right]$$

Diese Theorie ist, wie wir sie behandelt haben mehrfach und in vielen Beziehungen unvollkommen, schon die angenommenen Voraussetzungen sind nicht ganz genau; allerdings unterliegt es keinem Zweifel, daß dieselben um so genauer sind, je geringer die Biegung ist u. für verschwindend kleine Biegungen kann man sie als Wahrheiten gelten lassen, allein für starke Biegungen gilt dies nicht mehr.
Bei diesen Rechnungen ist nun nichts vernachlässigt worden, allein bei der weiteren Verarbeitung haben wir wieder Annahmen gemacht, welche abermals Ungenauigkeiten verursachten. Für schwache Biegungen können wir denn auch unsere aufgestellte Theorie festhalten, für stärkere Biegungen

wird sie jedoch sehr ungenau.

Wir sind jedoch bei oben geführter Rechnung noch weiter gegangen u. haben die dabei erhaltenen Gleichungen sogar gelten lassen bis zum Bruche.

Man sieht also, daß wir dabei einen derben Fehler begangen haben.

Eine 2te Theorie wollen wir jedoch nicht aufstellen, wir wollen nur sehen, wie sich eine solche gestalten würde, wenn man stärkere Biegungen annimmt, u. zwar so daß $\sphericalangle \varphi$ nicht mehr gleich 0 angenommen werden könnte.

Bei der Biegung eines gewöhnl. Stabes sucht man die Schwerpunkte aller Querschnitte u. erhält so die Schwerpunktsfaser u. unter der Voraussetzung, daß $\sphericalangle \varphi = 0$ ist, haben wir die neutrale Faser gleich der Schwerpunktsfaser gefunden und daß diese beiden Fasern parallel mit den Kantenfasern gehen.

Wenn nun der $\angle \varphi$ klein ist, so findet man, daß die neutrale Faser nicht mehr mit der Schwerpunktfaser zusammenfällt.

Es ist dann nämlich $\frac{P}{2}\Sigma f y = P \sin\varphi$

$$\Sigma f y = 0$$

jedoch nur unter der Voraussetzung, daß der Modulus der Elasticität constant wäre. Nimmt man diesen nicht so an, so kommt die neutrale Faser noch etwas verändert heraus. Nimmt man die Ausdehnung immer stärker, so werden die Erscheinungen sehr verschieden, es ändert sich sowohl die Lage als auch die Gestalt der neutralen Faser mit der Größe der Belastung.

Bei einem mehrfach gebogenen Stabe werden die neutralen Fasern die oben angedeutete Form haben.
Merken wir uns die Stellen, da die Convexität in die Concavität übergeht und ziehen die Normallinien, so kann man fragen, wo die neutrale Faser ist. Sie ist in Fig. A angedeutet.
Bei der Bestimmung der Belastung (Tragungsvermögen), haben wir uns so benommen, wie wenn der Bruch an derj. Faser beginnen würde, die am stärksten gespannt ist, welches aber nicht bei jedem Material u. jeder Querschnittsform der Fall ist, sondern der Bruch auch da eintreten kann, wo die Compression am größten ist.

Man denkt sich Gußeisen u. an der Stelle, wo die größte Compression stattfindet, viel Material, so würde der Bruch an der stärksten Spannfaser eintreten, da die rückwirkende Festigkeit weit größer ist als die absolute. Für diesen Fall würde daher unsere Rechnung richtig sein.

Anders jedoch ist es wenn wir einen Stab aus Schmiedeisen haben es ist für diesen u. für Holz die rückwirk. Festigkeit ~~kleiner~~ etwas kleiner als bei Gußeisen, bereits etwas kleiner als die abs. Wenn wir daher einen Stab von T form nehmen, so erfolgt der Bruch nicht an der gespannten, sondern an der gepreßten Faser, es würde daher für diesen Fall unsere Rechnung unrichtig sein.

Bei einem andern Querschnitt kann es jedoch auch umgekehrt sein, wenn man nämlich das Material da anbringt, wo die Pressung stattfindet, so wird der Bruch an der gespannten Faser anfangen.

Ferner kann auch der Fall vorkommen, daß der Querschnitt so gewählt ist, daß er gegen das Reißen sowohl als auch gegen das Quetschen gleich fest ist. Ist dies der Fall, so wird der Bruch an 2 Stellen anfangen und es ist natürl., daß die so gewählte Form die bessere ist.

Auf alle diese Fälle muß Rücksicht genommen werden, wenn man die Theorie nicht bei Seite lassen will.

Festigkeit gegen das Abschieben.

Bei der absoluten Festigkeit, bei der Ausdehnung u. Zusammenpressung der Stäbe sind nur immer 2 Kräfte nach entgegengesetzter Richtung wirksam gewesen. Wir können aber auch auf

einen Körper Kräfte einwirken lassen, die der Richtung nach entgegengesetzt sind, aber deren Angriffspunkte mit den übrigen nicht mehr übereinstimmen, in welchem Falle Abscheerungen eintreten.
Lassen wir auf einen Stab z. B. solche Kräfte in der oben angedeuteten Weise einwirken, so wird eine Abscheerung des mittleren Theiles erfolgen.

Es werden also die Atome, welche an 2 benachbarten Querschnittenlagen von einander abgeschoben.
Diese abscheerende Kraft kommt besonders bei kurzen Zapfen und Vernietungen vor, ferner bei Torsion, wobei noch der Umstand hinzukommt, daß im Centrum keine, dagegen nach der Peripherie diese Abscheerungskraft größer u. größer wird.
Nun entsteht die Frage, wie groß die Abscheerungsfestigkeit gegen eine gewisse Kraft ist.
Es ist wahrscheinlich, daß für diese dieselben Gesetze gelten, als für die abs. Festigkeit. Die Abscheerung richtet sich nach der Natur des Materials und ist den Querschnittsdimensionen proportional.
Nimmt man einen sehr dicken Körper, so werden die Abscheerungen nur da eintreten, wo die Kräfte einwirken.
Es würde sich ganz anders herausstellen, wenn man die Abscheerungskraft statt auf die Oberfl. einwirken zu lassen, dieselbe wenn es mögl. wäre auf die Atome eines u. desselben Querschnitts einwirken zu lassen.

Nach denjenigen Versuchen, die aufgestellt worden sind, ist anzunehmen, daß die Abscherungskraft so groß ist als die absolute Festigkeit.

Die rückwirkende Festigkeit.

Belasten wir einen verhältnißmäßig kurzen Stab, so verkürzt sich derselbe u. zwar nach den Gesetzen, welche wir vorher besprochen haben. Anders verhält es sich mit einem langen Stabe; wenn man ihn unterstützt u. belastet, wird er ebenfalls zusammengepreßt, wird aber die Belastung größer, so wird er gebogen u. zwar kann man dann die natürliche Lage des Stabes während der Belastung nicht mehr herstellen. Für Säulen, Stützen etc ist es von großer Wichtigkeit die Größe der Belastung zu erfahren, welche sie zu tragen vermögen ohne sich zu biegen. Ferner ist es von Interesse zu erfahren, die Spannungs u. Pressungsintensitäten, die in dem Stabe herrschen u. endlich die Curve für einen solchen Stab zu berechnen.

Bei genauer Behandlung der Sache, würde dies zu Weitläufigkeiten führen, und wollen daher nur auf das Resultat hinweisen und uns mit einer Annäherung begnügen. Hier ist nämlich die Schwierigkeit, daß Biegung u. Compression in dem ganzen Stabe herrscht, und es hat dies zur Folge, daß die neutrale Faser von der Schwerpunktsfaser abweicht, ja es kann soweit gehen, daß die neutrale Faser nach außen fällt u. dies die Behandlungsweise schwierig macht. Wir nehmen hier die 4 Voraussetzungen, die wir bei der Biegung aufgestellt haben an, u. setzen noch eine Voraussetzung hinzu, nämlich daß die Achsenfaser wohl gebogen aber nicht zusammengepreßt werden kann.

Es sei $ACD = ABD$.

$$Ap = x$$

$$Mp = y$$

Py ist das Biegungsmoment.

ferner ist $\rho : z = LK = MH$.

oder $z : \rho = \frac{MH}{LK} = \frac{\mathfrak{P}}{E}$

Also hat man $\mathfrak{P}E = Py$ (1)

und $\frac{MH}{LK} = \frac{\mathfrak{P}}{E}$ (2)

und unter der Voraussetzung einer sehr schwachen Biegung hat man $\frac{1}{\rho} = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (3)

Aus diesen 3 Gleichungen folgt nun:

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} z = \frac{1}{\varepsilon} \frac{Py}{E}$$

woraus: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{P}{\varepsilon E z} \cdot y$ (4)

dies integrirt, kommt $y = \mathfrak{A} \sin\sqrt{\frac{P}{\varepsilon E z}}\, x + \mathfrak{B} \cos\sqrt{\frac{P}{\varepsilon E z}}\, x$

für $x = 0$, $y = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, ist:

$$y = \mathfrak{A} \sin\sqrt{\frac{P}{\varepsilon E z}}\, x \quad (6).$$

Setzt man nun $ACD = l$, $ABD = c$, so muß für $x = \frac{c}{2}$ y ein Max werden, folglich muß sein:

$\sin\sqrt{\frac{P}{\varepsilon E \lambda}}\,\frac{c}{2} = 1$ oder $\sqrt{\frac{P}{\varepsilon E \lambda}}\,\frac{c}{2} = \frac{\pi}{2}$, woraus folgt

$$c = \pi\sqrt{\frac{\varepsilon E \lambda}{P}} \quad (7)$$

die Curve muß nun rectificirt werden, um dadurch den Werth von $\mathfrak{A}$ zu bestimmen. Da dies aber bei genauer Durchführung auf Schwierigkeiten führt, so begnügen wir uns mit einer Annäherung. Wir verwechseln den Bogen mit der Sehne und es ist dann:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \mathfrak{A}^2.$$

oder $l^2 = c^2 + 4\mathfrak{A}^2.$

folglich $\mathfrak{A}^2 = \frac{1}{4}(l^2 - c^2)$ oder $\mathfrak{A}^2 = \frac{l^2}{4}\left(1 - \left(\frac{c}{l}\right)^2\right)$

Also $\mathfrak{A} = \frac{l}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{c}{l}\right)^2} \quad (8)$

Setzt man für c seinen Werth aus (7)

so bekommt man $\mathfrak{A} = \frac{l}{2}\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{l^2}\cdot\frac{\varepsilon E \lambda}{P}} \quad (9)$

die Ausbiegung richtet sich daher wie natürl. nach dem Werth von P. Denkt man sich die Kraft sehr groß, so wird der Stab stark gebogen, nimmt man von der Belastung mehr und mehr weg, so wird die Biegung kleiner werden, und endl. wird es eine Last geben, die der Stab aufrecht zu tragen vermag. Man findet diese Last, wenn man die Größe unter dem Wurzelz. verschwindend klein macht.

Wenn also $1 - \frac{\pi^2}{l^2}\cdot\frac{\varepsilon E \lambda}{P} = 0$ steht der Stab senkrecht. folglich bei der Belastung

$$P = \varepsilon\pi^2\frac{E\lambda}{l^2}$$

Setzt man $\lambda = \frac{k}{\mathfrak{L}}$, so erhält man endlich

$$P = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{L}}\,\pi\, E\, \frac{k}{l^2} \quad (10)$$

Will man dies für einen runden Querschnitt anwenden, so muß man $E = \frac{\pi}{32} d^3$ setzen, auch ist hier $k = \frac{d}{2}$.

$$\text{folglich } P = \frac{\varepsilon}{16}\pi^2\left(\frac{d}{l}\right)^2 \frac{d^2\pi}{4}$$

$$\text{und } P = \frac{\varepsilon}{64}\pi^3\frac{d^4}{l^2}$$

Es bedeutet also dies P die Kraft, welche ein runder Stab gerade noch tragen kann ohne sich zu biegen. Man sieht aus dieser Formel, daß die Tragkraft von dem Modulus der Elasticität der Länge u. dem Durchm. des Stabes abhängt und daß besonders dicke Säulen eine große Tragkraft besitzen.

Bei einem Hohlcylinder hat man

$$E_1 = \frac{\pi}{32}\frac{d^4 - d_1^4}{d} \text{ u. } k = \frac{d}{2} \text{ zu setzen.}$$

$$\text{folglich } P = \frac{\varepsilon}{16}\pi\frac{d^2+d_1^2}{2}(d^2-d_1^2) = \frac{\varepsilon}{64}\pi^3\frac{d^4-d_1^4}{l^2}$$

Bei einem rechtwinkligen Querschnitt

ist $E = \frac{1}{6}bh^2$ u. $k = h$.

$$\text{folgl. } P = \frac{\varepsilon}{12}\pi^2\frac{bh^3}{l^2}$$

Will man solche Säulen z. B. bei einem Baue anwenden, so müssen dieselben bis auf 5, 10 bis 20fache Sicherheit construirt werden. Hat man z. B. eine runde Säule aus Gußeisen, bei welcher $l = 600^{cm}$ ist so zu construiren, daß dieselbe eine Last von 2000 Kilg. mit 20facher Sicherheit trage.

Es ist also $P = 20 \times 2000 = 40000$; ε ist hier $= 1000000$

und da $P = \frac{\varepsilon\pi^2}{64}\cdot\frac{d^4}{l^2}$

so ist $d = \sqrt[4]{\frac{64 P l^2}{\varepsilon\pi}} = \frac{64 \times 40000 \cdot 36000}{1000000 \cdot 10}$

folglich $d = \sqrt[4]{9216} = 17$ cm.

Also wird der Durchmesser der Säule 17 centimeter sein.

Festigkeit der Körper gegen das Verwinden, oder das Torsionsvermögen.

Wir nehmen eine Platte und befestigen an derselben einen cylindrischen Bündel von Stäben; die andern Enden der Stäbe steckt man alle in eine 2te durchbohrte Platte. Die erste Platte selbst ist an einem Ort befestigt. Drehen wir nun die Platte B gegen A, so kommt das Ganze in einen andern Zustand und die Drähte erhalten die Form von Schraubenlinien; es werden die Drahtenden nicht mehr in einer Ebene liegen, sondern eine krumme Fläche bilden, nur der Axendraht bleibt gerade und dessen Drahtende an der Stelle.

Nun führen wir einen 3ten Zustand herbei; wir befestigen nämlich nach der Drehung, in der Mitte B die Drahtenden, so daß sie wieder in eine Ebene zu liegen kommen; dies ist nur möglich, indem man die Axenfaser hinein und die andern herausdrückt.

Es ist dann $a_1 > a$

aber $a_1 < A$.

Man sieht daher leicht, daß Kräfte vorhanden sein müssen, welche die Platte heraus und andere, die die Platte hinein zu drängen bestrebt sind, und zwar suchen die Drähte um die Axenfaser herum, da sie verkürzt sind, die Platte herauszudrängen, während die äußern, da sie verlängert sind, die Platte hinein, zu dringen bestrebt sind. Wenn man von der Axe aus sehr radial auswärts geht, so findet man die Drähte immer länger u. wenn man von der Peripherie radial einwärts geht, dieselben immer kürzer werden, man muß endl. auf eine Schichte kommen, bei der die Fasern weder verkürzt noch verlängert sind und nennt diese neutrale Schichte.

Bei einem Stabe von massivem Material finden ganz ähnl. Vorgänge statt.

Wir werden nun in der Folge, die Zustände, die in einem Stabe von beliebigem Querschnitte eintreten, untersuchen, wenn auf denselben drehend wirkende Kräfte einwirken.

Wir nehmen zuerst beispielsweise einen cyl. Stab an, werden aber dann auf einen beliebigen Querschnitt übergehen.

Nach der Drehung werden die Atome diesseits u. jenseits des Querschnittes bei M gegeneinander verdreht sein. Die Atome nun, die früher einander gegenüber lagen, werden deßhalb vermöge ihrer gegenseitigen Anziehung wieder in ihre ursprüngl. Lage zurückzuschnellen suchen u. zwar mit einer Kraft, die wir als proportional der Verschiebung annehmen wollen. Wenn nun nach geschehener Verwindung Gleichgewicht herrschen soll, so muß die Summe der stat. Momente jener Kräfte gleich sein dem stat. Mom. welches die Verwindung bewirkt. Wir nehmen nun einen beliebigen Querschnitt an u. stellen uns die Aufgabe die Lage der Axenfaser zu bestimmen. Nennen wir den Abstand des am weitesten von der Axenfaser entfernten Punktes a, die Größe

der Intensität der Verschiebungskraft an der Stelle M, T.
Wie groß wird nun die Int. der Verschiebungskraft irgend eines Flächentheilchens m sein, das von der Axe um x entfernt ist? Sie sei t, so ist nach der gemachten Annahme.

$$T : t = x : a.$$

$$t = \frac{T}{a} x \quad (1)$$

Es sei ferner f die Größe des Flächentheilchens bei m, so hat man

$$tf = \frac{T}{a} x f.$$

Zerlegen wir nun diese Verschiebungskraft tf des Flächentheilchens m in eine vert. u. horiz. Kraft, so erhalten wir.

$$\left.\begin{aligned} H &= tf \cos\varphi \\ V &= tf \sin\varphi \end{aligned}\right\} (2)$$

während die Koordinaten des Flächentheilchens sind:

$$\left.\begin{aligned} y &= x \sin\varphi \\ v &= x \cos\varphi \end{aligned}\right\} (3.)$$

die Werthe aus 2 u. 3 in Gleichung 1 eingesetzt gibt:

$$H = \frac{T}{a} x f \frac{v}{x} = \frac{T}{a} f v$$

u.

$$V = \frac{T}{a} x f \frac{y}{x} = \frac{T}{a} f y.$$

Dasselbe gilt für jedes andre Flächentheilchen ebenso und es ist daher die Summe der Kräfte die alle Flächenth. nach horiz. u. vert. Richtung zu schieben streben:

$$\Sigma H = \frac{T}{a} \Sigma f v$$

$$\Sigma V = \frac{T}{a} \Sigma f y.$$

da aber nach der Voraussetzung im Stabe nur Verwindungen, aber keine Verschiebungen in horiz. u. vert. Richtg stattfinden sollen

so muß $\Sigma H = 0$ und $\Sigma V = 0$ sein.
dies ist aber nur mögl. wenn

$$f v \text{ u. } f y = 0 \text{ sind.}$$

d.h. der Punkt F ist der Schwerpunkt des Querschnitts.
die Drehaxe fällt also mit der Schwerpunktsaxe zusammen. Wir haben nun die Gleichung:

$$f t x = \frac{T}{a} f x^2$$

und $\Sigma f t x = \frac{T}{a} \Sigma f x^2$.

dies ist die Summe der stat. M. der Verschiebungskräften, mit denen die einzelnen Querschnitte in ihrer ursprüngl. Lage zurückzuschnellen suchen, und es muß diese Summe gleich sein dem stat. Moment. M der Kraft, das die Drehung bewirkt. Man hat deßhalb die Gleichung:

$$M = \frac{T}{a} \Sigma f x^2 \quad (4.)$$

diese Gleich. gibt uns also die Größe welche die Kraft haben muß, damit am Umfange eine Kraft T stattfinde.
Mit Hilfe dieser Formel können wir M für versch. Querschnittsformen berechnen, indem wir nur berücksichtigen, daß $\Sigma f x^2$ das Trägheitsmoment des Querschnittes ist in Bezug auf eine Axe die durch den Schwerpunkt geht und senkrecht auf der Ebene des Querschnitts steht.

Für einen massiven Cylinder ist

$$\Sigma f x^2 = \int_0^{x=\frac{d}{2}} 2\pi x \, dx \, x^2 = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} x^3 dx.$$

$$= 2\pi \frac{1}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{d^4 \pi}{32}$$

folglich $M = \frac{T}{\frac{d}{2}} \frac{d^4 \pi}{32} = T \frac{\pi}{16} d^3$

Für einen hohlen Cylinder ist:

$$a = \frac{d}{2}$$

$$\Sigma f x^2 = \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d}{2}} 2\pi x \, dx \, x^2 = 2\pi \int_{\frac{1}{2}d_1}^{\frac{1}{2}d} x^3 \, dx = 2\pi \, \frac{1}{4} x^4$$

$$= \frac{2\pi}{4} \cdot \frac{1}{16} (d^4 - d_1^4) = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_1^4).$$

$$\text{und } M = \frac{T}{\frac{d}{2}} \cdot \frac{\pi}{32} (d^4 - d_1^4) = T \frac{\pi}{16} \left(\frac{d^4 - d_1^4}{d}\right)$$

Für einen rechtwinkligen Querschnitt ist:

$$\Sigma f x^2 = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2)$$

$$\text{und } a = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + b^2}$$

$$\text{also } M = \frac{T \frac{bh}{12} (h^2 + b^2)}{\frac{1}{2} \sqrt{h^2 + b^2}} = \frac{T}{6} \, bh \sqrt{h^2 + b^2}.$$

Torsionsfestigkeit.

Man versteht darunter das Mom. d. Kraft, welche im Stande ist den Stab dermaßen zu verwinden, daß der Riß erfolgt.
Dabei nehmen wir an um diese Festigkeit zu bestimmen, daß das bei unserer Rechnung zu Grunde gelegte Gesetz auch noch für die allerstärksten Verwindungen gelte.
Das Reißen des Stabes wird nun dann eintreten, wenn die Int. der Verschiebungskraft einen gewissen Werth erreicht hat, der von der Natur des Materials abhängig ist und nur durch Versuche bestimmt werden kann. Diese Werthe von T finden sich Seite 36 in den Result. aufgezeichnet.

Für einen Cylinder ist $M = T \frac{\pi}{16} d^3$ (1)

also $T = \frac{16 M}{\pi d^3}$ (2).

Läßt man nunmehr verschiedene Stäbe verschiedenen Kräften einwirken und findet alsdann für T immer denselben Werth, so geht daraus hervor, daß die Annahme zulässig ist und daß man den dem Material entsprechenden Festigkeitscoefficient gefunden hat. Die Versuche ergeben nur für T annähernd denselben Werth.

Aus Gleichung $M = T \frac{\pi}{16} d^3$

ist ersichtlich, daß die Länge einer Welle keinen Einfluß auf die Torsionsfestigkeit hat. Daß der Durchm. in der 3ten Potenz vorkommt ist sehr vortheilhaft, da man sonst zu colossalen Wellen erhalten würde.

Damit die Wellen die Torsion mit Sicherheit aushalten können, construirt man sie mit 20 - 30facher Sicherheit, d.h. man setzt in obiger Gleichung statt T einen aliquoten Theil $\frac{1}{20} - \frac{1}{30}$. Man soll nun z.B. eine schmiedeeiserne Welle, auf die ein Torsionsmoment von 100 000 Kilg. einwirkt mit 30 facher Sicherheit construiren.

Hier ist: $T = \frac{4500}{30} = 150$

und $d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 100000}{150 \cdot 3,142}} = 15$

Bestimmung des Torsionswinkels.

Der Torsionswinkel ist der Winkel um den das Ende einer Faser gedreht wurde. Wir fassen nun diejenige Faser ins Auge, die um a von der Axenfaser entfernt ist und nennen den zu bestimmenden Torsionswinkel Θ (der $\angle$ in Theilen des Radius ausgedrückt).

Es ist alsdann $a\Theta = cb$.

$$cb = l \operatorname{tg} \alpha$$

da wir annehmen, daß die Windung der Faser eine Schraubenlinie sei, ist auch folgl. $a\Theta = l \operatorname{tg} \alpha$.

od. da wir kleine Verwindungen annehmen

so ist auch $cb = l\alpha$

und daher $a\Theta = l\alpha$ (7)

Wir machen nun eine 2te Hypothese; es sei näml. die Intensität der Verschiebungskraft proportional dem $\angle \alpha$, also

$$T = G\alpha.$$

G bedeutet eine von der Natur des Materials abhängige Größe und man nennt es den Modulus der Elastic. für Torsion

dann ist also $a\Theta = l \frac{T}{G}$

oder $\Theta = \frac{l}{a} \cdot \frac{T}{G}$.

Führen wir für T seinen Werth aus Gl (6) ein,

so erh. wir $\Theta = \frac{l}{aG} \cdot \frac{aM}{\Sigma f x^2} = \frac{lM}{\Sigma f x^2}$

Wir müssen nun mit $\frac{2\pi}{360}$ dividiren um den Werth von Θ in Graden zu erhalten, d.h. mit der Bogenl. die einem Winkel von 1° entspricht.

dann ist $\Theta^{\circ} = \frac{lM}{G\Sigma f x^2} : \frac{2\pi}{360} = \frac{360\, lM}{2\pi G \Sigma f x^2}$

Wenn man nun bei versch. Querschnittsformen für $\Sigma f x^2$ u. a ihre Werthe einsetzt, so erhält man

für einen cyl. Stab: $\beta = \frac{16 M}{G} \cdot l \frac{360}{d^4 \pi^2}$

für einen quadr. Stab: $\beta = \frac{6M}{G}\, l\, \frac{180}{a^4 \pi}$

für einen parallelepip. Stab: $\beta = \frac{3M}{G}\, l\, \frac{b^2 + a^2}{b^3 a^3} \cdot \frac{180}{\pi}$

Soll diese Berechnung wahr sein, so müssen wir für Kräfte aus demselben Material von verschiedener Länge, Form u. Größe des Querschnitts für G immer denselben constanten Werth finden, nämlich:

$$G = \frac{360}{2\pi} \frac{l \cdot M}{\Theta^0 \int x^2}$$

Führt man die Versuche wirkl. aus, so findet man daß G für kleine Verwindungen constant ist, allein wenn das Torsionsmoment eine gew. Grenze überschreitet, ist es variabel. u. man nennt die Grenze bis zu welcher es constant bleibt Mod. der El. für Torsion. Die Werthe von G finden sich in den Ref. Seite 36 und betragen ungefähr $\frac{4}{10}$ der abs. Festigkeit.

Festigkeit der Gefässe.

Wir nehmen ein Gefäß, dessen innerer Durchm. D ist und dessen Wanddicke δ. Wir nehmen ferner an, daß dasselbe eine Flüssigkeit enthält, die auf jeden □cm der Wanddicke einen Druck p_0 ausübt, von außen wirke auf das Gefäß eine Flüssigkeit mit einem Druck p, auf den □cm.

Es sei $p_0 > p$.

Wir denken uns, daß durch die Kraft p_0 das Gefäß durch seine ganze Dicke ausgedehnt würde.
Ferner sei S die bei ab u cd herrschende Spannung u l die Länge des Gefäßes ab, so ist lδ die Größe des Querschnitts bei ab u bei cd. u 2lδ die Summe der Querschnitte bei ab und bei cd.

Folglich $2l\delta S$ (1) = der Summe der Kräfte welche die Querschnitte bei ab u cd spannen. Da aber Gleichgewicht herrschen soll, so müssen diese andere gleiche Kräfte entgegenwirken.

Es sind dies die innern u. äußern Kräfte p_0 und p_1.
Um die innern Pressungen zu berechnen nehmen wir ein kleines Flächentheilchen $mn = \delta s$, der Druck der auf dasselbe ausgeübt wird ist $l\,\delta s\,p_0 = N$.
Nun zerlegen wir diesen radial auswärts wirkenden Druck in einen horizontalen u. vert. Druck. der Vertikaldruck ist

$$V = N \sin\varphi = l p_0 \,\delta s \sin\varphi$$

und da $mq = \delta s \sin\varphi$

so ist auch $V = l p_0\, mq$.

Nun ist die Summe aller Vertikaldrücke auf die Bogenlänge

bc: $\Sigma V = \Sigma l p_0\, mq = l p_0\, \Sigma mq = l p_0 D$ (2)

Vermöge des äußern Druckes findet man ganz ebenso, daß die obere Hälfte der Cylinders abwärts gedrückt wird mit einer Kraft

$l p_1 (D+2\delta)$ (3)

Auf die obere Cylinderhälfte wirken also die Kräfte:

$l p_0 D - l p_1 (D+2\delta)$ u. $2 l \delta P$.

da Gleichgewicht herrscht, ist folglich

$l p_0 D - l p_1 (D+2\delta) = 2 l \delta P$

und $p_0 D - p_1 D + 2 p_1 \delta = 2 P \delta$.

$p_0 D - p_1 D = 2\delta (P + p_1)$

und endlich $\delta = \frac{1}{2} D \frac{p_0 - p_1}{P + p_1}$ (1).

diese Formel gibt uns also die Wanddicke die ein Cylinder haben muß, wenn innen eine Pressung p_0 und außen eine Pressung p_1 stattfindet, bei welcher er nicht brechen soll.
Wir haben bei der obigen Berechnung stillschweigend angenommen, daß die Spannungskräfte in allen Punkten zwischen ab u. cd gleich sind; wenn dies der Fall wäre, so wäre unsere Berechnung ganz richtig. diese Voraussetzung ist aber nur annähernd richtig

wenn die Wanddicke klein ist, für stärkere Wanddicken ist sie falsch; denn bei starker Dicke ist die Spannungsint. innen bei weitem stärker als außen.
Wir müßten nun um das richtige δ zu erhalten zuerst das Gesetz ausfindig machen, nach welchem die Spannungsint. von a bis b abnimmt; dann müßten wir die Summe aller Spannungen von a bis b u. c bis d nehmen und dies in Glch (1) einführen. Dies durchzuführen wäre sehr schwierig u. es soll deßhalb hier nur das Resultat angeführt werden, wie es sich im Buche findet.

$$\text{Es ist } \delta = \frac{1}{2} D \left[\sqrt{\frac{\mathfrak{A}+p_1}{\mathfrak{A}+2p_1-p_0}} - 1 \right] \quad (2)$$

$$\text{und } \delta = \frac{1}{2} D \left[\frac{p_0-p_1}{\mathfrak{A}+2p_1-p_0} \right] \quad (3.)$$

Es bedeutet hier $\mathfrak{A}$ die Spannungsint. am innern Umfange.
Die Gl. (2) erh. man unter der Voraussetzung, daß die eubk. Ausdehnung in der innern Wand überall gleich groß ist, d. h. die Volumveränderung bei jedem $\square^{cm}$ ist gleich groß.
Diese Voraussetzung ist wahr und der Beweis wurde zuerst von Lamé gegeben, auch befindet sich ein Beweis hievon in dem Locomotivbau von Redtenbacher Seite 238.
Die Gleichung (3) kann man aus 2 herleiten, oder sie neu aufstellen, unter der Voraussetzung, daß die Ausdehnung in der Weise erfolgt, daß das ganze Volumen constant bleibt.
Der Cylinder wird nun bersten, wenn das Max der Spannungsintensität gleich der abs. Festigkeit des Materials. Wir haben also die Wanddicke bei der der Riß erfolgt, wenn wir in Gl 1 für p den Coeff. d. abs. Fest. des Materials einführen u. aus Gl. 2 u. 3

erhalten wir sie, wenn wir für diesen Coefficienten setzen

Führen wir dieses aus, so erhalten wir den deutlichsten Beweis von der Unrichtigkeit der Formel (1). Denn setzen wir:

$$\mathfrak{A} + 2p_1 - p_0 = 0$$

d. h. $p_0 = \mathfrak{A} + 2p_1$

so wird $\delta = \infty$.

d. h. wenn die Pressung auf die innere Wand gleich der absol. Festigkeit des Materials + der doppelten Pressung auf die äußere Wand, so wird der Cyl. bersten, wenn wir auch $\delta = \infty$ machen. Aus Gl. 1 erhalten wir dagegen einen bestimmten Werth, bei welcher Dicke der Cylinder gerade besteht, so daß wenn wir die Dicke um etwas stärker machen, der Cylinder die Spannung ertragen könnte. Sei z. B. der Cylinder von Gußeisen,

$$\mathfrak{A} = 1000, \text{ ferner sei } p_1 = 1,$$

$$\text{so ist } p_0 = 1000 + 2 = 1002.$$

d. h. wenn der Druck auf den □cm 1002 Kilg. beträgt, berstet jeder gußeiserne Cylinder, wenn wir auch $\delta = \infty$ machen.

Aus (1) erhalten wir $\delta = \frac{1}{2} D \frac{1002-1}{1000+1} = \frac{1}{2} D$

Man sieht also deutlich den großen Unterschied zwischen jenen Formeln und die Erfahrung hat oft genug die Unrichtigkeit der Formel 1 erwiesen.

Für hydraul. Pressen u. s. f. macht man gewöhnlich $\delta = \frac{D}{2}$

Wir wollen nun für diesen Fall die Spannungsintensität, die im Innern eintritt bestimmen.

Aus 2 haben wir $\sqrt{\frac{\mathfrak{A}+p_0}{\mathfrak{A}+2p_1-p_0}} = 2.$

oder $\frac{\mathfrak{A}+p_0}{\mathfrak{A}+2p_1-p_0} = 4$ und $\mathfrak{A}+p_0 = 4\mathfrak{A}+8p_1-4p_0$

$$0 = 3\,El + 5\,p_1 - 5\,p_0$$

folglich $p_0 = \frac{3}{5}\,El + \frac{8}{5}\,p_1$.

Soll der Cyl. einen Pressung p_0 mit Sicherheit ertragen, so läßt man die Spannung nicht mehr als $\frac{1}{3}$ von der abs. Festigkeit des Materials betragen.

Es ist also $El = \frac{1000}{3} = 333$

und folgl. $p_0 = \frac{3}{5}\,333 + \frac{8}{5} = 201{\cdot}6$.

Ist die äußere Pressung größer als die innere, so gelten dieselben Resultate, nur ist El negativ zu nehmen.

Ganz ähnl. erhält man für Kugelgefäße die Formel:

$$\delta = \frac{D}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{2(El+p_0)}{2El+3p_1-p_0}}-1\right]$$

Für Gefäße, welche weder Kugelform, noch kreiscylindrisch sind ist die Untersuchung von δ sehr schwierig, da sie nicht wie jene geometr. ähnl. bleiben, sondern Deformirungen erleiden. Es sucht z. B. ein elliptischer Cylinder in einen kreisförmigen überzugehen, während bei einem Gefäß von rectangulärem Querschnitt Ausbauchungen entstehen.

Körperformen von gleicher Festigkeit.

Körper von gleicher abs. Festigkeit.

Wenn ein Stab eingemauert ist und wird in horizontaler Linie ausgedehnt, so daß also sein Gewicht vernachlässigt wird, so ist die Wahrscheinlichkeit des Reißens überall gleich groß, wenn das Material homogen ist, und wenn der Querschnitt überall gleich groß ist, wenn auch derselbe von einem runden in einen 4eckigen, 6eckigen u. s. w. in seiner Form sein mag, übergeht. Ist hingegen der Stab vertikal eingemauert und unten belastet, so verhält es sich ganz anders, indem hiebei noch das Gewicht des Stabes zu berücksichtigen ist, und das Gefühl sagt uns schon, daß der Balken nach oben hin immer dicker werden muß.

Nennen wir γ das Gewicht von einem Cub cm des Materials, so ist $\gamma\, y\, dx$ das Gew. vom Körpertheil abcd. Ist ferner $\mathfrak{A}$ die auf einen □cm bezogene Spannung, die in jedem Querschnitt herrschen soll, so ist: $\mathfrak{A}\,\theta = P$ die Spannung für den untersten Querschnitt.

Der Querschnitt bei D ist um dy größer bei C.

und folgt $dy\, \mathfrak{A} = \gamma\, y\, dx$

oder $\frac{dy}{y} = \frac{\gamma\, dx}{\mathfrak{A}}$

Integrirt man, so folgt $\log nat\, y = \frac{\gamma}{\mathfrak{A}} x + C$ (2)

für $x = 0$, muß $y = \theta = \frac{P}{\mathfrak{A}}$ sein.

und daher $\log nat \frac{P}{\mathfrak{A}} = 0 + C$

$$\log nat\, y - \log nat \frac{P}{\mathfrak{A}} = \frac{\gamma}{\mathfrak{A}} x.$$

$$\log nat \left(\frac{y}{\frac{P}{\mathfrak{A}}}\right) = \frac{\gamma}{\mathfrak{A}} x$$

oder $\frac{y}{\frac{P}{\mathfrak{A}}} = e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{A}} x}$

$$y = \frac{P}{\mathfrak{A}} e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{A}} x}.$$

Hiermit ist die Größe des Querschnitts an jeder einzelnen Stelle bestimmt. Allein die so entstehende Form des Stabes ist sehr schwierig auszuführen u. man hilft sich daher in der Praxis durch eine Annäherung. So werden z. B. die Schachtgestänge aus einer Anzahl einzelner Stangen zusammengesetzt.

und dieselben so bestimmt, daß die Wahrscheinlichkeit des Risses an jeder Stange gleich groß ist. Es muß also die Spannung bei A gleich sein der bei B, C, D. u. s. f.

Die Kraft mit der die Einheit des Querschnittes bei B gespannt wird ist: $\mathfrak{A} = \frac{Q+\gamma a_1 l_1}{a_1}$

bei C $\quad \mathfrak{A} = \frac{Q+\gamma a_1 l_1+\gamma a_2 l_2}{a_2}$

bei D $\quad \mathfrak{A} = \frac{Q+\gamma a_1 l_1+\gamma a_2 l_2+\gamma a_3 l_3}{a_3}$

oder aus 1, 2 und 3 ist

$$a_1 = \frac{Q}{\mathfrak{A}-l_1\gamma}$$

$$a_2 = \frac{Q+a_1 l_1\gamma}{\mathfrak{A}-l_2\gamma}$$

$$a_3 = \frac{Q+a_1 l_1\gamma+a_2 l_2\gamma}{\mathfrak{A}-l_3\gamma} \text{ u.s.w.}$$

Setzt man nun den Werth von a_1 u. a_2 ein u.s.f., so erhält man

$$a_1 = \frac{Q}{\mathfrak{A}-l_1\gamma}; \quad a_2 = \frac{Q\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}-l_1\gamma(\mathfrak{A}-l_2\gamma)}$$

$$a_3 = \frac{Q\mathfrak{A}^2}{(\mathfrak{A}-l_1\gamma)(\mathfrak{A}-l_2\gamma)(\mathfrak{A}-l_3\gamma)} \text{ u.s.w.}$$

Körper von gleicher relativer Festigkeit

Ein Stab von beistehender Form I hat nicht überall gleiche ~~mäßige~~ relative Festigkeit, sondern bei a ist die Wahrscheinlichkeit des Bruches am größten und nimmt gegen b hin ab, ist bei b selbst 0. Wir stellen uns die Aufgabe einen Stab zu construiren der überall gleiche relative Festigkeit hat, und wenn dieß der Fall sein soll, so muß die Spannungseinh. an der Kante ab überall gleich groß sein. Es sei Fig II ein solcher Stab.

Es ist $Pl = TE$

$Pl = \frac{T}{6} bh^2$ (1) diese Gl. best. die Dimens. bei der Wurzel der W.

$$Px = Px_1 = \frac{p}{6} b y^2 \quad (2)$$

Zur Bestimmung von h hat man $Pl = \frac{p}{6} \left(\frac{b}{h}\right) h^3$.

$$\text{oder } h = \sqrt[3]{\frac{6Pl}{p} \cdot \frac{h}{b}} \quad (3)$$

dividirt man 1 durch 2, so erhält man $\frac{x}{l} = \frac{y^2}{h^2}$

$$\text{oder } \frac{y}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}} \quad (4)$$

d. h. es ist die Gl. der Curve, u. die Curve selbst eine Parabel, deren Scheitel in B liegt.

Man hat also nur, wenn P, l u. $\frac{h}{b}$ gegeben sind, die Dimensionen h bei der Wurzel zu bestimmen u. die entsprechende Parabel zu verzeichnen, indem man entweder aus Gl. (4) verschiedene Ordinaten y bestimmt oder indem man nachfolgende Construction ausführt, und nach dieser Parabel die obere und untere parabolische Fläche darstellt. Es sei nun

z. B. $P = 1000$, $l = 100$, $\frac{h}{b} = 2$ Mat. Gußeisen u. 10 f. Sich.

$$\text{also } p = \frac{3000}{10} = 300$$

$$\text{folglich } h = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 2}{300}} = \sqrt[3]{4000} = 15{\cdot}8 \text{ cm}$$

$$\text{und } b = \frac{15{\cdot}8}{2} = 7{\cdot}9 \text{ cm.}$$

Man erhält dafür folgenden Längenschnitt.

Allein da es sehr schwierig ist, solche krummen Flächen herzustellen und es sich bei den meisten Materialien nicht der Arbeit lohnt, so kann man auch folgende für die Praxis ausreichende Form:

Man setze $\frac{x}{l} = \frac{1}{4}$

dann ist $\frac{y}{h} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

für $x = \frac{1}{4} l$

wird $y = \frac{1}{2} h$.

Tragen wir deßhalb $\frac{1}{4} l$ auf gc nach g auf, errichten dort oberhalb u. unterhalb Ordinaten und tragen hierauf $y = \frac{1}{2} h$, verbinden die erhaltenen Parabelpunkte m u. n mit a u. b ($ab = h$) so erhalten wir beistehende Form, welche fast gar nicht von der wirklichen Form abweicht und sehr leicht, da nur glatte Flächen vorkommen, zu bearbeiten ist.

Auch wendet man manchmal statt jener Formen, da sie nicht immer anwendbar sind, die Halbparabelform an und für diese, wie vorhin, ihre Ausziehungsform. Bisher nahmen wir den Balken immer gleich dick an, es fragt sich nun, wie wir ihn construiren müssen, damit er überall gleiche Festigkeit habe, und daß alle Querschnitte geometrisch ähnl. Figuren sind.

Die Spannungsintensität muß in jedem Punkte dieselbe sein. Das Moment der Kraft, das den Balken bei a abzubrechen strebt,

ist: $Pl = \frac{p}{6} bh^2$

das bei n ist:

$$Px = \frac{p}{6} z y^2 \quad (2)$$

Nun folgt aus (1)

$$h = \sqrt[3]{\frac{6Pl}{p} \frac{h}{b}}$$

$$\frac{x}{l} = \frac{zy^2}{bh^2} = \frac{\frac{z}{y}}{\frac{b}{h}} \frac{y^3}{h^3} \quad (3)$$

Da alle Querschnitte geometrisch ähnlich sein sollen, so muss sein: $\frac{z}{y} = \frac{b}{h}$ (4)

folglich $\frac{x}{l} = \frac{y^3}{h^3}$

oder $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ (5)

und $h = \sqrt[3]{\frac{6Pl}{p}\frac{h}{b}}$ (6)

(5) ist die Gl. einer unbekannten Parabel. ferner ist.

$$\frac{y}{z} = \frac{h}{b}$$

also $y = z\frac{h}{b}$ u. $\frac{y}{h} = \frac{z}{b}$.

folglich $\frac{z}{b} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ (7).

dies ist wieder die Gleichung einer unbekannten Parabel. Mit Hülfe der Gl. 5, 6 u. 7 können wir nun einen Stab construiren, der überall gleiche Festigkeit hat, und dessen Querschnitte geometrisch ähnlich sind. z. B.

Es sei $\frac{x}{l} = \frac{1}{4}$ $\quad \frac{2}{4}$ $\quad \frac{3}{4}$ $\quad \frac{4}{4}$

dann ist $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0·63$, $\sqrt[3]{\frac{2}{4}} = 0·79$; $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 0·908$; $\sqrt[3]{\frac{4}{4}} = 1·00$

Haben wir nun h aus Gl. (6) berechnet, so erhalten wir folgl.

$y =$ 18·9 ; 23·82 ; 27·24 ; 30.

da ferner $b = \frac{1}{2}h$,

so ist $z =$ 9·4 ; 11·9 ; 13·6 ; 15.

Tragen wir nun diese Werthe auf, so erhalten wir folgende 2 Figuren; da aber dieser Körper noch schwieriger darzustellen wäre, so nimmt man auch hier eine Annäherungsform an.

Man setze $\frac{x}{l} = \frac{1}{8}$, so wird $\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$ u. $\frac{z}{b} = \frac{1}{2}$.

In der Parabel ist: $cn = x$; $mn = y$; $pq = z$.

Wir machen also nun $cn_1 = \frac{1}{8}l$; $n_1m_1 = \frac{h}{2}$; $p_1q_1 = \frac{b}{2}$

Es sind b, m; p; q; r, s Punkte der Parabeln. Verbindet man nun b mit m; q mit r; p mit s, so hat man eine annähernde Form, welche fast gar nicht von der wirklichen abweicht und leicht anzufertigen ist, leistet dieselbe Festigkeit bei gleichem Materialaufwand. Zuweilen kommt es vor, daß der Querschnitt des Stabes rund sein soll und derselbe überall gleiche Festigkeit besitzen soll.

Die Oberfläche des Körpers wird eine Umdrehungsfläche sein, wie beistehende Figur zeigt.

Die Spannungen bei D, E, C müssen gleich sein, dann ist

$$Pl = \frac{S\pi}{32} d^3$$

$$Px = \frac{S\pi}{32} y^3$$

folgl. $d = \sqrt[3]{\frac{32 Pl}{S\pi}}$

und $\frac{x}{l} = \frac{y^3}{d^3}$

oder $\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$

Dies ist die Gleichung einer unbekannten Parabel und der Körper wird also ein Umdrehungsparaboloid sein. Man nimmt aber für dieses wieder eine annähernde Form. z. B. für $\frac{x}{l} = \frac{1}{8}$

wird $\frac{y}{d} = \frac{1}{2}$

Also hat man $DF = d = \sqrt[3]{\frac{32 Pl}{\pi S}}$

$$C\overset{m}{A} = \frac{1}{8} AC$$

$$np = \frac{1}{2} DF$$

Die Punkte n u. p sind Parabelpunkte. Verbinden wir nun D mit n u. F mit p, so erhalten wir einen abgestumpften Kegel als Annäherungsform, welche sehr wenig von dem Paraboloid abweicht, und sich auf der Drehbank leicht herstellen läßt.

Körper von gleicher rückwirkender Festigkeit.

Man sieht sogleich, daß die Form die beste sein wird, bei der der Körper ringsum die gleiche Festigkeit hat. Daher sind alle diejenigen Formen gut, welche durch 2 aufeinander senkrechte Ebenen in 4 congruente Theile getheilt werden, alle übrigen sind weniger gut, auch geht noch das gleichseitige Dreieck an.

Die beste Form ist unstreitig der Hohlcylinder.

Was das Längenprofil betrifft, so gebraucht man zu dessen Bestimmung sehr weitläufiger Rechnungen. Deßhalb geben wir hier nur das Resultat an. Der Körper wird bei kreisförmigem Querschnitt ein Rotationskörper von der Gestalt fig. A sein. Die sehr schwierig aufzustellende Gleichg. der Curve findet sich in den Resultaten. Nun ist aber diese Form nicht leicht herzustellen, daher man sich mit einer annähernden begnügt. fig. B. Will man z. B. eine Säule von gleicher Festigkeit construiren, so berechnet man nach Seite 21. die Querschnittsdimension für d für rückw. Fest. u. construirt 2 abgestumpfte Kegel, indem man $\frac{d_1}{d} = \frac{7}{10}$ nimmt.

Körper von gleicher Torsionsfestigkeit.

Hier sind massive u. Hohlcylinder das Beste. Bei letzteren spart man noch Material, macht sie aber nur dann hohl, wenn das hiedurch ersparte Material die Arbeit lohnt.

Umänderung der Querschnitte.

Es können 2 Querschnitte hinsichtlich der Form von einander abweichen aber möglich ist es, daß sie in Bezug auf Festigkeit gleiche Stärke haben.

Haben die Querschnitte gleiche Größe, so sind sie in Bezug auf absolute Festigkeit äquivalent.

Bei der rel. Fest. muß P in beiden Querschnitten gleich sein, wenn sie gleiche Festigkeit haben sollen. Es ist z. B. für einen parallelepipedischen Stab: $Pl = \frac{P}{6} b h^2$

cylindrischen Stab ist: $Pl = \frac{P\pi}{32} d^3$

folglich $\frac{\pi}{32} d^3 = \frac{1}{6} b h^2$

oder $\frac{\pi}{32} d^3 = \frac{1}{6} \left(\frac{b}{h}\right) h^3$

und $\frac{h^3}{d^3} = \frac{\pi}{32} \cdot 6 \frac{b}{h}$

oder $\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{32} \cdot 6 \frac{h}{b}}$

dieser Werth ist also nur von $\frac{h}{b}$ abhängig. Nimmt man nun für $\frac{h}{b}$ verschiedene Werthe an, so erhält man folgende Tabelle:

für $\frac{h}{b}$ =	$\frac{1}{3}$	3	(Redt. Res. 30)
ist $\frac{h}{d}$ =	0.581	1.215	
und $\frac{b}{d}$ =	1.743	0.405	

So kann man leicht für einen runden Stab einen vierkantigen von gleicher Festigkeit construiren und umgekehrt.

Man habe z. B. einen Cyl. von 20 cm Durchm., man soll dafür einen parallelepipedischen herstellen.

Es sei $\frac{h}{b} = 2$.

Nun wäre h & b zu bestimmen.

Nach Seite 30: $\frac{h}{d} = 1·056$

u. $\frac{b}{d} = 0·528$.

folglich $h = 1·056\, d = 21·12$ cm

und $b = 0·528\, d = 10·56$ cm.

2. Es ist ein parallelep. Stab gegeben, dessen Höhe $h = 30$ cm und dessen Breite $b = 10$ cm; man soll dafür einen runden ersetzen, der das gleiche leistet.

Es ist also $\frac{h}{b} = 3$

ferner nach Seite 30: $\frac{h}{d} = 1·215$

und folgt $d = \frac{30}{1·215} = 24·7$ cm

Wann sind ein runder u. parallelep. Stab äquivalent in Bezug auf relative Festigkeit.

Hier ist $Pl = SE$, für den runden.

und $Pl = SE_1$ für den parallelepipedischen.

Sollen sie gleiche Festigk. haben, so muss sein:

$$E = E_1$$

d. h. $\frac{\pi}{32} d^3 = \frac{\pi}{32} bh^2$

folglich $d^3 = bh^2$ oder $d^3 = \left(\frac{b}{h}\right) h^3$

deshalb $\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{h}{b}}$

Es findet sich Seite 31. bereits eine Tabelle, die für verschiedene Werthe von $\frac{h}{b}$, die entsprechenden Werthe von $\frac{h}{d}$ gibt.

Für einen runden Stab von 12 cm Durchmesser, sei z. B. ein parallelep. zu construiren, der die gleiche Festigkeit besitzt. Es sei $\frac{h}{b} = 2$.

So ist nach Seite 31: $\frac{h}{d} = 1·26$.

und folglich $h = 1·26 \cdot 12 = 15·12$ cm.

$b = 7·56$ cm.

3. Wenn haben ein runder Stab und ein Parallelepipedon gleiche rückwirkende Festigkeit? Hier verfahren wir auf folgende Art: Wir haben früher gefunden, daß die größte Last, die ein runder Stab aufrechtstehend zu tragen vermag, ist:

$$P = \frac{\varepsilon \pi^3}{64} \cdot \frac{d^4}{l^2}$$

für einen parallelep. Stab ist $P = \frac{\varepsilon \pi^2}{12} \frac{bh^3}{l^2}$

Sollen nun diese Stäbe bei gleicher Länge dieselbe Last tragen, so muß sein: $P = P$

$$\text{oder } \frac{\varepsilon \pi^3}{64} \frac{d^4}{l^2} = \frac{\varepsilon \pi^2}{12} \frac{bh^3}{l^2}$$

$$\frac{\pi}{32} d^4 = \frac{1}{6} bh^3$$

$$\text{oder } \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{1}{6} \left(\frac{b}{h}\right) h^4$$

$$\left(\frac{h}{d}\right)^4 = \frac{\pi}{32} 6 \frac{h}{b}$$

$$\text{oder } \frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{32} \cdot 6 \cdot \frac{h}{b}}$$ (Seite 36. die entspr. Tab.)

4. Für eine runde Schubstange von 14 cm $= d$ Durchm. soll dafür eine parallelep. von gleich. Fest. hergestellt werden. Es sei $\frac{h}{b} = \frac{3}{4}$. So hat man n. S. 31. $\frac{h}{d} = 0{\cdot}816$ u. $\frac{b}{d} = 1{\cdot}088$

folglich $h = 0{\cdot}816 \times 14 = 11{\cdot}4$ cm

und $b = 1{\cdot}088 \times 14 = 15{\cdot}2$ cm

Berechnung verschiedener Wirkungsgrößen

die zur Ausdehnung, Zusammendrückung, u. s. w. von Stäben nothwendig sind. Welche Wirkungsgröße entspricht der Ausdehnung eines Stabes? Nehmen wir an, der Stab sei um λ ausgedehnt, die Spannung sei bei B sei alsdann $\mathfrak{A}$ und der Querschnitt des Stabes sei O, so ist:

$$B C = \mathfrak{A}\, O \quad (1)$$ die ausdehnende Kraft am Ende der Dehnung.

Trägt man auf der Verlängerung AB des Stabes die Ausdehnung als Abscissen auf und als Ordinaten die entsprechenden Kräfte; so gibt die Verbindungslinie der Ordinaten eine gerade Linie, die λ proportional mit P wächst.
Die Wirkungsgröße die bei der Ausdehnung entwickelt wird ist ausgedrückt durch den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

$$\text{folglich } W = \frac{1}{2} AB \times BC$$
$$\text{oder } W = \frac{1}{2} \lambda \times \mathfrak{A}\Theta \ (3)$$
$$\text{Aus (2) folgt: } \mathfrak{A} = \frac{E\lambda}{l}$$
$$\text{folgl. } W = \frac{1}{2}\lambda \cdot \frac{E\lambda}{l}\Theta$$
$$\text{oder } W = \frac{\Theta E}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{l}$$

Setzt man den Werth von λ aus 2 in 3 ein, so erhält man

$$W = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{A} l}{E} \cdot \mathfrak{A}\Theta = \frac{1}{2}\Theta l \frac{\mathfrak{A}^2}{E}$$
$$\text{folgl. } W = \frac{1}{2} V \frac{\mathfrak{A}^2}{E} \ (5) \ (\text{wo } V \text{ das Volumen bezeichnet.})$$

Nun haben wir die Wirkungsgröße auf zwei Arten erhalten; die Gl. (4) drückt die Wirkung aus, die eine Ausdehnung λ bewirkt, während (5) die Wirkung ausdrückt, die nothwendig ist, damit eine Spannungsintensität $\mathfrak{A}$ herrsche.
Dies gilt aber nur für schwache Dehnungen. Erlauben wir uns es nun aber auch für starke gelten zu lassen, so reißt der Stab wenn die Spannungsint. = der abs. Festigkeit und wir sehen aus (5), daß die Wirkung nur von dem Volumen abhängt, es ist daher einerlei ob der Stab dünn und lang oder kurz und dick ist.
Der Coeff. $\frac{\mathfrak{A}^2}{E}$ in Gl. (5) findet sich für versch. Materialien P. 36. Res. u. man sieht aus denselben, daß die Wirkung, welche zum Abreißen nothwendig ist, nicht nur um so größer, je größer $\mathfrak{A}$, sondern sie nimmt auch bei geschmeidigen Metallen um sehr viel zu.

Wirkungsgröße bei der Biegung der Stäbe.

Auf AB trage man als Abscissen die Biegung des Endpunktes B des Stabes auf, u. als Ordinaten die entsprechende Kraft; verbindet man alsdann die Endpunkte der Ordinaten, so muß die Verbindungslinie eine gerade Linie sein, was aus folgendem sich ergibt.

$$y = \frac{P}{2\varepsilon E z}\left(l^2 x - \frac{1}{3} x^3\right)$$

für $x = l$ ist $y = AB = f$.

$$AB = f = \frac{P}{2\varepsilon E z}\left(x^3 - \frac{1}{3} x^3\right)$$

$$AB = \frac{1}{3}\frac{Pl^3}{\varepsilon E z}$$

Daraus sieht man, daß P der Biegung des Stabes proportional ist, und folglich AC eine gerade Linie.

und folglich auch $W = \frac{1}{2} AB \times BC$

$$W = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{\varepsilon E z}\cdot P$$

$$= \frac{1}{6}\frac{P^2 l^3}{\varepsilon E z} \quad (1)$$

$$Pl = TE \quad (2)$$

$$P = \frac{TE}{l}$$

und $W = \frac{1}{6}\frac{l^3}{\varepsilon E z}\cdot\frac{T^2 E^2}{l^2} = \frac{1}{6}\frac{T^2}{\varepsilon}\frac{El}{z}$.

der Koeff. $\frac{El}{z}$ ist für einfache Formen der Größe des Querschnitts proportional, z. B. für einen runden Cyl. ist: $z = \frac{d}{2}$ und

$$E = \frac{\pi}{32} d^3$$

$$\frac{El}{z} = \frac{2\pi d^3 l}{32\cdot d} = \frac{1}{4}\frac{\pi d^2 l}{4} = \frac{1}{4} V.$$

folglich $W = \frac{1}{24}\frac{T^2}{\varepsilon} V$

für ein Parallelepiped ist $z = \frac{h}{2}$

und $E = \frac{1}{6} bh^2$

folglich $\frac{El}{z} = \frac{1}{6}\frac{bh^2 l}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{3} bhl = \frac{1}{3} V$

und folgl. $W = \frac{1}{18}\frac{T^2}{\varepsilon} V$.

die Wirkungsgr. W für verschiedene Querschnitte Seite 33. Resultat. Wollen wir diese Gesetze für stärkere Biegungen gelten lassen, so erhalten wir, wenn wir statt P die Bruchungskraft setzen, die Wirkungsgröße, die nothwendig ist um den Stab abzubrechen. Dieselbe Wirkungsgröße ist auch nothwendig, den Stab durchzubrechen, wenn er auf 2 Stützen liegt und irgendwo belastet wird.

Berechnung der Wirkungsgrößen zum Abwinden der Stäbe.

Wenn der Stab durch die drehende Kraft P um einen Winkel Θ gedreht worden ist:

$$\Theta = 16 \frac{M l}{G} \frac{2}{d^4 \pi} = 32 \frac{M}{G} \cdot \frac{l}{d^4 \pi}$$

wenn M das Torsionsmoment am Ende der Verwindung bedeutet, und da dieses dem $\measuredangle \Theta$ proportional ist, so ist

$$W = \frac{1}{2} \Theta M = \frac{1}{2} \times 32 \frac{M^2}{G} \cdot \frac{l}{d^4 \pi}.$$

Nun ist nach Seite 22 Res.

$$M = T \frac{\pi}{16} d^3$$

folglich

$$W = \frac{1}{2} 32 \frac{T^2}{G} \cdot \frac{\pi^2}{16^2} \cdot \frac{d^6 l}{d^4 \pi}$$

$$= \frac{T^2}{G} \frac{\pi}{16} d^2 l$$

und

$$W = \frac{1}{4} \frac{T^2}{G} \cdot \frac{d^2 \pi}{4} l$$

Da aber $\frac{d^2 \pi l}{4}$ = V dem Volumen des Cylinders, so ist $W = \frac{1}{4} \frac{T^2}{G} V$.

Die Werthe von $\frac{T^2}{G}$ finden sich S. 36 Res. für verschiedene Materialien und S. 34 ist diese Wirkungsgröße W noch für andere Querschnitte hergeleitet.

Beispiel.

Man habe einen vertikal eingemauerten Stab, der unten mit einer Querplatte versehen ist, in denselben laufe ein durchbohrter Cylinder. Läßt man denselben von oben herabfallen, so wird er, wenn an der

Platte angelangt ist, muss so lange fortlaufen, bis seine durch das Fallen erhaltene lebendige Kraft durch die Ausdehnung des Stabes erschöpft ist. Wie gross ist nun die Ausdehnung λ?
Der Schwerpunkt des Körpers vom Gewicht Q ist um $H+\lambda$ nieder gegangen, und hat dadurch die Wirkung:

$$W = Q(H+\lambda)$$

producirt. Nun ist aber nach §. 32. die Wirkung, die der Ausdehnung λ entspricht:

$$W = \frac{\Theta}{2}\varepsilon\frac{\lambda^2}{l}$$

$$Q(H+\lambda) = \frac{\Theta\varepsilon}{2}\frac{\lambda^2}{l}$$

$$\text{und } QH + Q\lambda = \frac{\Theta\varepsilon}{2l}\lambda^2$$

$$\frac{\lambda^2\Theta\varepsilon}{2l} - Q\lambda = QH$$

$$\lambda^2 - \frac{2l}{\Theta\varepsilon}Q\lambda = QH\frac{2l}{\Theta\varepsilon}$$

$$\lambda^2 - \frac{2l}{\Theta\varepsilon}Q\lambda + \left(\frac{lQ}{\Theta\varepsilon}\right)^2 = QH\frac{2l}{\Theta\varepsilon} + \left(\frac{lQ}{\Theta\varepsilon}\right)^2$$

$$\left(\lambda - \frac{lQ}{\Theta\varepsilon}\right)^2 = QH\frac{2l}{\Theta\varepsilon} + \left(\frac{lQ}{\Theta\varepsilon}\right)^2$$

$$\lambda = \frac{lQ}{\Theta\varepsilon} + \sqrt{QH\frac{2l}{\Theta\varepsilon} + \left(\frac{lQ}{\Theta\varepsilon}\right)^2}$$

Nun ist aber $\mathfrak{A} = \frac{\varepsilon\lambda}{l}$

oder $\mathfrak{A} = \frac{\varepsilon}{l}\left[\frac{lQ}{\Theta\varepsilon} + \sqrt{QH\frac{2l}{\Theta\varepsilon} + \left(\frac{lQ}{\Theta\varepsilon}\right)^2}\right]$

$$\mathfrak{A} = \frac{Q}{\Theta} + \sqrt{\frac{QH2l}{\Theta\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{l^2} + \frac{l^2Q^2}{\Theta^2\varepsilon^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{l^2}}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{Q}{\Theta} + \sqrt{\frac{2QH\varepsilon}{\Theta l} + \left(\frac{Q}{\Theta}\right)^2}$$

Theorie zur Construction der einzelnen Maschinentheile.

dazu müssen wir Regeln aufstellen, die auf einem gewissen wissenschaftlichen Fundament beruhen, von praktischem Werthe und leicht anwendbar sind.

Hanfseile.

dieselben werden in der Technik vielfältig gebraucht, z. B. bei Schiffen, Bergbau etc. Ihre Darstellung ist folgende:
Zuerst werden aus Hanf mittelst des sogenannten Seilerrädchens Schnüre gesponnen, von denselben werden 5–6 nebeneinander gelegt u. mit Hülfe eines Rädchens umeinander gedreht, wodurch man eine Leine erhält. Mehrere solcher Leinen legt man wieder nebeneinander und umwindet sie, wodurch das Seil entsteht.
Nun kommt es bei der Belastung der Seile darauf an, daß alle Elementarfasern gleich gespannt sind und jede gleich viel zu tragen hat, was man durch den beschriebenen Prozeß erlangt.
Es hängt nun die Festigkeit eines solchen Seiles von der Qualität des Rohmaterials, von der Sorgfalt mit der die Pflanze gezogen wurde, dem Erdreich, der Ernte, der Sorgfalt bei den versch. Proceduren, als Rösten, Brechen, von der Elast. u. Festigkeit, von der Sorgfalt mit der der Seiler arbeitete, von dem Alter u. Vorgängen, welche es auszuhalten hat. Es ist daher leicht einzusehen, daß keine allgemeine genaue Regel zur Constr. eines Seiles aufgestellt werden kann, sondern man ein jedem Verhältniß stand sich befindl. Seil ansehen muß u. an diesem die Regeln ausfindig machen.
Nach S. 36 Ref. ist für diese die abs. Festigkeit 510 Kilg. u. die Erfahrung lehrte, daß man sie nur bis zu 5ten Theil davon in Anspruch nehmen darf; es darf ein □cm höchstens mit 102 Kilg. belastet werden.

Man hat also $\frac{d^2\pi}{4}\mathfrak{A} = P$.

folglich $d = \sqrt{\frac{4P}{\mathfrak{A}\pi}}$ u. da $\mathfrak{A} = 102$.

so ist $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi \cdot 102}} = 0{\cdot}113\sqrt{P}$.

Diese Gl. gibt den Durchmesser eines Seiles, das eine Last P mit 5facher Sicherheit tragen kann.
S. 37. Ref. befindet sich eine Tabelle, worin für verschied. Belastungen die dazugehörigen Durchmesser gegeben sind.
Für manche Verwendungen sind Seile sehr gut, insbesondere wenn die Last nicht so groß wird und sie sich in trockenen Localitäten befinden. Da nun z. B. wie in Bergwerken, die Seile fortwährend der feuchten Luft und der Reibung an den Wänden, der Zimmerung etc ausgesetzt sind und daher rasch zu Grunde gehen, so ist man auf den Gedanken gekommen Drahtseile zu construiren, welche in ähnl. Weise, wie Hanfseile angefertigt werden.

Drahtseile.

Es werden 5-6 dünne Drähte um eine geteerte Hanflitze gelegt und umeinander gewunden, wodurch man dann ein Drahtseil erhält. Dieselben haben größere Festigkeit u. Dauerhaftigkeit.
Es sei nun der Durchm. d des Seiles, sowie der Durchm. δ eines Drahtes zu bestimmen, wenn das Seil eine gegebene Last P tragen soll.
Wenn $\frac{\delta^2\pi}{4}$ die Größe des Querschnittes eines Drahtes bedeutet, und i die Anzahl der Drähte in dem Seile, so ist:

$i\frac{\delta^2\pi}{4}\mathfrak{A} = P$, wo $i\frac{\delta^2\pi}{4}\mathfrak{A}$ die gesamt. Quersch. im Seil.

und $\delta = \sqrt{\frac{4P}{i\pi\mathfrak{A}}}$

Durch Messung findet man, daß $d = 10\delta$ ist.
Da die Drahtseile in der Regel bis auf den 5ten Theil der abs. Festigkeit

in Anspruch genommen werden, heißt:

$$\mathfrak{A} = \frac{7000}{5} = 1400$$

ferner i gewöhnlich $= 36$

folglich $\delta = \frac{\sqrt{4P}}{36 \times 3.14 \times 1400} = \frac{1}{200}\sqrt{P}$

und $d = \frac{1}{20}\sqrt{P} = 0.05\,P.$

Man sieht daraus, daß der Durchmesser des Drahtseiles halb so groß als der eines Hanfseiles ist, das die gleiche Last zu tragen hat. Die Steifigkeit der Drahtseile im Verh. zu den Hanfseilen ist nicht so groß als man dem ersten Anschein nach glaubt.

Ketten.

Dieselben vertreten theilweise die Stellen der Seile und werden folgender Art angefertigt.
Man glüht Stäbe von Rundeisen, biegt sie auf dem Amboßhorn, bis sie die Form d. Fig. A erhalten, u. schweißt beide Enden zusammen. Was die Festigkeit dieser Ketten anbelangt, so hält es schwer, dieselbe durch Rechnung zu bestimmen, weil die Berechnung der Spannungs- u. Pressungszustände an den verschiedenen Stellen nicht genau bestimmt werden kann. In dem Falle aber, daß wir die innere Höhlung gegen die Dicke des Ketteneisens klein machen, fallen jene Deformationen so klein aus, daß wir uns erlauben können die Festigkeit nach der Summe der beiden Querschnitte des Ketteneisens zu berechnen. Da die Ketten wie ein Seil nach allen Richtungen beweglich sein sollen, ohne dabei in Verwicklung zu gerathen, so muß man den innern Raum klein machen, man macht ihn auch in Wirklichkeit nur so groß, daß die beiden Glieder gerade noch Platz haben sich frei bewegen zu können.

Taf. II in d. Ref. finden sich die zur Kettenconstruction geeigneten Verhältnisse u. zwar sind die Dimensionen der Ketten, der engl. Marine entnommen, welche ohne Zweifel gut sein müssen.
Zur Berechnung des Durchm. d eines Ketteneisens hat man:

$$2\,\frac{d^2\pi}{4}\,\mathfrak{A} = P.$$

und $$d = \sqrt{\frac{4}{2\pi\mathfrak{A}}} \times \sqrt{P}.$$

die Erfahrung lehrt nun, daß die abs. Festigkeit des Ketteneisens nicht 3300, sondern 2400 Kilg. beträgt, was vom Schweißen, den Formänderungen etc. herrührt. Man kann die Ketten bis auf $\frac{1}{3}$ ihrer abs. Festigkeit in Anspruch nehmen, da es nichts schadet, wenn sie während der Belastung ein wenig gedehnt werden.

deßhalb ist $\mathfrak{A} = \frac{2400}{3} = 800$

und folglich $d = 0{\cdot}28\,\sqrt{P}.$

Es findet sich Seite 39 in der Ref. eine Tabelle, wenn d von $0{\cdot}5 - 7{\cdot}70^{cm}$ angenommen wurde und die entsprechenden Werthe von P dazu ausgerechnet.

Eine 2te Art von Ketten zeigt fig. B.
Dieselbe besitzt eine größere Festigkeit als die vorhergehende und sie beträgt nach der Erfahrung 3200.

Schrauben.

zur Befestigung u. Verbindung.

Wenn allgemein 2 Körper A & B verbunden werden sollen, die sich in verticaler Linie zu trennen suchen, so geschieht dies gewöhnl. mittelst einer Schraube, der Theil a heißt Bolzen, b Bolzenkopf und c. die Schraubenmutter.

Die Schrauben werden zur Verbindung mit Vortheil nur dann angewandt, wenn der Bolzen nur auf rückw. Festigkeit in Anspruch genommen ist; wird der Bolzen auf Abscheren in Anspr. genommen, so ist die Schraube nicht gut brauchbar u. muß andre Verbindungen nehmen. Es handelt sich nun darum was für Dimensionen wir der Schraube u. Mutter geben müssen.
Ist die Kraft P gegeben, so ist natürl. der Querschnitt des Bolzens proportional P oder daß der Durchmesser proportional der $\sqrt{P}$; also $d = \frac{1}{9}\sqrt{P} = 0{\cdot}111\sqrt{P}$.
Die Länge des Bolzens richtet sich nach der Dicke der zu verbindenden Theile.
Was die Detailabmessungen betrifft, so sagt uns schon das Gefühl, daß die Schrauben nicht geometr. ähnlich sein können, sondern daß kleinere Schrauben verhältnißmäßig ~~stärker~~ größer sein müssen als große. Allgemein bekannt ist, daß die Schrauben der engl. Constructeur's sehr schön u. gut sind; daher wenn eine Anzahl jener verglichen hatte, die Unregelmäßigkeiten ausglich und daraus folgende Formeln herleitete, die Seite 40 in den Sch. gez. sind.
Wir wollen nun die Formeln für scharfe Gewinde anführen. Es ist die Anzahl der Gewinde auf den Durchmesser

$$n = \sqrt[3]{48+168d}.$$

der innere Durchmesser des Gewindes:

$$d_1 = \frac{n-2}{n}d$$

die Schlüsselweite: $D_1 = 0{\cdot}5+1{\cdot}4d.$

die Höhe der Mutter: $h = \frac{2}{3}D'.$

Man sieht aus diesen Formeln, was schon bereits gesagt ist, daß kleine Schrauben verhältnißmäßig größer sind.
Seite 41 befindet sich eine Tabelle, in welcher für versch. Werthe von P.

die entsprechenden Werthe von d, n, d', D u. h angegeben
sind. dabei wurde d angenommen, S daraus berechnet und die
übrigen Grössen nach den letzt angeführten Formeln berechnet.

Anwendung der Schraube.

Außer der mannigfachen Verbindungen zweier oder mehrerer Kör-
per, wo also der Bolzen auf abs. Festigkeit in Anspruch genom-
men ist, (Taf. VII) gibt es noch Verbindungen, wobei ein Abscheren
des Bolzens vorkommen kann. Hieher gehören insbesondere die
2 sog. Laschenverbindungen und die Verbindung durch Einlege-
scheiben (Taf. VIII.)

Vernietungen.

Die Vernietung ist eine ähnl. Verbindung wie die mit Schrau-
ben und wird meistens zur Erweiterung einer Fläche durch 2
oder mehrere Bleche, zur Kanten u. Eckenbildung usf. ge-
braucht.
Sind z. B. 2 Bleche a u. b zu vernieten, so dass eine Flächen-
erweiterung entsteht, so durchsticht man beide Bleche oder durch-
bohrt sie, wendet letzteres Verfahren hingegen nur bei exacten
Arbeiten, wo es auf besondere Festigkeit gesehen wird, an.
Die Niete, deren Gestalt Fig. A angibt, wird zuerst geschmie-
det, so dass sie die richtige Form erhält.
Diese Niete wird in weiss glühendem
Zustand durch das Loch der beiden Bleche
gesteckt und einstweilen die rohe Gestalt
des Nietenkopfs aus dem hervorragenden
Theile des Bolzens mittelst Hammerschlä-
gen hergestellt. Zuletzt bildet man

noch die runde Form mittelst des Setzhammers.
Nun ist die zweckmäßigste Vernietung zu bestimmen, d.h. wir haben die Stärke der Bolzen zu berechnen, die Entfernung der einzelnen Bolzen u. die Entf. der Bolzen vom Blechrande etc.
Es kann nämlich vorkommen, daß die Nietbolzen, welche fast immer auf Abscheren in Anspruch genommen sind, reißen, oder daß das Blech zwischen den einzelnen Bolzen ausreißt, oder endlich, daß der Blechrand ausreißt.
Wir müssen nun eine Vernietung ausfindig machen, bei der die Wahrscheinlichkeit des Reißens der oben angeführten Fälle überall gleich groß ist. Eine solche Vernietung zeigt Fig. C.
Es muß deßhalb dieselbe Kraft nothwendig sein zum Abscheren des Nietbolzens a, als zum Ausreißen des Blechs bei cd, ef und gh.
Setzen wir den Durchmesser des Nietbolzens $= d$.
für die Entfernungen je zweier Nietenmittel $= e$.
" " " des Bolzenumfangs vom Blechrande $= e'$,
und endlich für die Dicke des Blechs δ.
So kann man die 3 Größen d, e u. e' berechnen, wenn δ bekannt ist. Bedeutet ferner A die Spannungsintensität, so hat man:

$$A\frac{d^2\pi}{4} = A(e-d)\delta = 2Ae'\delta.$$

$$\text{oder } \frac{d^2\pi}{4} = (e-d)\delta = 2e'\delta \quad (1)$$

$$\text{und } \frac{d^2\pi}{4} = (e-d)\delta \quad (2)$$

$$\left(\frac{d}{\delta}\right)^2\frac{\pi}{4} = \frac{e}{\delta} - \frac{d}{\delta} \quad (3).$$

$$\frac{e}{\delta} = \frac{d}{\delta} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad (4)$$

Wegen (1) ist: $(e-d)\delta = 2e'\delta$.

$$\frac{e}{\delta} - \frac{d}{\delta} = \frac{2e'}{\delta}$$

$$\frac{2e'\delta}{\delta} = \frac{e}{\delta} - \frac{d}{\delta} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2$$

folglich $\frac{e'}{\delta} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2$ (5)

Beispiel. $\frac{d}{\delta} = 2$

So ist $\frac{e}{\delta} = 2 + \frac{3.14}{4} \times 4 = 5.14.$

und $\frac{e'}{\delta} = \frac{3.14}{8} \times 4 = 1.57.$

Wir haben also durch Gl. (4) u. (5) e und e' bestimmt, da δ bekannt ist, wenn das Verhältniß $\frac{d}{\delta}$ angenommen ist.

Dazu bestimmen wir die Festigkeit der Vernietung, indem wir die Kräfte die welche ist um ein ungenietetes Blech abzureißen vergleichen mit der, welche nothwendig ist um ein genietetes abzureißen.

Setzen wir das Verhältniß gleich f.

So ist $f = \frac{e}{e-d} = \frac{\frac{e}{\delta}}{\frac{e}{\delta} - \frac{d}{\delta}}$

Führt man aus (4) $\frac{e}{\delta}$ ein, so wird

$$f = \frac{\frac{d}{\delta} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2} = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\delta}{d}\right)$$

Indem man für $\frac{d}{\delta}$ verschiedene Werthe setzt, erhält man folg. Tabelle. P. 42

für $\frac{d}{\delta}$ =	1	1.5	2	2.5	3.
wird f =	2.27	1.85	1.64	1.51	1.42
$\frac{e}{\delta}$ =	1.78	3.26	5.14	7.41	10.06.
$\frac{e'}{\delta}$ =	0.39	0.88	1.56	2.44	3.51.

Hieraus ist ersichtlich, daß bei kleinen Nieten das Verh. f groß ist zugleich aber auch $\frac{e}{\delta}$ u. $\frac{e'}{\delta}$ klein; bei großen Nieten verhält es sich umgekehrt; folglich gewähren große weit aus einander gestellte Nieten eine weit größere Festigkeit, als kleine nahe an einander gestellte Nieten.

Man wählt deßhalb bei Vernietungen, wobei es blos auf Festigkeit ankommt, die grobe Vernietung (Brücken u. s. w.)
Bei Vernietungen, wobei es nur auf Dichtigkeit ankommt nimmt man dünne nah gestellte Nieten (Gasometer.)
Bei Vernietungen, welche beiden Zwecken zugleich entsprechen sollen wählt man eine mittlere. (Dampfkessel, Schiffstheile unter Wasser.)

dicht nicht fest $\frac{d}{\delta} = 1.$

fest nicht dicht $\frac{d}{\delta} = 3.$

dicht und fest $\frac{d}{\delta} = 2.$

doppelte Vernietung.

Eine solche sei durch beistehende Figur dargestellt, wobei also das Blech durch 2 Reihen Nietbolzen zusammengehalten werden.
Wir wollen nun hier diese auch wieder e und d bestimmen, so wie untersuchen ob diese oder die einfache Vernietung besser ist
Es muß wieder sein: $2\,\frac{d^2\pi}{4}\,\mathfrak{A} = (e-d)\,\delta\,\mathfrak{A}$ (1)

$$\frac{2\,d^2\pi}{4} = (e-d)\,\delta$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 = \frac{e}{\delta} - \frac{d}{\delta}$$

$$\frac{e}{\delta} = \frac{d}{\delta} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad (2).$$

Nun frägt es sich wieder, wie wir $\frac{d}{\delta}$ annehmen müssen, deßhalb untersuchen wir, wie sich die Festigkeit des unvernieteten Bleches zu der des vernieteten verhält.

$$\text{Es ist } f = \frac{e\,\delta\,\mathfrak{A}}{(e-d)\,\delta\,\mathfrak{A}} = \frac{e}{e-d} = \frac{\frac{e}{\delta}}{\frac{e}{\delta} - \frac{d}{\delta}}$$

Setzt man aus 2 $\frac{e}{\delta}$ ein:

$$\text{so erhält man } f = \frac{\frac{d}{\delta} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2} = 1 + \frac{d}{\delta}\cdot\frac{2}{\pi}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2$$

$$\text{folglich } f = 1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\delta}{d}\right) \quad (3)$$

Vergleicht man die beiden Formeln von f, der einf. u. doppelt. Vernietung, so findet man, daß die doppelt. Vernietung fester ist.
Aus Gleichg. $\frac{e}{\delta}$ folgt, daß bei der dopp. Vernietung die Bolzen weiter auseinander zu stehen kommen, als bei der einfachen.
Setzen wir nun für $\frac{d}{\delta}$ versch. Werthe, so erhält man auch hier wieder folgende Tabelle. Seite 43.

für $\frac{d}{\delta}$ =	1	2	3.
ist $\frac{e}{\delta}$ =	2·6	8·3	1·4.
und f =	1·64	1·32	1·21
oder $\frac{1}{f}$ =	0·6	0·8	0·9.

Man sieht also daß bei der doppelt. Vernietung das Festigkeitsverhältniß sehr zieml. klein ist. Bei einer 3, 4, 5 u. s. w. fachen Vernietung wird die Festigkeit immer größer ohne jedoch jemals die molekulare Festigkeit zu erreichen, deßhalb wird man bei wichtigen Fällen immer eine vielfache Vernietung anwenden, trotz der größeren Kosten u. Arbeit.
Allgemein ist nur für eine n fache Vernietung:

$$n \frac{d^2 \pi}{4} Kl = (e-d)\,\delta\, Kl. \quad (1).$$

folgl. $$\frac{e}{\delta} = \frac{d}{\delta} + n\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad (2).$$

und $$f = \frac{e\,\delta\, Kl}{(e-d)\,\delta\, Kl} = \frac{\frac{e}{\delta}}{\frac{e}{\delta} - \frac{d}{\delta}}$$

$$f = \frac{\frac{d}{\delta} + n\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2}{n\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2} = 1 + \frac{4}{n\pi}\left(\frac{\delta}{d}\right) \quad (3).$$

Eine andere Art von Vernietung ist noch die

Kettenvernietung.

dieselbe wird durch Fig. A verdeutlicht. Soll hier der Bolzen abgescheert werden, so kann dies nur geschehen, indem er bei ab u. cd fortgerissen wird.

folglich hat man $2\frac{d^2\pi}{4}\mathfrak{A} = (e-d)\,\delta\,\mathfrak{A}$.
dieselbe Bedingungsgl. wie bei der dopp. Vernietung, folgl. hat diese Kettennietung dieselbe Festigkeit, sowie dieselbe Anzahl, Entfernung und Durchmesser der Bolzen wie bei der doppelten Vernietung.
Nun kann es auch vorkommen, daß 2 Bleche a u. b fig D aneinander gedrückt werden, daher man die Bolzen natürl. schräger nimmt u. in größeren Entfernungen anbringt, die letztere nur dazu dienen, die Bleche gegen das Auseinanderfallen zu halten.

Winkeleisen.

Man bedient sich derselben zur Ecken und Kantenbildung bei Blechen namentlich bei Dampfkessel, und haben im allgemeinen die Gestalt wie fig E zeigt. Diese Winkeleisen dürfen nicht geometrisch ähnlich sein, sondern bei schwachen Winkeleisen müssen die Schenkellängen verhältnißmäßig länger sein, als bei starken. Man vergleicht auch hier wieder am besten, um die Querschnittsdimensionen der Winkeleisen zu erhalten, eine Anzahl verschiedener gut ausgeführter Eisen dieser Art.
Man erhält dadurch die mittlere Dicke der Winkeleisen:

$\Delta = \delta$ = Blechdicke.

und $h = 2.4 + 4.5\,\delta$, wenn h die Länge eines Schenkels ist.

Anwendungen der Vernietungen.

Hierbei kommen vor: Flächenvernietungen mittelst 2, 3 oder 4 Blechen (Taf IX) fig 1–6 Kanten und Eckbildungen mit und ohne Winkeleisen Taf X fig 6–10.
Wenn es sich um dichten Verschluß bei Ecken und Kantenbildungen

handelt, so wendet man z. B. bei Dampfkesseln in neuerer Zeit keine Winkeleisen mehr an.
Eine andere Art von Kanten und Eckbildung ist die mittelst eines Krempens fig. A. Endlich dient die Vernietung noch zur Flächenverstärkung, was fig. B, C u. D darstellen mögen.

Zapfen an Wellen und Drehungsaxen.

Soll ein Körper um eine Axe rotiren, so versieht man ihn mit einer Welle, deren geometr. Axe mit der Rotationsaxe des Körpers zusammenfällt; bringt an beiden Enden der Welle Zapfen an, die durch entsprechende Lager gestützt werden.
Damit nun eine solche Welle der oben angeführten Bedingung entsprechen soll, also kein Zwängen u. gewaltsames Biegen der Welle eintreten kann, müssen die beiden Zapfen sorgfältig auf einer guten Drehbank abgedreht werden.
Es handelt sich nun um die Bestimmung dieser beiden Zapfen, da dieselben oft ungeheure Lasten zu tragen haben und es daher nothwendig ist, daß diese Zapfen eine hinreichende relative Festigkeit besitzen; wir wollen deßhalb die Dimensionen aufsuchen, welche erforderlich sind um das Brechen dieser Zapfen zu verhindern.
Haben wir eine Welle A, B den Zapfen u. C das zugehörige Lager, so übt der Zapfen auf die untere Lagerschale ein Druck aus, welcher gleich der halben Last des rotirenden Körpers. Heißen wir diesen Druck P, so wirkt die Schale mit gleichem Drucke P auf den Zapfen zurück.

Bei richtiger Construction, Ausführung u. Aufstellung muss die Int. des Druckes längs des Zapfens gleich sein.

Wir dürfen einen solchen Zapfen B ansehen als Cylinder, der an einem Ende ab befestigt ist, am andern frei ist, und auf den nun eine Kraft P einwirkt, die bestrebt ist diesen Cylinder bei ab abzubrechen. Es darf daher die Spannung bei ab nicht eine gew. Grenze überschreiten, wenn der Zapfen die Last P des rot. Körpers mit Sicherheit tragen soll.

Es ist nun $\frac{Pl}{2}$ das Moment, das den Zapfen abzubrechen strebt.

$$\text{folglich} \quad \frac{Pl}{2} = \frac{S\pi}{32} d^3$$

$$Pl = \frac{S\pi}{16} d^3$$

$$\text{oder} \quad P = \frac{S\pi}{16} \left(\frac{d}{l}\right) d^2$$

$$\text{folglich} \quad d = \sqrt{\frac{16}{S\pi} \times \frac{l}{d} \times P}$$

Es ist nun leicht d nach dieser Formel zu berechnen, denn P ist gegeben, S ein aliquoter Theil von dem Brechungscoeff. z.B. der 10te 15te 20te u.s.f. je nachdem man mit einer 10, 15 od. 20fachen Sicherheit construiren will. $\frac{l}{d}$ ist willkürl. d.h. wie wir es auch immer annehmen, so genügt der Bedingung der Festigkeit und wir können also das $\frac{l}{d}$ so wählen, daß man damit versch. Nebenumständen entsprechen kann. Haben wir z.B. an Kraft zu sparen, so machen wir $\frac{l}{d}$ klein, es wird dann d klein u. folgl. eine geringere Reibung entstehen.

Soll ein Warmlaufen und Abnützen der Zapfen verhütet werden, so macht man $\frac{l}{d}$ groß, also legt da l u. d groß sind, der Zapfen mit einer großen Fläche in dem Lager auf, und daher auch die Intens. des Druckes klein. Wir können also für alle Fälle Regeln aufstellen; allein diese Fälle sind nur Extreme und wir begnügen uns damit für das gen Verhältniß, wo also kein Warmlaufen und keine Kraft vorhanden ist, Regeln aufzustellen. Gewöhnlich nimmt man

$\frac{l}{d}$ constant an $\frac{5}{4}$ bis $\frac{4}{3}$ höchstens $\frac{3}{2}$.

Führt man dies, sowie für P seinen allg. Werth ein,

so hat man $\sqrt{\frac{16}{r\pi}\left(\frac{l}{d}\right)} = \lambda$ eine const. Größe.

$d = \lambda\sqrt{P}$ (1) und $\lambda = \frac{d}{\sqrt{P}}$ (2)

Nun ist noch λ zu untersuchen, zu welchem Zwecke wir gut bestehende Constructionen nehmen und für verschiedene Zapfen berechnen, vom selben Material. Wir nehmen dafür für λ einen mittleren Werth an, und finden:

für Gußeisen $\lambda = 0{\cdot}18$.

für Schmiedeisen $\lambda = 0{\cdot}12$.

für Gußstahl $\lambda = 0{\cdot}09$.

Wenn man k ausrechnet, so findet man dafür 236 u. da der Bruchcoeff. für Gußeisen = 3000, so ist ersichtl. daß 236 ohngefähr $\frac{3000}{12}$, diese Zapfen mit 12 fach. Sicherheit construirt sind.

z. B. Es sei für ein 40 pf. Wasserrad die Dimensionen (l u. d) der Zapfen der Welle für zu bestimmen.

Es ist $P = 40 \times 250 = 10000$ Kilg.

also $d = 0{\cdot}18\sqrt{10000} = 18^{cm}$

ferner ist $\frac{l}{d} = \frac{5}{4}$ folgt $l = \frac{5}{4} \times 18 = 22{\cdot}5^{cm}$

Wir können uns auch erlauben $\frac{l}{d} = \frac{3}{2}$ zu setzen u. es wird der Zapfen auch noch die gehörige Festigkeit besitzen.

Seite 45 u. 46 Taf. sind Tabellen für guß- u. schmiedeiserne Zapfen, worin für versch. Belastungen P, die entsprechenden Werthe von l u. d gezeichnet sind. Bei der Aufstellung dieser Tabelle wurde d angenommen u. daraus P u. l berechnet.

Von den Wellen und Drehungsaxen.

1. Solche welche auf Torsion in Anspruch genommen sind.
Es ist dieses Kapitel von sehr großer praktischer Wichtigkeit, indem es sehr viele Wellen gibt, welche nur auf Torsion in Anspruch genommen sind. Wählen wir dazu folgendes Beispiel:

Es sei a eine Welle, an deren einem Ende sich eine Kurbel b, an deren anderem Ende sich ein Zahnrad c befindet. Auf die Kurbel wirkt nun eine Kraft, welche von der Welle a auf die Welle e mit Hilfe der Zahnräder c u. d übertragen werden soll. Sobald das Rad c in Bewegung ist, wird es das Rad d mitnehmen, die Welle e aber auch. Nun übt aber das Rad d zurück auf c, das sich an der Welle a befindet und sucht dieselbe, da jetzt an beiden Enden entgegengesetzte Kräfte wirken, zu verwinden.
Wir haben also den Durchmesser d der Welle a zu bestimmen, damit diese die Torsion mit Sicherheit ertrage.
Nach Seite 22 Bsp. ist: $PR = T\frac{\pi}{16}d^3$ (0)

$$\text{und } d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi T}PR} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi T}} \times \sqrt[3]{PR} \quad (1)$$

Nach dieser Formel können wir d berechnen, wenn PR gegeben ist, was zuweilen der Fall ist; wir brauchen nur noch für T, der Spannung an der Oberfläche einen aliquoten Theil vom Tabellenwerth zu setzen, den man je nach großer oder geringer ~~Festigkeit~~ Constructionssicherheit groß oder klein machen.
Es sei z. B. P = 4000 u. R = 20 cm in best. Fig. die Welle von Schmied-

eisernen Welle und mit 20 facher Sicherheit zu construiren.

$$\text{Es ist also } T = \frac{4500}{20} = 225.$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 20 \times 4000}{3{,}14 \times 225}} = \sqrt[3]{1810}$$

$$\text{also } d = 13{,}4 \text{ cm}.$$

Daß eine Welle von Eisen deren Durchmesser $d = 13{,}4$ cm beträgt, wird mit 20f. Sicherheit einem Torsionsmoment von 8000 Kilg. widerstehen.
Allein dieses PR ist selten gegeben, sondern meistens nur die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute u. die Pferdekraft, welche die Welle zu übertragen hat.
Wir formen deshalb die Gleichg (1) um und drücken das Torsionsmoment durch andere gegebene Größen aus.
Sei nun n die Anzahl der Umdrehungen der Welle
und N die Anzahl der Pferdekräfte
Ist $2R\pi$ ein Radumfang in cm
also $\frac{2R\pi}{100}$ " " " Metern.
folgl. $\frac{2R\pi}{100} n$ der Weg, den ein Punkt des Radumfgs in 1 Minute zurücklegt.
und $\frac{2R\pi}{100} \frac{n}{60}$ " " " " " 1 Sec. "
oder auch die in Metern ausgedr. Umfangsgeschwindigkeit der Welle.

$$\text{folglich } \frac{2\pi}{100 \cdot 60} \cdot RPn = Pv = 75 N.$$

wo also Pv der in Kilogrammen ausgedrückte Effect bedeutet, den die Welle zu übertragen hat.

$$\text{also } PR = \frac{100 \times 60 \times 75}{2\pi} \times \frac{N}{n} \quad (2).$$

Damit ist also das Torsionsm. PR durch 2 gegeb. Größen $\frac{N}{n}$ ausgedrückt, welcher Bruch ein const. factor ist.
Führt man diesen Werth von PR in Gleichung (1) ein, so kommt

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 100 \times 60 \times 75}{2\pi^2 T}} \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad (3)$$

Setzen wir $\sqrt[3]{\frac{16\times100\times60\times75}{2T^2}} = \lambda$ (4)

dieses λ ist nun aber für eine Welle von bestimmtem Material von constanter Größe, und die verlangte Gleichung heißt

folglich $d = \lambda\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$ (5).

λ wird nach den besten construirten Wellen bestimmt und es ist dieses λ, wenn wir N, n, d durch Untersuchung an bereits bestehenden Wellen ~~untersucht~~ bestimmt haben:

$$\lambda = \frac{d}{\sqrt[3]{\frac{N}{n}}}$$

In der That findet man, daß bei gut construirten Wellen λ einen constanten Werth hat und zwar ist derselbe

für Gußeisen $\lambda = 16$

für Schmiedeisen $\lambda = 12$

folglich hat man die beiden Gleichungen:

für Schmiedeisen $d = 12\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$

für Gußeisen $d = 16\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$

Für versch. Werthe von $\frac{N}{n}$ findet sich das entspr. d in der Ges. Seite 48 u. 49. Tabelle 70 u 72 aufgezeichnet. Auch hier wurde wieder d angenommen und $\frac{N}{n}$ berechnet.

Es sei z. B. bei einer schmiedeisernen Welle $N = 20$ und $n = 80$.

so ist also $\frac{N}{n} = \frac{20}{80} = 0.250$

also $d = 7.5$.

Ferner sei bei einer gußeisernen Welle $N = 120$ und $n = 800$.

so ist also $\frac{N}{n} = \frac{120}{800} = 0.150$

folglich $d = 8.5$

Wir können nun fragen, wie stark die Wellen zu Abspruch genommen sind, wenn wir $\lambda = 12$ oder 16 nehmen; wir berechnen deshalb den Werth von T aus Gl. 4 und erhalten:

$$\sqrt[3]{\frac{16\times100\times60\times75}{2\,\pi^2\,T}}\;\begin{cases}12 \text{ für Schmiedeisen}\\ 16 \text{ für Gußeisen.}\end{cases}$$

Woraus folgt. $T = 210$ für Schmiedeisen

und $T = 90$ für Gußeisen

Nach S. 36 ist aber T der Zugkraft zum Abwinden gleich 4500 und da also $\frac{210}{4500} = \frac{1}{21}$, so folgt, daß eine solche schmiedeiserne Welle nur bis auf den 21ten Theil ihrer Sicherheit in Anspruch genommen ist.

Nun ist noch die Größe des Torsionswinkels bei diesen Wellen zu bestimmen. Für einen cyl. Stab findet sich derselbe gezeichnet S. 27:

$$\Theta = 16\,\frac{PR}{G}\,l\,\frac{360}{d^4\pi^2}$$

Setzen wir für PR seinen Werth aus (θ), so erhalten wir:

$$\Theta^0 = \frac{16\times360\times T\,\pi}{\pi^2\,G\cdot16}\cdot\frac{l\,d^3}{d^4} = \frac{16\times360\cdot T\,\pi}{\pi^2\,G\cdot16}\cdot\frac{l}{d} \quad (6)$$

Hieraus sieht man, daß der Torsionswinkel der Länge der Welle direkt und dem Durchmesser derselben verkehrt proportional ist.

Es folgt daraus, daß der Torsionswinkel bei langen u. dünnen Wellen groß, bei kurzen, dicken Wellen hingegen klein ist.

Führt man in Gl. (6) für T seinen Werth, nämlich 120 u. 90 ein, so erhält man für Schmiedeisen $\Theta^0 = \frac{1}{41}\left(\frac{l}{d}\right)$

für Gußeisen $\Theta^0 = \frac{1}{39}\left(\frac{l}{d}\right)$

d.h. diese Wellen haben die Eigenschaft, daß wenn ihre Länge 41 oder 39 mal größer als ihr Durchmesser ist, so werden sie um einen Grad verwunden.

Die Formel $d = x\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$ ist von größter Wichtigkeit, da nämlich d nur von dem Verhältniß $\frac{N}{n}$ abhängt, so ist es uns möglich mit verhältnißmäßig dünnen Wellen die größten Pferdekräfte zu übertragen, indem man diesen Wellen eine große Geschwindigkeit ertheilt.

Es sei z. B. $N = 2$ und $n = 2$.

so ist $d = 16\sqrt[3]{\frac{2}{2}} = 16^{cm}$ oder $N = 1000$

oder $N = 100$ und $n = 100$ und $n = 1000$

so ist $d = 16\sqrt[3]{\frac{100}{100}} = 16^{cm}$; $d = 16\sqrt[3]{\frac{1000}{1000}} = 16^{cm}$

Ein anderer Vortheil ist, daß der Durchmesser d von der $\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$ abhängt, wodurch die Wellen nicht sehr verschieden von einander ausfallen.

Aus (5) folgt $d = \lambda\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$

$$N = \left(\frac{d}{\lambda}\right)^3 n$$

$$n = N\left(\frac{\lambda}{d}\right)^3$$

Man ist also in allen Fällen im Stande eine der 3 Größen N, n, d zu berechnen, wenn 2 davon gegeben sind.

Da wir gesehen haben, daß bei langen Wellen, die nach Formel (5) construirt sind, der Torsionswinkel groß ausfällt, so ist es nicht rathsam lange Wellen nach dieser Formel zu construiren, wir werden daher eine Regel herleiten, bei welcher sich die Wellen um gleich viel verwinden, ob sie lang, kurz, dick oder dünne sind, und wobei der Torsionswinkel der Wellenlänge proportional ist.

Nun ist $\Theta^0 = 16\frac{PR}{G}\frac{360}{\pi^2}\frac{l}{d^4}$ (1)

und da nach der Annahme Θ der Länge proportional ist,

so ist $\Theta^0 = \alpha\, l$. (2).

Wir bringen nun diese beiden Gl. in Uebereinstimmung; das können wir thun, wenn wir

$$\frac{PR}{d^4} = \text{constante} = \beta \text{ annehmen}$$

dann ist $d = \sqrt[4]{\frac{1}{\beta}}\sqrt[4]{PR}$.

Nun muß also d, wenn sich dünne und dicke Wellen gleich stark verwinden sollen der $\sqrt[4]{PR}$ propor. sein, während es früher nur der

$\sqrt[3]{PR}$ proportional war.

Nun wollen wir PR durch $\frac{N}{n}$ ausdrücken, und wir haben früher gefunden, daß
$$PR = F \cdot \frac{N}{n}$$
dieses eingeführt, kommt: $d = \varrho \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$

Nun sind noch die constanten Größen g & ϱ zu bestimmen, was wir am besten nach bereits gut constr. Wellen thun.

Es ist dann für Schmiedeisen: $d = 0.75 \sqrt[4]{PR}$.
$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}.$$
diese Gl. unterscheidet sich von der früher aufgestellten, daß hier die $\sqrt[4]{\frac{N}{n}}$ und dort die $\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$ vorkommt. dies stimmt mit dem Gefühl überein, indem die Gl. ja ausdrückt, daß in verlangtem Falle, die Wellen noch weniger von einander verschieden sind. Es findet sich S. 50 eine Tabelle für d, wenn $\frac{N}{n}$ gegeben ist. (d wurde angenommen u. $\frac{N}{n}$ berechnet. Bestimmt man nun den Coeff. α der Gleichung (2), so findet man
$$\theta = \frac{1}{547} l.$$
d.h. diese Wellen besitzen die Eigenschaft, daß sie sich bei einer Länge von 547 cm um einen Grad verwinden.

Es sei z. B. $N = 20$ und $n = 200$.
so ist $d = 12 \sqrt[4]{\frac{20}{200}} = 7$.

die erste Formel gibt:
$$d = 12 \sqrt[3]{\frac{20}{200}} = 5.5.$$
Man sieht also, daß wenn $\frac{N}{n} < 1$, so gibt die Formel $d = 12 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$ schwächere Wellen; ist hingegen $\frac{N}{n} > 1$ 〃 〃 〃 〃 stärkere Wellen, und ist $\frac{N}{n} = 1$, so geben beide denselben Durchmesser $d = 12$.

daher rechnet man in der Praxis, wenn $\frac{N}{n} < 1$ nach der Formel $d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$ und umgekehrt, wenn $\frac{N}{n} > 1$, so rechnet man nach d. Formel $d = 12 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$

Nun kann man die Wellen auch so construiren, daß sie auch andern

Anforderungen entsprechen. Es soll z. B. der Torsionswinkel für jede beliebige d u. l constant sein.

Man hat $\theta^0 = \frac{16 \times 360}{\pi^4 G} \frac{PRl}{d^4} = const.$

Wenn θ constant sein soll, so muß sein:

$$\frac{PRl}{d^4} = const$$

folglich $d = 4\sqrt[4]{PRl}$. (1).

Also muß d nicht nur dem Torsionsmoment, sondern auch der Länge proportional sein. Da aber dieser Fall in der Praxis nie vorkommt, so wollen wir die Gl (1) nicht weiter untersuchen und dieser Fall mag blos beispielsweise angeführt sein.

Man rechnet also in den meisten Fällen nach der Formel:

$$d = 12\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

und die Formel $d = 12\sqrt[4]{\frac{N}{n}}$ nur bei außerordentlich langen und dünnen Wellen angewendet.

Wir wollen zum Schluße noch folgendes Beispiel wählen: Eine gußeiserne Welle übertrage $N = 60$ und mache dabei in der Minute 80 Umdrehungen.

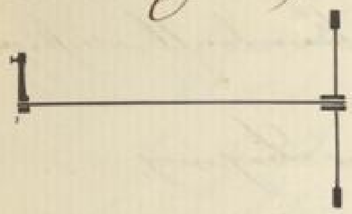
Es ist also $d = 16\sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 16\sqrt[3]{0.75} = 14.53$.

Da aber diese Welle mit einer 33 fachen Sicherheit construirt ist, so können wir je nach Umständen $d = 14$ oder 15 cm annehmen.

Widerstandsfähigkeit der Wellen gegen lebendige Kräfte.

Wir haben bis jetzt nur das stat. ~~Moment~~ Verhältniß der Wellen in's Auge gefaßt, allein unter Umständen müssen wir auch das Wid. der Wellen gegen leb. Kräfte betrachten. Es sei z. B. a eine Welle, an dem einem Ende sich eine Kurbel b befindet, die mit einer Kraftmaschine in Verbindung steht.

Am andern Ende befindet sich ein Schwungrad. Während nun das



Schwungrad durch Einwirkung der Kraftmaschine in vollen Lauf gesetzt wird, so wird dasselbe eine gewisse lebendige Kraft erhalten; daher geht das Schwungrad so lange fort, bis seine lebendige Kraft durch das Verwinden der Welle erschöpft ist.

Nun ist aber die Wirkungsgröße, welche nothwendig ist, um einen cylindrischen Stab so stark zu verwinden, daß an der Oberfläche eine Spannung T eintritt

$$W = \frac{1}{4}\frac{T^2}{G}V.$$

Ist nun Q das Gewicht des Schwungringes, c die Geschwindigkeit desselben und $g = 9{\cdot}81$ die in 1m ausged. Beschleunigung durch den freien Fall, so ist: $\frac{Qc^2}{2g}$ die in Kilg. ausgedrückte lebendige Kraft des Rades. Es wird also dieselbe Kraft des Rades durch das Verwinden der Welle erschöpft und es muß daher:

$$\frac{Qc^2}{2g} = \frac{1}{4}\frac{T^2}{G}V$$

folglich $$V = \frac{Qc^2}{2g}\frac{4G}{T^2}$$

Setzt man für T in dieser Gl. einen entsprechenden Theil vom Tabellenwerth, so erhält man das Volumen V, das die Welle haben muß, damit sie der leb. Kraft des Rades mit Sicherheit widersteht.

Allein dieses Volumen fällt so groß aus, daß eine derartige Welle nicht ausführbar wäre, und man sich deshalb bei Wellen wo der oben genannte Fall vorkommen kann (Walzwerke) auf andere Art helfen muß (leichte Kupplung).

Hinsichtlich der Anwendung der Wellen, wird man starke von Gußeisen, schwächere von Schmiedeisen herstellen.

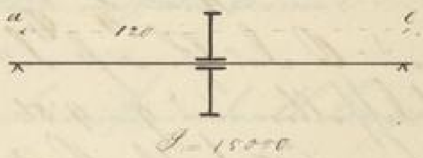
kommt es bei dicken Wellen auf besondere Festigkeit an, so werden sie immer aus Schmiedeisen und bei außerordentl. wichtigen Fällen sogar aus Gußstahl verfertigt.

2. Achsenwellen, welche einer Biegung ausgesetzt sind.

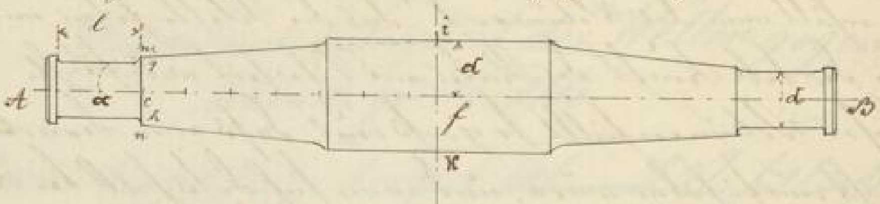
Man wird am besten durch Beispiele die Construction dieser Wellen zeigen.

1. Es sei eine Balancierwage zu construiren, welche auf beiden Enden in Lagern liegt und in der Mitte belastet ist, ohne Berücksichtigung des eigenen Gewichts.

Es sei die Länge $ac = 120$ cm



und die Belastung $P = 200 \times 75 = 15000$, so ist also $\frac{P}{2} = 7500$ der Druck auf einen Zapfen, und folglich nach Tab. 67 wenn die Welle von Schmiedeisen sein soll der Durchm. des Zapfens $d = 10$ cm und die Länge desselben $l = 14.18$ damit nun die Welle, welche also nur auf relat. Festigkeit in Anspruch genommen ist überall die gleiche relat. Fest. besitze, muß sie nach der cub. Parabel construirt werden und zwar hat diese Parabel ihren Scheitel bei a und geht durch die Punkte g u. h.



Man trage deshalb, um die Parabel zu verzeichnen auf AB von a aus $\frac{l}{2}$ 8 mal auf, mache also $af = 8\,ac = 8\frac{l}{2}$.
und trage bei f oberhalb und unterhalb den Durchmesser d auf, so sind i k Punkte der Parabel, allein da wir uns mit einer

Verminderungsform begnügen, so verbinden wir die Punkte i m und k n durch gerade Linien und verlängern diese bis sie die Mitte schneidet und erhalten so die eine Hälfte der Axe.
Auf der andern Hälfte verfährt man ganz ebenso. Die Punkte m u. n sind die Endpunkte des Absatzes von dem Zapfen und sind nicht sehr von den Punkten g u. h verschieden.
Um den Balancier gut fest keilen zu können, macht man die Welle in der Mitte cylindrisch. Zuletzt bricht man noch an allen Ecken die Kanten, so daß schöne, gefällige Formen zum Vorschein kommen. Die Welle trägt also 15000 Kilg mit 10–12 facher Sicherheit.

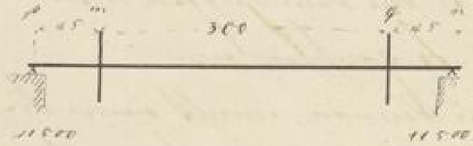
2. Construction einer Balancierwelle, die an beiden Enden aufliegt und an irgend einer Stelle den Balancier trägt.

Es betrage also der eine Abstand 60 cm u. der andere 120 cm
P betrage 15000 Kilg. Nun ist der Druck für die Zapfen auszuhalten

muß zu bestimmen. Für den einen erhalten wir $P = \frac{15000}{3} = 5000$ u. den andern $P = \frac{15000 \cdot 2}{3} = 10000$
Da aber diese Welle mit ~~zwei~~ sehr verschiedenen Gewichte auf den Zapfen belastet ist, so erhält der eine Zapfen einen Durchmesser $d = 12$ und eine Länge $l = 16{\cdot}6$ und der andere, $d = 8{\cdot}5$, $l = 11{\cdot}5$.

Um nun die Welle zu verzeichnen, nehmen wir $af = 5\frac{l}{2}$, folglich $fe = 2k = d$, verbinden b u. c mit e u. g und die Punkte, wo diese Linien die Mittellinie des Balanciers schneidet verbindet man mit m a n.

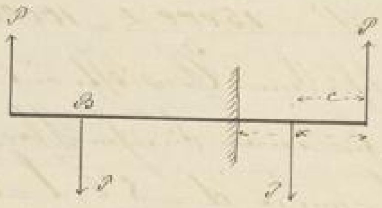
3. Es sei eine Wasserradwelle zu construiren, welche ein Gewicht $2P = 46 \cdot 500 = 23000$ Kilg zu tragen hat. die Entfernung pq der beiden Rosetten sei 300^{cm} und die Entfernung $pm = qn$ der Rosettenmittel bis zum Zapfenmitte sei 45^{cm}. So ist die Last welche auf je einen Zapfen kommt $P = 11500$ daraus ergeben sich die Dimensionen des Zapfens $d = 20$ und $l = 25$. die Dimension der Rosettenmittel bestimmt man nach der cub. Parabel und nimmt:



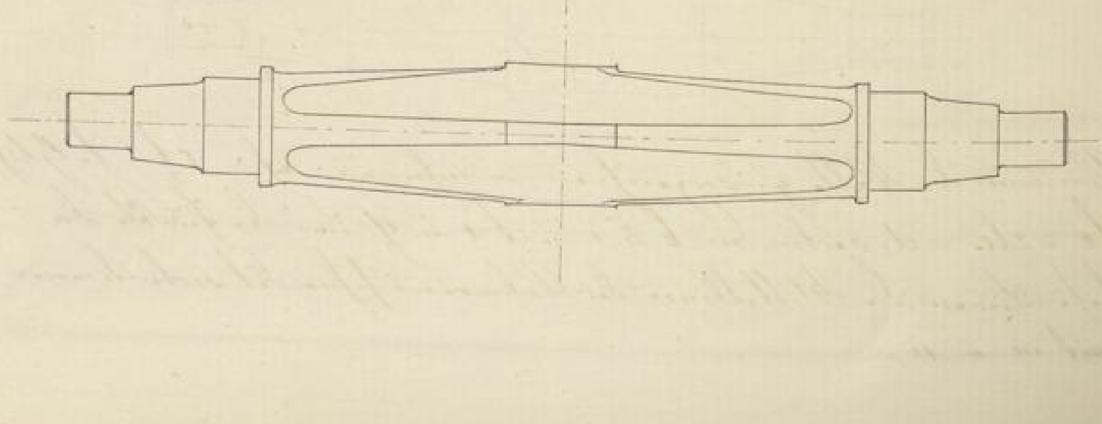
$$fe = \sqrt[3]{\frac{af}{dg}} \cdot \frac{d}{2} = 15'87.$$

Man verbindet nun die Punkte e, b mit g, h u hat die Welle so bis zu den Rosetten gezeichnet. Was nun noch den mittleren Theil der Welle betrifft, so wird wenn wir sie cyl. machen überall die gleiche Festigkeit besitzen.

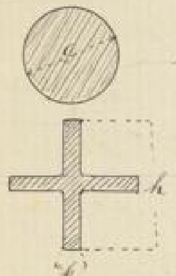
Denken wir uns die Welle an irgend einer Stelle A eingemauert und überall die entsprechenden Kräfte P angebracht, so ist das Moment, welches die Welle bei A abzubrechen strebt:



$Px - P(x-c) = Pc$, also dasselbe Moment, wie bei B.



den mittlern Theil machen wir aber nicht cylindrisch, sondern versehen denselben mit einem andern Querschnitt, der dieselbe Festigkeit besitzt.



Hier muß also sein: $\frac{D^3\pi}{32} = \frac{1}{6} bh^2$

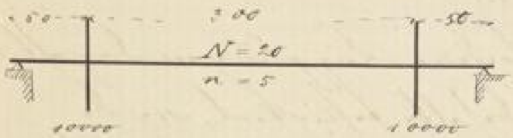
woraus $b = \frac{6\pi}{32}\left(\frac{D}{h}\right)^2 D$

oder $b = \frac{6 \cdot 3{,}14}{32}\left(\frac{28}{45}\right)^2 28 = 6^{cm}$

Bei den Wellen, wo die Kupplungen hinzusitzen kommen, sind Absätze anzubringen und diese Wellen selbst cylindrisch zu machen.

3. Wellen die theilweise auf Torsion und theilweise auf Festigkeit in Anspruch genommen sind.

Man versieht die Welle zuerst mit einem cylindrischen Kern, der im Stande ist der Torsion zu widerstehen, sodann bringen wir noch Rippen an, welche im Stande sind dem Biegungsmoment mit Sicherheit zu widerstehen.



Nehmen wir nun folgendes an:
$N = 20$, $n = 5$; ferner
$P = 20 \times 500 = 10000$
$d = 16\sqrt[3]{\frac{20}{5}} = 16\sqrt[3]{4} = 25$
Jeder Zapfen hat 10000 Kilg zu tragen, folglich $d = 18^{cm}$

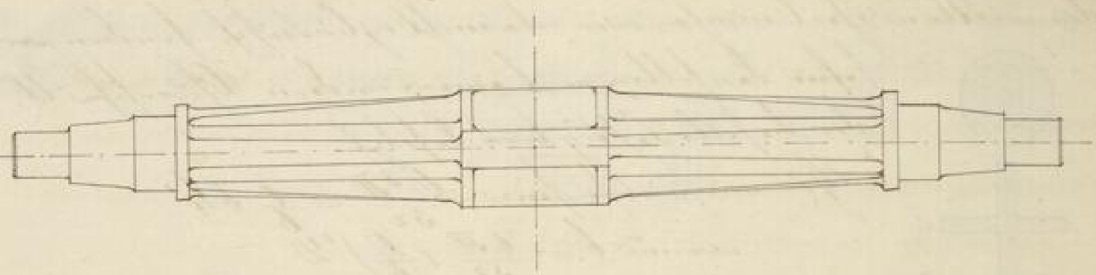
Nennen wir nun M das in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückte Moment der äußern Kräfte, so haben wir

$$M = Pl = \frac{k}{6}\frac{b}{h}(h^3 - d^3), \quad b = \frac{6hM}{k(h^3 - d^3)}$$

Nehmen wir an, daß die Welle kein Gewicht hätte, so ist M für alle Querschnitte $= Pl = 50 \times 10000$ Kilg cm

Nehmen wir nun die $h = 30$, $k = 400$ und d haben wir $= 25$.

So wird $b = \frac{6 \times 500000 \times 30}{400(30^3 - 24^3)} = \frac{90}{4{,}5} = 20$



Wellen Kupplungen.

Es kommen sehr häufig Fälle vor, wo Wellen so lang werden, daß man sie nicht mehr aus einem Stücke herstellen kann, sondern, daß 2 Wellen zu einem Ganzen verbunden werden müssen und man nennt eine Verbindung zweier Wellen, Wellen-Kupplung. Es handelt sich nun darum eine Kupplung so herzustellen, daß wenn die eine Welle getrieben wird, die andere mitgeht und es muß ferner die Wahrscheinlichkeit des Bruches in beiden Wellen sowie in der Kupplungen dieselbe sein. Es würde am besten sein, die Kupplung geschmiedet herzustellen, allein da diese sehr schwierig u. kostspielig herzustellen ist, so wendet man dieselbe höchst selten an.

In Fig 1, 2, 3, 4 Taf II sind verschiedene Kupplungen dargestellt die Kupplung 2 u 3 gewährt nicht dieselbe Festigkeit, wie die Welle, 4 hat etwas mehr Festigkeit als 2 u 3. und entspricht ihrem Zweck vollkommen. 1 wäre wohl auch die vortheilhafteste Construction, allein bei größern Wellen ist dieselbe nicht mehr gut auszuführen.

Auch darf man bei einer solchen Kupplung keine zu lange Hülsen anbringen, da sonst die Verbindung zu starr würde und sich die Wellen innerhalb gew. Grenzen nicht bewegen sollen, da selbst bei der genauesten Aufstellung der Lager, diese doch mit der Zeit ihre Lage verändern und die Welle eine schnelle Abnützung

der Lagerschalen herbeiführen würde.
Wenn das getriebene Wellenstück nur einen Theil der Kraft des treibenden Wellenstückes überträgt, so wird die Kraft in jedem Strange geringer und die Kupplung hat deßhalb nur noch die Kraft der getriebenen Welle auszuhalten.
Was die Dimensionen der Kupplungen betrifft, so sind dieselben nach schon bestehenden guten Constructionen bestimmt worden, und es ergeben sich dafür folgende Regeln:
Es ist nach dem früheren der Durchmesser der getriebenen Welle

$$d = 12\sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \text{(für Schmiedeisen)}$$

$$\text{und } d = 16\sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \text{(für Gußeisen)}$$

Regeln zur Berechnung dieser Kupplungshülsen, finden sich S. 56 Rf.
Nun macht man in der Regel bei dünnern Wellen, die Kupplungshülse verhältnißmäßig länger als bei dicken, weil erstere mehr Elasticität besitzen und ihre Stellung gegen die Lager leicht verändern können.

Zapfenlager.

Dieselben haben die Bestimmung Wellen aufzunehmen und dieselben in ihrer richtigen Lage zu erhalten.
Allgemein theilt man sie folgender Art ein.

1. Fundamentlager
2. Wandlager, und
3. Hängelager.

Ferner müssen wir je nachdem die Welle horizontal oder vertikal aufgestellt ist zweierlei Lager unterscheiden.
Jedes einfache Zapfenlager besteht nun aus folgenden Theilen:
1. Aus der Lagerplatte, welche entweder auf einem Grunde, Balken

oder sonst eine feste Unterlage geschraubt wird.

2. Aus dem eigentl. Lagerkörper

3 Aus den Lagerschalen, und

4 dem Lagerdeckel, welcher die Schalen in ihrer Lage erhält.

Die Lagerplatte hat sog. Arbeitsleisten, welche genau abgehobelt werden, was ebenfalls mit dem Lagerkörper geschieht, damit beide Flächen vollkommen dicht aufsitzen.

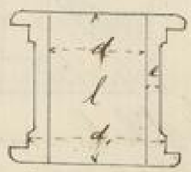
Ferner sind an dem Deckel ebenfalls Arbeitsleisten angebracht, um diesen gut in den Lagerkörper einpassen zu können.

Die Lagerschalen, welche in der Regel aus Rothguß oder Kanonenmetall hergestellt werden, dreht man genau, nach dem Durchmesser des Lagerkörpers aus und schneidet dieselben hierauf in 2 Halbcylinder auseinander.

Soll nun ein Lager aufgestellt werden, so bringt man vor allem die Platte in ihre richtige Lage, nachdem man zuerst die beiden Bolzen zur Befestigung des Lagerkörpers hindurchgesteckt hat. Steht dieselbe nun genau nach der Wasserwage horizontal, so zieht man die beiden Fundamentschrauben fest an, und setzt nun den Lagerkörper durch welchen ebenfalls die beiden Schrauben zur Befestigung des Deckels gesteckt sind, darauf, legt in diesen die untere Lagerschale und zieht nun, nachdem die Welle eingelegt worden ist, die beiden Schrauben der Lagerplatte leicht an. Liegt jetzt die Welle an allen Stellen der Schale gut auf, so kann man die zweite Schale sammt Deckel darüber legen und zuletzt noch die Schrauben, welche den Deckel mit dem Lagerkörper verbinden, fest anziehen.

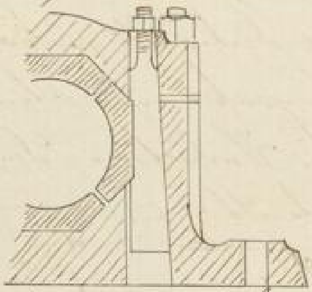
Fig 1 Taf XII stellt uns ein solches einfaches Zapfenlager dar.

Bei Lagern, welche an Maschinentheilen befestigt werden, vertritt das Gestelle der Maschine in der Regel die Lagerplatte.
Die Lagerplatten und Lagerkörper verschiedener Lager sind geometrisch ähnlich und können also dem äußern Durchmesser d_1 der Schale proportional gemacht werden.
In Fig 1 Taf XII können wir die wesentlichsten Dimensionen für $d_1 = 1$ an Lagerkörper und Platten angeben.
Die Schalen hingegen sind nicht geometrisch ähnlich, sondern die kleineren Schalen sind verhältnißmäßig dicker als große.
Vergleicht man eine sehr gut construirte große und kleine Lager, so findet man auf dem Wege der Induction, daß wenn d der innere Durchmesser der Schale ist:



die Länge der Schale $l = 0{\cdot}87 + 1{\cdot}21\,d$.
die Metalldicke $e = 0{\cdot}28 + 0{\cdot}074\,d$.
der äuß. Durchm. d. Schale $d_1 = 0{\cdot}69 + 1{\cdot}17\,d$.
Seite 57 ist die Tabelle, worin sich für 32 Zapfendurchmesser die entsprechenden Werthe von l, e u. d_1 befinden. Die äußern Durchmesser der Lagerkörper, sowie e u. l sind so gewählt, daß man für 2 Zapfendurchmesser dasselbe Lager gebrauchen kann.
Nun ist es sehr wesentlich bei der Construction der Lager, die Richtung des Druckes zu kennen, welchen der Zapfen gegen das Lager ausübt.
Es wird am günstigsten derjenige Fall sein, wo der Zapfen einen Vertikaldruck auf das Lager ausübt und man also keine so starken Schrauben zur Befestigung desselben nothwendig hat, sowie auch den Deckel, sammt der obern Schale weglassen kann, wie z. B. bei einem Wasserrade.

Nun kann es auch vorkommen, daß das Lager einmal fest gegen seine Unterlage hingepreßt wird, ein anderes Mal von derselben abgehoben zu werden sucht, wie dies bei vertikal wirkenden Schubstange der Fall ist.
Man wird daher das Lager mit sehr starken Schrauben versehen müssen, sowie auch eine schwere sichere Unterlage herstellen.
Ferner kann auch das Lager in horizontalem Sinne verschoben werden, wie dies bei einer liegenden Dampfmaschine der Fall ist. Es muß daher das Lager mittelst Holzkeilen fest in die Lagerplatte eingestellt sein, damit nicht etwa die Bolzen abgescheert würden.



Nun ist hiebei der Umstand, daß sich die Schalen mit der Zeit nach dieser horizontalen Richtung ausschleifen und man daher genöthigt wäre, öfters neue Schalen einzulegen. Diesem Uebelstande abzuhelfen, stellte man die Lagerschalen aus 4 Theilen her, welche zusammen ein Ganzstück bildeten fig. A und brachte nun zu beiden Seiten Keile an, welche, wenn die Schalen etwas ausgelaufen sind, eingezogen werden, so daß der Kurbelzapfen an allen seinen Stellen berührt wird.
Nun haben aber alle solche cylindrisch eingepaßte Lagerschalen den Nachtheil, daß sie sich in ihrer Lage nicht verändern können, und da selbst bei der genauesten Montirung von Transmissionen, entweder die Fundamente sich setzen, oder wenn die Lager an der Decke angebracht sind, sich die Balken ziehen und schwinden, so wird ein Zwängen und Klemmen der Welle erfolgen, und entweder die Schalen oder die Wellen sich frühzeitig abnützen.

Man sah sich daher veranlaßt Lager zu construiren, bei welchen eine kleine Bewegung der Welle gestattet ist; was zu den sog. Kugellagern führte. Taf XV fig 1 mit 2, 3, 4.

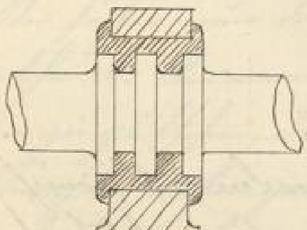
Es sind bei diesen Lager die Schalen außen kugelförmig abgedreht und der Lagerkörper entsprechend kugelförmig ausgebohrt.

Diese Lager haben den Vorzug, daß selbst bei einer ungenauen Aufstellung, der Zapfen an allen Theilen der Schale berührt und gut aufliegt, so daß also ein Abnützen wie bei den vorhergehenden Lagern nicht leicht stattfinden kann.

Nur haben diese Lager den Nachtheil, daß wenn sie sich etwas ausgelaufen haben und man die Schrauben wieder anziehen will, die Beweglichkeit der Schalen verhindert würde, da das Äußere der Schale keine Kugelform mehr ist.

Damit sich nun diese Schalen nicht zu rasch abnützen, ist es vortheilhaft, denselben eine große Länge zu geben, was bei den andern nicht leicht möglich ist.

Fällt die Richtung der Kraft mit der Längsrichtung der Welle zusammen, so bedient man sich der sog. Ringlager,



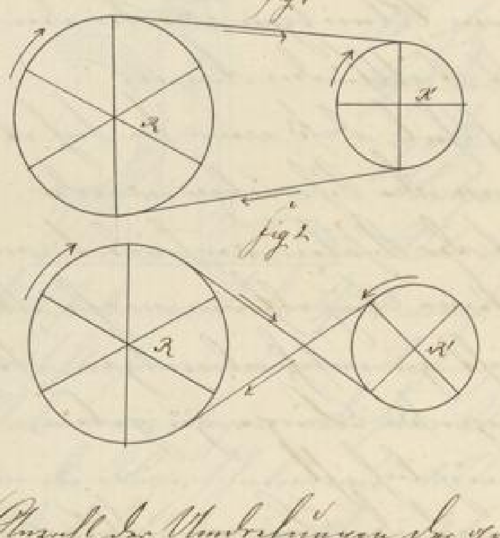
weil Zapfen nicht leicht anzuwenden sind (z. B. bei Schraubenschiffen)

An der Stelle, wo die Welle im Lager liegt, hat dieselbe ringartige Aufsätze und das Lager entsprechende Vertiefungen, wodurch die Welle eine große Oberfläche erhält und die Intensität des ungeheuren Druckes vermindert wird.

Rollen.

Soll eine Kraft von einer Welle auf eine andere übertragen werden, so geschieht dies durch Rollen, über welche ein Riemen gespannt wird, so daß aus dem Druck des Riemens gegen die Rollen eine Reibung entsteht, welche denselben an den Rollen so zu sagen fest haften macht.

Bei Fig. 1. stimmt die Bewegungsrichtung der beiden Rollen überein, während bei Fig. 2, wenn der Riemen geschränkt gespannt ist, die Drehungsrichtung der beiden Rollen entgegengesetzt ist.



Bezeichnen wir nun den Halb~~durch~~messer der größeren Rolle mit R, den Halbmesser der kleineren mit R', die Anzahl der Umdrehungen der größeren Rolle mit n und diejenige der kleineren Rolle mit n', so verhalten sich die Anzahl der Umdrehungen umgekehrt wie die Halbmesser.

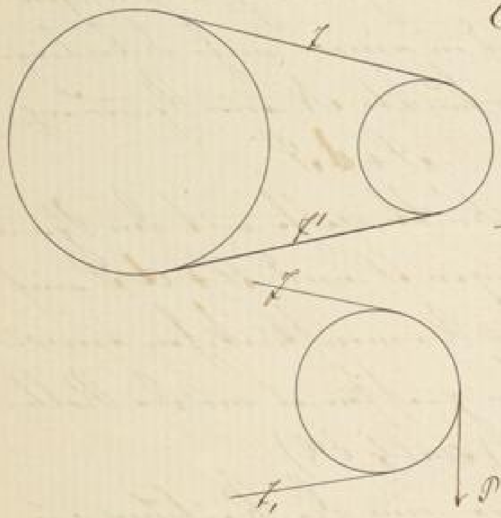
Man hat also $\frac{n_1}{n} = \frac{R}{R_1}$

Da nun die zweite Rolle mitgenommen werden soll, auch wenn sich ihrer Bewegung ein Widerstand entgegenstellt, so muß die treibende Rolle durch eine Adhäsion gefaßt werden, welche dem Widerstand der getriebenen Rolle entgegenwirkt.

Es ist nun die Riemenspannung zu bestimmen.

Nehmen wir eine sehr starke Spannung an und heißen sie T'.

Nachdem nun diese Spannung eingetreten ist, lassen wir die treibende Kraft auf [illegible] beide Rollen einwirken und zugleich den Widerstand auf den Umfang der getriebenen Rolle.



Es wird nun in dem obern Riemen eine Spannung T und in dem untern eine Spannung T' eintreten, die Differenz dieser beiden Spannungen hat nun einen gewissen Werth.
Denken wir uns den Riemen auseinander geschnitten und lassen beide Spannungen T und T' eintreten, so werden sich beide das Gleichgewicht halten, und es wird sein

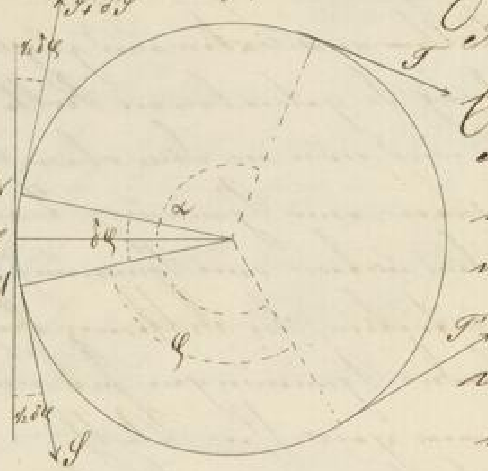
$$T = T' + P$$

oder $T - T' = P$ (1)

diese Differenz besteht unter allen Umständen, so lange nicht ein Gleiten des Riemens eintritt.
Wir suchen nun die kleinste Spannung zu bestimmen, bei welcher die Riemen gerade noch die Kräfte übertragen können ohne zu gleiten, denken uns also die Axen der beiden Rollen allmählig näher gerückt, so werden die Spannungen T und T' mehr und mehr geringer und die Adhäsionskraft gleich dem Widerstand P sein.
Es soll also die Spannung sein:

$$T - T_1 = P \quad (2)$$

fig c



Es wird also die Spannung von T_1 nach A_1 zunehmen.
Es sind fig c in einem Punkte M eine Spannung S herrschen und in einem sehr naheliegenden Punkte N eine Spannung

$$S+dS.$$

Die Kräfte, welche mit den Spannungen S und S+dS auf das Elementstückchen einwirken, pressen es an die Rolle und es ist $f(S\sin(\frac{1}{2}d\varphi)+(S+dS)\sin(\frac{1}{2}d\varphi))$ die Kraft, welche nothwendig wäre um die Reibung zu überwinden, die aus der Pressung entsteht.

$$(S+dS)\cos(\tfrac{1}{2}d\varphi)-S\cos(\tfrac{1}{2}d\varphi)$$

Es muß nun sein $\left(S\sin(\frac{1}{2}d\varphi)+(S+dS)\sin(\frac{1}{2}d\varphi)\right)f=$
$$(S+dS)\cos(\tfrac{1}{2}d\varphi)-S\cos(\tfrac{1}{2}d\varphi)$$

$$\left[S\tfrac{1}{2}d\varphi+(S+dS)\tfrac{1}{2}d\varphi\right]f=S+dS-S$$

oder $f\,S\,d\varphi=dS.$

$$\frac{dS}{S}=f\varphi$$

$\log nat.\ S=f\varphi+Const.$

für $\varphi=0,\ S=T_1\ ;\ \varphi=\alpha,\ S=T$

$\log nat.\ T_1=0+Cons.$

$\log nat.\ T=f\alpha+Cons.$

$$\log nat.\ T - \log nat.\ T_1 = f\alpha.$$

$$\log nat.\ \frac{T}{T_1} = f\alpha$$

$$\frac{T}{T_1} = e^{f\alpha}$$

$$T = T_1 e^{f\alpha}$$

$$T - T_1 = P \quad (2)$$

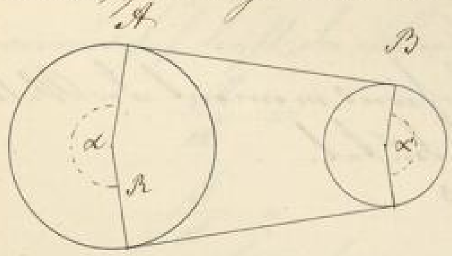
$T = T_1 e^{f\alpha}$ (3) wobei f den Reibungscoefficienten bedeutet.

Nun ist $T_1 e^{f\alpha} - T_1 = P$.

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= P\,\frac{1}{e^{f\alpha}-1} \\ T &= P\,\frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha}-1} \end{aligned}\right\} \text{Spannungen der Riemen.}$$

$$t = \frac{1}{2}\,P\,\frac{e^{f\alpha}+1}{e^{f\alpha}-1}$$

Ist der Reibungscoefficient groß, so wäre eine schwache Spannung genügend, folglich wäre auch eine rauhe Oberfläche der Rollen günstig, allein da diese die Riemen bald zerreiben würde, so macht man die Oberfläche der Rollen glatt.



Soll nun der Riemen auf A u. B nicht gleiten, so müssen in denselben Spannungen stattfinden, welche dem Winkel α u. α_1 entsprechen und wir geben daher der Formel eine andere Form.

Es ist $S = R\alpha$.

$$T_1 = P\,\frac{1}{e^{f\frac{S}{R}}-1}$$

$$T = P\,\frac{e^{f\frac{S}{R}}}{e^{f\frac{S}{R}}-1}$$

für verschiedene Werthe von

$\frac{S}{2r\pi}$ ist angegeben $e^{f\frac{S}{R}}$ $\quad \frac{e^{f\frac{S}{R}}}{e^{f\frac{S}{R}}-1}$

wenn 0·4 des Umfangs umfasst wird 2·02 . . 2

für 0·5 . . . . 2·41 . . 1·7

. 0·6 " . . . 2·87 . . 1·9.

Man kann für alle diese Fälle mit genügender Genauigkeit setzen:

$$T = 2P$$

$$T_1 = P$$

oder $A = 1·5\,P.$

Heißen wir nun β die Breite des Riemens,

δ die Dicke desselben, und

$\mathfrak{A}$ die Spannung, welche in einem $\square^{cm}$ des Querschnitts herrscht, so hat man die Gleichung:

$$\beta\delta\mathfrak{A} = 2P.$$

$$\beta\delta = \frac{2P}{\mathfrak{A}}$$

$$\frac{1}{2}\beta\delta\mathfrak{A}R = PR$$

Wobei PR nichts anderes als das Torsionsmoment der Welle auf welcher sich die Rolle befindet, bedeutet.

$$PR = \frac{\mathfrak{T}^2\pi}{16}d^3$$

$$\frac{1}{2}\beta\delta\mathfrak{A}R = \frac{\mathfrak{T}^2\pi}{16}d^3$$

$$\frac{\beta}{d} = \frac{2\mathfrak{T}^2\pi}{16}\frac{d^2}{\mathfrak{A}\delta R}$$

oder es ist auch $\frac{\beta}{d} = \frac{2\mathfrak{T}^2\pi}{16}\left(\frac{d}{\mathfrak{A}\delta}\right)\frac{d}{R}$

$\frac{d}{\mathfrak{E}\delta}$ ist als constant anzunehmen. Ist also die Welle dick und die Kraft groß, welche übertragen werden soll, so muß man starkes Leder nehmen, damit der Riemen nicht übermäßig breit wird.

Nimmt man d groß, so ist δ groß, das Leder dick und daher fest. und zwar $\frac{d}{\mathfrak{E}\delta} = \mu$.

$$\frac{\beta}{d} = \lambda \frac{d}{R}$$

Es kommt nur darauf an, daß wir diese beiden Constanten angemessen bestimmen, was wir am sichersten erfahrungsgemäß finden

Es wird $\mu = \frac{1}{3\cdot1}$ und $\lambda = 10\cdot5$.

$$\begin{array}{ll} \mu = \frac{1}{3} & \left\{ \begin{array}{l} \delta = 3\cdot1 \, \frac{d}{\mathfrak{E}} \\ \frac{\beta}{d} = 10\cdot5 \, \frac{d}{R} = \frac{10\cdot5}{\left(\frac{R}{d}\right)} \end{array} \right. \\ \lambda = 10\cdot5 & \end{array}$$

Nun ist die relative Größe der größeren der beiden Rollen immer 6–7 mal dem Durchmesser der Welle zu nehmen, woraus sich leicht die Breite der Rolle bestimmen läßt.

$$\frac{R}{d} = \quad \ldots \quad 6 \ldots\ldots 7$$

$$\frac{\beta}{d} = \quad \ldots \quad 1\cdot75 \ldots\ldots 1\cdot5$$

Dimensionen der Rollen.

Die Rolle besteht nun wesentlich aus:

1. dem Umfangsring.
2. der Hülse Bestimmung dieser Dimensionen Redt. Seite.
3. den Armen, welche zuweilen radial, zuweilen auch gekrümmt werden, nur nimmt bei geraden Armen das Modell

diese Arme aber auch wieder den Nachtheil haben, daß sie beim Gießen leicht springen.

Die Querschnittsform der Arme macht man in der Regel elliptisch.

Was nun die Anzahl der Arme betrifft, so stellen wir dafür eine rationelle Regel auf.

Bezeichnen wir mit N die Anzahl der Arme und ist ferner $\frac{PR}{N}$ das statische Moment, welches einen Arm von der Hülse abzubrechen strebt, so hat man:

$$\frac{PR}{N} = \mathfrak{S}\frac{\pi}{32}\, b h^2 = \mathfrak{S}\frac{\pi}{32}\left(\frac{b}{h}\right) h^3.$$

$$PR = \mathfrak{S}\frac{\pi}{32}\left(\frac{b}{h}\right) h^3 N.$$

für die Welle $PR = \frac{T_2\pi}{16}\, d^3$

$$\frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\left(\frac{b}{h}\right) h^3 N = \frac{T_2\pi}{16}\, d^3$$

$$\frac{h}{d} = \frac{\sqrt[3]{\frac{T_2\pi}{16} \times \frac{32}{\mathfrak{S}\pi}\left(\frac{h}{b}\right)}}{\sqrt[3]{N}} = \frac{\text{Constante}}{\sqrt[3]{N}}$$

h und b sind gewöhnlich constant, es ist dann $\sqrt[3]{N}$ constant.

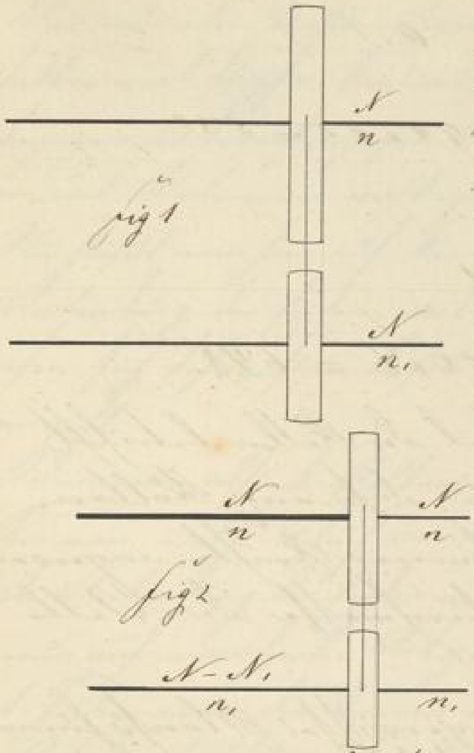
Macht man die Arme zu dünn, so reißen sie und man macht const. erfahrungsgemäß $C = 1 \cdot 7$.

dann wird $\frac{h}{d} = \frac{1 \cdot 7}{\sqrt[3]{N}}$

für N = ... 4 ---- 6

wird $\frac{h}{d}$ = ... 1·08 ---- 0·94.

N ist gleich der relativen Größe zu nehmen und es wird also die Anzahl der Arme durch die relative Größe bestimmt.



Es können nun folgende Fälle zur Uebertragung von Kräften stattfinden.

Bei fig 1. Wird die ganze Kraft der treibenden Welle auf die getriebene Welle übertragen.

Bei fig 2. Wird $N - N_1$ übertragen, indem die treibende Welle noch N_1 nach einer Seite hin abgibt.

Wählen wir fig 3 ein Beispiel mit numerischen Werthen. So finden wir für den

Durchmesser der Welle $A = 16\sqrt[3]{\frac{20}{160}} = 8^{cm}$

" " " " $C = 16\sqrt[3]{\frac{8}{160}} = 6^{cm}$

" " " " $E = 16\sqrt[3]{\frac{12}{240}} = 6^{cm}$

Der Rolle muß eine Welle für 12 Pferde und 160 Umdrehungen zu Grunde gelegt werden und wir finden

$$16\sqrt[3]{\frac{12}{160}} = 6{\cdot}8 = d$$

Relative Größe der Rolle $B = \frac{R}{d} = 7.$

$$R = 7 \times 6{\cdot}8 = 47{\cdot}6^{cm}$$

Halbmesser der Rolle $D = \frac{47{\cdot}6 \times 2}{3} = \frac{95{\cdot}2}{3} = 31{\cdot}7^{cm}$

Riemenbreite $\frac{\beta}{d} = 1{\cdot}5$

$$\beta = 1{\cdot}5 \times 6{\cdot}8 = 10{\cdot}4$$

$$\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 6{\cdot}8 = 2{\cdot}8^{cm}$$

$$k = 0{\cdot}9 \times 2{\cdot}8 = 2{\cdot}52$$

$$\frac{1}{2}k = 1{\cdot}26$$

Anzahl der Arme $\left(\frac{N}{B}\right) = \text{---}\ 6.$

$\left(\frac{h}{B}\right) = \text{---}\ 0{\cdot}94 \times 6{\cdot}2 = 5{\cdot}82$

Relative Grösse von $D = \frac{31{\cdot}7}{6} = 5$

$\left(\frac{N}{D}\right) \text{----}\ 4$

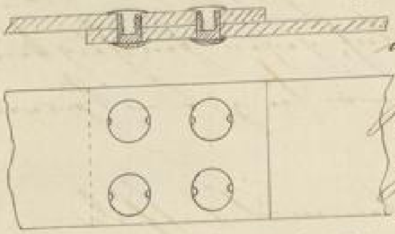
$\left(\frac{h}{D}\right) = \text{---}\ 1{\cdot}08 \times 6 = 6{\cdot}48$

Was die Grenzen der Anwendbarkeit der Rollen betrifft, so sehen wir nach vielen Regeln ein, daß ein Rollenbetrieb nur zur Uebertragung kleinerer Kräfte angewendet werden kann, wenn also der Durchmesser der Welle nicht zu gross wird.
Gehen die Dimensionen über ein gewisses Maaß hinaus, so werden die Rollendurchmesser sehr groß.
Ueber 10, 12 decimeter wendet man daher selten Rollenbetrieb an.

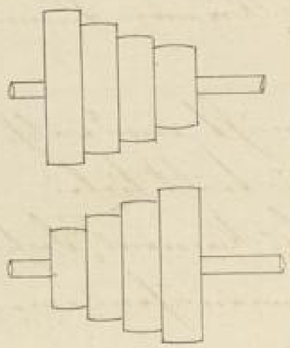
Rollenriemen.

dieselben werden vorzugsweise aus Leder oder auch aus Gutta-Percha hergestellt.
Was das Material betrifft, so haben wohl die Lederriemen den Vorzug; nur haben sie die fatale Eigenschaft, daß sie sich fortwährend dehnen, bis sie eine Zeitlang gelaufen sind; ferner kann man keine sehr lange Stücke erhalten und das schwierigste ist, die Zusammenfügung der beiden Enden.
Nun hat das Leder auch wieder seine Vorzüge, indem der Wechsel der Temperatur nur geringen Einfluß auf dasselbe ausübt und sowohl in nassen als feuchten Lokalen benützt werden kann.

Was nun die Gutta-Percha Riemen anbelangt, so sind dieselben viel steifer, sind auch nicht empfindlich gegen Feuchtigkeit, dagegen um so mehr gegen die Wärme; daher man sie z. B. in Spinnereien und Webereien nicht gebrauchen kann.
Nur stößt man hier auf keine Schwierigkeiten in Betreff der Verbindung der Enden, weil dieses Material ähnl. wie Schmiedeisen sich schweißen läßt und also eine Molekularverbindung eingeht.
Wenn nun also die Rollen stark ausfallen, so nimmt doppelte Riemen, welche 4fach vernäht werden.
Die Verbindung der Enden und Aufspannung der Riemen kann nun auf mancherlei Art geschehen und zwar:
1. Indem man die Riemen einfach zusammennäht und welche Art die gleichförmigste Bewegung ermöglicht, nur tritt hiebei der fatale Umstand ein, daß beim Strecken des Riemens, derselbe auf den Rollen gleitet und diese Art des Zusammennähens immer eine große Störung verursachen würde.
2. Die Verbindung mittelst Schnallen, welche freilich gut wäre, wenn die Löcher nicht ausschlitzen würden, und der Riemen dadurch bald zu Grunde ginge.
3. Durch Zusammennähen mittelst stärkerer Nähriemen, indem in jedes Riemenende, je nach der Breite desselben 3–4 Löcher geschlagen werden. Diese Verbindung, sowie die Vorhergehende wird aber sehr bauschig und verursacht eine unregelmäßige Bewegung.
4. Die Vereinigung oder Verschraubung der Enden, welche wohl am häufigsten angewandt wird und besonders bei starken Riemen. Dies ist wohl die beste Verbindung; nur ist das Aufspannen

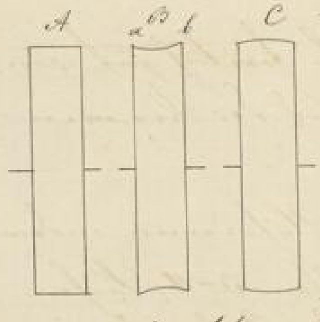


mit Schräubchen verbunden. Die Art der Verschraubung zeigt uns beistehende Figur. Wenn man nun gute Riemen haben will, so ist es am besten, wenn man das Leder zuschneidet und es dann seinem Querschnitte angemessen belastet, es kann sich nun der Riemen strecken und wenn man ihn braucht, so hat man ihn nur einfach zusammenzunähen.



Es kommt auch zuweilen vor, daß die Geschwindigkeit der getriebenen Welle verändert werden soll, während die Geschwindigkeit der treibenden Welle dieselbe bleibt, was man durch eine sog. Stufenrolle erreicht, wie beistehende Figur zeigt.

Was nun die Umfangsform der Rollen betrifft, so soll dieselbe weder hohl, noch cylindrisch sein, sondern erhaben.



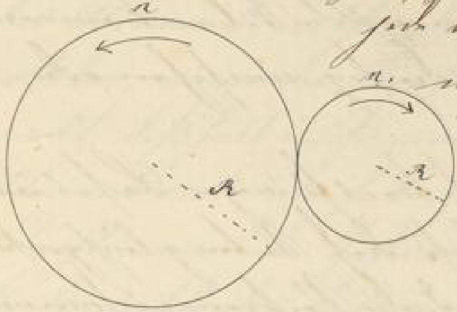
Es wird also auf Rolle A der Riemen nicht liegen bleiben, wenn derselbe auf einer Seite etwas länger, als auf der andern ist. Bei der Rolle B wird der Riemen entweder auf a oder b hin ablaufen, weil hier beide Ränder des Riemens gestreckt werden, wenn hingegen die Form der Rolle der Anordnung C entspricht, so wird der Riemen, da dieselbe gewölbt ist, liegen bleiben.

Nun macht man bei großen Rollen den Rundungshalbmesser gleich dem Halbmesser und bei kleinen Rollen den Rundungshalbmesser gleich dem Durchmesser der Rolle.

Zahnräder

Wir wollen einstweilen nur die Construction derselben durchgehen und später die geometr. Gestalt der Zähne, Räder etc behandeln.

Denken wir uns nun zunächst 2 kreisrunde Scheiben A u. B, jede derselben auf einer Axe befestigt



und pressen nun diese Scheiben gegeneinander, so wird durch die Pressung eine Reibung entstehen, wodurch Drehung der Scheibe A die Scheibe B mitgenommen wird, sich aber in entgegengesetzter Richtung dreht.

Da nun ein Punkt auf dem Umfange der Scheibe A denselben Weg zurücklegt, als ein Punkt der Scheibe B, so wird, wenn der Halbmesser von A 2, 3, 4, mal größer ist als der von B, die Scheibe B 2, 3, 4 mal mehr Umdrehungen machen als A, es verhalten sich daher die Umdrehungen verkehrt wie die Radien: Man hat also:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{n'}{n} = i.$$

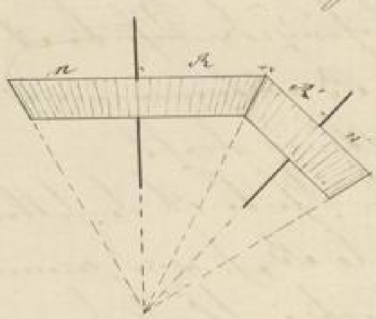
Man nennt dies Verhältniß i die Uebersetzungszahl.

Diese Anordnung kann aber nicht mehr gebraucht werden, sobald der Widerstand der getriebenen Welle zu groß wird; wir müssen deßhalb die Umfänge dieser Scheiben rauh machen, d. h. mit Erhöhungen und Vertiefungen versehen, welche erstere man Zähne nennt. Nun ist leicht einzusehen, daß die Zähne des einen, sowie des andern Rades gleich sein müssen und die Anzahl der Zähne sich wie die Halbmesser der Räder verhalten, also die Halbmesser immer durch rationale Zahlen ausgedrückt werden müssen.

Wenn man nun solche Scheiben mit Zähnen versehen, Zahnräder und zwar in diesem Falle cylindrische oder Stirnräder; indem hier die beiden Axen parallel sind.

Bilden hingegen die beiden Axen einen Winkel mit einander und schneiden sich, so erhält man die sog. conischen oder Kegelräder.

Denken wir uns 2 Kegelflächen mit kreisförmiger Basis und zwar daß die Seiten gleich groß sind und die Spitzen zusammenfallen, versehen ferner beide Kegel mit Drehungsaxen und pressen sie gegeneinander, so wird der eine den andern mitnehmen.



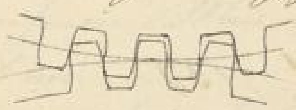
Es ist aber genügend, wenn wir von jedem der beiden Kegel ein Stück nehmen, also konische Scheiben und diese aufeinander rollen lassen. Es verhält sich hier wieder

$$\frac{n'}{n} = \frac{R}{R'}$$

Soll nun eine gewisse Kraft von einer Welle auf die andere übertragen werden, so müssen wir wieder die Oberflächen der Kegel regelmäßig rauh machen und es verwandeln sich also dann die Scheiben in regelmäßige zahnartige Gebilde.

Ist die Lage zweier Axen ganz beliebig gegeneinander, so erhalten die Räder schraubenförmige Oberflächen und entstehen hyperbolische Räder etc.

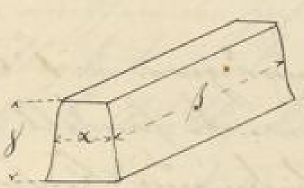
Da die Zähne je zweier Räder im Eingriff sich gegenseitig pressen, so müssen dieselben gehörige Festigkeit besitzen, damit sie nicht abbrechen.
Die Kraft P, welche nun auf einen Zahn einwirkt, presst bald an der Wurzel, bald in der Mitte und bald an der Krone desselben und sucht ihn vom Zahnkranze wegzubrechen.
Das Moment, welches den Zahn abzubrechen strebt, ist am größten, wenn die Kraft am Ende desselben auf ihn einwirkt. deßhalb muß man ihn so fest machen, daß er diesem Moment mit Sicherheit widersteht.
Betrachten wir den Zahn als parallelepipedisch, so ist die Kraft, welche den Zahn an der Wurzel abzubrechen strebt:



$$P\delta = \frac{T}{6}\beta\alpha^2$$

$$\text{woraus } \alpha^2 = \frac{6P\delta}{T\beta}$$

$$\alpha^2 = \frac{6}{T}\,\frac{\delta}{\alpha}\,\frac{\alpha}{\beta}\,P$$



$$\alpha = \sqrt{\frac{6}{T}\,\frac{\delta}{\alpha}\,\frac{\alpha}{\beta}}\,\sqrt{P}$$

dabei können wir eine der 3 Größen T, $\frac{\delta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ annehmen diese Regel wäre gut, wenn P bekannt wäre, was in den meisten Fällen nicht der Fall ist, daher diese Regel, wenn es sich um eine vollständige Berechnung der Dimensionen eines Rades handelt, nicht zulässig ist.

$$P\delta = \frac{T}{6} \quad (1.)$$

$$P = \frac{T}{6}\beta\alpha^2.$$

$$\left.\begin{aligned} PR &= \frac{T}{6}\,\frac{\beta\alpha^2}{\delta}\,R \\ PR &= \frac{T'}{8}\,\frac{T\pi}{16}\,d^3 \end{aligned}\right\} (2.)$$

Wobei d ~~derjenige~~ Durchmesser derjenigen Transmissions-welle, welche ein Torsionsmoment $p R$ entspricht.

Nun ist $\frac{p}{6} \frac{\beta \alpha^2 R}{l} = \frac{T\pi}{16} d^3$

Wir gehen nun darauf hinaus alle Dimensionen des Rades durch d auszudrücken. Nehmen wir zuerst β, so haben wir $\frac{\beta}{d} = \frac{6}{p} \frac{T\pi}{16} \frac{l d^2}{\alpha^2 R}$ (3).

oder auch $\frac{d}{\beta} = \cancel{\frac{6 T\pi}{16 p}}\, \cancel{l d^2}\, \frac{p}{6} \frac{16}{T\pi} \frac{\alpha^2 R}{l d^2}$ (4)

$$\left(\frac{\beta}{d}\right)^2 = \frac{6 T\pi}{16 p} \frac{l d^2}{\alpha^2 R} \frac{\beta}{d}$$

$$\left(\frac{\beta}{d}\right)^2 = \frac{6 T\pi}{16 p} \left(\frac{l}{\alpha}\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{d}{R}$$

$$\frac{\beta}{d} = \sqrt{\frac{6 T\pi}{16 p} \frac{l}{\alpha}} \times \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} \frac{d}{R}} \quad (5)$$

$\frac{l}{\alpha}$ nehmen wir jederzeit constant an und zwar $= 1{\cdot}5$. $\frac{\beta}{\alpha}$ jedoch nicht, wenn es sich um Räderwerke handelt, die von Menschen getrieben werden, wie Winden und Krahnen etc, also keine sehr regelmäßige Bewegung stattfindet, so macht man bei derartigen Rädern, weniger Zähne, was bedeutende Kosten erspart. Man nimmt gewöhnlich $\frac{\beta}{\alpha}$ 4–5 an.

Allein bei Rädern, welche durch Wasser oder Dampfkraft getrieben werden; also große Massen mit in's Spiel kommen, so nimmt man $\frac{\beta}{\alpha} = 6$ an. Man bekommt mehr Zähne und eine feinere Zahntheilung, sowie auch eine sanftere Bewegung. Dieses Verhältniß wird bei den Transmissionsrädern angewendt.

für Maschinen, wobei für die Bewegung ein höchster Grad von Vollkommenheit verlangt wird, wie bei Werkzeugmaschinen nimmt man $\frac{\beta}{\alpha} = 8$ und erhält die Präcisionsräder.

$\frac{R}{d}$ nennen wir die relative Größe des Rades.

Es bedeutet z. B. wenn wir ein sechsfaches Rad haben, daß der Durchmesser der Welle 6 mal in dem Halbmesser des Rades enthalten ist.

Man nimmt in der Regel ist die relative Größe des größeren der beiden Räder 5–6 mal so groß als der Durchmesser der Welle zu nehmen.

Sollte eine zu starke Uebersetzung verlangt werden, so ist es ratsam, die relative Größe des größeren Rades größer zu nehmen. Man nimmt für liegende Wellen 6, für stehende 5 an.

Nun müssen die Zähne so construirt sein, daß sie dieselbe Festigkeit wie die Axe besitzen, also wenn ein Zahn bricht, die Welle durch Torsion abgedreht wird.

$$\sqrt{\frac{6}{16}\frac{T\pi\gamma}{f\alpha}} = 1.33.$$

$$\frac{\beta}{d} = 1.33\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\frac{d}{R}} = 1.33\frac{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}{\sqrt{\frac{R}{d}}}$$ Siehe 70 Tab.

Ist z. B. $\frac{\beta}{\alpha} = 6$, $\frac{R}{d} = 5$ ein 6facher Transmissionsrad

so ist $\frac{\beta}{d} = 1.458$

$\beta = 1.458 \times d = 14.58$

$\alpha = 2.43.$

$\gamma = 3.64.$

$R = 50.$

Es hat uns diese Regel das Rad so zu suchen aus der Axe bestimmt.

Es kann nun auch das Umgekehrte entstehen, so daß das Rad gegeben und die Axe gesucht wird.

Gehen wir nun von Gl. 4 aus, multipliziren sie mit $\frac{d^2}{\beta^2}$

so erhalten wir $\frac{d^3}{\beta^3} = \frac{P}{6}\,\frac{16}{T\pi}\,\frac{\alpha^2 R}{\delta d^2}\,\frac{d^2}{\beta^2}$

$$\left(\frac{d}{\beta}\right)^3 = \frac{P}{6}\,\frac{16}{T\pi}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{R}{\beta}\right)$$

$$\frac{d}{\beta} = \sqrt[3]{\frac{P}{6}\,\frac{16}{T\pi}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)}\;\frac{\sqrt[3]{\frac{R}{\beta}}}{\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}}$$

$\frac{\beta}{\alpha}$ nehmen wir an, kennen auch $\frac{R}{\beta}$ und bestimmen $\frac{d}{\beta}$, woraus d folgt.

$$\sqrt[3]{\frac{P}{6}\,\frac{16}{T\pi}\,\frac{\alpha}{\delta}} = 0.826.$$

$$\frac{d}{\beta} = 0.826\,\frac{\sqrt[3]{\frac{R}{\beta}}}{\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}}$$ Siehe Seite 51. Res.

$$z = \frac{2\pi R}{t\alpha\beta d} = 2\pi\left(\frac{\alpha}{t}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{R}{d}\right)\left(\frac{d}{\beta}\right).$$

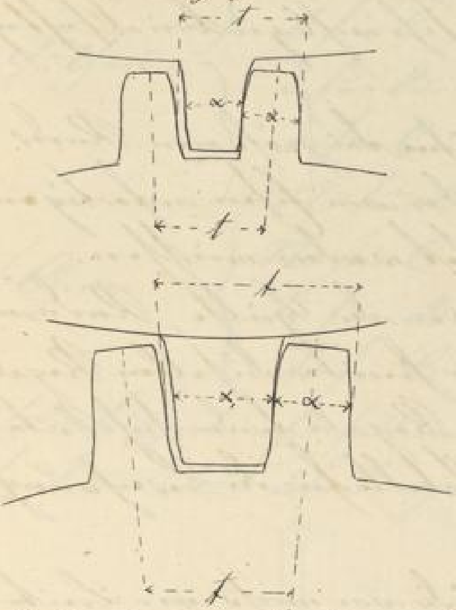
$$\frac{\beta}{d} = 1.33\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{d}{R}}$$

$$z = \frac{2\pi}{\left(\frac{t}{\alpha}\right)}\,\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{R}{d}\cdot\frac{1}{1.33}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{\frac{R}{d}}$$

$$z = \frac{2\pi}{\frac{t}{\alpha}}\,\frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}\,\frac{R}{d}\sqrt{\frac{R}{d}} = \frac{2\pi}{\frac{t}{\alpha}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{R}{d}\right)^{\frac{1}{2}}$$

z bedeutet hier die Anzahl der Zähne und t die Zahnweite. Es ist hier noch $\frac{t}{\alpha}$ anzugeben, welches sich nach dem Material, woraus die Zähne bestehen richtet; ob sie nun aus Eisen oder Holz bestehen.

Sind nun die Zähne der beiden Räder von Eisen, so müssen dieselben einerlei Dicke haben und außerdem noch ein Spielraum gelassen werden. Deßhalb ist die Zahntheilung t etwas größer als $2x$ zu nehmen und zwar



$$t = 2{\cdot}1x$$

Anders verhält es sich wenn das eine der beiden Räder hölzerne Zähne hat; welche dann verhältnißmäßiger weise stärker gemacht werden müssen, damit sie dieselbe Festigkeit, wie die eisernen besitzen. Man nimmt daher $t = (x + x_1) + 0{\cdot}1x$.

$$x_1 = 1{\cdot}56x$$

$$t = 2{\cdot}67x$$

Die hölzernen Zähne haben nun folgende Nachtheile im Vergleich zu den eisernen. Sie können nicht so fest mit dem Radkörper verbunden werden, selbst wenn sie anfangs noch so genau eingepaßt waren, so schwindet das Holz immer etwas mit der Zeit und die Zähne werden lose. Ferner müssen die Zähne des eisernen Rades sehr genau abgerichtet und gefeilt werden, damit die Holzzähne nur einigermaßen halten und nicht vor der Zeit sich abnützen.

Nun haben die Holzzähne wieder den Vortheil, daß wenn sie abgelaufen sind, man nicht den ganzen Radkörper wie bei eisernen wegwerfen muß, sondern nur neue Zähne einzusetzen braucht. Ein solcher Radkörper ist daher von unverwüstl. Dauer.

Ferner machen die hölzernen Räder gegen eiserne fast gar kein Geräusch, was in vielen Fällen sehr wohl zu berücksichtigen ist.

Man wird also in der Regel die Zähne des grösseren Rades von Holz und die des kleineren Rades von Eisen anfertigen, welch letztere aber sehr gut bearbeitet werden müssen.

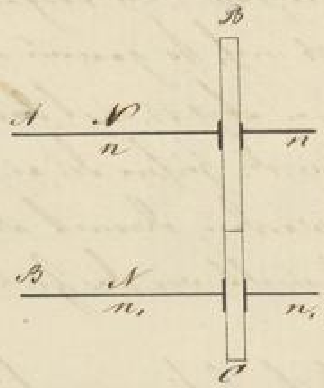
Was nun schliesslich die Dimensionen der Hülse, Radarme, Anzahl derselben betrifft, so gelten hierüber dieselben Regeln ähnlich der Rollen. Die empirischen Regeln finden sich Seite 70 und 71 in den Ref. nebst einer Tabelle für die Berechnung der Stärken der Radarme.

Taf. XVII Fig. 1, 2, 3 finden sich Räder von mässiger Breite aufgezeichnet.

Wir wollen nun zur Erläuterung einige Beispiele aufführen.

1. Es soll die totale Kraft der Welle A auf die Welle B übertragen werden.

Sei nun folgendes gegeben:



$N = 40$, $n = 80$ und $n_1 = 120$.

Schaftdurchmesser für A $= 16\sqrt[3]{\frac{40}{80}} = 13$

Dicke " " D $= 16\sqrt[3]{\frac{40}{120}} = 11$

Relative Gr. von B $= 6$

Halbmesser von B $= 6 \times 13 = 78$

" " C $= \frac{78}{1{\cdot}5} = 52$

$\frac{\beta}{\delta}$ . . . . $= 6$

$\frac{b}{d}$ . . . . $= 1{\cdot}33$

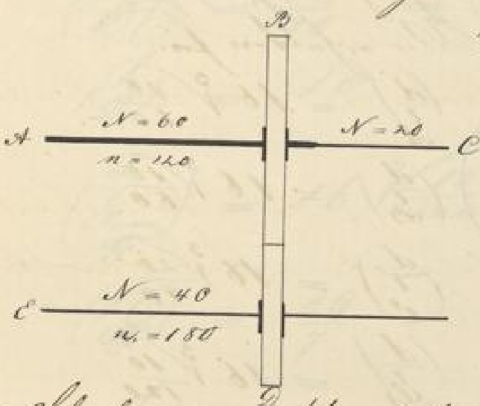
b $= 1{\cdot}33 \times 13 = 17{\cdot}29$

z . . . Eisen auf Eisen $\begin{cases} \text{für B} = 84 \\ \text{für C} = \frac{84}{1{\cdot}5} = 56 \end{cases}$

Hülsen
$$\begin{cases} l \text{ für } B = 17{\cdot}29 + 0{\cdot}0678 = 22{\cdot}17 \\ l \text{ für } C = 17{\cdot}29 + 0{\cdot}0652 = 20{\cdot}41. \\ \delta \text{ für } B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 13 = 4{\cdot}83 \\ \delta \text{ für } C = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 11 = 4{\cdot}16. \end{cases}$$

Arme
$$\begin{cases} N \text{ für } B = \ldots\ldots = 6 \\ N \text{ für } C = \frac{52}{11} = 4 \\ h \text{ für } B = 0{\cdot}94 \times 13 = 12{\cdot}22 \\ h \text{ für } C = 1{\cdot}08 \times 11 = 11{\cdot}88. \end{cases}$$

2tes Beispiel. Es soll nur ein Theil der Kraft auf die getriebene Welle übertragen werden.



Wir erhalten:

$$\left(\frac{d}{A}\right) = 16 \sqrt[3]{\frac{60}{120}} = 13.$$

$$\left(\frac{d}{C}\right) = 16 \sqrt[3]{\frac{20}{120}} = 9.$$

$$\left(\frac{d}{E}\right) = 16 \sqrt[3]{\frac{40}{180}} = 7.$$

Das Rad B führt aber blos 40 Pferde, wir müssen daher den Armen zu Zeichnen dieses Rades eine Welle zu Grunde legen, die blos 40 Pferde zu übertragen hätte. Wir bestimmen nun die Dimensionen ganz nach den früheren Regeln, nur müssen wir für B statt des Realen Durchmessers, den Idealen in Rechnung bringen.

In Bezug auf die Wellen wird das Rad D ein Normalrad, während B ein abnormales Rad wird.

$$\left(\frac{d}{B}\right) = 16 \sqrt[3]{\frac{40}{120}} = 11$$

$$\left(\frac{R}{B}\right) = 6 \times 11 = 66.$$

$$\left(\frac{R}{D}\right) = 66 \times \frac{120}{180} = 44.$$

$$\frac{\beta}{d} = 1{\cdot}33\,, \quad \beta = 1{\cdot}33 \times 11 = 14{\cdot}6.$$

$$\binom{l}{B} = 14{\cdot}6 + 66 \times 0{\cdot}06 = 18{\cdot}56.$$

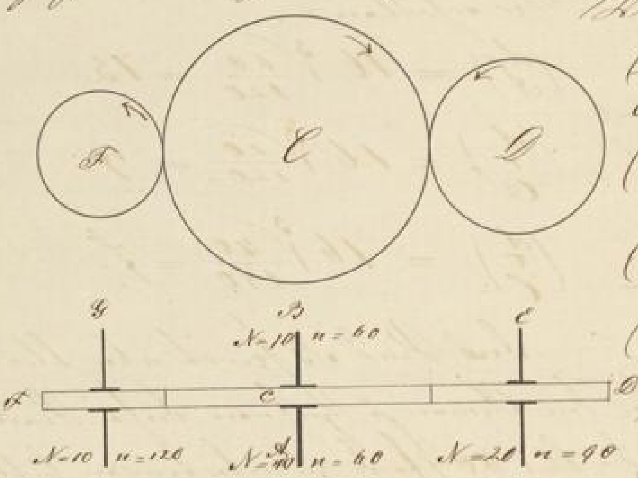
$$\binom{h}{B} = 0{\cdot}94 \times 11 \qquad = 10{\cdot}3$$

$$\binom{W}{D} = \frac{44}{7} \qquad = 6.$$

$$\binom{h}{D} = 0{\cdot}94 \times 7 \qquad = 6{\cdot}58.$$

3tes Beispiel. Es habe eine Welle nach beiden Seiten Kräfte abzugeben und zwar nach den in der Zeichnung ersichtl. Daten.

Wir erhalten für:



$$\begin{pmatrix} d \\ l \\ A \end{pmatrix} = 16\sqrt[3]{\frac{40}{60}}$$

$$\begin{pmatrix} d \\ l \\ B \end{pmatrix} = 16\sqrt[3]{\frac{10}{60}}$$

$$\begin{pmatrix} d \\ l \\ E \end{pmatrix} = 16\sqrt[3]{\frac{20}{90}}$$

$$\begin{pmatrix} d \\ l \\ G \end{pmatrix} = 16\sqrt[3]{\frac{10}{120}}$$

Die Arme von C haben eine Kraft von 30 Pferden zu übertragen, wir müssen daher diesem Rad wieder eine ideale Welle zu Grunde legen, wonach wir die übrigen Dimensionen desselben bestimmen müssen. Die Zähne sind für 20 Pferde zu machen.

$$\begin{pmatrix} d \\ l \\ \text{Arme} \\ C \end{pmatrix} = 16\sqrt[3]{\frac{20+10}{60}} = 13\ \text{cm}$$

$$\binom{R}{C} = 6 \times 13 \qquad = 78$$

$$\begin{pmatrix} d \\ l \\ \text{Zähne} \\ C \end{pmatrix} = 16\sqrt[3]{\frac{20}{60}} = 11$$

Relative Größe für die Zähne von C $= \frac{78}{11} = 7$.

$$\left(\frac{b}{d_C}\right) = 1{\cdot}231 \;;\; b = 1{\cdot}231 \times 11 = 14^{\text{cm}}$$

$$z\,(\text{Eisen auf Eisen}) = 102.$$

$$\left(\frac{R}{D}\right) = 78\,\frac{60}{90} = 52.$$

$$\left(\frac{R}{F}\right) = 78\,\frac{60}{120} = 39.$$

$$\left(\frac{d_{\frac{1}{\text{Arm}}}}{D}\right) = 16\sqrt[3]{\frac{20}{90}} = 10.$$

$$\left(\frac{NG}{D}\right) = \frac{52}{10} = 5.$$

$$\left(\frac{h}{D}\right) = 10$$

$$\left(\frac{d_{\frac{1}{\text{Arm}}}}{F}\right) = 16\sqrt[3]{\frac{10}{120}} = 7$$

$$\left(\frac{NG}{F}\right) = \frac{39}{7} = 5$$

$$\left(\frac{h}{F}\right) = 1{\cdot}00 \times 7 = 7$$

Lagerstühle

Hierbei handelt es sich die Achsen ganz in der Nähe der Räder zu halten und sucht die Größe eines Lagerstuhles immer womögl. auf ein Minimum zu reduciren.
Als allgemeine Regel gilt es, daß man die Lager innerhalb der Räder anbringt, ferner richtet sich der Stuhl auch nach dem Uebersetzungsverhältniß der beiden oder mehreren Räder.

Man muß beim Verzeichnen eines Lagerstuhls ganz methodisch verfahren.

Zuerst verzeichnet man die Axen, sodann nach den Regeln die Räder und entscheidet sich über die Stellen, wo Lager angebracht werden sollen, verzeichnet letztere aber selbst nicht, sondern nur die Lagerplatten mit ihren gehörigen Dimensionen, und zuletzt den Lagerstuhl, welcher nun an der Mauer, Decke, oder einem Maschinengestelle angebracht wird, oder auch auf ein Fundament zu stehen kommt.

Dies wird man folgendes Verfahren anwenden, wenn 2, 3, 4 oder mehr Axen mit Rädern vorkommen.

Man verzeichnet ebenfalls zuerst die Axen in ihren bestimmten Lagen und Dimensionen, die Räder vorläufig noch nicht, sodann die Lagerplatten, worauf die Lager zu stehen kommen, nach diesem System erst ~~den Stuhl~~ die Räder und zuletzt den Stuhl.

Nur auf diese Weise kann eine richtige Materialverwendung vorkommen.

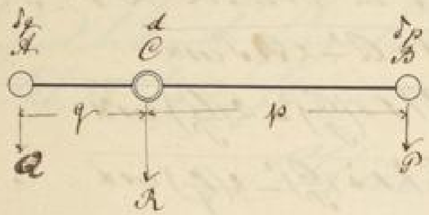
Man wird am besten thun, sich vorerst eine Skizze zu entwerfen, welche als leitender Gedanke dient und in dieser die Sache kritisiren, bis man zu einem günstigen Resultate kommt und dann nach diesem die Sache in's Reine zeichnet.

Es finden sich nun in den Resultaten Taf. XVIII, XIX und XX verschiedene Lagerstühle aufgezeichnet.

Hebel.

Es kommen dieselben sehr häufig bei Anordnungen von Maschinen vor. Sie können entweder gerade oder Winkelhebel sein.

Nehmen wir zuerst einen geraden Hebel, der seinen Drehungspunkt in C habe, ferner wirke eine Kraft P in B und in A d. Widerstand Q. Ferner nehmen wir an, daß zweiseitige Zapfen vorhanden wären, so muß nun für den Gleichgewichtszustand sein:



$$Qq = Pp$$

$$Q = P\frac{p}{q}$$

$$R = P + Q = P\left(1 + \frac{p}{q}\right)$$

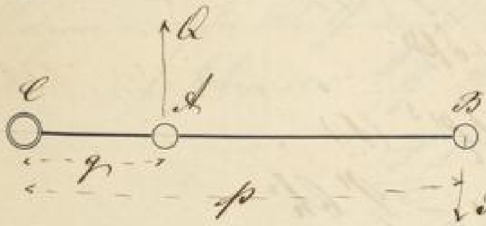
Ferner nehmen wir für die Durchmesser bei $A = \delta q$, für $C = d$ u. B δp an.

Dann ist $\delta p = 0{\cdot}12\sqrt{P}$

$$\delta q = 0{\cdot}12\sqrt{Q} = 0{\cdot}12\sqrt{P} \times \sqrt{\frac{p}{q}}$$

$$= \delta p\sqrt{\frac{p}{q}}$$

Denken wir uns nun den Drehungspunkt am Ende des Hebels in C angebracht, den Widerstand Q in Mitte bei A und die Kraft in B. Wegen des Gleichgewichtszustandes muß wieder sein:



$$Pp = Qq.$$

$$Q = P\frac{p}{q}$$

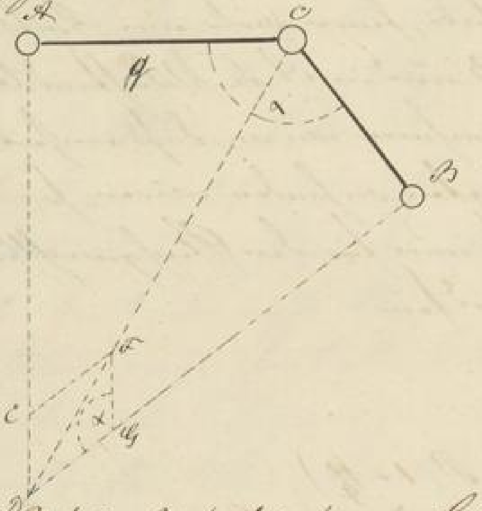
$$R = Q - P.$$

$$\delta p = 0{\cdot}12\sqrt{P}$$

$$\delta q = \delta p\sqrt{\frac{p}{q}}$$

$$d = \delta p\sqrt{\frac{p}{q} - 1}.$$

Für einen Winkelhebel haben wir, wenn wir mit α den Winkel, welche beide Schenkel des Hebels miteinander bilden, bezeichnen. Als gegeben setzen wir noch ferner die beiden Längen der Schenkel voraus, dann haben wir die Zapfendurchmesser $\delta p, \delta q,$ und d zu bestimmen.



Nun ist im Dreieck DFG.

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2QP\cos\alpha}$$

$$R = P\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2 - 2\left(\frac{Q}{P}\right)\cos\alpha}$$

$$R = P\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2 - 2\left(\frac{p}{q}\right)\cos\alpha}$$

$$\delta p = 0.12\sqrt{P}$$

$$\delta q = 0.12\sqrt{Q} = \delta p\sqrt{\frac{p}{q}}$$

$$d = 0.12\sqrt{R}$$

$$= 0.12\sqrt{P}\sqrt[4]{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(\frac{p}{q}\right)\cos\alpha}$$

Resultat. Seite 77 ist eine Tabelle für verschiedene Verhältnisse von $\frac{p}{q}$ und α angegeben.

Soll der Hebel mit zweiseitigen Zapfen versehen werden, so hat man nur vorerst einseitige zu rechnen und die so erhaltenen Durchmesser mit 0.7 zu multipliciren.

Zur Bestimmung der Querschnitte des Hebels haben wir, wenn c die Länge desjenigen Zapfens, dessen Durchmesser $= \delta p$.

$$P\frac{c}{2} = \frac{S\pi}{32}(\delta p)^3$$

$$P = \frac{S\pi}{16}\frac{(\delta p)^3}{c} \quad (1.)$$

Nun haben wir für den Arm $P \times p = \frac{S}{6} b h^2$

Arme und Zapfen sollen die gleiche Festigkeit besitzen, daher setzen wir $\frac{\pi}{16}\frac{(\delta p)^3}{c} = \frac{1}{6}\frac{bh^2}{p}$

daraus folgt $h^2 = \frac{6\pi}{16}\frac{(\delta p)^3}{c}\frac{p}{b}$

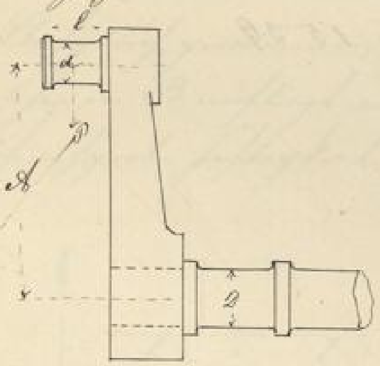
$$h^3 = \frac{6\pi}{16}\frac{(\delta p)^3}{c}\, p\, \frac{h}{b}$$

$$\frac{h}{\delta p} = \sqrt[3]{\frac{6\pi}{16}\left(\frac{\delta p}{c}\right)\left(\frac{p}{\delta p}\right)\left(\frac{h}{b}\right)}$$

$\frac{h}{b}$ ist angemessen je nach Umständen zu nehmen, p u. δp sind bekannt. Hierzu findet sich eine Tabelle Seite 78. Resultate. Taf XV fig 3 ist eine Abbildung eines Winkelhebels.

Kurbeln.

Der Unterschied derselben und Winkelhebel ist, daß die Axe um welche die Kurbel sich dreht eine Rotationsaxe ist und auf Torsion in Anspruch genommen ist.
Wir beziehen alle Dimensionen auf den Zapfen, so ist das Moment welches den Zapfen abzubrechen strebt:



$$P\frac{c}{2} = \frac{S\pi}{32} d^3$$

$$P = \frac{S\pi}{16}\frac{d^3}{c} \quad (1)$$

$$PA = \frac{T\pi}{16} D^3$$

$$P = \frac{T\pi}{16}\frac{D^3}{A} \quad (2)$$

Setzen wir die Werthe von P aus Gl 1. u 2. einander gleich, so haben wir $\frac{S\pi}{16}\frac{d^3}{c} = \frac{T\pi}{16}\frac{D^3}{A}$

$$\frac{Sd^3}{c} = \frac{TD^3}{A}$$

$$D^3 = \frac{S}{T} d^3 \frac{A}{c}$$

$$d^3 = \frac{T}{S} D^3 \frac{c}{A} = \frac{T}{S}\frac{D^3 c}{A d}$$

$$d^3 = D^2 \frac{T}{S}\frac{Dc}{AD}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{D}{d} &= \sqrt[3]{\frac{P}{T}}\sqrt[3]{\frac{A}{c}} = \sqrt[3]{\frac{P}{T}}\,\frac{d}{c}\,\sqrt[3]{\frac{A}{d}} \\ \frac{d}{D} &= \sqrt{\frac{T}{P}}\,\frac{c}{d}\,\sqrt{\frac{D}{A}} \end{aligned}\right\}$$

Die Zapfen werden immer von Schmiedeisen hergestellt, während die Welle auch aus Gußeisen bestehen kann. Seite 79. Resultate ist eine Tabelle aufgestellt, worin für $\frac{A}{d}$, $\frac{A}{D}$, $\frac{D}{d}$ und $\frac{d}{D}$ die Werthe für Wellen von Schmied u. Gußeisen enthalten sind.

Beisp. z. B.

$A = 50$

$d = 10$

$\frac{A}{d} = \frac{50}{10} = 5$ Welle u. Zapfen von Schmiedeisen

$\frac{D}{d} = 1{\cdot}539$

$D = 1{\cdot}539 \times 10 = 15{\cdot}39.$

$A = 100$

$D = 25$

$\frac{A}{D} = \frac{100}{25} = 4$

$\frac{d}{D} = 0{\cdot}6$

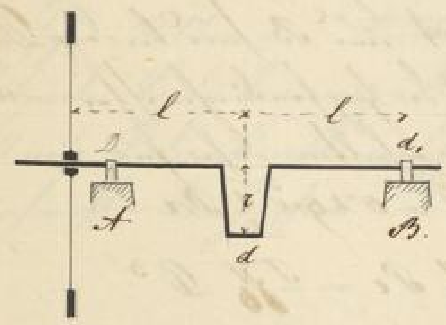
$d = 0{\cdot}6 \times 25 = 150.$

Für die Kurbelarme müssen wir empirische Regeln aufstellen und diese aus Constructionen, welche sich gut bewährt haben, entnehmen. Von Materialersparniß kann hier keine Rede sein, da diese Kurbel erstens wenig vorkommen und dann 2tens immer sehr ungünstigen Verhältnissen ausgesetzt sind; da z. B. ein Kurbelbruch bei einer Dampfmaschine unberechenbare Folgen haben

kann und nicht selten auch mit Unglücksfällen verbunden ist.
Die Dimensionen finden sich Taf XV fig 6 für Kurbeln von Schmiedeisen und fig 5 für Kurbeln von Gußeisen aufgezeichnet.
Wenn es sich nun um große Exactität handelt, wie z. B. bei Locomotiven und Dampfschiffen, so macht man am besten Kurbel und Zapfen aus einem Stück, während bei Landdampfmaschinen es üblich ist, den Zapfen einzusetzen.

Kurbelaxen

Bezeichnen wir mit $2l$ die Länge der Axe, mit r den Halbmesser der Kurbel, ferner denken wir uns bei A ein Schwungrad angebracht und es soll die Kraft P nach A hin übertragen werden, so wird die Welle auf Seite des Lagers A auf Torsion in Anspruch genommen, während der andere Theil der Welle, welcher in B aufliegt nur der Biegung ausgesetzt ist, und also auf respect. Festigkeit in Anspruch genommen ist.



Bezeichnen wir mit D Durchmesser bei A, mit d_1 Durchm. bei B und mit d den Durchmesser des Kurbelzapfens, so ist

$$d_1 = 0{\cdot}12\sqrt{\tfrac{l}{2}P}$$

Steht die Kraftrichtung senkrecht auf dem Kurbelhalbmesser, so ist das Torsionsmoment ein Maximum, und es ist:

$$Pr = \frac{T\pi}{16} D^3$$

Für die Kurbelzapfen haben wir:

$$\frac{1}{2} P l = \frac{T'\pi}{32} d^3$$

Eliminiren wir aus beiden Gleichungen P, so

$$P l = \frac{T'\pi}{16} d^3$$

$$P r = \frac{T\pi}{16} D^3$$

und dividiren beide durcheinander, so erhalten wir folgende:

$$\frac{d^3 T'}{D^3 T} = \frac{l}{r}; \quad \frac{d}{D} = \sqrt[3]{\frac{T}{T'}} \sqrt[3]{\frac{l}{r}}$$

$$\frac{d}{D} = \sqrt[3]{\frac{210}{450}} \sqrt[3]{\frac{l}{r}} = 0{\cdot}77 \sqrt[3]{\frac{l}{r}}$$

indem man für schmiedeisernen Zapfen $T' = 450$ und $T = 210$ zu nehmen hat. Construct. einer solchen Kurbel s. Taf. XVI fig 1.

2tens

können wir uns die Kraft zu beiden Seiten der Kurbel übertragen denken, so daß beide Theile der Welle nur auf Torsion in Anspruch genommen sind und jeder Theil die halbe Kraft zu tragen hat, wie es z. B. bei einer Schiffsmaschine mit einfach wirkendem Cylinder der Fall ist. Die Durchmesser der Welle bei A und B sind beide = D und der Zapfendurchmesser = d. Wir erhalten daher für

$$D = 0{\cdot}29 \sqrt[3]{\frac{1}{2} P r}$$

$$\frac{1}{2} P r = \frac{T\pi}{16} D^3$$

$$\frac{1}{2} P l = \frac{T'\pi}{32} d^3$$

Eliminiren wir P aus diesen beiden Gleichungen, so erhalten wir:

$$\frac{d}{D} = 0{\cdot}97 \sqrt[3]{\frac{l}{r}}$$

welche Stärke die Welle auch bei Achsen müsste.
Was den Kurbelarm betrifft, so ist das Moment irgend eines Querschnitts desselben, das dem Abbrechen ausgesetzt ist, gleich d oder dem Durchmesser des Kurbelzapfens zu setzen. Die Construction für diese Art von Kurbelbogen sind Seite 80. Ref. und eine Abbildung Taf. XVI fig. 2

Es sei nun zum Beispiel

$$P = 5000 \text{ Kilg.}$$
$$l = 60^{\text{cm.}}$$
$$r = 30^{\text{cm.}}$$

dann ist $\mathfrak{D} = 0{\cdot}29 \sqrt[3]{\frac{1}{2} \times 5000 \times 30} = 0{\cdot}29 \sqrt[3]{75000} = 12{\cdot}2$

$$\frac{d}{\mathfrak{D}} = 0{\cdot}97 \sqrt[3]{\frac{60}{30}} = 1{\cdot}22$$

$$d = 1{\cdot}22 \times 12{\cdot}2 = 14{\cdot}18.$$

Traversen.

Dieselben kommen sehr häufig bei Dampfmaschinen und Pumpwerken vor, wenn man genöthigt ist, die Verbindung zwischen Kolben und Kurbel zur mittelst Schubstangen zur Seite des Cylinders anzubringen.
Ist nun P die Kraft, welche auf einen Zapfen wirkt, d der Durchmesser des Zapfens und A die halbe Länge der Traverse,

so ist das Moment, welches den Zapfen zu brechen strebt

$$P\frac{l}{2} = \frac{S\pi}{32} d^3$$

das Moment, welches die Traverse in der Mitte abzubrechen strebt, ist für

Für einen rechteckigen Querschnitt.

$$PA = \frac{T}{6} bh^2$$

$$d^3 = \frac{16\, Pc}{T\pi}$$

$$h^2 = \frac{6\, PA}{Tb}$$

dividirt man diese beiden Gleichungen durcheinander,

so erhält man $\frac{d^3}{h^2} = \frac{16\, Pc}{T\pi} \times \frac{Tb}{6\, PA} = \frac{16}{6\pi}\,\frac{bc}{A}$

$$\frac{h^2}{d^3} = \frac{6\pi}{16}\,\frac{A}{cb}$$

$$\frac{h^3}{d^3} = \frac{6\pi}{16}\,\frac{Ah}{bc}$$

und $\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{6\pi}{16}\left(\frac{h}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right)\left(\frac{A}{d}\right)}$

$\frac{h}{b}$ nimmt man als constant an und zwar gleich $\frac{1}{3}$, es ist also nichts mehr variabel als $\frac{A}{d}$.

Wir setzen also $\frac{h}{d} = 1{\cdot}344\sqrt[3]{\frac{A}{d}}$ aber nur unter der Voraussetzung, daß $\frac{h}{b} = \frac{1}{3}$

Es sei z. B. $A = 48$

$d = 8$

so ist $\frac{A}{d} = \frac{48}{8} = 6.$

$\frac{h}{d} = 2{\cdot}44$

$$\begin{cases} h = 2{\cdot}44 \times 8 = 19{\cdot}52 \\ b = 6{\cdot}25. \end{cases}$$

In der Tab. Seite 81 findet sich nun die berechneten Werthe von $\frac{h}{d}$ für verschiedene Werthe von $\frac{A}{d}$

Taf $\underline{\text{XXI}}$ fig 1 ist die Zeichnung einer solchen Traverse.

Schubstangen.

Sie haben den Zweck eine hin und hergehende Bewegung in eine drehende zu verwandeln. Fassen wir zuerst das Festigkeitsziel ins Auge und nehmen an, dass alle Querschnitte rund seien, so haben wir folgendes: $d = \alpha \sqrt{P}$

Da nun eine solche Stange, bald auf absolute, bald auf rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen ist, so muss dieselbe nach letzterer construirt werden und hiefür eine gewisse Constante gesetzt werden.

$$P = \beta \frac{d_1^4}{l^2}$$

$$P = \frac{d^2}{\alpha^2}$$

$$\frac{d^2}{\alpha^2} = \frac{d_1^4}{l^2}$$

$$d_1^4 = \frac{1}{\alpha^2 \beta} l^2 d^2$$

$$\frac{d_1^4}{d^4} = \frac{1}{\alpha^2 \beta} \frac{l^2}{d^2}$$

$$\frac{d_1}{d} = \sqrt[4]{\frac{1}{\alpha^2 \beta}} \sqrt[2]{\frac{l}{d}}$$

Das angemessenste ist die Constante durch Erfahrung zu bestimmen

$$\frac{d_1}{d} = 0{\cdot}299 \sqrt{\frac{l}{d}}$$

Bei z. B. $l = 400^{cm}$, $d = 10^{cm}$

so ist $\frac{l}{d} = \frac{400}{10} = 40$

$\frac{d_1}{d} = 1{\cdot}45$

und $d = 1{\cdot}45 \times 10 = 14{\cdot}5$

der runde Querschnitt ist an und für sich die beste Form für Festigkeit, wäre auch für die Ausführung die beste; allein, da z. B. bei größeren Schubstangen die mittlere Dicke zu groß würde und man oft im Raume beengt ist und weil ferner bei gußeisernen Schubstangen leicht ungenze Stellen im Guß vorkommen und runde Stangen überhaupt häßlich sind, wählt man besser einen vierectigen Querschnitt wovon 2 Seiten gerade und die beiden andern abgerundet sind. Wir stellen uns nun die Frage, den Querschnitt einer solchen Stabes zu berechnen.

Wir gehen vom runden Querschnitt aus und suchen dafür ein rechteck. Querschn. der dem runden aequivalent ist in Bezug auf rückwirkende Festigkeit.

Für einen runden haben wir $P = \frac{\varepsilon\pi^3}{64} \cdot \frac{d_1^4}{l^2}$

" " vierectigen " " $P = \frac{\varepsilon\pi^2}{12} \frac{b^3 a}{l^2}$

$$\frac{\varepsilon\pi^3}{64}\frac{d_1^4}{l^2} = \frac{\varepsilon\pi^2}{12}\frac{b^3 a}{l^2}$$

$$\frac{12}{\varepsilon\pi^2} \times \frac{\varepsilon\pi^3}{64}\frac{d_1^4}{l^2} = ab^3$$

Multiplizirt man mit $\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{d_1^4}$

So erhält man $\left(\frac{b}{d_1}\right)^4 = \frac{6\pi}{32}\frac{b}{a}$

und $\frac{b}{d_1} = \sqrt[4]{\frac{6\pi}{32}\left(\frac{b}{a}\right)}$

Bei z. B. $d_1 = 12$, $\frac{a}{b} = 1{\cdot}5$

So ist $\left.\begin{array}{l}\frac{b}{d_1} = 0{\cdot}78 \\ \frac{a}{d_1} = 1{\cdot}17\end{array}\right\} \begin{array}{l} b = 0{\cdot}78 \times 12 = 9{\cdot}36 \\ a = 1{\cdot}17 \times 12 = 14. \end{array}$

Schubstangenköpfe.

Dieselben befinden sich an den Enden der Stangen und umfassen die Zapfen, sind also in Wirklichkeit Zapfenlager.

Die Schalen laufen sich aber mit der Zeit aus und es muß daher gesorgt werden, daß immer eine Anschließung stattfindet, was durch sog. Keilung bewerkstelligt wird.

Das Antreiben der Schalen kann nun auf dreierlei Weise geschehen.

1 Indem man die äußere Schale hereintreibt, wodurch eine Verkürzung der Stange eintritt.

2 Indem man die innere Schale nach außen treibt und eine Verlängerung der Stange eintritt.

3. Die Länge der Stange bleibt ungeändert, wenn wir die äußere Schale nach innen und die innere nach außen treiben, was durch eine doppelte Keilung geschieht.

Für den Fall, daß die Zapfen an beiden Enden sich gleichmäßig abnützen, ist es genügend das eine Ende mit einer äußeren, das andere Ende mit einer inneren Keilung zu versehen;

nützt sich hingegen ein Zapfen stärker ab, so muß die Stange an dieser Stelle mit einer doppelten Keilung versehen werden, während das andere Ende eine einfache Keilung erhalten kann.

Für geringe Abnützung ist gar keine Keilung notwendig.

Nun sind verschiedene Formen dieser Köpfe in den Resultaten Taf XXI fig 3, 4 u 5; Taf XXII fig 1–9 aufgezeichnet.

Schubstangen von Gußeisen werden meistens bei Balanciermaschinen angewandt und deren äußere Form kann ganz nach Gefühl bestimmt werden, die Metalldicke δ der Nabe wäre nur noch zu bestimmen.

Eine Abbildung findet sich Taf XXIII Fig 4, 5 & 6 dies.

Balancier.

Dieselben bestehen in der Regel aus Gußeisen und kommen meistens nur bei Watt'schen Maschinen vor.

Bezeichnen wir nun mit L die halbe Länge des Balanciers, ferner mit G das Gewicht desselben, so wirkt einmal auf den mittleren Zapfen eine Kraft von $2P+G$, das andere mal eine Kraft von $G-2P$. Die Zapfen müssen daher für einen Druck von $2P+G$ konstruirt werden, und es ist unter P der Dampfdruck und das Gewicht des Kolbens sammt Kolbenstange zu verstehen.

Es muß nun der Körper des Balanciers in der Mitte am stärksten sein und das Moment welches denselben an dieser Stelle abzubrechen strebt muß, abgesehen vom Gewichte, sein:

$$PL = \mathfrak{f}\,E$$

$$\text{oder } PL = \frac{\mathfrak{f}}{6}\left[b_2 h_2^3 + b_1(h_1^3 - h_2^3) + b(h^3 - h_1^3)\right]$$

$$PL = \frac{\mathfrak{f}}{6} h^3\left[\left(\frac{b_2}{h}\right)\left(\frac{h_2}{h}\right)^3 + \left(\frac{b_1}{h}\right)\left(\left(\frac{h_1}{h}\right)^3 - \left(\frac{h_2}{h}\right)^3\right) + \frac{b}{h}\left(1 - \left(\frac{h_1}{h}\right)^3\right)\right]$$

Setzen wir der Abkürzung wegen für den Ausdruck in der Kl. M

So haben wir $P L = \frac{f}{6} h^3 M$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6 P L}{f M}}$$

$$\left(\frac{L}{h}\right) P = \frac{f}{6} M h^2 ; \quad h = \sqrt{\frac{6 \left(\frac{L}{h}\right) P}{f M}}$$

Man fertigt diese Balancier aus Gußeisen nur noch für Maschinen von 150–200 Pferdekraft, für stärkere Maschinen würde der Balancier zu groß werden und schwierig herzustellen sein, denn einen solchen großen Gußträger leicht ungänze Stellen vorkommen können.

Größere Balancier's werden daher aus Blech angefertigt und an diejenigen Stellen, wo Zapfen angebracht werden, kommen gußeiserne Hülsen. Man kann die Balanciers auch ähnlich, wie Gitterträger zusammensetzen.

Abbildung eines Balancier's ist Taf XXIII Fig 1, 2 & 3 enthalten, sowie die Dimensionen zur Construction desselben in der Besch. Seite 83

Seil- und Kettenhacken.

Dieselben kommen häufig bei Flaschenzügen, Anordnungen von Hebevorrichtungen etc vor.

Nehmen wir einen schmiedeisernen Haken an und lassen die neutrale Achse mit der Schwerachse zusammenfallen, ferner seien alle Durchschnitte vom gleichen Kreise; so ist nun die Form zu bestimmen, bei welcher der Haken in allen Theilen gleiche Festigkeit darbietet.

Heißen wir nun den $\measuredangle\, \varphi$ und ist $AC = r$,

ferner $AB = y$

so wird AB eine Function von φ sein.
Wir fällen nun eine Senkrechte von D auf AQ und es ist

$$\text{diese } DG = \left(r + \frac{y}{2}\right) \sin \varphi$$

das Moment der Kraft, welche den Durchschnitt bei AB abzubrechen strebt ist:

$$Q \cdot DG = \left(r + \frac{y}{2}\right) \sin \varphi.$$

$$\left(r + \frac{y}{2}\right) \sin \varphi \, Q = \frac{S_1 \pi}{32} y^3$$

$$S_1 = \frac{32\left(r + \frac{y}{2}\right) Q \sin \varphi}{\pi y^3}, \quad S_2 = \frac{Q \sin \varphi}{\frac{1}{4} y^2 \pi}$$

Wir zerlegen nun die Kraft Q in zwei Seitenkräfte $Q \sin \varphi$ und $Q \cos \varphi$, so entsteht in A wegen der Abscherung eine Spannung S_2. S_1 sei das Spannungsmoment das im Punkte A eintritt. Heißen wir die Totalspannung S, so ist

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = \frac{32\left(r + \frac{y}{2}\right) Q \sin \varphi}{\pi y^3} + \frac{4 Q \sin \varphi}{y^2 \pi}$$

$$S = \frac{4 Q \sin \varphi}{\pi y^2} \left\{ 1 + \frac{8\left(r + \frac{y}{2}\right)}{y} \right\}$$

$$S = \frac{4 Q \sin \varphi}{\pi y^2} \left\{ \frac{5y + 8r}{y} \right\}.$$

$$S = \frac{16 Q \sin \varphi}{\pi y^3} \left\{ 2r + \frac{5}{4} y \right\}$$

$$\sin \varphi = \frac{S \pi}{16 Q} \frac{y^3}{2r + 1{,}25 y}$$

die Spannung, welche durch den Zug entsteht haben wir vernachlässigt.
Für A wird $\sin \varphi = 1$, die Spannungsintensität am größten.

Also $1 = \frac{P\pi}{16\,Q}\;\frac{1}{2a + 1{\cdot}25\,d}$.

Nun kommt es darauf an wie stark P zu nehmen ist.
Es wird für Kettenhaken $P = 2800$, für Seilhaken $P = 1400$.
Die innere Höhlung soll immer so klein als mögl. genommen werden. Mässiger wird die Form für Doppelhaken, wobei die Last an 2 Ketten oder Seilen hängt und also jeder Haken nur die Hälfte zu tragen hat.
Es kann also für dieselbe Last, die Höhlung im Verhältniss zur $\sqrt{2}$ schwächer gemacht werden.

Röhren und deren Verbindungen.

Werden in grosser Menge bei Wasser und Gasleitungen angewendet.
Es kommt bei einer Röhrenleitung der Durchmesser und die Länge eines Rohrstückes in Betracht.
Gewöhnlich ist die Quantität der Flüssigkeit und die Geschwindigkeit, mit welcher sie durch die Leitung geht, gegeben, woraus also die Hauptdimensionen eines Röhrenstückes zu bestimmen sind.
Das Material einer Röhrenleitung richtet sich nun ganz nach den Eigenschaften der Flüssigkeit, welche hindurch geleitet werden soll und nach dem Druck der im innern der Röhren herrscht.
Da nun bei Röhrenleitungen, wie bei einer Wasserltg die Fortströmung d. Fl. gegen die Röhre eine bedeutende Reibung verursacht, so soll man immer darauf achten der Flüssigkeit eine geringe Leitungsgeschwindigkeit zu geben, gewöhnlich 1 Metre.
Bezeichnen wir mit Q die Menge d. Flüssigkeit, v die Geschw. derselben, $\Omega = d$ den innern Durchmesser, D den äussern Durchmesser der Röhre, so haben wir $Q = \Omega v$.

$$\Omega = \frac{Q}{v} = \frac{d^2\pi}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi}\frac{Q}{v}}$$

Es werden nun Röhren aus folgendem Material u. zu folgenden Zwecken gefertigt.

a. Eisenblech wird angewendet bei sehr grossen Flüssigkeitsmengen, wobei die Röhren zuweilen sehr grosse Durchmesser erhalten, insbesondere zu Wasserleitungen für Turbinen.

b. Gusseisen kommt vielfach in Anwendung von 8 – 40 cm Weite bei Wasserleitungen, sowie auch Gas und Dampfleitungen.

c. Kupfer wählt man vorzugsweise für enge kleine Röhren, welche biegsam, elastisch sein sollen und namentlich eine sehr hohe Temperatur noch ertragen

d. Bleiröhren haben die vortreffliche Eigenschaft, dass sie sich sehr leicht und jeder möglichen Krümmung biegen lassen. Sie finden ihre Anwendung als Detailleitungen zu Gaseinrichtungen

e. Zinkröhren kommen weniger vor

f. Schmiedeisernen Röhren fertigt man dann an, wenn dieselben bestimmt sind, eine sehr hohe Temperatur und einen stärkeren Druck auszuhalten.

g. Holzröhren zu Brunnenleitungen etc. und

h. Steinerne Röhren, welche sehr selten vorkommen, aber sehr vortheilhaft für Trinkwasserleitungen sind wegen ihrer grossen Reinlichkeit und dem Wasser keinen fremden Geschmack mittheilen. Letztere Röhren können auch auf künstliche Weise aus Cementen hergestellt werden.

Es kommt nun weiter die Metalldicke δ der Wand in Betracht, welche sich theils nach der innern Pressung, dann nach Umständen der Abnützung, Rost etc, ferner nach dem Anfertigungsprozeß richtet.

Wir haben zur Bestimmung von δ folgendes:

Ist K die Festigkeit des Materials, d der Durchm. der Röhre, n der innere, n_1 der äußere Druck und l die Länge einer Röhre so ist $d\,l\,(n - n_1) = 2\delta\, l\, K.$

$$\text{und } \delta = \frac{d\,(n - n_1)}{2K} = and + b.$$

Wir erhalten für die verschiedenen Materialien folgendes:

Eisenblech	$\delta = 0{\cdot}00125\, nd + 0{\cdot}30$
Gußeisen	$\delta = 0{\cdot}00400\, nd + 0{\cdot}50$
Kupfer & Messg	$\delta = 0{\cdot}00200\, nd + 0{\cdot}10$
Blei	$\delta = 0{\cdot}04000\, nd + 0{\cdot}10$
Zink	$\delta = 0{\cdot}02500\, nd + 0{\cdot}10.$

Die Länge der einzelnen Röhrenstücke richtet sich nach dem Anfertigungsprozeß. So darf man z. B. bei Gußeisen nicht über eine bestimmte Länge hinausgehen, weil sich der Kern bei großer Länge sich leicht biegen würde und das Rohr beim Guß ungleich starke Wellen erhielte.

Röhrenverbindung

Für Gußröhren, welche wohl die umfangreichste Anwendung haben unterscheidet man die Verbindung mittelst Flantschen und Muffen.

1. Die Verbindung mittelst Flantschen wird meistens in den Fällen angewandt, da man zur Verbindung leicht gelangen kann

man z. zu Dampfleitungen, Leitungen in offenem Raume und niemals zu solchen, die unter Erde gelegt werden.

Die Flantschen macht man in der Regel so groß, daß die Schrauben genug Platz haben und erhalten folgende Dimensionen

Länge 1+1.5 δ

Dicke 0.33+1.17 δ.

Die Dichtungen sind je nach der Flüssigkeit, welche durch die Leitung geht, von verschiedenem Material.

Die Verbindung mit Muffen wendet man meistens zu Gas, Wasserleitungen und überhaupt zu Leitungen an, die in die Erde gelegt werden. Das ~~eine~~ Ende jedes Röhrenstücks hat bei dieser Verbindung eine becherförmige Erweiterung, das andere Ende hat ein Art Flantsche und wird in das andere erstere eingeschoben. Die Verbindung bei Gasleitungen geschieht ungefähr auf folgende Weise. In das eine Röhrenstück mit becherförmiger Erweiterung wird zunächst ein getheerter Hanfring gebracht, sodann das andere Röhrenstück eingeschoben und der übrige Raum mit flüssigem Blei ausgegossen, das nach dem Erkalten noch fest eingestemmt wird.

Das erstere Röhrenstück hat noch eine wulstförmige Verstärkung damit das Rohr beim Stemmen des Bleis nicht leicht springt.

Für den Fall, daß die Röhren nicht mehr auseinander genommen werden sollen wendet man Eisenkitt an. Derselbe besteht aus Eisenfeilspänen, Schwefelblumen und verdünnter Säure. Diese 3 Stoffe gehen bei der Mischung unter Wärmeentwicklung eine innige Molekülarverbindung ein und die Röhren können nur noch durch gewaltsames Zerschlagen getrennt werden.

Die Dimensionen einer solchen Muffenverbindung sind folgende:

innere Länge einer Muffe $d + 2\delta$

" Durchmesser " " $d + 4{\cdot}4\,\delta$

Metalldicke einer Muffe $1{\cdot}2\,\delta$

Taf. XXIV finden sich die gebräuchlichsten Röhrenverbindungen

Cylinderdeckel

für Dampf und Pumpencylinder. Die Metalldicke derselben richtet sich einestheils nach den innern Kräften, anderntheils nach dem Anfertigungsprozeß.

Die Metalldicke richtet sich ferner nach dem Durchmesser des Cylinders und wir dürfen die Annahme machen, daß diese δ mittelst einer Gleichung folgender Form bestimmt werden kann:

$$\delta = a + bD.$$

Bezeichnen wir die Metalldicke für Cylinder mit kleinem Durchmesser mit δ_1, für größeren Cylinder mit δ_2, so bestehen folgende Gleichungen:

$$\delta_1 = a + bD_1$$

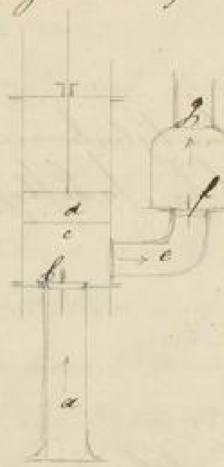
$$\delta_2 = a + bD_2$$

Man kann δ auch auf folgende Weise bestimmen. Man nimmt die Dimensionen von δ und D vieler Cylinder von verschiedener Größe, trägt die so erhaltenen D als Abszissen, die δ als Ordinaten auf, verbindet die Endpunkte sämmtlicher Ordinaten durch einen stetigen Zug und wird so auf diese Weise annähernd eine gerade Linie finden. Ferner findet man, daß δ für kleine Cylinder

groß und für große Cylinder klein ausfällt.
Am besten ist, man bestimmt die Metalldicke nach Constructionen, die sich gut bewährt haben.
Wir können $\delta = 1.5 + \frac{D}{60}$ setzen.
Was die Anzahl der Deckelschrauben betrifft, so richtet sich dieselbe nach dem Totaldruck, der gegen den Deckel ausgeübt wird. Sie ist: $3 + \frac{D}{7}$
Für die übrigen Dimensionen des Deckels, welche δ proportional sind, finden sich die Verhältnißzahlen Taf XXIV Fig 1 in den Resultaten bestimmt.

Ventile.

Sie dienen zur Communikation zwischen Röhren, Behältern, Pumpen und sind hauptsächliche Bestandtheile der letzteren.



Die Bedingungen welche wir an ein solches Ventil zu machen haben, sind:
1. Rechtzeitiges Öffnen und Schließen desselben.
2. daß dasselbe sich leicht öffnet und
3. Genauer und guter Verschluß.

Stelle nun beistehende Figur eine Druckpumpe dar, welche aus folgenden wesentlichen Bestandtheilen besteht. a dem Saugrohr, b dem Saugventil, c dem Cylinder, d Kolben, e kniförmiges Rohr, f dem Druckventil und g dem Steigrohr.
Wenn nun der Kolben aufwärts geht, so wird das Wasser in a steigen, das Ventil b in die Höhe heben und unter den Kolben dringen. Beim Herabgehen desselben schließt sich das Ventil b

und das Wasser entweicht durch e nach dem Steigrohr g, wobei das Ventil f gehoben wird.

Sei nun o die obere und u die untere Fläche des Ventils. Bezeichnen wir ferner den Druck der Wassersäule auf 1 □cm der Bodenfläche mit O, die Pressung von unten auf 1 □cm mit U, mit G das Gewicht des Ventils und ist F der Reibungswiderstand, den das Ventil verursacht, so muß für das Öffnen des Ventils folgende Gleichung bestehen.

$$Uu = Oo + G + F$$

$$\text{und } U = O\frac{o}{u} + \frac{G+F}{u}$$

G und F kommen aber gar nicht in Betracht und können daher leicht weggelassen werden.

Die Intensität des Druckes richtet sich also hauptsächlich nach den beiden Flächen des Ventils.

Wenn es sich bloß um leichtes Öffnen handelt, wären gleiche Flächen wohl am besten.

Bei guten Anordnungen haben wir folgendes:

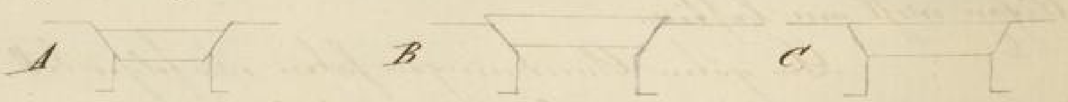
$$\frac{o}{u} = \left(\frac{D}{d}\right)^2 = \left(\frac{1.2\,d}{d}\right)^2$$

$$\frac{o}{u} = 1.44 \;;\; \frac{U}{O} = 1.44$$

D bedeutet hier den Durchmesser der obern und d den der untern Ventilfläche. Aus obiger Gleichung ist also ersichtlich, daß die beiden Durchmesser wenig von einander verschieden sind, was man bei der Construction selbstwirkender Ventile anzuwenden hat, welche durch den Druck irgend einer Flüssigkeit gehoben werden. Ventil und Ventilsitz müssen mathematisch congruent sein, daher sehr genau und vollkommen bearbeitet werden.

Das Auflager muß nun eine gewisse Breite erhalten, welche Breite aber keineswegs der Größe des Ventils proportional zu nehmen ist, sondern constant ist. Der Hub des Ventils ist nach empirischer Regel constant zu nehmen und zwar 12 cm

Verzeichnen wir nun eine Reihe Ventile nach obigen Regeln und zwar so, daß immer der kleinere Durchmesser des obersten Ventils, gleich dem größeren Durchmesser des nächstfolgenden u.s.w. und verbinden zuletzt immer je 2 aufeinanderfolgende Punkte durch eine gerade Linie, so wird uns der ganze Linienzug eine logarithmische Linie vorstellen. Ferner ist aus der Zeichnung ersichtlich, daß kleine Ventile spitzkonisch, größere hingegen flachkonisch werden und das Auflager bei großen Ventilen mehr beträgt, als bei kleinen.

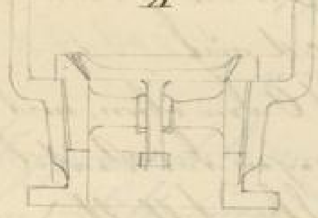


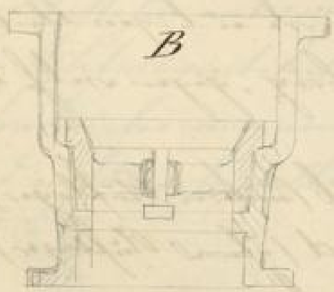
Hinsichtlich der Anfertigung von Ventil und Ventilsitzen ist noch folgendes zu beachten.
Sie dürfen nicht so gearbeitet sein, wie Fig. A zeigt, wobei der obere Theil des Ventils und der untere Theil des Ventilsitzes zerschlagen wird.
Bei der Anordnung B würde der untere Theil des Ventils und der obere Theil des Ventilsitzes zerschlagen werden.
C ist eine gute Anordnung und wird daher auch keine Deformation des Ventils als des Sitzes so leicht eintreten.

die scharfen Kanten bei den Ventilen müssen etwas abgerundet werden, damit der Sitz nicht von denselben beschädigt wird. Die Führung der Ventile ist ebenfalls von großer Wichtigkeit, namentlich bei großen Pumpwerken, Grubenpumpen etc. In Bergwerken wendet man des schmutzigen Wassers wegen keine Metallventile mehr an, sondern Klappen von Leder, das jederzeit das beste für Kaltwasserpumpenventile sein wird. Für Locomotiven hat man die sog. Kugelventile mit sphärischem Ventilsitz. Diese Kugelventile befinden sich in einem Gehäuse mit Seitenöffnungen und schließen in allen möglichen Lagen vollkommen.

Für Metallventile wäre zur Erhaltung derselben am vortheilhaftesten der Pumpe einen langsamen Gang zu geben.

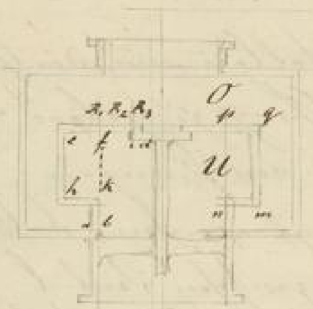
A





Bei Anordnungen von Pumpen muß dafür gesorgt werden, daß das Wasser nicht zwischen Ventil und Ventilsitz hindurchgepreßt werden muß, sondern daß es möglichst leicht sich fortbewegt. Zum Verständniß hiezu sind 2 Anordnungen A u. B angegeben, wovon die erstere dem Zwecke entspricht. Es sind die Querschnittsveränderungen bei A ~~sind~~ überall gleich; auch findet das Wasser zu beiden Seiten des Sitzes genügend Raum um sich leicht durchzudrücken. Es müssen überhaupt alle Querschnitte durch welche das Wasser sich durchdrängen muß gleich sein dem Querschnitte des Rohres.

B ist eine fehlerhafte Anordnung, weil sich hier der Ventilsitz verengert, das Wasser sich an dem Ansatze stößt und die ruhige Bewegung in eine wirbelnde sich umändert, ferner hat das Ventil zu wenig Hub und folglich das Wasser mit großer Kraft hindurchgepreßt werden muß.
Bei einer guten Construction dürfen daher solche Fehler nicht vorkommen.
Es schließen sich nun diesen einfachen Ventilen, die sog. Doppelventile an. Sie kommen meistens bei großen Pumpwerken, in Bergwerken, etc vor.



Stelle uns nun beistehende Figur ein solches Ventil dar, so müssen vor allem die Verticalabstände der Ventile und Ventilsitze gleich sein. Das Ventil sitzt bei ab und cd auf.
Wenn wir nun mit O den obern, mit U den untern Druck gegen das Ventil bezeichnen, so muß, wenn das Ventil sich öffnen soll $U > O$ sein. Vermöge der Fassung ef und hk würde es liegen bleiben. Es bleibt also nur noch die Ringfläche fc übrig, gegen welche ein Druck ausgeübt werden kann.
Heißen wir nun R_1 die Ringfläche von ab (unteres Auflager)

R_3 " " " cd (oberes Auflager)

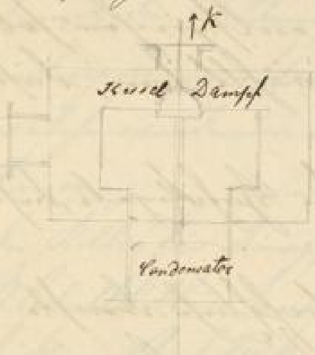
R_2 " " " f

So wird nun das Ventil mit einer Kraft $U R_2$ hinaufgepreßt, die äußern Fassungen mn und pq heben sich wiederum auf. Es bleibt also $R_1 + R_2 + R_3$. Es muß also

$U R_2$ gleich oder größer als $O (R_1 + R_2 + R_3)$.

und $U = O\left(1 + \frac{R_1 + R_3}{R_2}\right)$

Fragen wir nun, wann U ~~am kleinsten~~ ein Minimum wird, so erfolgt dies, wenn wir die Auflager sehr klein, R_2 hingegen sehr groß machen. Es haben diese Ventile den Vortheil, daß sie nicht weit gehoben werden müssen, hingegen den Nachtheil, daß sie große Kraft zur Hebung erfordern.



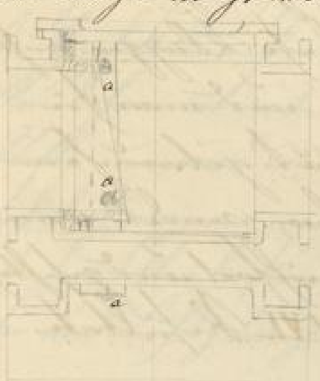
Communicationsventile für Dampfmaschinen und Condensationsapparate größerer Art sind immer meistens Doppelsitzventile. Heißen wir K die Kraft, die erforderlich ist um das Ventil zu heben, so findet folg. Gleichung statt

$$K + U R_2 = O(R_1 + R_2 + R_3)$$

$$\text{und } K = O(R_1 + R_2 + R_3) - U R_2$$

Klappenventile werden vorzugsweise zu Condensationsapparaten, Luftpumpen bei Dampfmaschinen etc angewandt und bestehen entweder aus Metall oder Leder.

Die Metallventile sind schwierig herzustellen und zu erhalten, besonders bei unreinem Wasser, wobei sie leicht undicht werden, und nicht mehr vollkommen schließen.



Die Befestigung solcher Metallventile geschieht meistens in nebenbei skizzirter Weise. Der Keil a kann an den Wänden angegossen oder mittelst Schrauben befestigt sein. Der 2te Keil b drückt nun den Ventilsitz fest gegen die Wand an.

Zeichnungen der verschiedensten Ventile sind in der Rep. Taf XXV enthalten.

Hahnen.

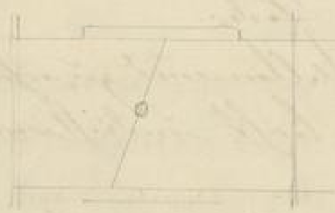
Diese bestehen meistentheils aus Messing, seltener aus Gußeisen und sind wiederum Einrichtungen, die Kommunikation zweier oder mehrerer Röhren herzustellen. Den Anforderungen, welchen ein Hahnen entsprechen soll sind: 1. die Form desselben muß so gewählt sein, daß sie sich leicht bearbeiten läßt.

2 Muß der Querschnitt der Oeffnung des Hahnkegels dieselbe Fläche darbieten, wie derjenige der Röhre.

Für kleine Röhren leisten die Hahnen vortreffliche Dienste und kommen in den mannigfaltigsten Formen vor. Abbildungen solcher Hahnen befinden sich Taf XXV Rep.

Drehklappen.

Dieselben sind vortrefflich für Rohrleitungen von großem Durchmesser, da hier nur die Reibung zu überwinden ist.



Die Form dieser Klappen ist im Allgemeinen elliptisch.

Nur schließen diese Klappen nicht ganz genau in den Endpunkten der Axe und man sie für eine sorgfältige Abschließung nicht gut gebrauchen kann. Um letztere vollkommen herzustellen, wendet man Schieber, welche durch irgend eine Vorrichtung geöffnet und geschlossen werden können. Abbildungen Taf XXVI Rep. Atlas.

Kolben.

Kommen überall vor, wo Flüssigkeiten mit ins Spiel kommen, namentlich bei Pumpen und Dampfmaschinen. Sie sind je nach dem Zweck dem sie entsprechen sollen, verschiedenartig gebildet und bestehen aus verschiedenem Material.

Damit der Kolben genau und dicht an der Cylinderwand anliegen müssen sie mit einer Liderung versehen sein, welche wiederum aus verschiedenem Material bestehen kann.

Die Kolben für Dampfmaschinen können entweder Hanf oder Metallkolben sein. Die ersteren gewähren aber keinen sehr dichten Verschluss und daher nur bei geringer Dampfspannung, bei Niederdruckmaschinen anzuwenden. Die Hanfdichtung muss öfters erneuert werden, wozu der Kolben aus dem Cylinder genommen werden muss, der Cylinderdeckel abgeschraubt u.s.w. was immer sehr misslich ist und nachtheilig auf einen Fabrikbetrieb einwirken kann.

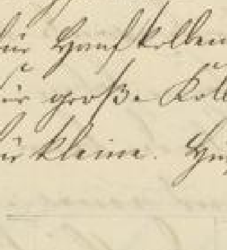
Der Vortheil den diese Kolben aber gewähren ist vor allem der weiche Gang derselben, geringe Abnützung der Cylinderwände, die zuletzt einen schönen Grad von Glätte erreichen. Ferner haben die Hanfkolben den Vortheil, dass im Fall der Cylinder beim Ausbohren etwas verspannt ~~wäre~~ oder an irgend einer Stelle uneben wäre und eine Vertiefung hätte, der Hanf sich doch immer weich und dicht an diese Stellen anschmiegt.
Diese Kolben leisten ferner vortreffliche Dienste zum Wasserpumpen und Luftpumpen und finden auch meistens hier ihre Anwendung.

Sobald nun die Dampfspannung über 1-1½ Atmosphären beträgt, fertigt man die Dichtung aus Metall an. Die Frage aus welchem Metall diese Dichtung anzufertigen ist, gibt für Kolben, deren Ringe aus Guß, Schmiedeisen, Kanonenmetall oder Gußstahl bestanden und hinsichtlich ihrer Wirkung erprobt wurden, sehr schwache Differenzen und sind in praktischer Hinsicht sehr unbedeutend.
Aus ökonomischen Gründen sind wohl die gußeisernen Kolben vorzuziehen und werden in den meisten Fällen, namentlich bei großen Kolbendurchmessern angewandt. Diese Ringe müssen aber sehr genau bearbeitet werden, ferner müssen sie eine gewisse Höhe haben, die Intensität des Druckes auf alle Dichtungstheile muß dieselbe sein, ferner ist noch von großer Wichtigkeit, daß alle Dichtungstheile freie Beweglichkeit erhalten und nicht zwischen den Kolbenkörper und Kolbendeckel eingeklemmt sind.
Die Höhe der Dichtung wird ausgedrückt durch einen Ausdruck der Form $A + BD$.
A & B werden empirisch bestimmt und wir erhalten für

Dampfkolben $4\left(1+\frac{D}{100}\right)$

für Pumpkolben $8\left(1+\frac{D}{100}\right)$

für große Kolben wird also die Dichtung etwas höher als für kleine. Hinsichtlich des Dampfverlustes, der zwischen Cylinder und Kolbendichtung entweicht:



Heißen wir den Durchmesser des Kolbens D, sei ferner ε die Weite zwischen Kolben und Cylinder, P der Druck über, p unter dem Kolben, U die Geschwindigkeit mit der der

Dampf entweicht und v die Kolbengeschwindigkeit.
So wird $\frac{D^2\pi}{4}v$ der in einer Sekunde entwickelte Dampf sein.
Ferner ist $D\pi\varepsilon$ die Fläche des Ringstückes somit
und $D\pi\varepsilon u$ die Dampfmenge, welche in einer Sekunde entweicht. Wir erhalten $\frac{D\pi\varepsilon u}{D^2\frac{\pi}{4}v} = \frac{\varepsilon u}{Dv}$.

Der Dampfverlust wird also bei großen Maschinen unbedeutender sein, als bei kleineren. Die Kolbengeschwindigkeit hat ebenfalls Einfluß auf den Dampfverlust, und es wird letzterer um so geringer sein, je größer die Geschwindigkeit des Kolbens ist.
Für sehr gut ausgeführte Maschinen wird ε sehr klein, daher man solche langsam arbeiten läßt.
Der Reibungswiderstand ist proportional dem Umfang und ist für große Maschinen klein, für kleine groß.
Wir sehen also, wenn λ den Reibungswiderstand an der Fläche, und a die Höhe des Kolbens bezeichnet.

$$\frac{2\pi D \cdot a\lambda}{\frac{D^2\pi}{4}a} = \frac{\lambda D}{D^2}$$

Für Wasserpumpen sind wohl die Lederkolben am vorteilhaftesten und entsprechen ihrem Zwecke vollkommen.
Es können diese Kolben einen kolossalen Druck aushalten, wie dies die Anwendung bei Wassersäulenmaschinen, hydraulischen Pressen etc. genügend beweisen.
Auf Taf. XXVII Kef. finden sich Kolben verschiedenster Art abgebildet.

Theorie der Verzahnung.

Diese Aufgabe läßt vom geometrischen Standpunkte aus betrachtet unzählige Lösungen zu, vom praktischen aber bieten sich uns nur sehr wenige dar, welche den Anforderungen genügend entsprechen.

Die gewöhnliche Anforderung, welche man an Zahnräder macht, ist, daß das Verhältniß der Winkelgeschwindigkeit constant ist, also in jedem Augenblicke denselben Werth hat.

Wir können uns auch die Aufgabe stellen, daß sich das Verhältniß der Winkelgeschwindigkeit nach einem vorgeschriebenen Gesetze ändert.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall, wobei wir drei Hauptfälle zu unterscheiden haben.

1. die Axen können parallel sein.
2. die Axen können sich schneiden und einen gewissen Winkel miteinander bilden.
3. die Axen können irgend welche Lage im Raume gegeneinander einnehmen.

Im ersten Falle wird die Grundform der Räder cylindrisch, weßhalb sie auch Cylinder-Räder heißen, beim zweiten Falle ist die Grundform ein Kegel und wir haben die conischen oder Kegelräder, beim dritten erhalten die beiden Grundformen, je nach ihrer Lage paraboloidische, oder hyperboloidische.

1. Verzahnung für parallele Axen.

Dieses allgemeine Verfahren durch welches wir Zahnformen entstehen lassen können, kann auf zahllose Weise gelöst werden.

die Grundanforderung ist, daß das Verhältniß der Winkelgeschwindigkeit constant bleibt, welches so lange gilt, als die Räder noch rund bleiben und nicht aufeinander schleifen. In praktischer Hinsicht soll keine Deformirung eintreten und die Reibung gering sein. Wenn wir diese Umstände nicht berücksichtigen, so wäre jede der nachher beschriebenen Verzahnungsarten gut.

Was die Abnützung anbelangt, so gibt es 2 Hauptverzahnungsarten; nämlich 1 das Rollen der Zähne, 2tens das aneinandergleiten der Zähne. Bei der ersten Verzahnungsart wird fast keine Reibung verursacht, ist aber nicht zu gebrauchen, da die Intensität des Druckes in einem Punkte sehr groß ist, weil sich die Zähne nur in einem Punkte berühren und sich sehr bald abnützen würden. Diese Verzahnung würde für ~~Rech~~nungsmaschinen sehr gute Dienste leisten und eine vorzügliche Präcisionsverzahnung abgeben.

Bei der 2ten Verzahnung fällt die Intensität des Druckes geringer aus, weil hier größere Flächen in Berührung kommen, es wird daher auch die Abnützung eine geringere sein.

Man heißt diese im Gegensatz zur ersteren Kraftverzahnung, weil hier überhaupt große Kräfte transmittirt werden. Es wird immer günstig sein, wenn eine aequidistante Abnützung stattfindet, was nur dann erreicht wird, wenn sich die Zähne wechselseitig constant greifen.

a  b

a wäre hier eine richtige Abnützung, während b nur theilweise abgenützt ist.

Gehen wir nun zu den speziellen Verzahnungsarten über und zwar zunächst zur

Triebstockverzahnung

Wir verfahren hier auf folgende Weise: Wir nehmen die Form der Zähne des einen Rades an und bestimmen darnach die Zahnform des 2ten Rades. Heißen wir die beiden sich berühren den Kreise der beiden Räder Grund oder Theilkreise und sind r und R ihre Radien, so werden sich dieselben umgekehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Räder verhalten. Wir nehmen nun in der Peripherie des Kreises vom Radius r einen Punkt d an und nehmen weiter an, daß dieser Stift d ungemeine Festigkeit darbiete und fragen nun was für eine Form der Zahn des andern Rades erhalten muß.

Für die Zahnform des 2ten Rades wollen wir Epicycloide annehmen und zwar so, daß der Kreis r auf R fortrollt. Für die Richtigkeit dieser Annahme müssen wir nachweisen können, daß der Weg, den ein Punkt auf dem Umfange des Kreises r zurücklegt, gleich ist dem Weg, den ein Punkt auf dem Umfange des Kreises R zurücklegt.

Bewegen wir den Kreis R von d nach b, so wird die Zahnform eine andere Stellung einnehmen und der Stift auf dem Umfang von r wird in die Lage a gekommen sein.

Die Richtigkeit findet statt, wenn wir beweisen können,

daß $da = db$

der dünne Stift entspricht aber den praktischen Anforderungen nicht und unsre Annahme wäre daher nicht realisirbar.

Wir machen daher den Stift von endlicher Größe und aus festem Material. Wir heißen alsdann diesen Stab Triebstock. Wir erhalten die Zahnform für das andere Rad, indem wir den Halbmesser des Triebstocks zu beiden Seiten von b auftragen ~~und~~ eine equidistante zur Epicycloide einerseits, und eine symmetrische Linie in Bezug zur [illegible] verzeichnen. Diese Verzahnungsart wäre geometrisch richtig, allein nehmen wir an das große Rad würde gewaltsam getrieben und es setze das kleinere einen bedeutenden Widerstand entgegen, so werden sich Triebstock und Zähne sehr bald abnützen, weil die Pressungsintensität variabel ist.

Heißen wir P die Pressung welche auf die Zähne einwirkt und normal zur Zahnfläche steht, fällen ferner ein Perpendikel p von C aus auf P, so wird die Länge dieses Perpendikels je nach der Stellung der Zähne verschieden sein, und es nimmt die Länge ab, je weiter sich P von der Centrallinie entfernt.

Ist nun M das Moment, welches den Zahn abzutreiben strebt, so haben wir:

$$M = p \cdot P$$

$$\text{und } P = \frac{M}{p}$$

$\frac{M}{p}$ ist nicht constant, M wohl; allein p richtet sich wie oben bemerkt nach der Stellung der Zähne die relative Geschwindigkeit mit welcher sich der Zahn auf dem Triebstock hinbewegt, wird ein Ausschleifen des Zahnes zur Folge haben, der Triebstock kommt hingegen nur mit einer sehr kleinen Fläche in Contact, was ein häufiges Abnützen herbeiführt. Man wendet diese Verzahnung wegen der angeführten Nachtheile sehr selten oder überhaupt gar nicht mehr an. Zähne und Triebstock erhalten ungefähr beistehende Form bei starker Abnützung.

Epycycloidenverzahnung.

Wir verzeichnen vor allem die beiden Grundkreise, nehmen bei dem einen Rad einen radialen Einschnitt als Grundform an und fragen, was für eine Zahnform das andere Rad bekommt, wenn beide Räder richtig aufeinander einwirken sollen. Ich erhalte für die Zahnform des Rades R

diejenige Epycycloide, welche entsteht, wenn ich $\frac{r}{2}$ auf R rollen lasse, die entsprechende Zahnform des Rades r ist der radiale Einschnitt.

Denken wir uns den Zahn des ~~Rade~~ R in die Position bd gerückt und dass er fortwährend auf den radialen Einschnitt eingewirkt hat, so finden wir die Richtung des letzteren, in-denn wir an bd eine Tangente ziehen, welche nichts anders ist, als die Verbindungslinie von b mit o.

Es muß sein $\widehat{ab} = \widehat{ad}$
und $\widehat{ab} = \widehat{ac}$
folglich auch $\widehat{ad} = \widehat{ac}$

Machen wir nun in R einen radialen Einschnitt und fragen nach der Zahnform von r.
Wir erhalten als Zahnform für r diejenige Epicycloide, welche entsteht, indem wir einen Kreis vom Halbmesser $\frac{R}{2}$ auf r rollen lassen.
Denken wir uns nun a n' auch an einander, so wird an auf eine andere Stelle kommen und zwar erhalten wir den geradlinigen Einschnitt, indem wir b_1 mit O, verbinden.

Es ist hier $\widehat{ad_1} = \widehat{ab_1}$,
$\widehat{ab_1} = \widehat{ac_1}$,
und folglich $\widehat{ad_1} = \widehat{ac_1}$,

Beide Zahnformen können eine richtige Einwirkung hervorbringen und wirken durch 2 Theilungen richtig hindurch.
In rein geometrischer Hinsicht, da keine Abnützung in Anschlag zu bringen ist, wäre es genügend, wenn nur ein Zahnpaar in Contact ist.
Besser ist es, wenn 2 Zahnpaare in Contact kommen, da die Summe der Pressungen auf mehrere weit geringer ist; auch findet hier bei weitem keine so starke Abnützung statt, was überhaupt in technischer Hinsicht wohl zu berücksichtigen ist.
Stellen wir uns nun die Frage in Betreff der Deformierung der Zähne. Wir fällen auf die Normale L vom Mittelpunkte O aus eine Senkrechte und bezeichnen mit M das Moment

der Kraft, welche das Rad dreht.

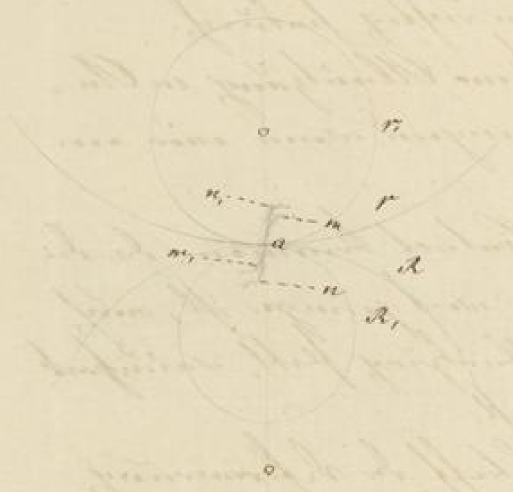
So haben wir $M = P\,p$.

und $P = \frac{M}{p}$.

Es ist nach der Zeichnung leicht einzusehen, daß p variabel. Auch befriedigt diese Verzahnung nicht ganz den praktischen Anforderungen hinsichtlich der Abnützung; denn die Linie der Abnützung weicht zu sehr von der ursprünglichen Form ab. Ferner erfordern diese Räder eine sehr exacte Aufstellung und sobald die Theilkreise sich nicht genau berühren können diese Räder für außerordentliche Geschwindigkeiten nicht mehr gut angewandt werden.

Epycycloiden und Hypocycloiden-Verzahnung.

Nehmen wir für das Rad R die Zahnform n a m an und ist $n_1 a m_1$ ein Zahn des Rades r, so ist am ein epycycloidischer, an ein hypocycloidischer Bogen; der Halbmesser des Grundkreises für am ist R, Halbmesser des Grundkreises für an ist r; die Halbmesser der Erzeugungskreise für am und an sind gleich oder kleiner als $\frac{1}{2}$ r.



am, epycycloidischer, an, hypocycloidischer Bogen. der Halbmesser des Grundkreises für am, ist r, Halbmesser des Grundkreises für an, ist R. die Halbmesser der E-

zeugungskreise für am, und an' sind gleich oder klei-
ner als $\frac{1}{2}$ R zu nehmen.
Entspricht jeder dieser 4 Bogen der Wälzung auf einem Theilungsbogen, für starke Uebersetzungen eignen sich diese Zahnformen vortrefflich.

Evolventen-Verzahnung.

Verzeichnen wir zwei Kreise R, und r, deren Theilrisse sich nicht berühren, ihre Radien sich aber verkehrt, wie ihre Winkelgeschwindigkeiten verhalten.

Ziehen wir an beide Kreise eine gemeinschaftliche Tangente f g, so wird die Centrallinie in einem Punkte a geschnitten und es ist leicht zu beweisen, daß o a und O a die Radien der beiden Theilkreise r und R sind, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke o a f und O a g.

Wir haben also $\overline{oa} = r$
und $\overline{Oa} = R$.

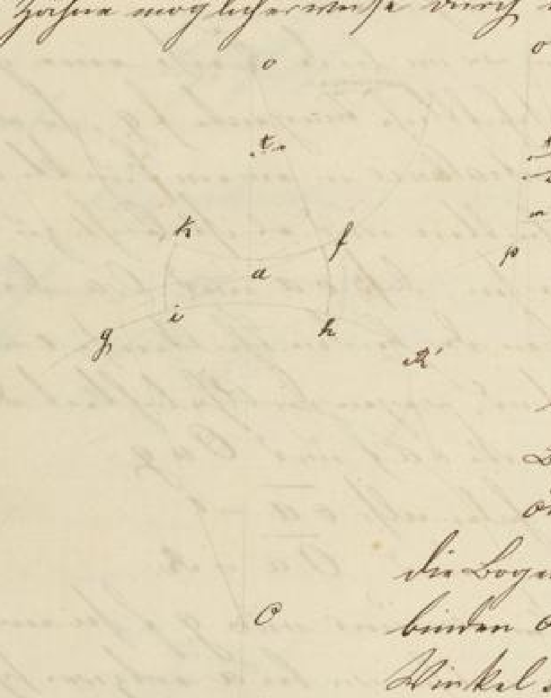
Denken wir uns nun g f sei ein Faden, welchen wir bei a entzwei schneiden. Wir befestigen nun das Fadenende in g und wickeln g a auf R' ab, wodurch wir das Evolventenstück c a b erhalten. Das Fadenstück f a, befestigen wir mit dem einen Ende in f und wickeln es auf r' ab, wodurch das Evolventenstück d a e beschrieben wird. Beide Evolventen berühren sich in dem Punkte a die beiden Evolventenstücke geben richtige Zahnformen für die Räder denken wir uns beide Formen realisirt, den Zahn bac in die Position $b'a'c'$ gerückt, so wird gf immer noch ~~Tan-~~ ~~gente~~ Normale zur Profilcurve sein

damit jeder Punkt den gleichen Weg in der Peripherie der Theilkreise zurücklegt, muss sein

$$bb' = aa'$$

und ebenso $cc' = aa'$

fa ist eine Zahntheilung, wenn die Bewegung eine Zahntheilung vor der Centrallinie beginnen soll und es können 2 Zähne möglicherweise durch einen Raum fg wirken.



Wenn nun verlangt wird, dass ein Zahnpaar durch 2 Theilungen richtig eingreift und wir den Theilungswinkel mit t bezeichnen, so beschreiben wir mit beliebigem Halbmesser einen Bogen mn, errichten in n auf on eine Senkrechte np und tragen die Bogenlänge mn auf np ab, verbinden o mit p und erhalten so den Winkel s. Nun suchen wir auf der Centrallinie Oo den Pkt a, in welchem die Theilkreise sich berühren, machen $aof = \angle s$, fällen von a aus auf of eine Senkrechte und verlängern dieselbe und ziehen von O aus auf ~~ersteren~~ diese eine Parallele mit of, wodurch wir den Pkt g erhalten.

Es ist hier $af = ai$ gleich einer Theilung. Nun sind noch die Profilcurven ik und fh zu construiren, welche die gesuchten Zahnformen geben.

Bezeichnen wir hier wiederum mit M das st. Moment der Kraft, welche das Rad treibt, so haben wir

$$\frac{M}{R_1} = P$$

R_1 ist hier constant und nur die relative Geschwindigkeit mit welcher die Zähne aufeinander gleiten ist etwas variabel. Die Zahnformen sind also hinsichtlich der Abnützung sehr günstig, und die Linie der Abnützung beinahe aequidistant zur ursprünglichen Form.
Die großen Vortheile dieser Verzahnungsart sind in den Resultaten Seite 12 angegeben, daher man auch dieselbe seit neuerer Zeit in der Praxis mit Erfolg anwendet.

Allgemeine Verzahnung.

Machen wir in das kleine Rad einen Einschnitt und nehmen eine ganz willkürliche Zahnform an und fragen was für eine Zahnform das andere Rad bekommt.

In der verzeichneten Curve nehmen wir einen Punkt n an und ziehen durch denselben eine Normale zur Curve, diese Normale verlängert, schneidet den Kreis r in dem Punkte m.
Nun schneiden wir auf R ein Bogenstück $\overset{\frown}{am'} = \overset{\frown}{am}$ ab. Verbinden m' mit O und tragen an $m'O$ von m' aus den $\angle aOm = \varphi$
Auf die Verlängerung von fm' ~~schneidet~~ tragen wir $\overline{m'n'} = \overline{mn}$ auf und erhalten so einen Punkt für die Zahnform des Rades R.

Indem wir diese Construction mehrere male wiederholen, erhalten wir eine Reihe Punkte, welche letztere durch eine Curve verbunden die richtige Zahnform für das 2te Rad geben.
Es müssen die Zähne wenn die Räder aufeinander rollen immer in Contact bleiben.
Verschieben wir die Räder so, dass m und m' nach a kommen, so berühren sich die Punkte n und n' der beiden Zähne und die Normalen fallen in diesem Punkte zusammen.

A r R

Nehmen wir ganz allgemein r und R als Theilkreise zweier Räder an und zur Zahnform eine ganz beliebige Curve A. R und r bewegen wir gleichsam als ob sie aufeinander rollen, A bewegen wir nach irgend einem Gesetz, alsdann wird A seine Lage successive gegen R und ebenso ihre relative Lage gegen r fort und fort ändern.
Es wird also in Bezug auf R sowohl als auch auf r eine Einhüllungslinie bilden.

Kreisbogen - Verzahnung

Rundet man die Zähne beider Räder mittelst Kreisbogen, so wird niemals eine richtige Zahnform herausbekommen, wenn man jedoch die Halbmesser dieser Kreisbogen geschickt wählt, so kommt eine annähernd gute Form heraus, welche grossen Vortheil im Zeichnen gewährt.
Angenommen wir gingen von der Epicycloidenverzahnung aus, würden den äusseren Theil der Zähne nach passenden Kreisbogen

statt der Epicycloide ab und zwischen den inneren Theil des Zahnes mit an-
deren Einschnitt.

Wir müssen die Kreisbogen so wählen, daß der Fehler ein Mini-
mum wird.

Zu dem Ende suchen wir aus der Gleichung der Epicycloide den Aus-
druck für den Krümmungshalbmesser, der irgend einem Punkt
der Epicycloide entspricht, nehmen dann den wahren mittleren Werth
des Krümmungshalbmessers und nehmen denselben als Halbmes-
ser des zu verzeichnenden Kreisbogens, so wird alsdann diese
Zahnform sehr wenig von der wahren Epicycloide abweichen.

Es wird also sein $\rho = \text{funct}(\varphi)$
und als ρ zu bestimmen von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \alpha$
Bezeichnet m den mittleren Werth
dieses Krümmungshalbmessers, so ist

$$\rho_m = \frac{\int_0^\alpha \rho\, d\varphi}{\alpha} = \text{funct}\left(\alpha, \frac{R}{2}\right)$$

Man erhält hier für sehr complizirte Aus-
drücke, welche man annähernd ändern kann, weil der Winkel
α selten mehr als eine Theilung beträgt und der Fehler sehr klein
ausfällt. Die Zahnformen sind sehr gut; allein sobald es sich um
sehr rasche Bewegung handelt wird man immer die exacteste
Verzahnungsart vorziehen.

Verzeichnung der Zähne mittelst Krümmungshalbmesser.

Wir schneiden auf den Kreisen R, $\frac{1}{2}R$, r und $\frac{1}{2}r$ am
wahre Zahntheilung ab, machen also $AM = aN = t$ und eben-
so $am = an = t$.

Es wird dann der Krümmungshalbmesser ρ für R:
für $MO = NO$

der Abrundungshalbmesser für r ist $\overline{mo} - \overline{no}$
der Bogen MNP ist aus O beschrieben
der Bogen mnp aus o.
Um den radialen Einschnitt für R zu erhalten, ziehen wir eine Tangente an MNP, d.h. wir verbinden P mit C
Ganz ebenso verfahren wir mit r indem wir an $\overset{\frown}{mn}p$ eine Tangente ziehen, also p mit c verbinden. Je nach den Verh. sind für versch. Übersetzungsverhältnisse die Abrundungshalbmesser für R u. r bestimmt

Verzahnung für Kegelräder.

Diese Verzahnung kann auch ganz der Stirnräder zurückgeführt werden. i die Übersetzungszahl sagt aus, wievielmal ox sich umdreht, wenn oX eine Umdrehung macht

Wir tragen nun auf die schnelle gehende Axe ox eine beliebige Länge ab auf, auf oX dieselbe Länge i mal.
Nun ziehen wir durch d eine Parallele mit oX, durch b eine Parallele mit ox, diese Parallelen werden sich in einem Punkt e schneiden, welchen Pkt e wir mit O verbinden.

Nun nehmen wir einen Halbmesser für beide Räder an, denken uns beide Dreiecke um ihre Axen gedreht, so entstehen die beiden Kegel, Grundkegel genannt. Auf e errichten wir eine Senkrechte, verlängern dieselbe bis dieselbe beide Axen schneidet und erhalten so die beiden Punkte h und k, die Spitzen der Ergänzungskegel. Denken wir uns weiter beide Kegel realisirt und mit

Zähnen versehen, so werden letztere gerade so verzeichnet werden müssen, wie die Zähne der Stirnräder, nur sind hier statt der Radien der Theilrisse, die Radien he und ke der Ergänzungskegel zu nehmen. Wählen wir z. B. die Kreisbogenverzahnung, so wird die Krümmung des Zahnes des größern Kegelrades schwächer sein als die des größern der Stirnräder, dagegen fällt aber die Zahnkrümmung des kleinen Kegelrades stärker aus, als die der entsprechenden Stirnräder. Es ist dieser Satz richtig unter der Voraussetzung, daß beide Räder gleiche Halbmesser und Uebersetzungsverhältnisse haben. Zuweilen wird die Construction ~~[illegible]~~ mißlich, wenn die Erzeugende des Ergänzungskegels die Axe des Grundkegels nicht mehr auf der Zeichenfläche trifft und man die Länge derselben mittelst Rechnung sucht.

Wir haben $\frac{me}{ne} = i \quad\Big|\quad i = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

$$\frac{eh}{ek} = n \quad\Big|\quad n = \frac{tg\,\beta}{tg\,\gamma} = \frac{cotg\,\gamma}{cotg\,\beta}$$

Nun ist aber $\sin\beta = \sin(\alpha-\gamma)$

und $i = \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\gamma}$

$$i = \frac{\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\,\mathrm{cotg}\,\gamma - \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\mathrm{cotg}\,\gamma = \frac{i + \cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \frac{1}{i} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}$$

$$\mathrm{cotg}\,\beta = \frac{\frac{1}{i} + \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$n = \frac{\frac{i+\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\frac{1}{i}+\cos\alpha}{\sin\alpha}} = i\,\frac{i+\cos\alpha}{1+i\cos\alpha}$$

Für $\alpha = 90^0$ wird $n = i^2$

Die Schraube ohne Ende

Denken wir uns eine Schraubenlinie und führen einen Stift a, während wir dieselbe drehen, längs einer horizontalen Axe, so wird der Stift von der Stelle weichen und zwar bei einer Umdrehung der Schraube wird er sich in a' befinden. Die Höhe des Schraubenganges muss gleich einer Zahntheilung sein. Die Anzahl der Zähne wird schließlich durch die Uebersetzungszahl bestimmt.

Für sehr starke Uebersetzungen sind diese Schrauben vortrefflich; allein es wirkt die Reibung sehr nachtheilig auf die Bewegung ein. Wenn z. B. das Rad um eine Theilung fortgehen soll, so muss der totale Reibungswiderstand durch den Umfang der ganzen Schraube überwunden werden.

Wir haben daher einen ungeheuren Kraftverlust und eine sehr starke Abnützung, weshalb der Mechanismus bloß als Bewegungsmechanismus gebraucht werden kann, wozu er sich auch vortrefflich eignet.

Wird von einem Schraubenmechanismus eine höchst vollkommene

Bewegung verlangt, so müssen die Zähne in das Rad eingeschnitten werden und zwar kann man dabei verfahren, wie folgt:

Es sei A eine cylindrische Scheibe oder der Radkörper, in welchen die Zähne eingeschnitten werden sollen, ferner seien B und C 2 Schrauben, wovon eine aus Schmiedeisen, die andere aus Gußstahl bestünde, beide aber sonst ganz identisch seien.

An der Oberfläche der Stahlschraube C bringen wir nun Schneiden an, machen es zum Werkzeug, so daß selbiges in das Material von A gut eingreift. Nun legen wir C an A an, bringe die Axen von C und A in Verbindung und bringen eine Übersetzung derart an, daß wenn die Schraube eine Umdrehung macht, das Rad die derselben entsprechenden Umdrehungen.

Indem C noch weiter mit einem Mechanismus versehen ist, der dieselbe fortwährend gegen A hinpreßt, bekommen die Zähne ihre erforderlichen Dimensionen und es müssen dieselben wenn sie ausgeschnitten sind vollkommen in die Schraube B passen. Die Zahnformen des Rades sind alsdann die Einhüllungsflächen, welche die Schraubengewinde durch ihre relative Bewegung gegen die Scheibe beschreiben.