# Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel

Noether, Fritz

Leipzig, 1912

[Anhang]

urn:nbn:de:bsz:31-272814

## Anhang 1.

### Berechnung der Gleichung (13) in § 2.

Nach (11) ist:

$$(11)\qquad DD\psi_1 = \frac{\sigma}{\mu}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\frac{\partial D\psi_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi_0}{\partial r}\frac{\partial D\psi_0}{\partial x} - \frac{2}{r}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} D\psi_0\right]$$

Da $x = R\cos\vartheta$; $r = R\sin\vartheta$, so folgt hieraus:

$$DD\psi_1 = \frac{\sigma}{\mu}\left[\frac{1}{R^2\sin\vartheta}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\frac{\partial D\psi_0}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\psi_0}{\partial\vartheta}\frac{\partial D\psi_0}{\partial R}\right) - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_0}{\partial x} D\psi_0\right]$$

wobei

$$\psi_0 = \frac{U}{4}\sin^2\vartheta\left(-2R^2 + 3aR - \frac{a^3}{R}\right) = \frac{U}{4}r^2\left(-2 + \frac{3a}{R} - \frac{a^3}{R^3}\right).$$

$$D\psi_0 = -\frac{3}{2}U\frac{a}{R}\sin^2\vartheta = -\frac{3}{2}U\frac{ar^2}{R^3},$$

Also

$$\frac{1}{R^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\frac{\partial D\psi_0}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\psi_0}{\partial\vartheta}\frac{\partial D\psi_0}{\partial R}\right) =$$

$$= \frac{1}{R^2\sin^2\vartheta}\begin{vmatrix} \frac{U}{4}\sin^2\vartheta\left(-4R + 3a + \frac{a^3}{R^2}\right) & +\frac{3}{2}U\frac{a}{R^2}\sin^2\vartheta \\ \frac{U}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\left(-2R^2 + 3aR - \frac{a^3}{R}\right) & -3U\frac{a}{R}\sin\vartheta\cos\vartheta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{4}U^2\sin^2\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{6a}{R^2} - \frac{6a^2}{R^3}\right).$$

Ferner:

$$-\frac{2}{r^2}D\psi_0\frac{\partial\psi_0}{\partial x} = \frac{3Ua}{R^3}\frac{U}{4}r^2\left(-\frac{3ax}{R^3} + \frac{3a^3x}{R^5}\right)$$

$$= \frac{2}{4}U^2\sin^2\vartheta\cos\vartheta\left(-\frac{3a^2}{R^3} + \frac{3a^4}{R^5}\right).$$

Daher

$$DD(\psi_1) = \frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu}U^2\left(\frac{2a}{R^2} - \frac{3a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5}\right)\sin^2\vartheta\cos\vartheta.$$

## Anhang 2.

### Berechnung der Gleichung (30) in § 6.

Wir haben hier:

$$\psi_0 = \frac{A^2U}{2}\left(\frac{A+x}{\varrho} + \frac{A-x}{\varrho_1}\right) + \frac{U}{4}\left(3aR - \frac{a^3}{R}\right)\sin^2\vartheta$$

und wie oben:

$$D\psi_0 = -\frac{3}{2}U\frac{a}{R}\sin^2\vartheta = -\frac{3}{2}U\frac{ar^2}{R^3}.$$

Gegen die Formeln im Anhang (1) ist hier nur das Glied $-\frac{UR^2 \sin^2\vartheta}{2}$ von $\psi_0$ in das obige erste Glied von $\psi_0$ abgeändert, während $D\psi_0$ unverändert geblieben ist. Wir haben daher hier nur noch neu zu berechnen: Von dem Glied $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial D\psi_0}{\partial r} - \frac{\partial\psi_0}{\partial r}\frac{\partial D\psi_0}{\partial x}\right)$ den Anteil:

$$-\frac{3}{4}\frac{aA^2U^2}{r}\begin{vmatrix} \left[\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} - \left(\frac{(A+x)^2}{\varrho^3} - \frac{(A-x)^2}{\varrho_1^3}\right)\right] & -\frac{3r^2x}{R^5} \\ \left[-\frac{r(A+x)}{\varrho^3} + -\frac{r(A-x)}{\varrho_1^3}\right] & \left(-\frac{3r^3}{R^5} + \frac{2r}{R^3}\right) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{3}{4}aA^2U^2r^2\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho_1^3}\right) & -\frac{3x}{R^5} \\ \left(-\frac{A+x}{\varrho^3} - \frac{A-x}{\varrho_1^3}\right) & \frac{2x^2-r^2}{R^5} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{3}{4}aA^2U^2\frac{r^2}{R^5}\left(\frac{-x^2-r^2-3Ax}{\varrho^3} + \frac{x^2+r^2-3Ax}{\varrho_1^3}\right)$$

$$= -\frac{3}{4}aA^2U^2\frac{r^2}{R^5}\left(-\frac{\varrho^2-2Ax-A^2+3Ax}{\varrho^3} + \frac{\varrho_1^2+2Ax-A^2-3Ax}{\varrho_1^3}\right)$$

$$= \frac{3}{4}aA^2U^2\frac{r^2}{R^5}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} - \frac{A^2-Ax}{\varrho^3} + \frac{A^2+Ax}{\varrho_1^3}\right).$$

Ferner erhalten wir zu dem Glied $-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}D\psi_0$ den Anteil:

$$-\frac{2A^2U}{2r^2}\left(\frac{r^2}{\varrho^3} - \frac{r^2}{\varrho_1^3}\right)\cdot\ -\frac{3}{2}Ua\frac{r^2}{R^3}$$

$$= \frac{3}{2}aA^2U^2\frac{r^2}{R^5}\left(\frac{\varrho^2-2Ax-A^2}{\varrho^3} - \frac{\varrho_1^2+2Ax-A^2}{\varrho_1^3}\right)$$

$$= \frac{3}{2}aA^2U^2\frac{r^2}{R^5}\left[\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} - \frac{A^2+2Ax}{\varrho^3} + \frac{A^2-2Ax}{\varrho_1^3}\right].$$

Die beiden Anteile ergeben zusammen:

$$\frac{3}{4}aA^2U^3\frac{r^2}{R^5}\left[3\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right) - \frac{3A^2+3Ax}{\varrho^3} + \frac{3A^2-3Ax}{\varrho_1^3}\right].$$

Dieser Teil entspricht dem Glied $\frac{9}{2}U^2\frac{a}{R^2}\sin^2\vartheta\cos\vartheta$ in der Schlußgleichung von Anhang 1. Wir erhalten also hier im ganzen:

$$(30)\qquad DD\psi_1 = \frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu}aU^2\left\{\frac{A^2r^2}{R^5}\left[\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} - A\left(\frac{A+x}{\varrho^3} - \frac{A-x}{\varrho_1^3}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \left(-\frac{3a}{R^3} + \frac{a^3}{R^5}\right)\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right\}.$$

## Anhang 3.

### Entwicklung der Gl. (34) für kleine Werte von $\frac{R}{A}$.

Zur Entwicklung von $f(x, y, z)$ nach Potenzen von $\frac{R}{A}$ ist die Form (34) geeigneter als (34a): Wir haben:

$$\varrho = \sqrt{R^2 + A^2 + 2RA\cos\vartheta} = A\sqrt{1 + \left(\frac{R}{A}\right)^2 + 2\frac{R}{A}\cos\vartheta}$$

$$\varrho_1 = \sqrt{R^2 + A^2 - 2RA\cos\vartheta} = A\sqrt{1 + \left(\frac{R}{A}\right)^2 - 2\frac{R}{A}\cos\vartheta}.$$

Daher für kleine Werte von $\frac{R}{A}$:

$$\frac{\varrho}{R} = \frac{A}{R}\left(1 + \frac{R}{A}\cos\vartheta + \frac{R^2}{A^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\vartheta\right)\right. \\ \left. + \frac{R^3}{A^3}\left(-\frac{1}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2}\cos^3\vartheta\right) + \cdots\right.$$

$$\frac{\varrho_1}{R} = \frac{A}{R}\left(1 - \frac{R}{A}\cos\vartheta + \frac{R^2}{A^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\vartheta\right)\right. \\ \left. + \frac{R^3}{A^3}\left(+\frac{1}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}\cos^3\vartheta\right) + \cdots\right.$$

$$\frac{\varrho^3}{R^3} = \frac{A^3}{R^3}\left(1 + \frac{3R}{A}\cos\vartheta + \frac{R^2}{A^2}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\vartheta\right)\right. \\ \left. + \frac{R^3}{A^3}\left(\frac{3}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}\cos^3\vartheta\right) + \cdots\right.$$

$$\frac{\varrho_1^3}{R^3} = \frac{A^3}{R^3}\left(1 - \frac{3R}{A}\cos\vartheta + \frac{R^2}{A^2}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\vartheta\right)\right. \\ \left. + \frac{R^3}{A^3}\left(-\frac{3}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2}\cos^3\vartheta\right) + \cdots\right.$$

Also $\left(\frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3}\frac{\varrho^3}{R^3} - \frac{2}{3}\right)$

$$= -\frac{1}{3}\frac{A^3}{R^3} - \frac{A^2}{R^2}\cos\vartheta + \frac{A}{R}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\vartheta\right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{6}\cos^3\vartheta\right) + \cdots$$

$$\left(\frac{\varrho_1}{R} - \frac{1}{3}\frac{\varrho_1^3}{R^3} - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{A^3}{R^3} + \frac{A^2}{R^2}\cos\vartheta + \frac{A}{R}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\vartheta\right) + \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{6}\cos^3\vartheta\right) + \cdots$$

Ferner ist noch:

$$\frac{R}{\varrho} = \frac{R}{A}\left(1 - \frac{R}{A}\cos\vartheta + \frac{R^2}{A^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\vartheta\right) + \cdots\right.$$

$$\frac{R}{\varrho_1} = \frac{R}{A}\left(1 + \frac{R}{A}\cos\vartheta + \frac{R^2}{A^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\vartheta\right) + \cdots\right.$$

Also:

$$\frac{\varrho^3}{R^3} - \frac{6\varrho}{R} + 8 - \frac{3R}{\varrho} =$$

$$= \frac{A^3}{R^3} + \frac{3A^2}{R^2}\cos\vartheta + \frac{A}{R}\left(-\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\vartheta\right) + \left(8 - \frac{9}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}\cos^3\vartheta\right) + \cdots$$

$$\frac{\varrho_1^3}{R^3} - \frac{6\varrho_1}{R} + 8 - \frac{3R}{\varrho_1} =$$

$$= \frac{A^3}{R^3} - \frac{3A^2}{R^2}\cos\vartheta + \frac{A}{R}\left(-\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\vartheta\right) + \left(8 + \frac{9}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2}\cos^3\vartheta\right) + \cdots$$

Ferner ist:

$$\frac{1}{A^2(A+2x)^2} = \frac{1}{A^4\left(1 + \frac{2R}{A}\cos\vartheta\right)^2}$$

$$= \frac{1}{A^4}\left(1 - \frac{4R}{A}\cos\vartheta + \frac{12R^2}{A^2}\cos^2\vartheta - \frac{32R^3}{A^3}\cos^3\vartheta \ldots\right)$$

$$\frac{1}{A^2(A-2x)^2} = \frac{1}{A^4}\left(1 + \frac{4R}{A}\cos\vartheta + \frac{12R^2}{A^2}\cos^2\vartheta + \frac{32R^3}{A^3}\cos^3\vartheta \ldots\right)$$

$$\frac{A+x}{3A^2(A+2x)^3} = \frac{1}{3A^4}\left(1 + \frac{R}{A}\cos\vartheta\right)\left(1 - \frac{6R}{A}\cos\vartheta + \frac{24R^2}{A^2}\cos^2\vartheta - \frac{80R^3}{A^3}\cos^3\vartheta \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{3A^4}\left(1 - \frac{5R}{A}\cos\vartheta + \frac{18R^2}{A^2}\cos^2\vartheta - \frac{56R^3}{A^3}\cos^3\vartheta \ldots\right)$$

Ebenso:

$$\frac{A-x}{3A^2(A-2x)^3} = \frac{1}{3A^4}\left(1 + \frac{5R}{A}\cos\vartheta + \frac{18R^2}{A^2}\cos^2\vartheta + \frac{56R^3}{A^3}\cos^3\vartheta \ldots\right)$$

Also wird:

$$\frac{1}{A^2(A+2x)^2}\left(\frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3}\frac{\varrho^3}{R^3} - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{A^2(A-2x)^2}\left(\frac{\varrho_1}{R} - \frac{1}{3}\frac{\varrho_1^3}{R^3} - \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\frac{\cos\vartheta}{R^2A^2} + \frac{1}{A^4}\left(-3\cos\vartheta + \frac{5}{3}\cos^3\vartheta\right) + \cdots$$

$$\frac{A+x}{3A^2(A+2x)^3}\left(2\frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3}\frac{\varrho^3}{R^3} - \frac{8}{3} + \frac{R}{\varrho}\right) + \frac{A-x}{3A^2(A-2x)^3}\left(2\frac{\varrho_1}{R} - \frac{1}{3}\frac{\varrho_1^3}{R^3} - \frac{8}{3} + \frac{R}{\varrho_1}\right)$$

$$= -\frac{4}{3}\frac{\cos\vartheta}{A^2R^2} + \frac{1}{A^4}\left(12\cos\vartheta - \frac{20}{3}\cos^3\vartheta\right) + \cdots$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zusammen nach (34):

$$f(x, y, z) = \frac{9}{4}\frac{aU^2\sigma}{\mu}\left[-\frac{2}{3}\frac{\cos\vartheta}{R^2} + \frac{1}{A^2}(9\cos\vartheta - 5\cos^3\vartheta) + \cdots\right]$$

$$= \frac{aU^2\sigma}{\mu}\left[-\frac{3}{2}\frac{\cos\vartheta}{R^2} + \frac{9}{4A^2}(9\cos\vartheta - 5\cos^3\vartheta) + \cdots\right].$$