Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel

Noether, Fritz

Leipzig, 1912

§ 6.Erste Näherung und Konstantenbestimmung

urn:nbn:de:bsz:31-272814

ersten Näherung endlich bleiben, obgleich dann die Geschwindigkeiten der zugrunde gelegten Potentialbewegung unendlich sind. Um so mehr sind bei kleinem S jene Vernachlässigungen berechtigt. Das Gleiche gilt aber dann nicht mehr für die Grundgleichungen (1), die nach der Berechnung der Strömung die Druckverteilung bestimmen, vielmehr werden hier in der Nähe der Quellpunkte die quadratischen Glieder wesentlich, durch die bekanntlich in der Potentialtheorie der Druck berechnet wird.

§ 6. Erste Näherung und Konstantenbestimmung.

Als weitere Annäherung zur Ergänzung der zugrunde gelegten Bewegung fordern wir eine überall, auch im Quellgebiete der Grundbewegung, quellenfreie Strömung mit im Unendlichen verschwindenden Geschwindigkeiten, die die Randbedingungen an der Kugeloberfläche erfüllt und der aus (8) resultierenden Differentialgleichung (11) der ersten Näherung genügt.

Zu ihrer Aufstellung sind die Ausdrücke für ψ_0 und $D\psi_0$ aus den Gleichungen (29a) und (12) zu verwenden. Es folgt (s. die Ausrechnung in Anhang 2):

$$DD(\psi_1) = \frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu} U^2 \Big[\sin^2\vartheta \cos\vartheta \Big(-3\frac{a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5}\Big) + aA^2\frac{r^2}{R^5}\Big(\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\Big) - A\Big(\frac{A+x}{\varrho^3} - \frac{A-x}{\varrho_1^3}\Big)\Big)\Big]. \tag{30}$$

Dieser Ausdruck der rechten Seite gilt zunächst nur für den Raum außerhalb der Quellgebiete, da er aber endlich bleibt bei Ausdehnung bis an die Punkte $\varrho = 0$ bzw. $\varrho_1 = 0$ hin[1]), so können wir hier die Vorstellung punktförmiger Quelle und Senke voraussetzen und seine Gültigkeit daher über den ganzen unendlichen Raum außerhalb der festen Kugel erstrecken.

Die eindeutige Lösung unserer Randwertaufgabe erfordert die Angabe eines Integrals der Gleichung (30), das im Unendlichen die verlangte Eigenschaft hat, daß die zugehörigen Geschwindigkeiten verschwinden und dessen Wert in der Nähe der festen Kugel sich angeben läßt, so daß es durch Zufügung geeigneter Lösungen der Gl. $DD(\psi) = 0$ möglich wird, die Randbedingungen an der Kugel zu erfüllen. Ein solches Integral in geschlossener Form anzugeben, scheint schwer möglich zu sein, doch folgt aus dem in § 1 erwähnten Zusammenhang der Gleichungen

$$DD(\psi) = F \text{ und } \Delta\Delta(\varphi) = f$$

---

1) Die Ausdrücke $\frac{r^2}{\varrho^2}$ und $\frac{A+x}{\varrho}$ sind endlich.

eine geeignete Integraldarstellung. Mittels dieses Zusammenhanges gewinnen wir aus der Lösung φ der zweiten dieser beiden Gleichungen eine Lösung ψ der ersten, als

$$\psi = r\frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

wenn f aus der Gleichung

$$F = r\frac{\partial f}{\partial r} \tag{31}$$

bestimmt worden ist.

Wir trennen zunächst ψ_1 in 2 Bestandteile, der erste, ψ', soll der Gleichung genügen:

$$D\,D(\psi') = \frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu}U^2 \sin^2\vartheta \cos\vartheta\left(-\frac{3a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5}\right).$$

Als partikuläres Integral dieser Gleichung wählen wir mittels (16) und (17):

$$\psi' = -\frac{9}{32}\frac{\sigma}{\mu}U^2 \sin^2\vartheta \cos\vartheta\left(a^2 R + \frac{a^4}{3R}\right), \tag{32}$$

das auch als Summand in Gl. (18) auftritt. Der zweite Bestandteil von ψ_1, ψ'', soll der Gleichung:

$$D\,D(\psi'') = \frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu}U^2 a A^2 \frac{r^2}{R^5}\left[\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right) - A\left(\frac{A+x}{\varrho^3} - \frac{A-x}{\varrho_1^3}\right)\right] \tag{33}$$

genügen, so daß die Summe $\psi' + \psi''$ der Gleichung (30) genügt.

Bezeichnen wir die rechte Seite der Gl. (33) mit F, und setzen

$$\psi'' = r\frac{\partial \varphi''}{\partial r}$$

so erhalten wir für φ'' die folgende Gleichung.

$$\Delta\Delta(\varphi'') = f,$$

die mit (33) äquivalent ist, wenn wir f durch Integration der Gl. (31) ermitteln. Es ergibt sich

$$f = \frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu}U^2 a A^2 \cdot \tag{34}$$

$$\cdot\left[\frac{1}{A^2(A+2x)^2}\left(\frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3}\frac{\varrho^3}{R^3} - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{A^2(A-2x)^2}\left(\frac{\varrho_1}{R} - \frac{1}{3}\frac{\varrho_1^3}{R^3} - \frac{2}{3}\right)\right.$$
$$- \frac{A+x}{A^2(A+2x)^3}\left(2\frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3}\frac{\varrho^3}{R^3} + \frac{R}{\varrho} - \frac{8}{3}\right)$$
$$\left. + \frac{A-x}{A^2(A-2x)^3}\left(2\frac{\varrho_1}{R} - \frac{1}{3}\frac{\varrho_1^3}{R^3} + \frac{R}{\varrho_1} - \frac{8}{3}\right)\right]$$

(Die Gl. (34) wird aus der rechten Seite von (33) durch elementare Integration der Gl. (31) gewonnen, wenn man beachtet, daß bei festem x: $r\,dr = \varrho\,d\varrho$ zu setzen ist, oder es wird durch direkte Differentiation von (34) nach r das Bestehen der Gl. (31) bestätigt, mit Rücksicht darauf, daß

$$\varrho^2 - R^2 = A(A+2x); \quad \varrho_1^2 - R^2 = A(A-2x).$$

Als Integrationskonstante ist in (34) eine Funktion von x so zugefügt, daß f im Unendlichen in gleicher Weise verschwindet wie F. Daß auch f im ganzen Außenraume der Kugel endlich bleibt, ebenso wie F, wird durch eine Umformung von (34) deutlicher. Es ist:

$$\frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3}\frac{\varrho^3}{R^3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\varrho}{R} - 1\right)^2\left(\frac{\varrho}{R} + 2\right)$$

$$2\frac{\varrho}{R} - \frac{1}{3}\frac{\varrho^3}{R^3} + \frac{R}{\varrho} - \frac{8}{3} = -\frac{R}{3\varrho}\left(\frac{\varrho}{R} - 1\right)^3\left(\frac{\varrho}{R} + 3\right)$$

und analoge Gleichungen gelten für ϱ_1. Daher wird:

(34a)
$$f = \frac{3}{4}\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^2 \left[\frac{-(\varrho + 2R)}{R^3(\varrho + R)^2} + \frac{(\varrho_1 + 2R)}{R^3(\varrho_1 + R)^2} + \frac{A(A+x)(\varrho + 3R)}{R^3\varrho(\varrho + R)^3} - \frac{A(A-x)(\varrho_1 + 3R)}{R^3\varrho_1(\varrho_1 + R)^2}\right]$$

ein Ausdruck, der außer im Punkte $R = 0$ nirgends unendlich wird; vgl. Fußnote S. 25).

In einem beliebigen Raumstück T ist nun ein Integral der Gleichung (33a) die Funktion:

(35)
$$\varphi^*(x,y,z) = \frac{-1}{8\pi}\int_T f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})\, \mathfrak{r}\, d\tau,$$

wo $d\tau$ das Raumelement im Integrationspunkt, $\mathfrak{r}$ den Abstand vom Aufpunkt zum Integrationspunkt

$$\mathfrak{r} = \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2 + (z-\mathfrak{z})^2}$$

bedeutet und die den Koordinatenbezeichnungen des Aufpunktes: x, y, z; R, ϑ; ϱ, ϱ_1 entsprechenden im Integrationspunkt

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z};\ \mathfrak{R}, \delta;\ P, P_1$$

seien (s. Fig. 3). Der Beweis der obigen Integraldarstellung folgt aus der Gleichung

$$\Delta\mathfrak{r} = \frac{2}{\mathfrak{r}}$$

in Verbindung mit der bekannteren innerhalb T gültigen Gleichung:

$$\Delta\int f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})\frac{d\tau}{\mathfrak{r}} = -4\pi f(x, y, z).$$

Aus einem später ersichtlichen Grunde gehen wir von dem Integral (35) noch zu dem folgenden über

(35a)
$$J = -\frac{1}{8\pi}\int_T f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})\left[\mathfrak{r} - \mathfrak{R} - \left(x\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial x}{}_{(R=0)} + y\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial y}{}_{(R=0)} + z\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial z}{}_{(R=0)}\right)\right]d\tau$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int_T f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})\left(\mathfrak{r} - \mathfrak{R} + R\cos(R\,\mathfrak{R})\right)d\tau,$$

das sich von (35) nur um eine Konstante und ein in den Koordinaten des Aufpunktes, x, y, z, lineares Glied unterscheidet, während seine zweiten Differentialquotienten von denen von (35) überhaupt nicht verschieden sind. Daher genügt auch J der Gleichung $\Delta\,\Delta J = f(x, y, z)$.

Als untere Grenze des Integrals (35a) betrachten wir zunächst eine um O als Mittelpunkt gelegte Kugel vom Radius $b < a$; bevor wir als obere Grenze $\mathfrak{R} = \infty$ wählen, müssen wir $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ für sehr große Werte des Radius $\mathfrak{R}$ (d. h. $\mathfrak{R}$ groß gegen A, entwickeln, mittels der Formeln:

$$P = \sqrt{\mathfrak{R}^2 + A^2 + 2\,A\,\mathfrak{R}\cos\delta} = \mathfrak{R}\left(1 + \frac{A}{\mathfrak{R}}\cos\delta + \ldots\right.$$

$$P_1 = \sqrt{\mathfrak{R}^2 + A^2 - 2\,A\,\mathfrak{R}\cos\delta} = \mathfrak{R}\left(1 - \frac{A}{\mathfrak{R}}\cos\delta + \ldots\right.$$

So ist sofort ersichtlich, daß in f (Gl. 34a, in den Koordinaten des Integrationspunktes geschrieben) die Glieder der höchsten Ordnung ($\mathfrak{R}^{-4}$) sich gegenseitig aufheben und $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ bis auf einen Zahlenfaktor sich verhält wie

$$\frac{\sigma}{\mu}\,U^2 a\,A^3\,\frac{\cos\delta}{\mathfrak{R}^5},$$

daß also das Integral (35a) auch bei Ausdehnung der oberen Grenze ins Unendliche für endliche Aufpunkte endlich bleibt.

Ferner haben wir das Verhalten der Funktion $J(x, y, z)$ für Werte von R zu untersuchen, die wesentlich größer als A sind. Das Integrationsgebiet teilen wir zu dem Zweck in 3 konzentrische Kugelgebiete:

1) $\mathfrak{R} \geqq R$
2) $R > \mathfrak{R} \geqq C$
3) $C > \mathfrak{R}$.

Hier bedeutet C einen Radius, der so groß gegen A ist, daß $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ mit gegebener Genauigkeit bis auf einen Zahlenfaktor K durch den oben angegebenen Näherungsausdruck

$$\frac{\sigma}{\mu}\,U^2 a\,A^3\,\frac{\cos\delta}{\mathfrak{R}^5}$$

ersetzt werden kann, wenn $\mathfrak{R} \geqq C$.

Dem ersten Teil des Integrationsgebiets entspricht daher der Anteil:

$$J_1 = -\frac{\sigma}{\mu}\,U^2\,a\,A^2\,\frac{K}{8\pi}\int\limits_{\mathfrak{R}=R}^{\mathfrak{R}=\infty}\Big(\mathfrak{r} - \mathfrak{R} + R\cos(R\,\mathfrak{R})\Big)\frac{\cos\delta}{\mathfrak{R}^5}\,d\tau$$

$$= -\frac{\sigma}{\mu}\,U^2\,a\,A^2\,\frac{K}{8\pi}\int\limits_R^\infty\frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^3}\int\limits_0^{2\pi}d\varepsilon\int\limits_0^{\pi}\Big(\mathfrak{r} - \mathfrak{R} + R\cos(R\,\mathfrak{R})\Big)\cos\delta\sin\delta\,d\delta.$$

Dieses Integral hat höchstens die Ordnung $\frac{1}{R}$. Dem zweiten Teil des Integrationsgebiets entspricht der Anteil:

$$J_2 = -\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^2 \frac{K}{8\pi} \int_C^R \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^3} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\pi} \Big(\mathfrak{r} - \mathfrak{R} + R\cos(R\mathfrak{R})\Big) \cos\delta \sin\delta \, d\delta.$$

Setzen wir hier $\mathfrak{R} = kR$, so ergibt sich

$$J_2 = -\frac{\sigma}{\mu} U^2 a A^2 \frac{K}{8\pi} \frac{1}{R} \int_{\frac{C}{R}}^{1} \frac{dk}{k^3} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\pi} \Big(\frac{\mathfrak{r}}{R} - k + \cos(R\mathfrak{R})\Big) \cos\delta \sin\delta \, d\delta,$$

wobei noch zu setzen ist:

$$\frac{\mathfrak{r}}{R} = \frac{\sqrt{R^2 + \mathfrak{R}^2 - 2R\mathfrak{R}\cos(R\mathfrak{R})}}{R} = \sqrt{1 + k^2 - 2k\cos(R\mathfrak{R})}.$$

Wegen seines Verhaltens an der unteren Grenze $k_0 = \frac{R}{C}$ wird das 3-fache Integral in J_2 von der Ordnung $k_0^{-2} = \frac{R^2}{C^2}$ und daher J_2 von der Ordnung R.

Der dritte Bestandteil von J wird endlich:

$$J_3 = -\frac{1}{8\pi} \int_b^C \mathfrak{R}^2 \, d\mathfrak{R} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\pi} \Big(\mathfrak{r} - \mathfrak{R} + R\cos(R\mathfrak{R})\Big) f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \sin\delta \, d\delta$$

und für $\mathfrak{r}$ gilt hier die Entwicklung:

$$\mathfrak{r} = \sqrt{R^2 + \mathfrak{R}^2 - 2R\mathfrak{R}\cos(R\mathfrak{R})} = R\Big(1 - \frac{\mathfrak{R}}{R}\cos(R\mathfrak{R}) + \frac{\mathfrak{R}^2}{R^2} \cdots\Big).$$

Da f im dritten Teil des Integrationsgebiets überall endlich, und C von R unabhängig ist, wird also:

$$J_3 = \text{endliche Glieder} + R \int_b^C \mathfrak{R}^2 d\mathfrak{R} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\pi} \Big(1 + \cos(R\mathfrak{R})\Big) f \sin\delta \, d\delta.$$

Die drei Bestandteile zusammenfassend finden wir also, daß $J = J_1 + J_2 + J_3$ sich aus endlichen Gliedern und solchen von der Ordnung R zusammensetzt. Seine zweiten Ableitungen nähern sich daher für großes R verschwindenden Werten, d. h. die Funktion J erfüllt im Unendlichen die an die Funktion φ gestellten Bedingungen.

Ferner folgt aus der Endlichkeit von f im ganzen Integrationsgebiet die dreifache Differenzierbarkeit von J. Diese besteht auch dann noch, wenn wir die Quelle und Senke punktförmig in den Punkten $\varrho = 0$ bzw. $\varrho_1 = 0$ annehmen und dementsprechend den Ausdruck (34a) von f bis an diese Punkte hin ausdehnen. Also ergeben sich aus J durch die in den Formeln (3) angegebenen Differentiationen endliche und im Unendlichen verschwindende Geschwindigkeitskomponenten. Somit kann die gesuchte Funktion φ'' angegeben werden als die Summe von J und so gewählten Lösungen der Gleichung $\Delta\Delta\varphi = 0$, daß den Randbedingungen an der Kugel genügt wird.

Zu ihrer Bestimmung muß das Verhalten von J an der Oberfläche der Kugel bekannt sein, und daher J entwickelt werden für Aufpunkte in der Nähe der Kugel, unter der Voraussetzung, daß a sehr klein gegen A sei. Wir beweisen zunächst, daß dann nur Integrationsgebiete in Betracht kommen, für die auch $\mathfrak{R}$ klein gegen A ist. Deshalb können wir für diese Entwicklung von J den Abstand A beliebig groß werden lassen und kommen so zu der sehr einfachen, in der Umgebung der Kugel geltenden Darstellung (38) für J.

Beweis: In den Gebieten, in denen $\mathfrak{R}$ mit A vergleichbar oder groß gegen A ist, wird die eckige Klammer in (34a) (in den Koordinaten des Integrationspunktes geschrieben) überall von der Größenordnung $\frac{1}{\mathfrak{R}^4}$. Denn P und P_1 sind dann mit $\mathfrak{R}$ vergleichbar oder von kleinerer Ordnung, die Faktoren $\frac{(\mathfrak{x}+A)}{P}$ und $\frac{(\mathfrak{x}-A)}{P_1}$ aber bleiben überall endlich (von der Ordnung $\mathfrak{R}^0$). Ferner aber wechselt $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ sein Vorzeichen, wenn $\mathfrak{x}$ mit $-\mathfrak{x}$ (und demnach auch P mit P_1) vertauscht wird, während $\mathfrak{R}$ unverändert bleibt, so daß $\cos\delta$ in $-\cos\delta$ übergeht. Trennen wir daher von dem ganzen Integrationsgebiet unseres Integrals J (35a) ein Gebiet zwischen den Kreisen $\mathfrak{R} = b$ und $\mathfrak{R} = \lambda A$ ab, wo λ einen nicht verschwindenden echten Bruch bedeuten soll, so können wir f für den Rest ($\mathfrak{R} \geqq \lambda A$) in der Form ansetzen:

$$f = \frac{\sigma}{\mu} a\, U^2 \frac{A^2}{\mathfrak{R}^4} \cos\delta f^*,$$

wo f^* eine eindeutige Funktion von $\mathfrak{R}$ und $\cos^2\delta$ bedeutet, die in bezug auf $\mathfrak{R}$ und in bezug auf A von nullter Ordnung und überall endlich ist. Dieser Bestandteil des Integrals wird dann

$$J_\lambda = -\frac{\sigma a U^2}{8\pi\mu} A^2 \int\limits_{\mathfrak{R}=\lambda A}^{\mathfrak{R}=\infty} \frac{\cos\delta}{\mathfrak{R}^4} f^*(\mathfrak{R}, \cos^2\delta)(\mathfrak{r} - \mathfrak{R} + R\cos(R\mathfrak{R}))\, d\tau.$$

Wir setzen hier den Winkel $(\mathfrak{R}R) = \alpha$ und entwickeln für Integrationsgebiete $\mathfrak{R} > R$:

$$(36)\quad \mathfrak{r} - \mathfrak{R} + R\cos\alpha = \frac{1}{2}\frac{R^2}{\mathfrak{R}}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\frac{R^3}{\mathfrak{R}^2}\cos\alpha\sin^2\alpha + \frac{R^4}{\mathfrak{R}^3}\cdots\cdots.$$

Diese Entwicklung nach fallenden Potenzen von $\mathfrak{R}$ hatten wir im Auge, als wir von dem Integral (35) zum Integral (35a) übergingen. Wir erhalten:

$$(37)\quad J_\lambda = -\frac{\sigma a U^2}{8\pi\mu} A^2 \int\limits_{\mathfrak{R}=\lambda A}^{\mathfrak{R}=\infty} \frac{\cos\delta}{\mathfrak{R}^5} f^*(\mathfrak{R}, \cos^2\delta)\left(\frac{R^2}{2}\sin^2\alpha + \frac{R^3}{2\mathfrak{R}}\cos\alpha\sin^2\alpha + \cdots\right) d\tau.$$

Das erste Entwicklungsglied dieses Integrals:

$$\frac{-\sigma a U^2}{16\pi\mu} A^2 R^2 \int\limits_{\mathfrak{R}=\lambda A}^{\mathfrak{R}=\infty} \frac{\cos\delta}{\mathfrak{R}^5} f^*(\mathfrak{R}, \cos^2\delta) \sin^2\alpha \, d\tau$$

verschwindet identisch, da in je zwei Punkten, die sich in bezug auf den 0-Punkt ($\mathfrak{R} = 0$) diametral gegenüberliegen, der Integrand gleiche Absolutwerte, aber entgegengesetztes Vorzeichen hat.

Dies gilt aber nicht für das zweite und überhaupt alle geraden Entwicklungsglieder, für die der Integrand in diametral gegenüberliegenden Punkten gleiche Werte annimmt. Das zweite Glied lautet ausgeführt:

$$-\frac{\sigma a U^2}{16\pi\mu} A^2 R^3 \int\limits_{\lambda A}^{\infty} \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^4} \int\limits_0^{2\pi} d\varepsilon \int\limits_0^{\pi} \cos\delta \sin\delta \cos\alpha \sin^2\alpha f^* d\delta .$$

Das hierin enthaltene dreifache Integral wird von der Ordnung

$$\frac{1}{\lambda^3 A^3}$$

und daher der ganze Ausdruck von der Ordnung

$$\frac{\sigma U^2 R^3 a}{\mu A},$$

er ist also neben endlichen Gliedern zu vernachlässigen, weil A groß gegen a vorausgesetzt worden ist. Das gilt dann in noch höherem Maße für die höheren Entwicklungsglieder des Integrals (37), da die Entwicklung des Integranden nach steigenden Potenzen von $\frac{R}{\mathfrak{R}}$ zu einer Entwicklung des Integrals nach steigenden Potenzen von $\frac{R}{A}$ führt.

Es bleibt uns daher, wie oben behauptet wurde, von dem Integral (35a) nur noch der Bestandteil übrig, der von dem Integrationsgebiet zwischen den Kugeln $\mathfrak{R} = b$ und $\mathfrak{R} = \lambda A$ herrührt, und daher läßt es sich nun wesentlich vereinfachen. In diesem Gebiet entwickeln wir $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ nach Potenzen von $\frac{\mathfrak{R}}{A}$ und erhalten (s. die Ausrechnung in Anhang 3):

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \frac{\sigma}{\mu} a U^2 \left[-\frac{3}{2} \frac{\cos\delta}{\mathfrak{R}^2} + \frac{9}{4} \frac{(9\cos\delta - 5\cos^3\delta)}{A^2} + \frac{\mathfrak{R}^2}{A^4} \cdots \right].$$

Unser Integral wird daher

$$(35\text{b}) \quad J'_\lambda = \frac{-\sigma a U^2}{8\pi\mu} \int\limits_{\mathfrak{R}=b}^{\mathfrak{R}=\lambda A} \left[-\frac{3}{2} \frac{\cos\delta}{\mathfrak{R}^2} + \frac{9}{4A^2} (9\cos\delta - 5\cos^3\delta) + \frac{\mathfrak{R}^2}{A^4} \cdots \right] \cdot [\mathfrak{r} - \mathfrak{R} + R\cos\alpha] \, d\tau .$$

In der Entwicklung dieses Integrals kommt für das Integrationsgebiet $\mathfrak{b} < \mathfrak{R} \leq R$ nur das erste Glied des Integranden, $\frac{-3\cos\delta}{2\mathfrak{R}^2}$, in Betracht wegen der Annahme, daß $\frac{a}{A}$ und $\frac{R}{A}$ klein seien. Für das Teilgebiet $\mathfrak{R} > R$ entwickeln wir $(\mathfrak{r} - \mathfrak{R} + R\cos\alpha)$ nach (36), und beachten, daß die von den ungeraden Gliedern dieser Entwicklung herrührenden Bestandteile wie oben in J_λ, so auch hier in J_λ' verschwinden, da der Integrand für sie in diametral gegenüberliegenden Punkten entgegengesetzt gleiche Werte annimmt. Von den geraden Gliedern der Entwicklung (36) liefert das erste, $\cos\alpha \sin^2\alpha \frac{R^3}{2\mathfrak{R}^2}$, den größten Beitrag, nämlich:

$$\frac{-\sigma a U^2}{16\pi\mu} R^3 \int\limits_R^{\lambda A} \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varepsilon \int\limits_0^{\pi} \left[-\frac{3}{2}\cos\delta + \frac{9}{4}\frac{\mathfrak{R}^2}{A^2}(9\cos\delta - 5\cos^3\delta) + \frac{\mathfrak{R}^4}{A^4}\cdots\right] \cdot$$
$$\cdot \cos\alpha \sin^2\alpha \sin\delta \, d\delta.$$

Auch in diesem Integral kommt, wenn A groß gegen a und folglich auch groß gegen R ist, nur das erste Entwicklungsglied in Betracht, während alle übrigen von der Ordnung $\frac{R}{A}$ klein werden. Von noch höherer Ordnung werden die entsprechenden Glieder klein, die von den höheren Entwicklungsgliedern der Entwicklung (36) (nach fallenden Potenzen von $\mathfrak{R}$) herrühren. Also kommt auch für diese alle nur das erste Glied des Integranden von J_λ', nämlich das Glied $-\frac{3}{2}\frac{\cos\delta}{\mathfrak{R}^2}$ in Betracht.

Gehen wir also endlich zur Grenze $A = \infty$ über, so folgt aus dem Obigen zunächst, daß wir J durch J_λ' (35b) ersetzen können, und daß im Integranden von J_λ' überhaupt nur das erste Glied zu berücksichtigen ist. Die obere Grenze von J_λ' geht ebenfalls in ∞ über, und wir erhalten für J an Stelle von (35a) die Gleichung

$$J_\infty = \frac{3\sigma a U^2}{16\pi\mu} \int\limits_{\mathfrak{R}=b}^{\mathfrak{R}=\infty} \frac{\cos\delta}{\mathfrak{R}^2} (\mathfrak{r} - \mathfrak{R} + R\cos\alpha)\, d\tau. \tag{38}$$

Dieses Integral ist in der Tat eine Lösung der Gleichung

$$\varDelta\varDelta(\varphi'') = -\frac{3}{2}\frac{\sigma a U^2}{\mu}\frac{x}{R^3},$$

die äquivalent ist mit der Gleichung:

$$DD(\psi'') = \frac{9}{2}\frac{\sigma a U^2}{\mu}\frac{x r^2}{R^5}.$$

Deren Integral $\psi'' = r\frac{\partial J_\infty}{\partial r}$ genügt, in Verbindung mit dem Integral ψ' (Gl. 32), unserer früheren Gleichung (13). Der Unterschied unserer jetzigen gegen die frühere Lösung (18) und (19) ist aber, daß jene unendlich viele unbestimmbare Konstanten enthielt, während das Integral (38) keine Unbestimmtheit enthält.

Die im Integral J noch willkürlich gelassene untere Grenze $\mathfrak{R} = b$ können wir, wie aus der Form (38) ersichtlich ist, unbedenklich zu $b = 0$ annehmen. Zur genauen Berechnung von J_∞ führen wir jetzt Polarkoordinaten ein:

$$\alpha \text{ bedeutet den } \sphericalangle (R\mathfrak{R});$$

β (s. Fig. 3) bezeichne den Winkel der die Radien R und $\mathfrak{R}$ enthaltenden Ebene mit der durch R und die X-Achse (Rotationsachse) gelegten Ebene. Aus dem sphärischen Dreieck, das die Rotationsachse und die beiden Radien R, $\mathfrak{R}$ bilden, folgt dann:

$$\cos \delta = \cos \vartheta \cos \alpha - \sin \vartheta \sin \alpha \cos \beta.$$

ferner folgt:

$$d\tau = \mathfrak{R}^2 d\mathfrak{R} d\beta \sin \alpha d\alpha.$$

Nach Ausführung der Integration nach β wird daher das Integral (38):

$$J_\infty = \frac{3\sigma a U^2}{8\mu} \cos \vartheta \int_0^\infty d\mathfrak{R} \int_0^\pi \cos \alpha \, (\mathfrak{r} - \mathfrak{R} + R \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha, \tag{38a}$$

wo

$$\mathfrak{r}^2 = R^2 + \mathfrak{R}^2 - 2R\mathfrak{R} \cos \alpha.$$

Für die Berechnung des inneren Integrals bilden wir hieraus:

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + \mathfrak{R}^2 - \mathfrak{r}^2}{2R\mathfrak{R}}$$

und bei festgehaltenem $\mathfrak{R}$:

$$\sin \alpha d\alpha = -d \cos \alpha = \frac{\mathfrak{r} d\mathfrak{r}}{R\mathfrak{R}}.$$

Wir müssen nun das Integrationsgebiet wieder in zwei Gebiete trennen:

$$(1)\ \mathfrak{R} \leqq R; \qquad (2)\ \mathfrak{R} > R.$$

(1) Es wird:

(a)
$$R \int_0^R d\mathfrak{R} \int_0^\pi \cos^2 \alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{3} R^2$$

(b)
$$\int_0^R \mathfrak{R} d\mathfrak{R} \int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = 0$$

(c)
$$\begin{aligned}
&\int_0^R d\mathfrak{R} \int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha \mathfrak{r} d\alpha = \\
&= \frac{1}{2R^2} \int_0^R \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^2} \int_{R-\mathfrak{R}}^{R+\mathfrak{R}} (R^2 + \mathfrak{R}^2 - \mathfrak{r}^2)\, \mathfrak{r}^2 d\mathfrak{r} \\
&= \frac{1}{2R^2} \int_0^R \frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^2} \left(-\frac{4}{3} R^2 \mathfrak{R}^3 + \frac{4}{15} \mathfrak{R}^5\right) \\
&= \frac{1}{2R^2} \left(-\frac{2}{3} R^2 \mathfrak{R}^2 + \frac{1}{15} \mathfrak{R}^4\right) \Bigg|_0^R = -\frac{3}{10} R^2.
\end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir also für den ersten Teil des Integrals J_∞, der dem Integrationsgebiet $R \leqq \mathfrak{R}$ entspricht:

$$J_i = \frac{1}{4}\frac{\sigma a U^2}{\mu} R^2 \cos\vartheta - \frac{9}{80}\frac{\sigma a U^2}{\mu} R^2 \cos\vartheta = \frac{11}{80}\frac{\sigma a U^2}{\mu} R^2 \cos\vartheta.$$

(2) Von dem Integral

$$\int_R^\infty d\mathfrak{R}\int_0^\pi \cos\alpha \sin\alpha\,(\mathfrak{r} - \mathfrak{R} + R\cos\alpha)\,d\alpha$$

werden die einzelnen Bestandteile unendlich und nur ihre Summe bleibt endlich. Wir führen daher zuerst nur die Integration nach α aus:

Es ist:

(a) $$R\int_0^\pi \cos^2\alpha \sin\alpha\, d\alpha = \frac{2}{3} R,$$

(b) $$\mathfrak{R}\int_0^\pi \cos\alpha \sin\alpha\, d\alpha = 0,$$

(c) $$\int_0^\pi \cos\alpha \sin\alpha\, \mathfrak{r}\, d\alpha = \int_{\mathfrak{R}-R}^{\mathfrak{R}+R} \frac{(R^2 + \mathfrak{R}^2 - \mathfrak{r}^2)\,\mathfrak{r}^2 d\mathfrak{r}}{2R^2\mathfrak{R}^2}$$

(gegenüber dem entsprechenden Bestandteil von J_i sind hier die Grenzen verändert). Also

$$\int_0^\pi \cos\alpha \sin\alpha\, \mathfrak{r}\, d\alpha = \frac{1}{2R^2\mathfrak{R}^2}\left(\frac{R^2 + \mathfrak{R}^2}{3}\mathfrak{r}^3 - \frac{\mathfrak{r}^5}{5}\right)\Bigg|_{\mathfrak{R}-R}^{\mathfrak{R}+R} = -\frac{2}{3}R + \frac{2}{15}\frac{R^3}{\mathfrak{R}^2}.$$

Daher im ganzen:

$$\int_0^\pi \cos\alpha \sin\alpha\,(\mathfrak{r} - \mathfrak{R} + R\cos\alpha)\,d\alpha = \frac{2}{15}\frac{R^3}{\mathfrak{R}^2}$$

Daher

$$J_a = \frac{3}{8}\frac{\sigma a U^2}{\mu}\cos\vartheta \int_R^\infty \frac{2}{15}\frac{R^3}{\mathfrak{R}^2}\,d\mathfrak{R} = \frac{1}{20}\frac{\sigma a U^2}{\mu} R^2 \cos\vartheta.$$

Zusammen endlich:

$$J_i + J_a = J_\infty = \frac{3}{16}\frac{\sigma a U^2}{\mu} R^2 \cos\vartheta.$$

Dies ist die gesuchte Näherungsformel für das Integral J, für Werte von R, die klein gegen die als sehr groß vorausgesetzte Entfernung A sind. Setzen wir nach S. 30 $\varphi'' = J$, so gewinnen wir (nach S. 26) für ψ'' die Näherungsformel:

(39) $$\psi'' = \frac{3}{16}\frac{\sigma a U^2}{\mu}\frac{r^2 x}{R},$$

und in Verbindung mit (32) die Gleichung:

$$\psi' + \psi'' = \frac{3}{16}\frac{\sigma U^2}{\mu}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\left(a R^2 - \frac{3}{2}a^2 R - \frac{a^4}{2R}\right).$$

Wir sind hiermit zu dem partikulären Integral (18) der Gl. (13) zurückgeführt, das wir so als einen in der Umgebung der Kugel gültigen Näherungsausdruck für ein partikuläres Integral der Gl. (30) erkennen, das im Unendlichen die zu fordernden Randbedingungen erfüllt. Die Zufügung des Gliedes

$$\frac{3}{32}\frac{\sigma}{\mu}U^2\sin^2\vartheta\cos\vartheta\left(-a^3 + \frac{a^5}{R^2}\right),$$

das der Gleichung $DD(\psi) = 0$ genügt, führt also wie auf S. 14 zu dem Näherungsausdruck für die Stromfunktion:

$$\psi_1 = \frac{3}{32} S U \sin^2\vartheta\cos\vartheta\,\frac{(R-a)^2(2R^2 + aR + a^2)}{R^2}, \tag{20}$$

der auch die Randbedingungen an der Kugel erfüllt. Er ist eine in der Umgebung der Kugel gültige Näherungsform für die bei großem Werte von $\frac{A}{a}$ auch in beliebiger Entfernung bestehende Lösung:

$$\psi_1 = \frac{3}{32} S U a^2 \sin^2\vartheta\cos\vartheta\left(-\frac{3R}{a} - 1 - \frac{a}{R} + \frac{a^2}{R^2}\right) + r\frac{\partial J}{\partial r}, \tag{40}$$

in der J durch (35a) (mit $b = 0$) und (34a) definiert ist und die alle an die Funktion ψ_1 zu stellenden Bedingungen befriedigt. Die weiteren Folgerungen aus der Gl. (20) sind bereits früher gezogen worden.

Auf S. 29 hatten wir gesehen, daß die Funktion J im Unendlichen von der Ordnung R unendlich wird, folglich wird nach (40) ψ_1 von gleicher Ordnung unendlich. Daraus folgt, daß $D\psi_1$ von der Ordnung $\frac{1}{R}$ verschwindet. Von den gleichen Ordnungen fanden wir auf S. 24 ψ_0, bzw. $D\psi_0$. Hieraus folgt, daß die bei der Aufstellung der Gl. (30) *vernachlässigten Glieder von Gl. (8) im Unendlichen von gleicher Ordnung in R wie die berücksichtigten sind und daß daher bei kleiner Reynoldsscher Zahl die Vernachlässigung unbedenklich ist.* Wegen der Stetigkeitsannahmen, die wir für die Verteilung der Ergiebigkeit in den Quellgebieten machten, folgt ferner, *daß nicht nur alle Geschwindigkeiten der überlagerten Näherungsbewegung, sondern auch die der Grundbewegung in den Quellgebieten endlich bleiben, daß daher die vernachlässigten Glieder der Gl. (8) endlich und bei kleiner Reynoldsscher Zahl klein neben den berücksichtigten sind.* Dagegen bedarf die Frage, wie groß die Vernachlässigungen sind, wenn die Quellgebiete punktförmig angenommen werden, noch einer eigenen Untersuchung.