Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel

Noether, Fritz

Leipzig, 1912

§ 5. Ersatz der Parallelströmung durch eine inhomogene Strömung (mit Quelle und Senke)

urn:nbn:de:bsz:31-272814

In der Tat gibt die Gl. (25) für den Druck an der Kugeloberfläche:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \vartheta} = \frac{3}{16} \frac{\mu S U}{a} \sin\vartheta \cos\vartheta \left(-6\frac{a^4}{R^4} + 6\frac{a^3}{R^3} - 9\frac{a^2}{R^2}\right)_{R=a}$$

$$= -\frac{27}{16} \frac{\mu S U}{a} \sin\vartheta \cos\vartheta$$

$$p_1 = P_1 + \frac{27}{32} \frac{\mu S U}{a} \cos^2\vartheta,$$

wo P_1 den Druck in der Äquatorebene bedeutet. Ferner wird wegen Gl. (26)

$$p_{ns} = \frac{\mu}{a} \frac{3}{16} S U \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{2R^2 + aR + a^2}{R^2}\right)_{R=a}$$

$$= \frac{3}{4} \frac{\mu S U}{a} \sin\vartheta \cos\vartheta$$

und endlich

$$K_1 = 2\pi\mu a S U \int_0^\pi \left(-\frac{27}{32}\cos^3\vartheta - \frac{3}{4}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right) d\vartheta = 0,$$

wie oben behauptet wurde.

Mit diesem Resultat scheinen Beobachtungen von Zeleny und Mc. Keehan[1]) im Einklang zu stehen, *daß sich nämlich der Gültigkeitsbereich der Stokesschen Formel bei genau kugelförmigen Körpern wesentlich größer erwies als bei annähernd kugelförmigen Körpern (Sporen).* Während sich bei letzteren schon bei sehr kleinen Werten der Reynoldsschen Zahl ($S = 10^{-3}$) Abweichungen von der Stokesschen Formel zeigten, die bei Vernachlässigung der Trägheitsglieder nicht aus den Abweichungen von der Kugelgestalt zu erklären waren, fanden die Verfasser die Stokessche Formel bei Kugeln streng bestätigt bis zu Werten der Reynoldsschen Zahl, die die Grenze $S = 0{,}1$ noch wesentlich überstiegen. In der Tat war ja das Verschwinden des in der Reynoldsschen Zahl linearen Widerstandsanteils lediglich eine Folge der Kugelsymmetrie bezüglich ihrer Äquatorebene. Auch bei geringer Unsymmetrie würde aber ein linearer Bestandteil auftreten, und dieser müßte sich in höherem Maße äußern, als der quadratische Bestandteil bei Kugeln.

§ 5. Ersatz der Parallelströmung durch eine inhomogene Strömung (mit Quelle und Senke.)

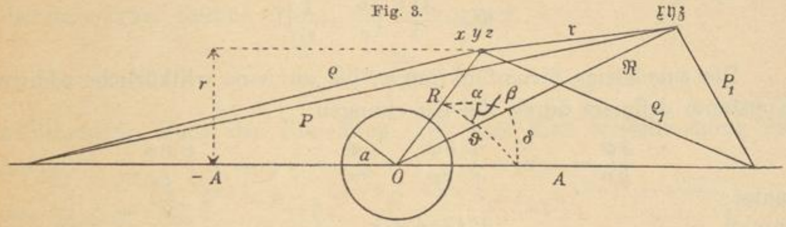
Es bleibt uns noch übrig, die in § 2, S. 13 angegebene Konstantenbestimmung zu rechtfertigen, die mit den bisherigen Mitteln nicht begründet war, da unsere Näherungslösung im Unendlichen versagte. Zu

1) Phys. Ztschr. 11, 1910, S. 78f.

dem Zwecke betrachten wir folgenden Strömungsvorgang, der im Unendlichen überall verschwindende Geschwindigkeitskomponenten in jeder Richtung hat und sich in der Nähe der Kugel nicht wesentlich von dem früher behandelten unterscheidet:

Die Kugel sei als ruhend angenommen (s. Fig. 3), ihr Mittelpunkt O befinde sich im Punkte $x = y = z = 0$. Der Punkt $x = -A$, $y = 0$, $z = 0$ sei der Mittelpunkt eines endlich ausgedehnten, kugelförmigen Quellengebiets, der Punkt $x = +A$, $y = 0$, $z = 0$ der Mittelpunkt eines ebensolchen Senkengebietes. Im übrigen sei die Strömung überall quellenfrei und daher die Gesamtergiebigkeit der Quelle entgegengesetzt gleich der

Fig. 3.



der Senke. Ferner sei der Radius des Quellengebietes wie des Senkengebiets von vornherein klein gedacht gegen die Entfernung A und ebenso der Kugelradius a klein gegen A.

Um nun zunächst die der Stokesschen Strömung analoge zu erhalten, setzen wir die Bewegung zusammen aus einer Potentialströmung und einer überlagerten, die den Einfluß der Randbedingungen an der Kugel und der Reibung enthält. Auch die Potentialbewegung genügt ja, weil für sie $D\psi = 0$, der Grundgleichung (8). Bezeichnet $e, -e$ die Gesamtergiebigkeit des Quellengebiets, bzw. Senkengebietes, ferner ϱ, ϱ_1 die Abstände von ihren Mittelpunkten, so daß

$$\varrho^2 = (x + A)^2 + r^2$$
$$\varrho_1{}^2 = (x - A)^2 + r^2,$$

so wird das Geschwindigkeitspotential der zugehörigen Potentialströmung

$$\Phi = \frac{e}{\varrho} - \frac{e}{\varrho_1},$$

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad q = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Hierbei ist noch vorausgesetzt, daß die Ergiebigkeit der Quelle auf konzentrischen Schichten konstant sei, ebenso der Senke. Um Stetigkeitsbetrachtungen vermeiden zu können, nehmen wir ferner an, daß die Ergiebigkeit im Inneren des Quellgebiets stetig sei und am Rande mit dem ersten und zweiten Differentialquotienten verschwinde.

Für den Kugelmittelpunkt $x = y = z = 0$ wird

$$u = e\left(\frac{x+A}{\varrho^3} - \frac{x-A}{\varrho_1^{\,3}}\right) = \frac{2e}{A^2}.$$

Um möglichste Annäherung und, wenn A sehr groß wird, Übereinstimmung mit dem früheren Bewegungszustand in der Nähe der Kugel zu erhalten, müssen wir also

$$\frac{2e}{A^2} = U$$

wählen, und erhalten somit außerhalb der Quellgebiete die Potentialdarstellung:

$$\Phi = \frac{A^2 U}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right).$$

Die zugehörige Stromfunktion ψ, bis auf eine willkürliche additive Konstante definiert durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -u = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -q = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

lautet:

$$\psi = \frac{A^2 U}{2}\left(\frac{A+x}{\varrho} + \frac{A-x}{\varrho_1}\right). \tag{28}$$

Wir entwickeln diese Formeln für das Gebiet $R < A$. In der bekannten Bezeichnung der Kugelfunktionen wird:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{A}\sum_0^\infty {}_n \frac{R^n}{A^n} P_n(\pi - \vartheta) = \frac{1}{A}\sum_0^\infty {}_n (-1)^n \frac{R^n}{A^n} P_n(\vartheta)$$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{A}\sum_0^\infty {}_n \frac{R^n}{A^n} P_n(\vartheta)$$

und daher

$$\frac{A+x}{\varrho} = 1 + \sum_1^\infty {}_n (-1)^n \frac{R^n}{A^n}\left(P_n(\vartheta) - \cos\vartheta\, P_{n-1}(\vartheta)\right)$$

$$\frac{A-x}{\varrho_1} = 1 + \sum_1^\infty {}_n \frac{R^n}{A^n}\left(P_n(\vartheta) - \cos\vartheta\, P_{n-1}(\vartheta)\right).$$

Da diese beiden Summen, als Stromfunktionen je einer Potentialströmung, der homogenen Gleichung $D\psi = 0$ genügen[1]), so muß jedes einzelne Glied dieser Summen ebenfalls dieser Gleichung genügen, es folgt daher durch Vergleich mit den Entwickelungen des § 2 über die Gleichung $D\psi = 0$, daß, unter $\varkappa$ einen Zahlenfaktor verstanden,

$$P_n(\vartheta) - \cos\vartheta\, P_{n-1}(\vartheta) = \varkappa B\,(\vartheta)$$

1) S. z. B. Lamb, Hydrodynamik, § 94.

sein muß. Wir haben die Funktionen B_n früher (S. 10) eben so normiert, daß $\varkappa = 1$ wird für alle positiven n (ausgenommen den hier belanglosen Fall $n = 1$). Also erhalten wir für ψ (Gl. 28) den Ausdruck

$$(28') \qquad \psi = U\left(A^2 + \sum_1^\infty{}_m \frac{R^{2m}}{A^{2m-2}} B_{2m}(\vartheta)\right).$$

Dies die ungestörte Potentialströmung. Um die der Stokesschen Strömung analoge zu erhalten, haben wir diesen Ansatz durch Glieder, die der Gleichung $DD\psi = 0$ genügen und deren zugehörige Geschwindigkeiten im Unendlichen verschwinden, so zu ergänzen, daß an der Kugeloberfläche vom Radius $R = a$ die Bedingung

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$$

erfüllt wird. Nach der Gleichung (19) wird dies erreicht durch den Ansatz:

$$(29) \quad \psi_0 = U \sum_1^\infty{}_m \frac{R^{2m} + k_{m1} a^{4m-3} R^{-2m+3} + k_{m2} a^{4m-1} R^{-2m+1}}{A^{2m-2}} B_{2m}(\vartheta)$$

wo
$$k_{m1} = -\frac{4m-1}{2}; \quad k_{m2} = \frac{4m-3}{2}.$$

Betrachten wir nun den Fall, daß die Entfernung A sehr groß ist gegen den Radius a und beschränken uns auf die Strömung in der Nähe der Kugel, so können wir in ψ_0 (Gl. 29) alle Glieder, die negative Potenzen von A enthalten, vernachlässigen, und es bleibt daher nur das zum Index $m = 1$ gehörige Glied:

$$(29') \qquad \psi_0 = U\left(R^2 - \frac{3}{2} aR + \frac{1}{2}\frac{a^3}{R}\right) B_2(\vartheta)$$
$$= -\frac{U}{4}\left(2R^2 - 3aR + \frac{a^3}{R}\right)\sin^2\vartheta,$$

also die zur Stokesschen Bewegung gehörige Stromfunktion (10). Wir haben somit eine neue Ableitung dieser Gleichung gewonnen und haben nun nachzuweisen, daß in der Tat in der Grundgleichung (8) die vernachlässigten quadratischen Glieder bei kleiner Reynoldsscher Zahl überall klein sind gegen die berücksichtigten. Dazu müssen wir ψ_0 (Gl. 29) auch in beliebiger Entfernung von der Kugel mittels (28) und (28′) summieren, unter der Annahme, daß $\frac{a}{A}$ zu vernachlässigen sei und erhalten:

$$(29\text{a}) \quad \psi_0 = \frac{A^2 U}{2}\left(\frac{A+x}{\varrho} + \frac{A-x}{\varrho_1}\right) + \frac{U}{4}\left(3aR - \frac{a^3}{R}\right)\sin^2\vartheta.$$

Die für $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\varrho_1}$ gültige Entwicklung im Gebiet $R > A$:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \sum_0^\infty{}^n (-1)^n \frac{A^n}{R^n} P_n(\vartheta)$$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{R} \sum_0^\infty{}^n \frac{A^n}{R^n} P_n(\vartheta)$$

gibt in großer Entfernung den Näherungsausdruck:

$$\psi_0 = \frac{U A^3 \sin^2\vartheta}{R} + \frac{U}{4}\left(3aR - \frac{a^3}{R}\right)\sin^2\vartheta$$

und ferner ist

(12) $$D\psi_0 = -\frac{2}{3} U \frac{a}{R} \sin^2\vartheta.$$

Hieraus folgt, daß die rechte Seite der Gleichung (8) in großer Entfernung sich verhält wie der Ausdruck

$$-\frac{27}{4} \frac{\sigma}{\mu} \frac{U^2 a^2}{R^3} \sin^2\vartheta \cos\vartheta = -\frac{27}{4} S \frac{Ua}{R^3} \sin^2\vartheta \cos\vartheta,$$

während die einzelnen Bestandteile des (in der Summe verschwindenden) Ausdrucks $DD(\psi_0)$ auf der linken Seite sich wie

$$\frac{Ua}{R^3}$$

verhalten, also in gleicher Weise verschwinden. Daher ist bei kleiner Reynoldsscher Zahl die gemachte Vernachlässigung im Unendlichen unbedenklich.

Im ganzen endlichen Raum aber ist die Strömung, die zu ψ_0 gehört, regulär und die vernachlässigten Glieder sind daher endlich und bei kleiner Reynoldsscher Zahl klein neben den berücksichtigten Gliedern. Das Gleiche ist auch noch für die Quellgebiete der Fall; hier gilt allerdings nicht der Ausdruck (28) für die Stromfunktion der ungestörten Potentialbewegung, die in diesen Gebieten ja nicht mehr existiert, es gelten auch nicht die Grundgleichungen (1), die ebenfalls die Voraussetzung der Quellenfreiheit enthielten. Es erübrigt sich aber, für diese Gebiete die Grundgleichungen eigens aufzustellen, da aus den Stetigkeitsannahmen für die Ergiebigkeit der Quelle bzw. Senke folgt, daß die Geschwindigkeiten in diesen Gebieten endlich und stetig bleiben und daher ebenfalls die vernachlässigten quadratischen Glieder in den Grundgleichungen bei kleiner Reynoldsscher Zahl klein gegen die berücksichtigten werden. Überdies zeigt die folgende Entwicklung, daß selbst bei Annahme punktförmiger Quelle und Senke die vernachlässigten Glieder von (8) und ebenfalls die daraus resultierenden Geschwindigkeiten der ersten Näherung endlich bleiben, obgleich dann die Geschwindigkeiten der zugrunde gelegten Potentialbewegung unendlich sind. Um so mehr sind bei kleinem S jene Vernachlässigungen berechtigt. Das Gleiche gilt aber dann nicht mehr für die Grundgleichungen (1), die nach der Berechnung der Strömung die Druckverteilung bestimmen, vielmehr werden hier in der Nähe der Quellpunkte die quadratischen Glieder wesentlich, durch die bekanntlich in der Potentialtheorie der Druck berechnet wird.

§ 6. Erste Näherung und Konstantenbestimmung.

Als weitere Annäherung zur Ergänzung der zugrunde gelegten Bewegung fordern wir eine überall, auch im Quellgebiete der Grundbewegung, quellenfreie Strömung mit im Unendlichen verschwindenden Geschwindigkeiten, die die Randbedingungen an der Kugeloberfläche erfüllt und der aus (8) resultierenden Differentialgleichung (11) der ersten Näherung genügt.

Zu ihrer Aufstellung sind die Ausdrücke für ψ_0 und $D\psi_0$ aus den Gleichungen (29a) und (12) zu verwenden. Es folgt (s. die Ausrechnung in Anhang 2):

$$(30) \qquad DD(\psi_1) = \frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu} U^2 \Big[\sin^2\vartheta \cos\vartheta \Big(-3\frac{a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5}\Big) + aA^2 \frac{r^2}{R^5}\Big(\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\Big) - A\Big(\frac{A+x}{\varrho^3} - \frac{A-x}{\varrho_1^3}\Big)\Big)\Big].$$

Dieser Ausdruck der rechten Seite gilt zunächst nur für den Raum außerhalb der Quellgebiete, da er aber endlich bleibt bei Ausdehnung bis an die Punkte $\varrho = 0$ bzw. $\varrho_1 = 0$ hin[1]), so können wir hier die Vorstellung punktförmiger Quelle und Senke voraussetzen und seine Gültigkeit daher über den ganzen unendlichen Raum außerhalb der festen Kugel erstrecken.

Die eindeutige Lösung unserer Randwertaufgabe erfordert die Angabe eines Integrals der Gleichung (30), das im Unendlichen die verlangte Eigenschaft hat, daß die zugehörigen Geschwindigkeiten verschwinden und dessen Wert in der Nähe der festen Kugel sich angeben läßt, so daß es durch Zufügung geeigneter Lösungen der Gl. $DD(\psi) = 0$ möglich wird, die Randbedingungen an der Kugel zu erfüllen. Ein solches Integral in geschlossener Form anzugeben, scheint schwer möglich zu sein, doch folgt aus dem in § 1 erwähnten Zusammenhang der Gleichungen

$$DD(\psi) = F \text{ und } \Delta\Delta(\varphi) = f$$

1) Die Ausdrücke $\frac{r^2}{\varrho^2}$ und $\frac{A+x}{\varrho}$ sind endlich.