Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel

Noether, Fritz

Leipzig, 1912

§ 4. Widerstand nach der ersten Annährung

urn:nbn:de:bsz:31-272814

der Kugeloberfläche, wie wir oben schon für $S > 2$ aus dem Geschwindigkeitsanstieg schlossen. Man erhält also das Bild des bei größeren Geschwindigkeiten beobachteten Wirbelringes auf der Rückseite der Kugel.

Als untere Grenze für den Eintritt der Wirbelbildung ergibt sich der Wert der Reynoldsschen Zahl $S = 2$. Da allerdings diese Grenze über das Gebiet kleiner Reynoldsscher Zahl, der Voraussetzung unserer Näherung, hinausfällt, so bleibt abzuwarten, wie weit die Grenze durch die weitere Entwicklung noch verschoben wird. Es ist noch zu bemerken, daß mit wachsendem S der Wirbelring sich sehr rasch, besonders für kleine Werte von ϑ, vergrößert, doch handelt es sich hier wohl um eine Wirkung der Vernachlässigung höherer Glieder, wie die Fortsetzung der Entwicklung zeigen würde.

§ 4. Widerstand nach der ersten Annäherung.

Der Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel hängt von dem Widerstand ab, den die aus der Stokesschen und der Annäherungsbewegung zusammengesetzte Bewegung ergibt. Es ist indes leicht einzusehen, daß die bisher aufgestellte Näherungsbewegung noch keinen Beitrag zum Widerstand liefert; wir beweisen das an den expliziten Formeln für den Widerstand.

Bezeichnet n die Normale eines Flächenelements an der Grenze einer inkompressiblen reibenden Flüssigkeit, s eine beliebige Richtung in diesem Flächenelement, so ist der Ansatz für die Spannungen in diesem Flächenelement, der den Differentialgleichungen (1) zu grunde liegt, der folgende[1]):

Die Normalspannung (positiv, wenn vom Flächenelement nach der Seite der Flüssigkeit hin gerichtet) ist

$$p_{nn} = -p + 2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n}, \tag{23}$$

die Tangentialspannung in Richtung s:

$$p_{ns} = \mu \left(\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \right), \tag{24}$$

wo v_n und v_s die Geschwindigkeitskomponenten in den betreffenden Richtungen bedeuten. Die Größen v_n und v_s sind hier aus den gefundenen Formeln für die Stromfunktion $\psi = \psi_0 + \psi_1$ zu entnehmen, während p bis auf eine belanglose additive Konstante aus den Grundgleichungen (1) bestimmt ist. Wir erhalten aus diesen für die Kugeloberfläche, mit Rücksicht darauf, daß nach den Randbedingungen die Geschwindigkeits-

1) S. Fußnote auf S. 8.

komponenten u, v, w verschwinden und nach der Gl. (22) der normal gerichtete Geschwindigkeitsgradient endlich ist:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = -\sin\vartheta\,\frac{\partial p}{\partial x} + \cos\vartheta\,\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$= \mu\left[\sin\vartheta\left(\frac{\partial^2 \varDelta\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varDelta\varphi}{\partial z^2}\right) + \cos\vartheta\,\frac{\partial^2 \varDelta\varphi}{\partial x\,\partial r}\right]$$

$$= \mu\left[\frac{\sin\vartheta}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial \varDelta\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\cos\vartheta}{r}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(r\,\frac{\partial \varDelta\varphi}{\partial r}\right)\right]$$

$$= \frac{\mu}{r}\,\frac{\partial D(\psi)}{\partial R} \quad \text{(s. die Gl. (3) u. (6))}$$

oder endlich die einfache Formel:

$$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \frac{\mu}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial D(\psi)}{\partial R}\,. \tag{25}$$

Der zweite Bestandteil der Normalspannung p_{nn}, $2\mu\frac{\partial v_n}{\partial n}$, verschwindet an jeder körperlichen Begrenzungsfläche der Flüssigkeit wegen der Randbedingungen und der Inkompressibilitätsbedingung (2), die hier lautet

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{q}{r}$$

$$= \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial v_s}{R\,\partial\vartheta} - \frac{v_n}{R} + \frac{q}{r} = 0$$

und wegen des Verschwindens der Geschwindigkeitskomponenten v_n und q längs der ganzen Oberfläche sofort ergibt:

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} = 0.$$

Von der Tangentialspannung p_{ns} (24) verschwindet wegen der Randbedingungen an der Oberfläche das erste Glied, es bleibt also:

$$p_{ns} = \mu\,\frac{\partial v_s}{\partial n} = \mu\,\frac{\partial}{\partial R}\,(-u\sin\vartheta + q\cos\vartheta)$$

$$= \mu\,\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\vartheta + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\vartheta\right)$$

$$= \mu\,\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial R}\right).$$

Mit Rücksicht auf die Randbedingung $\psi = \frac{\partial\psi}{\partial R} = 0$ wird endlich:

$$p_{ns} = \frac{\mu}{r}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}. \tag{26}$$

Die Kraftkomponente, die in der Strömungsrichtung (x-Richtung) auf die Zone der Kugeloberfläche

$$d\sigma = 2\pi R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$$

wirkt, ist

$$dK = (p_{nn} \cos\vartheta - p_{ns} \sin\vartheta)\, d\sigma,$$

während die entsprechenden Kraftkomponenten in der y- und z-Richtung wegen der Rotationssymmetrie verschwinden, und die Gesamtkraft wird somit:

$$K = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} (p_{nn} \cos\vartheta - p_{ns} \sin\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta. \tag{27}$$

Aus dieser Ableitung der Widerstandformel ist ersichtlich, daß die von der ursprünglichen Stokesschen Bewegung und die von den sukzessiven Annäherungen herrührenden Anteile am Widerstand sich einfach überlagern, da die schließlich in Betracht kommenden Ausdrücke für den Druck und die Spannungen durch lineare Prozesse aus den Geschwindigkeitskomponenten, bzw. den zugehörigen Stromfunktionen, entstehen. Die aus den Gleichungen (1) resultierenden quadratischen Glieder verschwinden wegen der Randbedingungen an der Kugeloberfläche in der Druckgleichung und daher auch in der Widerstandsformel.

Nun ist ersichtlich, daß der Widerstandsanteil der ersten Näherung (ψ_1) verschwindet, und zwar wegen der Symmetrie der Kugel zu ihrer Äquatorfläche $x = 0$. Die Geschwindigkeitskomponenten dieser Strömung sind ja

$$\begin{aligned} v_{1n} &= \frac{1}{rR} \frac{\partial \psi_1}{\partial \vartheta} \\ &= \frac{3}{32} S U (2\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \frac{(R-a)^2 (2R^2 + aR + a^2)}{R^4} \\ v_{1s} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial R} \\ &= -\frac{3}{32} S U \sin\vartheta \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial R} \frac{(R-a)^2 (2R^2 + aR + a^2)}{R^3}. \end{aligned}$$

Hiernach ist auch die Strömung spiegelbildlich symmetrisch zur Äquatorebene $x = 0$, sie ist vorwärts gerichtet auf der Vorderseite $\left(\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi\right)$, rückwärts gerichtet auf der Rückseite, und die auf die Hälften der Kugel von der Flüssigkeit ausgeübten Kräfte heben sich gegenseitig auf. Anders verhält sich in dieser Hinsicht die zweite Näherung, bei ihr ist, wie bei der Stokesschen Strömung selbst, die Bewegung auf der Vorder- und Rückseite symmetrisch und gleichgerichtet, und daher ist im ganzen ein Beitrag zum Widerstand zu erwarten. *Die Stokessche Formel wird somit Gültigkeit haben bis auf Zusatzglieder, deren Verhältnis zum ursprünglichen quadratisch in der Reynoldsschen Zahl* $S = \sigma a U / \mu$ *ist.*

In der Tat gibt die Gl. (25) für den Druck an der Kugeloberfläche:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \vartheta} = \frac{3}{16} \frac{\mu S U}{a} \sin\vartheta \cos\vartheta \left(-6 \frac{a^4}{R^4} + 6 \frac{a^3}{R^3} - 9 \frac{a^2}{R^2}\right)_{R=a}$$

$$= -\frac{27}{16} \frac{\mu S U}{a} \sin\vartheta \cos\vartheta$$

$$p_1 = P_1 + \frac{27}{32} \frac{\mu S U}{a} \cos^2\vartheta,$$

wo P_1 den Druck in der Äquatorebene bedeutet. Ferner wird wegen Gl. (26)

$$p_{ns} = \frac{\mu}{a} \frac{3}{16} S U \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{2R^2 + aR + a^2}{R^2}\right)_{R=a}$$

$$= \frac{3}{4} \frac{\mu S U}{a} \sin\vartheta \cos\vartheta$$

und endlich

$$K_1 = 2\pi \mu a S U \int_0^\pi \left(-\frac{27}{32} \cos^3\vartheta - \frac{3}{4} \sin^2\vartheta \cos\vartheta\right) d\vartheta = 0,$$

wie oben behauptet wurde.

Mit diesem Resultat scheinen Beobachtungen von Zeleny und Mc. Keehan[1]) im Einklang zu stehen, *daß sich nämlich der Gültigkeitsbereich der Stokesschen Formel bei genau kugelförmigen Körpern wesentlich größer erwies als bei annähernd kugelförmigen Körpern (Sporen).* Während sich bei letzteren schon bei sehr kleinen Werten der Reynoldsschen Zahl ($S = 10^{-3}$) Abweichungen von der Stokesschen Formel zeigten, die bei Vernachlässigung der Trägheitsglieder nicht aus den Abweichungen von der Kugelgestalt zu erklären waren, fanden die Verfasser die Stokessche Formel bei Kugeln streng bestätigt bis zu Werten der Reynoldsschen Zahl, die die Grenze $S = 0{,}1$ noch wesentlich überstiegen. In der Tat war ja das Verschwinden des in der Reynoldsschen Zahl linearen Widerstandsanteils lediglich eine Folge der Kugelsymmetrie bezüglich ihrer Äquatorebene. Auch bei geringer Unsymmetrie würde aber ein linearer Bestandteil auftreten, und dieser müßte sich in höherem Maße äußern, als der quadratische Bestandteil bei Kugeln.

§ 5. Ersatz der Parallelströmung durch eine inhomogene Strömung (mit Quelle und Senke.)

Es bleibt uns noch übrig, die in § 2, S. 13 angegebene Konstantenbestimmung zu rechtfertigen, die mit den bisherigen Mitteln nicht begründet war, da unsere Näherungslösung im Unendlichen versagte. Zu

1) Phys. Ztschr. 11, 1910, S. 78f.