Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel

Noether, Fritz

Leipzig, 1912

§ 2. Berücksichtigung der quadratischen Glieder der Differentialgleichung (8) in erster Näherung

urn:nbn:de:bsz:31-272814

vernachlässigt werden, und es ergibt sich die Grundgleichung für die Stokessche Bewegung:

$$DD(\psi_0) = 0, \tag{9}$$

wozu noch die an sich linearen Randbedingungen unverändert hinzutreten. Die Erfüllung dieser Bedingungen lautet

$$\psi_0 = \frac{U}{4} r^2 \left(-2 + 3\frac{a}{R} - \frac{a^3}{R^3}\right) = -\frac{U}{4} \sin^2 \vartheta (R-a)^2 \frac{2R+a}{R}, \tag{10}$$

wo der Definition nach

$$x = R \cos \vartheta$$
$$r = R \sin \vartheta$$

gesetzt wurde.

Diese Gleichungen, in Verbindung mit den Ausdrücken für die Spannungskomponenten[1]) in einer strömenden zähen Flüssigkeit, führen zu der in der Einleitung genannten Stokesschen Widerstandsformel für die Kugel.

§ 2. Berücksichtigung der quadratischen Glieder der Differentialgleichung (8) in erster Näherung.

Um die quadratischen Glieder der Gl. (8) in erster Annäherung zu berücksichtigen, setzen wir

$$\psi = \psi_0 + \psi_1,$$

wo ψ_0 der in Gl. (10) angegebene Ausdruck sei und ψ_1 von der Ordnung $S\psi_0$ vorausgesetzt wird, unter S die Reynoldssche Zahl $\frac{\sigma a U}{\mu}$ verstanden. Die Vernachlässigung aller Glieder der Differentialgleichung (9), die den Faktor S^2, bzw. $\frac{\sigma}{\mu} S$ enthalten, führt dann, unter Berücksichtigung, daß $DD(\psi_0) = 0$, zu der folgenden:

$$DD(\psi_1) = \frac{\sigma}{\mu} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial D\psi_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial D\psi_0}{\partial x} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} D\psi_0 \right), \tag{11}$$

die auf der rechten Seite nur bekannte Größen enthält. Dazu kommen die Randbedingungen, daß für $R = a$

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial R} = 0$$

und im Unendlichen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0 \text{ sei.}$$

---

1) Saint-Venant: Comptes Rendus 17 (1843) p. 1240. Stokes: Camb. Trans. 8 (1845) p. 287 (Papers, vol. I, p. 75). S. a. Lamb: Hydrodynamik, § 314.

Die Gleichung (11) ist durch Einsetzen aus (10) und der hieraus folgenden Gleichung:

$$D\psi_0 = -\frac{3}{2} a\, U \frac{\sin^2\vartheta}{R} = -\frac{3}{2} a\, U \frac{r^2}{R^3} \tag{12}$$

auszuführen. Es ergibt sich (vgl. die Ausrechnung im Anhang 1)

$$DD(\psi_1) = \frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu} U^2 \sin^2\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{2a}{R^2} - \frac{3a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5}\right). \tag{13}$$

Bevor wir zur Behandlung dieser Gleichung gehen, sind einige Vorbemerkungen nötig über die Lösungen der Gleichungen

$$D\psi = 0 \text{ und } D\psi = F,$$

auf die wesentlich die sukzessiven Annäherungen der exakten Differentialgleichungen zurückzuführen sind.[1])

Aus den im § 1 aufgestellten Beziehungen zwischen den Funktionen φ und ψ folgt, daß man aus jeder Lösung φ der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ durch den Prozeß $\psi = r\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ eine Lösung der Gleichung $D\psi = 0$ erhält, und ebenso aus der Lösung der Gleichung $\Delta\varphi = f$ die Lösung der Gleichung $D\psi = r\frac{\partial f}{\partial r} = F$. Nun läßt sich bekanntlich die Gleichung $\Delta\varphi = 0$ durch eine Summe von homogenen Funktionen des Ortes x, y, z (bzw. x, r), die räumlichen Kugelfunktionen, allgemein integrieren, die im vorliegenden Fall der Rotationssymmetrie um die X-Achse in die zonalen[2]) Kugelfunktionen übergehen. Es folgt also, daß sich in gleicher Weise die Gleichung $D\psi = 0$ durch eine Summe von homogenen Funktionen der Koordinaten x, r integrieren läßt, die sich aus den Kugelfunktionen in einfacher Weise ableiten.

Weiter läßt sich die allgemeine Lösung der Gleichung $\Delta\varphi = f$ durch Entwicklung von f in eine Reihe von homogenen Funktionen finden, deren jede das Produkt aus einer Kugelfunktion und einer Potenz des Radius R ist, und zwar einer zonalen Kugelfunktion, wenn f Achsensymmetrie in bezug auf die X-Achse hat. Die Lösung φ kann dann in gleicher Weise entwickelt werden, wobei jedem homogenen Bestandteil von f ein gleicher in φ, und zwar von einem um 2 höheren Grade, entspricht. Aus dem Zusammenhang zwischen den Funktionen φ und ψ folgt, daß die Lösung der Gleichung $D\psi = r\frac{\partial f}{\partial r} = F$ sich in analoger Weise darstellen läßt, wobei an Stelle der Kugelfunktionen die homogenen Lösungen der Gleichung $D\psi = 0$ treten.

---

1) Ausführliche Theorie dieser Funktionen bei Sampson: London Phil. Trans. Bd. 182 (1891), S. 449f.

2) Bezeichnung nach Thomson uud Tait, Nat. Phil.

Für diese erhalten wir aus der Reihe der zonalen Kugelfunktionen φ die folgende Reihe:

φ	$\psi = r\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$
$P_0(\vartheta) = 1$	0
$RP_1(\vartheta) = x$	0
$R^2 P_2(\vartheta) = \frac{1}{2}(3x^2 - R^2)$	$-r^2 = -R^2 \sin^2 \vartheta$
$R^3 P_3(\vartheta) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3xR^2)$	$-3xr^2 = -3R^3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$
usw.	usw.
$R^{-1} P_0(\vartheta) = R^{-1}$	$-r^2 R^{-3} = -R^{-1} \sin^2 \vartheta$
$R^{-2} P_1(\vartheta) = xR^{-3}$	$-3xr^2 R^{-5} = -3R^{-2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$
usw.	usw.

Um die Differentialgleichungen für die so definierten homogenen Funktionen ψ aufzustellen, setzen wir allgemein

$$\psi = B(\vartheta) \cdot \Psi(R)$$

und erhalten zunächst:

$$(14) \quad D\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = B\frac{d^2 \Psi}{dR^2} + \frac{\Psi}{R^2}\left(\frac{d^2 B}{d\vartheta^2} - \operatorname{ctg} \vartheta \frac{dB}{d\vartheta}\right).$$

Durch den speziellen Ansatz

$$\Psi = R^m$$

folgt dann aus $D\psi = 0$ die Differentialgleichung für B:

$$(15) \qquad \frac{d^2 B}{d\vartheta^2} - \operatorname{ctg} \vartheta \frac{dB}{d\vartheta} + m(m-1)B = 0.$$

Hiernach besteht, wie auch schon aus der obigen Reihe ersichtlich ist, die Beziehung:

$$B_m = B_{-m+1}.$$

Ferner zeigt die Reihe, daß es zu jedem Grade m eine Lösung B_m von (13) gibt, die eine ganze rationale Funktion von $\cos \vartheta$ ist. Eine ganz analoge Untersuchung wie die bei den Kugelfunktionen übliche würde zeigen, daß (ausgenommen im Falle $m = 1$ bzw. $m = 0$[1]) je nur diese einzige rationale Funktion B_m zu jedem Index m existiert. Die Reihe dieser Funktionen lautet, unter geeigneter Festsetzung ihrer numerischen Faktoren, die noch später erfolgen wird:

$$\begin{aligned}
B_1 &= B_0 = 1 \text{ (und } \cos \vartheta) \\
B_2 &= B_{-1} = -\tfrac{1}{2} \sin^2 \vartheta \\
B_3 &= B_{-2} = -\sin^2 \vartheta \cos \vartheta \\
B_4 &= B_{-3} = -\tfrac{3}{8} \sin^2 \vartheta (5\cos^2 \vartheta - 1) \\
B_5 &= B_{-4} = -\tfrac{1}{2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta (7\cos^2 \vartheta - 3) \\
&\text{usw.}
\end{aligned}$$

1) Für diese Fälle werden die Lösungen aus der Gl. (15) leicht direkt erhalten.

Um nun die Gleichung

$$D\psi = F(x, r^2)$$

zu integrieren, denken wir uns F in eine Reihe von homogenen Funktionen

$$k_{mn}\, R^n B_m(\vartheta)$$

entwickelt. Für die im Folgenden in Betracht kommenden Fälle ist das immer möglich. Die Lösung selbst wird dann eine Reihe

$$\psi = \Sigma \psi_{mn},$$

deren einzelnes Glied der Differentialgleichung

$$D(\psi_{mn}) = k_{mn} R^n B_m(\vartheta)$$

genügen muß. Für ψ_{mn} setzen wir hier

$$\psi_{mn} = \Psi_{mn}(R) B_m(\vartheta) \tag{16}$$

und erhalten mittels (14) und (15) die Gleichung:

$$\frac{d^2 \Psi_{mn}}{d R^2} - m(m-1)\frac{\Psi_{mn}}{R^2} = k_{mn} R^n,$$

deren vollständige Lösung im allgemeinen lautet:

$$\Psi_{mn} = \frac{k_{mn} R^{n+2}}{(n-m+2)(n+m+1)} + c_1 R^m + c_2 R^{-m+1}. \tag{17}$$

Eine Ausnahme bilden ersichtlich die Fälle

$$n = m - 2 \text{ und } n = -m - 1,$$

für die die entsprechende Formel lautet:

$$\Psi_{mn} = \frac{k_{mn} R^{n+2} \log R}{2n+3} + c_1 R^m + c_2 R^{-m+1}, \tag{17'}$$

unter c_1, c_2 wie oben willkürliche Konstanten verstanden.

Die Differentialgleichungen der Hydrodynamik, die für eine achsensymmetrische Strömung nach Elimination des Druckes in der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung (8) zusammengefaßt sind, lassen sich allgemein durch sukzessive Lösung von linearen Näherungsgleichungen auf Grund der vorhergehenden Formeln integrieren. Denn jede der sukzessiven Näherungsgleichungen erhält ganz analog wie die oben abgeleitete Gl. (13) für die erste Näherung die Form

$$DD(\psi_i) = F_i(x, r^2),$$

ist also äquivalent mit dem System von linearen Gleichungen zweiter Ordnung:

$$D(E_i) = F_i(x, r^2)$$
$$D(\psi_i) = E_i(x, r^2).$$

Während diese formale Integration keine prinzipielle Schwierigkeit hat, zeigen sich aber, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, wesentliche Hindernisse, die Randbedingungen zu erfüllen, wenn das Strömungsgebiet unendliche Ausdehnung hat, und zwar tritt diese Schwierigkeit schon bei der nun folgenden Integration der ersten Näherungsgleichung (13) auf.

Wenden wir auf diese die obigen Bezeichnungen an, so lautet sie:

$$(13a) \qquad D(E_1) = -\frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3(\vartheta) \left(\frac{2a}{R^2} - \frac{3a^2}{R^3} + \frac{a^4}{R^5}\right)$$

$$(13b) \qquad D(\psi_1) = E_1 .$$

Ein Integral von (13a) ist auf Grund der Gleichungen (16) und (17):

$$E_1 = -\frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3(\vartheta) \left(-\frac{a}{3} + \frac{3}{4}\frac{a^2}{R} + \frac{a^4}{6R^3}\right).$$

Sodann ein partikuläres Integral von (13b), das mit ψ_1' bezeichnet sei:

$$(18) \qquad \psi_1' = -\frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3(\vartheta) \left(\frac{aR^2}{12} - \frac{a^2 R}{8} - \frac{a^4}{24R}\right).$$

Das allgemeine Integral der Gleichungen (8a) und (8b) setzt sich zusammen aus diesem partikulären Integral (18) und dem allgemeinen Integral der Gleichung $DD\psi = 0$, das sich auf Grund obiger Vorbemerkungen ergibt zu

$$(19) \qquad -\frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu} U^2 \sum_1^\infty {}^m B_m(\vartheta) \left(c_{m1} R^{-m+1} + c_{m2} R^{-m+3} + c_{m3} R^m + c_{m4} R^{m+2}\right).$$

Die unendlich vielen Konstanten c des Ausdruckes (19) sind nun geeignet zu bestimmen, damit die Randbedingungen

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 \text{ für } R = \infty$$

und

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial R} = 0 \text{ für } R = a$$

durch die Kombination der Ausdrücke (18) und (19) erfüllt werden. Da nun die Funktionen B_m je Funktionen m-ter Ordnung von $\cos\vartheta$ sind, wie aus ihrer Ableitung allgemein hervorgeht, da also keine linearen Beziehungen in dem System der Funktionen B_m bestehen können, da andererseits die aufgestellten Randbedingungen unabhängig vom Winkel ϑ sind, so müssen die Randbedingungen in der Kombination der Ausdrücke (18) und (19) identisch je durch die Faktoren der Funktionen B_m erfüllt werden.

Zur Erfüllung der für $R = \infty$ gültigen Bedingungen ist es erforderlich, daß sämtliche Glieder der Funktion ψ_1 von niedrigerer Ordnung in R als der zweiten sind. Dieser Forderung widerspricht aber das erste Glied des Ausdrucks ψ' in (18):

$$\frac{3}{16}\frac{\sigma}{\mu}U^2 B_3(\vartheta)\, a\, R^2$$

und dieses Glied kann, weil der Faktor von B_3, aus (18) und (19) zusammengenommen, für sich die Bedingungen befriedigen muß, auch nicht durch irgend welche anderen Glieder der Summe (19) kompensiert werden.

Dies ist der Widerspruch, auf den bereits Whitehead auf anderem Wege geführt wurde. Seine Vermutung, daß deshalb das allgemeine hydrodynamische Problem überhaupt keine stetigen Lösungen zulasse, sondern daß Diskontinuitätsflächen im Sinne der Helmholtzschen Wirbeltheorie vorhanden seien, ist aber nicht begründet. Die Schwierigkeit erklärt sich daraus, daß die Stokessche Bewegung im Unendlichen keine Annäherung an die wirkliche Bewegung mehr darstellt, sondern Glieder vernachlässigt, die größer als die berücksichtigten sind. Eine unmittelbare Folge davon ist es, daß unser Ausdruck $E_1 = D\psi_1$ von höherer Ordnung in R und daher im Unendlichen größer als $D\psi_0$ wird.

Da ohne die Berücksichtigung der im Unendlichen geltenden Grenzbedingungen aber die eindeutige Bestimmung der Funktion ψ nicht ausführbar ist, so bleibt auch die Stromverteilung in der Nähe der Kugel, von der insbesondere der Widerstand abhängt, noch völlig unbestimmt. Doch wird es uns auf dem in der Einleitung angegebenen Wege gelingen, *eine andere Bewegung eindeutig zu bestimmen, für die die oben gesuchte Bewegung als eine in der Nähe der Kugel und in endlicher Entfernung von ihr gültige Annäherung angesehen werden kann.* So ist es dann möglich, die noch unbestimmten Konstanten in der Funktion ψ_1 ebenfalls zu bestimmen, unabhängig davon, daß die gewonnene Formel für ψ_1 im Unendlichen aufhört, Gültigkeit zu haben.

Da diese Untersuchung (§ 5 und 6) größeren Raum einnimmt, so geben wir hier zunächst nur ihr Resultat an. Dieses ist, daß in dem Ausdruck (19) die sämtlichen Faktoren der Funktionen B_m, mit Ausnahme desjenigen von B_3, verschwinden, und daß in dem Faktor von B_3 die Konstanten c_{33} und c_{34} ebenfalls verschwinden. Zur Bestimmung der übrig bleibenden Konstanten c_{31} und c_{32} reichen die Randbedingungen an der Kugeloberfläche $R = a$ aus.

Aus $\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial R} = 0$ für $R = a$ folgt:

$$-\frac{a^3}{12} + c_{31}a^{-2} + c_{32} = 0$$

$$\frac{a^2}{12} - 2c_{31}a^{-3} = 0.$$

Also $$c_{31} = \frac{a^5}{24}; \; c_{32} = -\frac{a^3}{24}$$

(20) und $$\psi_1 = -\frac{9}{4}\frac{\sigma}{\mu} U^2 B_3(\vartheta)\left(\frac{aR^2}{12} - \frac{a^2 R}{8} - \frac{a^3}{24} - \frac{a^4}{24R} + \frac{a^5}{24R^2}\right)$$
$$= \frac{3}{32} S U \sin^2\vartheta \cos\vartheta \frac{(R-a)^2(2R^2 + aR + a^2)}{R^2}.$$

Nehmen wir das Glied ψ_0 aus Gl. (10) hinzu, so erhalten wir endlich als erste Annäherung:

(21) $$\psi_0 + \psi_1 = -\frac{U}{4}\sin^2\vartheta \frac{(R-a)^2}{R^2}\Big[R(2R+a) - \frac{3}{8} S \cos\vartheta\,(2R^2 + aR + a^2)\Big].$$

Aus Gleichung (21) ist ohne weiteres ersichtlich, daß der Einfluß des ersten Näherungsgliedes ψ_1 nur von dem numerischen Wert der Reynoldsschen Zahl $S = \frac{\sigma U a}{\mu}$ abhängen kann.

§ 3. Diskussion der ersten Annäherung.

Die Gleichung (21) läßt vorläufige Schlüsse auf die Strömungsform ziehen, die unter dem Einfluß der Trägheit eintreten wird. Die tangentielle Geschwindigkeitskomponente,

$$v_\vartheta = u \sin\vartheta - q\cos\vartheta$$
$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{r}{R} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{x}{R} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial R}$$

verschwindet den Randbedingungen entsprechend für die Kugeloberfläche $R = a$. Ihr Anstieg senkrecht zur Oberfläche

$$\left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial R}\right)_{R=a}$$

dagegen hat einen endlichen Wert und gibt ein Bild für die Strömungsverteilung in der Nähe der Kugel. Man erhält mit Rücksicht auf das Verschwinden von $\frac{\partial\psi}{\partial R}$ für $R = a$:

$$\left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial R}\right)_{R=a} = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)_{R=a} = -\frac{1}{R\sin\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}\,{}_{(R=a)}$$
$$= \frac{U}{2}\sin\vartheta\,\frac{R(2R+a) - \frac{3}{8} S\cos\vartheta\,(2R^2 + aR + a^2)}{R^3}\,{}_{(R=a)}$$

(22) $$= \frac{3}{2}\frac{U}{a}\sin\vartheta\left(1 - \frac{S}{2}\cos\vartheta\right).$$

Hiernach ist der Geschwindigkeitsanstieg, der bei der Stokesschen Bewegung auf der Vorder- und Rückseite der gleiche war (da $\sin\vartheta =$