Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel

Noether, Fritz

Leipzig, 1912

§ 1. Die allgemeine hydrodynamische Differentialbeziehung und die Stokessche Strömung

urn:nbn:de:bsz:31-272814

und einer weiteren Arbeit[1]) den Existenzbeweis für die stationäre Lösung eines verwandten Problems durchgeführt und sein Ansatz dürfte wohl auch zu dem hier geforderten Existenzbeweis führen. Die im Folgenden untersuchte Bewegung stellt aber nur eine Näherungsbewegung in dem Sinne dar, daß in ihren Bedingungsgleichungen die vernachlässigten Glieder sicher klein sind neben den berücksichtigten.

§ 1. Die allgemeinen hydrodynamischen Differentialbeziehungen und die Stokessche Strömung.

Es bezeichne u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten einer Strömung, an der Stelle x, y, z nach den Achsen der x, y, z gemessen. σ sei die Dichte, μ die Viskositätskonstante, p der Druck der Flüssigkeit. Dann lauten die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für inkompressible stationäre Strömung:

$$(1)\qquad \begin{cases} \sigma\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial p}{\partial x}-\mu\Delta u=0\\ \sigma\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial p}{\partial y}-\mu\Delta v=0\\ \sigma\left(u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial p}{\partial z}-\mu\Delta w=0\end{cases}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

wo

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\Delta$$

gesetzt ist.

Dazu treten noch die Randbedingungen, die für den zu untersuchenden Fall einer ruhenden Kugel in Parallelströmung so lauten: An der Kugeloberfläche soll $u=v=w=0$ sein, während im Unendlichen in jeder Richtung $u=U$, $v=0$, $w=0$ verlangt wird.

Die Inkompressibilitätsbedingung (2) pflegt man in allen Fällen, in denen eine ausgezeichnete Richtung, hier die x-Richtung, vorhanden ist, in die keine Wirbelkomponente der Strömung fällt, identisch zu erfüllen durch den Ansatz:

$$(3)\qquad u=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};\quad v=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y};\quad w=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}.$$

Wenn die Strömung außerdem Achsensymmetrie um die X-Achse hat, ferner angenommen wird, daß die Stromlinien überall in den durch die

1) Über die Stokessche Formel . . ., II; Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 7, Nr. 1 (1911).

X-Achse hindurchgehenden Ebenen liegen, so kann die Funktion φ ohne Einschränkung der Allgemeinheit als Funktion von x und

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

angesetzt werden. Bezeichnet nun q die in die Richtung des Radius r fallende Geschwindigkeitskomponente, so gehen die Gleichungen (3) über in:

$$u = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{\partial r}$$

$$q = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{\partial x}.$$

Die Funktion

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \psi \tag{4}$$

gewinnt also durch die genannten Einschränkungen der Strömungsform die Bedeutung der Stokesschen Stromfunktion[1]), durch die sich die Geschwindigkeitskomponenten bekanntlich so ausdrücken:

$$u = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}; \qquad q = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{5}$$

Aus dieser Ableitung folgen zwischen den Funktionen φ und ψ sogleich die weiteren Beziehungen:

$$r\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) = r\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = D(\psi). \tag{6}$$

Der so definierte Differentialprozeß D spielt in mancher Hinsicht für die Funktion ψ die gleiche Rolle, wie der Differentialprozeß Δ für die Funktion φ, sein Verschwinden würde die Wirbelfreiheit der Strömung zum Ausdruck bringen. Genau in der gleichen Weise, wie die Gl. (6) aus der Gl. (4) gewonnen wurde, läßt sich nun auch noch weiter schließen:

$$r\frac{\partial\Delta\Delta\varphi}{\partial r} = DD\psi, \tag{7}$$

wo nun $\Delta\Delta$ und DD die Wiederholung des Prozesses Δ bzw. D bedeutet. Wir werden uns im folgenden nicht auf die Benützung einer der Funktionen φ oder ψ beschränken, sondern je nach dem vorliegenden Zweck die geeignetere Wahl treffen. Der Übergang von der einen zur anderen Funktion ist stets mittels der Gl. (4), (6), (7) leicht auszuführen.

Aus den Gl. (1) haben wir zunächst den Druck p zu eliminieren, da er in die Randbedingungen nicht eingeht, sondern erst nachträglich

1) Stokes: Camb. Trans. 7. 1842 (Papers, vol. I, p. 1). S. a. Lamb, Hydrodynamik, § 94.

mittels der Gl. (1) aus den gefundenen Geschwindigkeitswerten berechnet wird. Aus (1) entstehen zunächst die folgenden Gleichungen:

$$(1') \qquad \begin{cases} \sigma\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + q\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta u = 0 \\ \sigma\left(u\frac{\partial q}{\partial x} + q\frac{\partial q}{\partial r}\right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \mu\left(\frac{y}{r}\Delta v + \frac{z}{r}\Delta w\right) = 0 \end{cases}$$

oder mittels der Gl. (3)

$$\sigma\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + q\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(p - \mu\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x}\right) + \mu\Delta\Delta\varphi = 0$$

$$\sigma\left(u\frac{\partial q}{\partial x} + q\frac{\partial q}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(p - \mu\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x}\right) = 0.$$

Die Elimination von p ergibt somit:

$$\sigma\Big[u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) + q\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial q}{\partial x}\right)\Big] + \mu\frac{\partial \Delta\Delta\varphi}{\partial r} = 0.$$

Hier ist nun die Einführung der Stromfunktion ψ mittels der Gl. (4), (5), (6), (7) am zweckmäßigsten, wir erhalten so aus der vorangehenden Gleichung durch Multiplikation mit r und mittels geringer Vereinfachungen die folgende für die Funktion ψ:

$$(8) \qquad DD(\psi) = \frac{\sigma}{\mu}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial D\psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial D\psi}{\partial x} - \frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x}D\psi\right).$$

Zur Gl. (8) treten noch die Randbedingungen, welche ausdrücken, daß im Unendlichen (im Falle der Parallelströmung) überall

$$(8a) \qquad -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = U \quad \text{und} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

sei, daß ferner für die Kugel $R = \sqrt{x^2 + r^2} = a$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

sei. Da die Funktion ψ nur bis auf eine additive Konstante bestimmbar ist, so kann diese so gewählt werden, daß die letzteren Bedingungen übergehen in

$$(8b) \qquad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$$

für $R = a$, wobei ψ als Funktion des Radius R und des Polarwinkels $\vartheta = \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{x}$ gedacht ist.

Unter den in der Einleitung genannten Voraussetzungen für die Stokessche Bewegung kann nun in (8) die rechte Seite, deren Glieder quadratisch in ψ sind, neben den linearen Gliedern der linken Seite vernachlässigt werden, und es ergibt sich die Grundgleichung für die Stokessche Bewegung:

$$DD(\psi_0) = 0, \tag{9}$$

wozu noch die an sich linearen Randbedingungen unverändert hinzutreten. Die Erfüllung dieser Bedingungen lautet

$$\psi_0 = \frac{U}{4} r^2 \left(-2 + 3\frac{a}{R} - \frac{a^3}{R^3}\right) = -\frac{U}{4} \sin^2 \vartheta (R - a)^2 \frac{2R + a}{R}, \tag{10}$$

wo der Definition nach

$$x = R \cos \vartheta$$
$$r = R \sin \vartheta$$

gesetzt wurde.

Diese Gleichungen, in Verbindung mit den Ausdrücken für die Spannungskomponenten[1]) in einer strömenden zähen Flüssigkeit, führen zu der in der Einleitung genannten Stokesschen Widerstandsformel für die Kugel.

§ 2. Berücksichtigung der quadratischen Glieder der Differentialgleichung (8) in erster Näherung.

Um die quadratischen Glieder der Gl. (8) in erster Annäherung zu berücksichtigen, setzen wir

$$\psi = \psi_0 + \psi_1,$$

wo ψ_0 der in Gl. (10) angegebene Ausdruck sei und ψ_1 von der Ordnung $S\psi_0$ vorausgesetzt wird, unter S die Reynoldssche Zahl $\frac{\sigma a U}{\mu}$ verstanden. Die Vernachlässigung aller Glieder der Differentialgleichung (9), die den Faktor S^2, bzw. $\frac{\sigma}{\mu} S$ enthalten, führt dann, unter Berücksichtigung, daß $DD(\psi_0) = 0$, zu der folgenden:

$$DD(\psi_1) = \frac{\sigma}{\mu} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial D\psi_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial D\psi_0}{\partial x} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} D\psi_0 \right), \tag{11}$$

die auf der rechten Seite nur bekannte Größen enthält. Dazu kommen die Randbedingungen, daß für $R = a$

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial R} = 0$$

und im Unendlichen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0 \text{ sei.}$$

---

1) Saint-Venant: Comptes Rendus 17 (1843) p. 1240. Stokes: Camb. Trans. 8 (1845) p. 287 (Papers, vol. I, p. 75). S. a. Lamb: Hydrodynamik, § 314.