Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel

Noether, Fritz

Leipzig, 1912

Einleitung

urn:nbn:de:bsz:31-272814

Einleitung.

Der Widerstand, den ein in einer Flüssigkeit bewegter Körper findet, oder der Gesamtdruck, den strömende Flüssigkeit auf einen ruhenden Körper ausübt, hängt von der Spannungsverteilung in der Flüssigkeit längs der Körperoberfläche ab. Von der hydrodynamischen Potentialtheorie wird gerade diese Spannungsverteilung nicht richtig dargestellt, im Zusammenhang damit, daß die Theorie der Bedingung des Haftens der Flüssigkeit an der Körperoberfläche, die den beobachteten Strömungserscheinungen annähernd Ausdruck gibt, nicht genügen kann. Sie versagt daher bei der Berechnung des gesuchten Widerstandes, während die von Navier und Stokes begründete Theorie der Flüssigkeiten mit innerer Reibung auch der Haftbedingung gerecht wird. Die wesentliche Schwierigkeit aber für die strenge Behandlung des Problems mit Hilfe der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen ist der quadratische Charakter dieser Gleichungen, der ihre vollständige Auswertung vorläufig kaum erwarten läßt. Nur von zwei extremen Seiten her wurde bisher der Versuch gemacht, sie zur Behandlung der vorliegenden Fragen anzugreifen. (Die Untersuchungen von Helmholtz über Wirbelbewegungen kommen in diesem Zusammenhang nicht in Betracht, da seine Voraussetzung von Unstetigkeitsflächen in der Strömung nicht den Bedingungen reibender Flüssigkeiten entspricht und auch bei verschwindender Reibung zu instabilen Strömungsformen führt.[1]))

Stokes[2]) behandelt den Fall einer Flüssigkeit von sehr großer Zähigkeit oder geringer Dichte, für die die inneren Widerstände so groß gegenüber den Trägheitskräften sind, daß letztere vernachlässigt

1) Helmholtz: Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen, Ges. Werke, Bd. 1, S. 152. Vgl. auch Th. v. Kármán: Über den Mechanismus des Flüssigkeitswiderstands, Gött. Nachr., 1911, S. 509 u. 1912, S. 547.

2) Stokes: On the Effect of the Internal Friction .., Camb. Trans. S. [8] 9 (1851); Papers, vol. III, p. 1.

werden können; oder, was auf das Gleiche hinauskommt, den Fall, daß die Trägheit wegen der Kleinheit der Geschwindigkeit, oder der Kleinheit der eingetauchten Körper und der dadurch bedingten geringen Geschwindigkeitsunterschiede vernachlässigt werden kann. In diesen Fällen werden die erwähnten Differentialgleichungen linear; das Stokessche Resultat für den Fall der Bewegung einer Kugel ist die bekannte Formel für den Widerstand:

$$W = 6\pi\mu U a,$$

wo U die Geschwindigkeit der Kugel, a ihren Radius und μ den Koeffizienten der inneren Reibung bedeutet.

Von der entgegengesetzten Richtung her, dem Falle kleiner Reibung, wo die Trägheit ein ausschlaggebender Faktor ist, hat zuerst L. Prandtl die Aufgabe angegriffen[1]), durch Untersuchung der Grenzschichten d. h. der Schichten in der nächsten Nähe der Oberfläche, in denen die an der Oberfläche haftende Strömung sehr rasch zu der äußeren Geschwindigkeit ansteigt. Diese Untersuchungen führen zwar zur Erklärung der „Ablösung" der Strömung und der Wirbelbildung hinter dem Körper, sie vermögen aber nicht die Strömung auf der Rückseite hinreichend zu berechnen, um zu einem Widerstandsgesetz zu führen. Die wesentliche Schwierigkeit liegt hier darin, daß die Flüssigkeitsbewegung auch bei beliebig verkleinerter Reibung nicht in die reibungsfreie Potentialbewegung übergeht, eben wegen der oben erwähnten Unterschiede in den Randbedingungen der Potentialströmung und der wirklichen wirbelnden Strömungen. Dadurch wird es erforderlich, entweder als erste Annäherung eine von der wirklichen Bewegung wesentlich abweichende Strömung zugrunde zu legen, oder aber die nur experimentell ermittelte Strömung in einiger Entfernung von der Oberfläche zu benützen.

Wollte man diese Untersuchungen zu einem mathematisch exakten Näherungsverfahren ausbilden so müßte man, ausgehend von einer Potentialbewegung, die die Differentialgleichungen streng befriedigt, aber nicht die Randbedingungen, eine Lösung suchen, die die richtigen Randbedingungen sukzessive annähert. Leichter scheint aber der entgegengesetzte Weg zu sein: Ausgehend von der Stokesschen Bewegung, die zwar die Randbedingungen streng befriedigt, aber nicht die Differentialgleichungen, eine Annäherung an die Differentialgleichungen zu suchen. Dazu soll die folgende Untersuchung einen Beitrag liefern.

---

1) Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verh. d. int. Math. Kongresses, Heidelberg 1904; s. a. die Göttinger Dissertationen: H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten . . ., 1904 (Ztschr. f. Math. u. Physik, Bd. 55); E. Boltze: Grenzschichten an Rotationskörpern . . ., 1908; K. Hiemenz: Die Grenzschicht an einem . . . Kreiszylinder, 1911 (Dinglers Polytechn. Journal, Bd. 326).

Zu dieser Problemstellung hat noch ein anderer Gesichtspunkt geführt, die Frage nach dem Gültigkeitsbereich der genannten Stokesschen Formel, die für grundlegende Untersuchungen der modernen Physik eine wesentliche Rolle spielt, nämlich für die Bestimmungen des hypothetischen Elementarquantums der Elektrizität, der Elektronenladung, bezw. die Prüfung, ob ein solches Elementarquantum überhaupt existiert.[1]) Während für die Untersuchung des Gültigkeitsbereichs der Stokesschen Formel nach der Seite kleiner Dimensionen der bewegten Körper hin die kinetische Gastheorie in Frage kommt, bezieht sich die vorliegende hydrodynamische Untersuchung, die auch bereits experimentell in Angriff genommen worden ist[2]), auf den Gültigkeitsbereich nach der Seite wachsender Dimensionen hin. Wie schon Rayleigh[3]) auf Grund einer einfachen Dimensionsbetrachtung bemerkt hat, hängt die Gültigkeit der Stokesschen Formel wesentlich nur von der Kleinheit der unbenannten „Reynoldsschen“ Zahl ab:

$$S = \frac{\sigma a U}{\mu},$$

wo σ die Dichte der Flüssigkeit bezeichnet. Daher wird eine Annäherung an die Stokessche Bewegung eine Entwicklung der Integrale der hydrodynamischen Differentialgleichungen nach Potenzen dieser Größe sein müssen. Zu dieser Entwicklung ist das Folgende nur ein erster Schritt, indem wir das erste zur Stokesschen Bewegung hinzutretende Glied explizit aufstellen.

Diese Aufgabe wurde früher schon von Whitehead in Angriff genommen[4]), doch scheiterte sein Versuch an Schwierigkeiten, die in der Natur der Stokesschen Vernachlässigungen liegen, wie B. W. Oseen in Verbindung mit einer neuen Begründung der Stokesschen Widerstandsformel hervorgehoben hat.[5]) Obwohl im allgemeinen unter der Voraussetzung kleiner Werte der Reynoldsschen Zahl die Stokessche Vernachlässigung der Trägheitsglieder berechtigt ist, so trifft dies nicht mehr zu in sehr großer Entfernung von der Kugel, wo immer einzelne dieser Glieder groß werden gegen die berücksichtigten. Diese hat Oseen von vornherein mit beachtet und gelangt so zu einer Strömung, die in großen Entfernungen zwar wesentlich von der Stokesschen ab-

1) Zusammenstellung bei F. Ehrenhaft: Phys. Ztschr. 11 (1910), S. 940 f.

2) Allen: Phil. Mag. 5, 50 (1900), p. 323, 519. Zeleny u. Mc. Keehan: Phys. Ztschr. 11 (1910), S. 78.

3) Phil. Mag. (4) 46 (1893) p. 354 f. (Papers VI, p. 78 f.).

4) Quarterly Journal of Mathematics 23 (1889) p. 78, 143.

5) Über die Stokessche Formel . . ., Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 6 (1910), Nr. 29. (Beim Erscheinen dieser Abhandlung war das Manuskript der vorliegenden Arbeit im Wesentlichen fertiggestellt.)

weicht, in der Nähe der Kugel aber durch diese bei kleiner Reynoldsscher Zahl appoximiert wird und daher auch zur selben Widerstandsformel führt. Der von Stokes begangene Fehler erweist sich also für seinen Zweck als belanglos, dagegen macht er sich geltend bei dem von Whitehead eingeschlagenen Wege der weiteren Entwickelung, indem es sich als unmöglich erweist, diese eindeutig zu bestimmen.

Doch läßt sich die Stokessche Ableitung auch auf einem anderen als dem von Oseen eingeschlagenen Wege rechtfertigen, und dieses Verfahren scheint leichter zu der geforderten weiteren Annäherung zu führen. Wir betrachten nicht wie Stokes eine Parallelströmung, in der die Kugel ruht, sondern eine Strömung, die durch eine in großer Entfernung von der Kugel befindliche Quelle und eine auf der entgegengesetzten Seite in gleicher Entfernung befindliche Senke hervorgerufen wird, eine Strömung, die sich ja in der Nähe der Kugel nicht wesentlich von einer Parallelströmung unterscheidet, wenn die Entfernung der Quelle hinreichend groß ist gegenüber dem Kugelradius. In unendlicher Entfernung aber ist diese Strömung wesentlich von der Parallelströmung verschieden, und dadurch wird es ermöglicht, daß die bei der Stokesschen Bewegung gekennzeichneten Schwierigkeiten hier nicht auftreten. Es gelingt so in der Tat, eine eindeutige Lösung für die Differentialgleichungen und Randbedingungen der ersten Näherung zu finden.

Mit der Frage nach dem Gültigkeitsbereich der Stokesschen Formel hängt die andere zusammen, bei welcher unteren Geschwindigkeitsgrenze die bei großen Geschwindigkeiten stets beobachtete Rückströmung und Wirbelbildung auf der Rückseite des Körpers eintritt. Unsere erste Näherung gibt allerdings auch hier eine vorläufige Antwort, doch bleibt, da diese Grenze schon aus dem Gebiete sehr kleiner Reynoldsscher Zahl herausfällt, noch abzuwarten, wie durch die weitere Entwicklung diese Grenze beeinflußt wird.

Die folgende Untersuchung gründet sich auf die Annahme stationärer Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Es müßte allerdings von vornherein in Zweifel gezogen werden, ob eine solche über den ganzen unendlichen Raum ausgedehnte Bewegung mit den hydrodynamischen Differentialgleichungen und Randbedingungen überhaupt verträglich ist, ob nicht etwa jede Bewegung von periodisch wechselnden Wirbelungen begleitet ist. In der Tat würden die genannten Schwierigkeiten auch dann fortfallen, wenn wir die zugrunde gelegte stationäre Bewegung durch eine periodische Bewegung, äquivalent einem Pendeln der Kugel, ersetzten, aber die mathematischen Komplikationen würden sich dann schon wesentlich erhöhen. Doch hat C. W. Oseen in der genannten und einer weiteren Arbeit[1]) den Existenzbeweis für die stationäre Lösung eines verwandten Problems durchgeführt und sein Ansatz dürfte wohl auch zu dem hier geforderten Existenzbeweis führen. Die im Folgenden untersuchte Bewegung stellt aber nur eine Näherungsbewegung in dem Sinne dar, daß in ihren Bedingungsgleichungen die vernachlässigten Glieder sicher klein sind neben den berücksichtigten.

§ 1. Die allgemeinen hydrodynamischen Differentialbeziehungen und die Stokessche Strömung.

Es bezeichne u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten einer Strömung, an der Stelle x, y, z nach den Achsen der x, y, z gemessen. σ sei die Dichte, μ die Viskositätskonstante, p der Druck der Flüssigkeit. Dann lauten die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für inkompressible stationäre Strömung:

$$(1)\qquad \begin{cases} \sigma\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}-\mu\Delta u=0\\ \sigma\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}-\mu\Delta v=0\\ \sigma\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial z}-\mu\Delta w=0 \end{cases}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

wo

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\Delta$$

gesetzt ist.

Dazu treten noch die Randbedingungen, die für den zu untersuchenden Fall einer ruhenden Kugel in Parallelströmung so lauten: An der Kugeloberfläche soll $u=v=w=0$ sein, während im Unendlichen in jeder Richtung $u=U,\ v=0,\ w=0$ verlangt wird.

Die Inkompressibilitätsbedingung (2) pflegt man in allen Fällen, in denen eine ausgezeichnete Richtung, hier die x-Richtung, vorhanden ist, in die keine Wirbelkomponente der Strömung fällt, identisch zu erfüllen durch den Ansatz:

$$(3)\qquad u=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};\quad v=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y};\quad w=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}.$$

Wenn die Strömung außerdem Achsensymmetrie um die X-Achse hat, ferner angenommen wird, daß die Stromlinien überall in den durch die

1) Über die Stokessche Formel . . ., II; Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 7, Nr. 1 (1911).